Europ. J. Combinatorics (1994) **15**, 309–315

La Fonction Gamma Considérée comme la Somme de Nombres Eulériens Généralisés

CHANGGUI ZHANG

Le but de cet article est d'étendre le domaine de validité de la formule de Worpitzky sur les nombres Eulérians au cas des nombres complexes de partie réelle positive.

The purpose of this paper is to extend the validity of the Worpitzky formula on Eulerian numbers to the case of complex numbers with positive real parts.

Considérons la série numérique de terme général $G_k(x)$, dépendant d'une variable complexe x, et définie par $G_0(x) = 0$ et

$$G_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} (k-j)^{x-1}(-1)^j \binom{x}{j} \qquad (k \geqslant 1), \tag{1}$$

avec les notations usuelles: $(k-j)^{x-1} = e^{(x-1)\log(k-j)}$ et

$$\binom{x}{j} = \begin{cases} 1 & \text{si } j = 0 \\ \dfrac{x \cdots (x-j+1)}{j!} & \text{si } j \geq 1. \end{cases}$$

Lorsque $x = n + 1$, avec $n \in \mathbb{N}$, $G_k(n+1)$ est égal au nombre eulérian $A(k, n)$ dont on rappellera ci-dessous la liaison avec la combinatoire du groupe de permutation S_n. On en déduira facilement que la somme de la série est égale au nombre $|S_n|$:

$$\sum_{k=0}^{\infty} G_k(n+1) = n!, \tag{2}$$

la sommation étant finie car $G_k(n+1)$ s'annule pour $k \geqslant n+1$. La formule (1) est traditionnellement appelée *formule de Worpitzky* (cf. [1, 2]).

Soit $x \in \mathbb{C}$. On appellera $G_k(x)$ *nombre eulérien généralisé*. Le but de ce papier est d'étendre le domaine de validité de la formule (2). En appliquant un théorème taubérien de Littlewood (cf. [5, 7.66, p. 233]) à la fonction génératrice correspondant à la série relative à (1), on obtiendra:

THÉORÈME. Pour tout $x \in \mathbb{C}^+ = \{x \in \mathbb{C}: \Re x > 0\}$ *on a*

$$\sum_{k=0}^{\infty} G_k(x) = \Gamma(x).$$

La formule (3) est une généralisation naturelle de (2). Dans la suite on commence par illustrer une preuve combinatoire de (2). La version générale (3) en résultera par

0195-6698/94/030309 + 09 $08.00/0

deux lemmes à l'aide du théorème de Littlewood. Il est à noter que la généralisation (3), conjecturée récemment par M. Guoniu Han,† a l'air tout à fait simple et naturelle, et semble cependant *inconnue* dans la littérature.

(*i*) *Cas combinatoire*: $x = n+1$. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et S_n le groupe de permutation de $\{1, \ldots, n\}$. Par définition, une permutation $\sigma \in S_n$ présente une *montée* en $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ si $\sigma(i) < \sigma(i+1)$. En notant $a(k; n)$ le nombre des permutations de $\{1, \ldots, n\}$ à k montées, il est évident que les $a(k; n)$ s'annulent pour $k \geqslant n$ et que la somme $a(0, n) + \cdots + a(n-1, n)$ est égale au nombre $|S_n| = n!$. Rappelons que les *nombres eulériens* $A(k; n)$ sont définis par le développement

$$\frac{1-z}{e^{t(z-1)} - z} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{1 \leqslant k \leqslant n} A(k; n) \frac{t^n}{n!} z^{k-1}. \tag{4}$$

On a (pour la démonstration, voir [1, pp. 82–87]):

THÉORÈME COMBINATOIRE. *$A(k; n)$ désignant le nombre eulérien, on a*:

$$a(k-1; n) = A(k; n) = \sum_{j=0}^{k-1} (k-j)^n (-1)^j \binom{n+1}{j}.$$

Autrement dit, on a:

$$a(k-1; n) = A(k; n) = G_k(n+1).$$

Il en résulte immédiatement que $G_k(n+1) = 0$, pour $k \geqslant n+1$, ainsi que (2).

