JOURNAL OF COMBINATORIAL THEORY (A) **12**, 31–71 (1972)

Sur les Suites s-additives

RAYMOND QUENEAU

9, rue Casimir-Pinel, 92 – Neuilly sur Seine, France

Communicated by Gian-Carlo Rota

Received June 23, 1969

0. GÉNÉRALITÉS

0.1 DÉFINITION. Nous appellerons suite s-additive une suite S de nombres entiers positifs >0 strictement croissants:

$$u_1, u_2, \ldots, u_n \ldots$$

telle que:

(a) les $2s$ premiers termes sont donnés et forment la *base* de cette suite;

(b) pour $n > 2s$, u_n est le plus petit nombre entier plus grand que u_{n-1} et tel que l'équation

$$u_n = u_i + u_j \qquad (u_i, u_j \in S, u_i \neq u_j, i \neq j)$$

ait exactement s solutions. (Dans tout ce qui suit $s \geqslant 1$; pour $s = 0$, c'est-à-dire les suites non-additives, voir 4.)

0.2 Il est évident que la condition (a) est nécessaire pour que le terme u_{2s+1} existe.

Il faut de plus que l'on ait:

$$\begin{aligned} & u_1 , u_2 \cdots u_s , u_{s+1} , u_{s+2} \\ & \quad = u_s + u_{s+1} - u_{s-1} , u_{s+3} \\ & \quad = u_s + u_{s+1} - u_{s-2} \cdots u_{2s} \\ & \quad = u_{s+u_{s+1}} - u_i . \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} u_{2s+1} &= u_s + u_{s+1} = u_{s-1} + u_{s+2} \\ &= u_{s-2} + u_{s+3} \cdots = u_{2s} + u_1 . \end{aligned}$$

0.3 Pour que la suite continue au-delà de u_{2s+1}, il faut que l'une des $s + 1$ conditions suivantes soient remplies:

$$\begin{aligned} u_{2s+2} &= u_{2s+1} + u_1 = u_{2s} + u_2 \\ &= u_{2s-1} + u_3 = \cdots = u_{s-1} + u_{s+3} = u_s + u_{s+2} , \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} u_{2s+2} &= u_{2s+1} + u_1 = u_{2s} + u_2 \\ &= u_{2s-1} + u_3 = \cdots = u_{s-1} + u_{s+3} = u_{s+1} + u_{s+2} , \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} u_{2s+2} &= u_{2s+1} + u_1 = u_{2s} + u_2 \\ &= u_{2s-1} + u_3 = \cdots = u_s + u_{s+3} = u_{s+1} + u_{s+1} , \end{aligned}$$

. . . .

ou:

$$\begin{aligned} u_{2s+2} &= u_{2s+1} + u_1 = u_{2s} + u_3 \\ &= u_{2s-1} + u_4 \cdots = u_s + u_{s+3} = u_{s+1} + u_{s+2} , \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned} u_{2s+2} &= u_{2s+1} + u_2 = u_{2s} + u_3 \\ &= u_{2s-1} + u_4 \cdots = u_s + u_{s+3} = u_{s+1} + u_{s+2} . \end{aligned}$$

On obtient ainsi $s + 1$ types de bases, composées des s premiers multiples d'un nombre donné u et des s premiers termes de la progression arithmétique, v étant un autre nombre donné: $v, v + u \cdots v + (s - 1)u$.

0.4. Ces $s+1$ types sont donnés par le tableau suivant:

$$\mathrm{A} - u, 2u, 3u, 4u, \cdots (s-1)u, su, v, v+u \cdots v+(s-2)u, v+(s-1)u,$$

$$\mathrm{B}_1 - u, 2u, 3u, 4u, \cdots (s-1)u, v, su, v+u \cdots v+(s-2)u, v+(s-1)u,$$

$$\mathrm{B}_2 - u, 2u, \cdots v, (s-1)u, v+u, su \cdots v+(s-2)u, v+(s-1)u,$$

. . . .

$$\mathrm{B}_{s-1}, u, v, 2u, v+u, 3u, v+2u \cdots su, v+(s-1)u,$$

$$\mathrm{C} - v, u, v+u, 2u, v+2u, 3u \cdots v+(s-1)u, su.$$

0.5. Toute suite est donc donnée par les trois nombres s, u, v

$$(s \geqslant 0; u, v \geqslant 1; v \neq u, 2u, \ldots, su).$$

0.6. On voit que si u et v ont un facteur commun, tous les nombres de la suite sont des multiples de ce facteur. On ne considérera donc que des suites telles que $u=1$, $v=1$ ou $(u, v)=1$.