(*ii*) *Lemme A*. Notant $G(x, z)$ la fonction génératrice de $G_k(x)$:

$$G(x, z) = \sum_{k=0}^{\infty} G_k(x) z^k,$$

on a:

LEMME A. *Pour tout $x \in \mathbb{C}^+$ fixé, $G(x, z)$ est analytique dans le disque unité $\{z \in \mathbb{C}: |z| < 1\}$ et on a*

$$\lim_{z \to 1^-} G(x, z) = \Gamma(x).$$

En effet, on a l'identité formelle

$$G(x, z) = \left(1 - \binom{x}{1} z + \binom{x}{2} z^2 + \cdots + (-1)^k \binom{x}{k} z^k + \cdots\right)$$
$$\times (z + 2^{x-1} z^2 + \cdots + k^{x-1} z^k + \cdots).$$

Ainsi $G(x, z)$ est pour tout $x \in \mathbb{C}$ le produit de deux séries convergentes dans le disque unité $\{|z| < 1\}$. En d'autres termes, $G(x, z)$ peut s'écrire, à $x \in \mathbb{C}$ fixé, comme produit de deux fonctions analytiques de z:

$$G(x, z) = (1-z)^x \Phi(x, z) \tag{6}$$

où $\Phi(x, z) = (z + 2^{x-1} z^2 + \cdots + k^{x-1} z^k + \cdots)$. Il en résulte que $G(x, z)$ est analytique

† C'est en s'intéressant aux nombres eulériens que M. G. Han a découvert la formule (3) et l'a testée avec succès sur ordinateur. Il a ensuite aimablement communiqué cette identité à l'auteur de ce papier.

dans le disque $|z|<1$ pour tout x complexe. Appliquant une formule du livre [4] (cf. p. 33) à la fonction $\Phi(x, z)$, on a la limite

$$\lim_{z\to 1}(\Phi(x, z)-\Gamma(x)(-\log z)^{-x})=\zeta(1-x),$$

dans laquelle $\zeta(s)$ désigne la valeur de fonction zêta de Riemann au point s ($\neq 1$). Pour $x\in\mathbb{C}^+$, on trouve (5):

$$\lim_{z\to 1} G(x, z)=\lim_{z\to 1}\left((1-z)^x\zeta(1-x)+\Gamma(x)\left(\frac{z-1}{\log z}\right)^x\right)=\Gamma(x), \tag{5a}$$

car $(1-z)^x\to 0$ pour $z\to 1^-$ lorsque $\Re x>0$. CQFD

(*iii*) *Lemme B*. Pour appliquer le théorème taubérien de Littlewood à la fonction $G(x; z)$, il faut contrôler la grandeur des coefficients $G_k(x)$ lorsque l'indice k augmente. On a en fait:

LEMME B. *Pour tout $x\in\mathbb{C}^+$ fixé, on a*

$$G_k(x)=O(1/k) \tag{7}$$

lorsque $k\to\infty$.

Ce lemme généralise le fait que les termes $G_k(x)$ s'annulent pour $k\geqslant x\in\mathbb{N}^*$. Dans la suite on supposera $x\in\mathbb{C}^+\backslash\mathbb{N}^*$. Par la formule

$$\binom{x}{j}=\frac{(-1)^j\Gamma(j-x)}{\Gamma(-x)\Gamma(j+1)},$$

l'expression (1) devient

$$G_k(x)=\frac{1}{\Gamma(-x)}\sum_{j=0}^{k-1}(k-j)^{x-1}\frac{\Gamma(j-x)}{\Gamma(j+1)}; \tag{1a}$$

l'estimation (7) s'obtiendra par une approximation intégrale de (1a) (à l'aide de la formule de Stirling). On considère d'abord le:

Cas particulier: $0<\Re x<1$. Posons, pour $k>1$,

$$F_k(x)=\sum_{j=0}^{k-1}k^{x-1}\frac{\Gamma(j-x)}{\Gamma(j+1)}, \qquad H_k(x)=\sum_{j=1}^{k-1}((k-j)^{x-1}-k^{x-1})\frac{\Gamma(j-x)}{\Gamma(j+1}.$$

(1a) devient

$$G_k(x)=\frac{1}{\Gamma(-x)}(F_k(x)+H_k(x)).$$

On va estimer $F_k(x)$ et $H_k(x)$ pour k très grand.

(B1). $F_k(x)=O(1/k)$ *pour* $k\to\infty$.

En effet, $F_k(x)$ est la somme des k premiers termes de la série de terme général

$k^{x-1}\Gamma(j-x)/\Gamma(j+1)$, qui est convergente, et de somme nulle car sa fonction génératrice

$$F_k(x,z) := \sum_{j=0}^{\infty} k^{x-1}\frac{\Gamma(j-x)}{\Gamma(j+1)} z^k$$

est égale à $\Gamma(-x)k^{x-1}(1-z)^x$. Appliquant la formule de Taylor (avec reste intégral) à la fonction $F_k(x,z)$ pour $z=1$, on trouve

$$F_k(x) = -\int_0^1 \frac{(1-t)^{k-1}}{\Gamma(k)} \frac{\partial^k F_k(x,tz)}{\partial t^k}\bigg|_{z=1} dt = -k^{x-1}\frac{\Gamma(k-x)}{x\Gamma(k)},$$

qui implique l'assertion (B1), d'après la formule de Stirling (cf. [5, p. 58]).

(B2). *$H_k(x) = O(1/k)$ pour $k \to \infty$.*

Pour établir cette estimation on définit pour chaque entier $k>0$, deux fonctions en escalier, $\phi_{k,x}(t)$ et $\varphi_{k,x}(t)$, continues à gauche sur l'intervalle $[0,1]$ par

$$\begin{aligned}\phi_{k,x}(t) &= \frac{\Gamma(j-x)j^{x+1}}{\Gamma(j+1)} - 1 \qquad (t \in [(j-1)/k, j/k[, j = 1, 2, \ldots, k-1)\\ &= 0 \qquad (t \in [(k-1)/k, 1])\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}\varphi_{k,x}(t) &= (1-j/k)^{x-1} - 1 \qquad (t \in [(j-1)/k, j/k[, j = 1, 2, \ldots, k-1)\\ &= 0 \qquad (t \in [(k-1)/k, 1]).\end{aligned}$$

Comme

$$H_k(x) = \sum_{j=1}^{k-1} k^x((1-j/k)^{x-1} - 1)\frac{\Gamma(j-x)}{\Gamma(j+1)}\frac{1}{k},$$

on a (en posant $\tau_k(t) = j/k$ ou 1 pour $t \in [(j-1)/k, j/k[)$ ou $t \in [(k-1)/k, 1]$ respectivement)

$$H_k(x) = k^{-1}\int_0^1 \tau_k^{-x-1}(t)\varphi_{k,x}(t)(1+\phi_{k,x}(t))\,dt. \tag{8}$$

Pour x fixé, d'après la formule de Stirling, lorsque k tend vers l'infini, la suite de fonctions $\phi_{k,x}(t)$ reste uniformément bornée sur l'intervalle $[0,1]$ et converge simplement vers zéro pour $t \in [0,1]$. En outre, on a $|\tau_k^{-x-1}(t)| \leqslant |t^{-x-1}|$ dans l'intervalle $t \in [0,1]$ et il existe deux constantes, dépendant de x, C_x et D_x, telles que

$$|\varphi_{k,x}(t)| < C_x\,|t| \quad (t \in [0, 1/2]), \qquad |\varphi_{k,x}(t)| < D_x\,|(1-t)^{x-1}| \quad (t \in [1/2, 1]).$$

Appliquant maintenant le théorème de convergence dominée de Lebesgue à la suite $\tau_k^{-x-1}(t)\varphi_{k,x}(t)(1+\phi_{k,x}(t))$, qui converge vers $t^{-x-1}((1-t)^{x-1}-1)$, on obtient l'estimation (B2), et par conséquent le Lemme B dans le cas envisagé.

Cas général: $x \in \mathbb{C}^+ \backslash \mathbb{N}^*$. Soit $x \in \mathbb{C}^+\backslash\mathbb{N}^*$ fixé. Notons sa partie entière réelle $[\Re x]$ par n. Le cas $n=0$ a déjà été étudié. On suppose $n \geqslant 1$ et on va expliquer comment construire dans le cas général une approximation intégrale analogue à (8). Vu que la fonction limite $t^{-x-1}((1-t)^{x-1}-1)$ de la suite des fonctions à intégrer dans (8) n'est intégrable dans l'intervalle $t \in]0,1[$ que si $0 < \Re x < 1$, on est conduit à la remplacer par

$$t^{-x-1}((1-t)^{x-1} - 1 + (x-1)t - \cdots + (-1)^{n+1}(x-1)\cdots(x-n)t^n).$$

Soient en effet $0 \leqslant j < k$. En développant $(1-j/k)^{x-1}$ suivant les puissances croissantes de j/k on note $P(k, j, x)$ la somme des $(n+1)$ premiers termes et $R(k, j, x)$ le reste comme suit:

$$P(k, j, x) = \left(1 - (x-1)\frac{j}{k} + \cdots + (-1)^n (x-1)(x-2)\cdots(x-n)\left(\frac{j}{k}\right)^n\right),$$

$$R(k, j, x) = (1 - j/k)^{x-1} - P(k, j, x). \tag{9}$$

L'expression (1a) peut s'écrire alors

$$G_k(x) = \frac{P_k(x) + R_k(x)}{\Gamma(-x)},$$

où l'on a posé

$$P_k(x) = \sum_{j=0}^{k-1} k^{x-1} P(k, j, x) \frac{\Gamma(j-x)}{\Gamma(j+1)}, \qquad R_k(x) = \sum_{j=1}^{k-1} k^{x-1} R(k, j, x) \frac{\Gamma(j-x)}{\Gamma(j+1)}. \tag{10}$$

On dira que $P_k(x)$ joue un rôle analogue à $F_k(x)$ et $R_k(x)$ à $H_k(x)$. En effet, le polynôme $P(k, j, x)$ de j/k peut s'écrire sous la forme

$$P(k, j, x) = \alpha_0 + \alpha_1 (j-x)/k + \cdots + \alpha_n (j-x)(j-x+1)\cdots(j-x+n-1)/k^n,$$

dans laquelle les coefficients α_l $(0 \leqslant l \leqslant n)$, dépendant de x et k, tendent respectivement vers 1 $(l=0)$ ou $(-1)^l (x-1)\cdots(x-l)$ $(l>0)$ pour $k \to \infty$. Par la formule

$$(j-x)\cdots(j-x+l)\Gamma(j-x) = \Gamma(j-x+l+1) \qquad (l \in \mathbb{N}),$$

on trouve que $P_k(x)$ est une somme des $(n+1)$ termes qui sont tous de même type que $F_k(x)$ et donc d'ordre ne dépassant pas k^{-1} d'après (B1).

Il reste alors à estimer $R_k(x)$. Ecrivons dans (10) la somme $R_k(x)$ en deux parties

$$\sum_{j=1}^{n} k^{x-1} R(k, j, x) \frac{\Gamma(j-x)}{\Gamma(j+1)} + \sum_{j=n+1}^{k-1} k^{x-1} R(k, j, x) \frac{\Gamma(j-x)}{\Gamma(j+1)}. \tag{10a}$$

Pour j fixé et $k \to \infty$, on a

$$R(k, j, x) \sim (-1)^{n+1} (x-1)\cdots(x-n)(x-n-1)(j/k)^{n+1}$$

d'après (9), et donc

$$k^{x-1} R(k, j, x) \frac{\Gamma(j-x)}{\Gamma(j+1)} = O(k^{x-n-2});$$

il en résulte que la somme finie $\sum_{j=1}^{n}$ dans (10a) est du même ordre que k^{x-n-2} pour $k \to \infty$. Comme on l'a fait pour $H_k(x)$ dans le cas particulier, on peut regarder la seconde partie de (10a) comme $1/k$ fois l'intégrale d'une fonction en escalier, $\gamma_{k,x}(t)$, continue à gauche sur l'intervalle $[0, 1]$; il est facile de voir que, d'après le théorème de Lebesgue, on a

$$\int_0^1 \gamma_{k,x}(t)\,dt \to \int_0^1 \{(1-t)^{x-1} - 1 + (x-1)t + \cdots + (-1)^{n+1}(x-1)\cdots(x-n)t^n\} t^{-x-1}\,dt \qquad (k \to \infty),$$

et par conséquent,

$$R_k(x) = O(k^{x-n-2}) + O(1/k) = O(1/k).$$

En conclusion, on a obtenu l'estimation voulue dans le Lemme B pour tout $x \in \mathbb{C}^+ \backslash \mathbb{N}^*$ et, par suite, pour tout $x \in \mathbb{C}^+$. CQFD

(*iv*) *Fin de la démonstration du théorème: remarques.* La formule (3) s'obtient immédiatement par les Lemmes A, B et le théorème de Littlewood. On fait les trois remarques suivantes.

REMARQUE A. $\mathbb{C}^+$ est le domaine de convergence maximal de la série étudiée.

Pour le voir il suffit d'appliquer à la fonction $G(x, z)$ un théorème classique d'Abel, selon lequel l'existence de la limite (finie) de $G(x, z)$ pour $z \to 1^-$ est une condition nécessaire pour la convergence de la série $G(x)$; or, cette limite (finie) existe si et seulement si $\Re x > 0$, d'après (5a).

REMARQUE B. Dans le Lemme B, l'estimation (7) peut être améliorée dans le domaine réel. Si $x \in \mathbb{R}^+$, il existe alors un $A'_x > 0$ tel que

$$|G_k(x)| < \frac{A'_x}{k^{-x+[x]-1}}$$

pour tout $k > 0$.

On peut en effet montrer pour $x \in]0, 1]$, par exemple, qu'on a $F_k(x) \sim -1/(xk)$ et $H_k \sim 1/(xk)$ si $k \to \infty$. Cette précision est utile pour le calcul de la valeur numérique $\Gamma(x)$ pour l'ordinateur à l'aide de (3). En outre, il serait possible d'étudier le comportement asymptotique des termes $G_k(x)$, comme L. Lesieur et J.-L. Nicolas [3] l'ont récemment fait dans le cas des nombres entiers.

REMARQUE C. On peut formellement déduire de la définition (1), l'équation fonctionnelle $G(x + 1) = xG(x)$.

On a en effet une formule de récurrence en x (cf. [1, p. 83]):

$$G_k(x + 1) = kG_k(x) - (k - 1)G_{k-1}(x) + xG_k(x) \qquad (k > 1).$$

(*v*) *Sur une équation fonctionnelle.* Dans la démonstration du Lemme A, la fonction génératrice $G(x, z)$ est considérée (cf. (6)) comme produit de deux fonctions analytiques de z, $(1 - z)^x$ et $\Phi(x, z)$; ou, par la définition (4) et la formule de Cauchy, il vient

$$G(n + 1, z) \equiv z \sum_{k=1}^{n} A(k; n) z^{k-1} = \frac{n!\, z}{2\pi i} \int_{|t|=r<1} \frac{1 - z}{e^{t(z-1)} - z} t^{-n-1}\, dt.$$

D'après la formule

$$n^{x-1} = \frac{\Gamma(x)}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0^+)} e^{nt} t^{-x}\, dt,$$

on a†

$$\Phi(x, z) = \frac{\Gamma(x) z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{(0^+)} \frac{t^{-x}}{e^{-t} - z}\, dt; \tag{11}$$

† Les variables x, z et t satisfont les mêmes conditions que celles dans l'intégrale relative à $G(x, z)$.

il en résulte que l'on a, pour $|z| \leq r < 1$ ($r \in [0, 1[$ fixé) et $\Re x > 0$:

$$G(x, z) = \frac{\Gamma(x) z}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{(0^+)} \frac{1 - z}{\mathrm{e}^{t(z-1)} - z} t^{-x}\, dt, \qquad (|\arg t| < \pi)$$

pourvu que le contour intégral (qui dépend de r) soit convenablement choisi.

La fonction $\Phi(x, z)$ satisfait à l'équation différence-différentielle

$$z \frac{\partial \Phi(x, z)}{\partial z} = \Phi(x + 1, z), \tag{12}$$

et sa représentation intégrale (11) donne, pour chaque $x \in \mathbb{C}$ fixé, un prolongement analytique dans le domaine $\{z \in \mathbb{C} \backslash [1, +\infty]\}$. Le point $z = 1$ étant un point singulier pour la fonction analytique $\Phi(x, z)$, on est amené à la question suivante: Peut-t-on prévoir les points singuliers existant pour les solutions de (12)? Nous souhaiterions revenir sur ce sujet ultérieurement (cf. [6]).

NOTE. Après la première rédaction du papier l'auteur a appris que la formule (3) avait été établie dans [7] (voir aussi [8], [9]) pour tout x réel positif. En outre, une version q-analogue a été récemment donnée dans [10].

References

1. L. Comtet, *Analyse Combinatoire (Tome Second)*, Presses Universitaires de France, Paris, 1970.
2. D. Foata et M.-P. Schützenberger, *Théorie Géométrique des Polynômes Eulériens*, Lecture Notes in Mathematics, no. 138, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
3. L. Lesieur et J.-L. Nicolas, On the Eulerian numbers $M_n = \max_{1 \leq k \leq n} A(n, k)$, *Europ. J. Combin.*, **13** (1992), 379–399.
4. W. Magnus, F. Oberhettinger et R. P. Soni, *Formulas and Theorems for the Special Functions of Mathematical Physics* (Third Edition), Springer, Berlin, 1966.
5. E. C. Titchmarsh, *The Theory of Functions* (second edition), Oxford University Press, Oxford, 1939.
6. C. Truesdell, *An Essay toward a Unified Theory of Special Functions*, Princeton University Press, Princeton, 1948.
7. P. L. Butzer et M. Hauss, Eulerian numbers with fractorial order parameters, *Aeq. Math.* (à paraitre, 1993).
8. P. L. Butzer et R. J. Nessel, *Fourier Analysis and Approximation Vol. I, One-dimensional Theory*, Birkhäuser, Basel/Academic Press, New York, 1971.
9. U. Westphal, An approach to the fractional powers of operators via fractional differences, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **29** (1974), 557–576.
10. J. Zeng et C. Zhang, q-Analog of Newton's series, Stirling functions and eulerian functions, preprint, 1993.

Received 2 March 1993 and accepted 27 July 1993

CHANGGUI ZHANG
Département de Mathématiques,
Université Louis-Pasteur,
7, rue René Descartes,
67084 Strasbourg Cedex, France