0.7. Pour $s=1$, il n'existe que des suites de type A (ou C: identiques) (autrement dit, u et v sont quelconques)

pour $u=1$, il n'existe que des suites de type A,

pour $u=2$, il n'existe que des suites de type A et une seule de type B.

0.8. Nous appellerons suite *naturelle* s-additive, celle pour laquelle $v=(s+1)u$. C'est donc la suite $(s, 1, s+1)$ identique à $(s, 2, 1)$.

Pour $u \geqslant 3$ et $s > 1$, on démontre le théorème:

0.9. Théorème. *Pour $u \geqslant 3$ et $s > 1$, toute suite s-additive est identique à la progression $v+nu$, avec un terme supplémentaire $u_i = 2v+(2s-1)u$, d'indice $i = 3s+k+1$ (k étant donné par $ku < v < (k+1)u$).*

Comme il est facile de se rendre compte, ce terme est représenté s fois; d'autre part, il ne fournit aucune contribution susceptible de perturber la suite. En effet ces contributions sont de la forme $2v+pu$ ou $3v+qu$ et ne peuvent etre égales à $v+nu$, sans que v soit multiple de u ou u égal 2; de plus, le nombre de chacune de ces contributions plus grandes que $2v+(2s-1)u$ est supérieur à s.

Exemple.

(3, 3, 10) : [3, 6, 9, 10, 13, 16], 19, 22, 25, 28, 31, 34, 35(!), 37, 40 ⋯

(3, 3, 11) : [3, 6, 9, 11, 14, 17], 20, 23, 26, 29, 32, 35, 37(!), 38, 41 ⋯

Ne sont donc "intéressantes" pour $s > 1$ que les suites pour lesquelles $u = 1$ et $u = 2$.

1. *Cas* $u = 1$

1.0. *Généralités*

Nous étudierons à part les suites naturelles $(s, 1, s + 1)$, mais le théorème suivant s'y applique également.

1.0.1. THÉORÈME. *Une base normale étant donnée* $(1, 2, 3 \cdots, s, v, v + 1 \cdots v + s - 1)$, *les* $3s/2 + v + 1$ *premiers termes (pour* s *pair),* $[(3s + 1)/2] + v + 1$ *(pour* s *impair) de la suite sont:*

$1(1)s - v(1)\, 2v, 2v + 2(2)\, 2v + s$ *(pour* s *pair;* $2v + s + 1$, *pour* s *impair) d'indices:* $1(1)s, s + 1(1)\, s + v + 1, s + v + 2(2)(3s/2) + v + 1$ *(pour* s *pair;* $[(3s + 1)/2] + v + 1$, *pour* s *impair).*

DÉMONSTRATION. La base étant donné, on a vu que $v + s$ existe. On a en effet s fois:

$$v + s = (v + s - 1) + 1 = (v + s - 2) + 2 \cdots = (v + s - s) + s.$$

On a de même s fois:

$$v + s + 1 = (v + s) + 1 = (v + s - 1) + 2 \cdots = (v + s - s + 1) + s.$$

De même pour $v + s + 2$ et ainsi de suite jusqu'à $v + s + n$ qui sera représenté $s + 1$ fois et n'appartiendra donc pas à la suite.

Table I

	$1 \quad 2 \cdots s \quad v \quad v+1 \quad v+2 \cdots v+s-1 \quad v+s \quad u+s+1 \cdots\cdots 2v$
(A)	$3 \cdots s+1 \quad v+1 \quad v+2 \quad v+3 \cdots v+s \quad v+s+1 \quad v+s+2 \cdots\cdots 2v+1$
	$v+s \quad v+s+1 \quad v+s+2 \cdots v+2s \quad v+2s+1 \cdots\cdots 2v+s$
(B)	$2v+1 \quad 2v+2 \cdots\cdots 2v+s-1 \quad 2v+s+1 \cdots\cdots 3v$
	$2v+3$
	$4v-1$

On voit que $2v + 1$ est représenté s fois dans la partie (A)

$$2v + 1 = (2v - 1) + 2 = \cdots = (2v - s + 1) + s$$

et une fois dans la partie (B). Donc $2v + 1$ n'appartient pas à la suite.

Par contre $2v+2$ est représenté $(s-1)$ fois dans (A):

$$2v+2=(2v)+2=(2v-1)+3=\cdots=(2v-s+2)+s$$

et une fois dans (B)

$2v+2$ appartient donc à la suite.

Comme dans (B)

$$\begin{array}{ll} 2v+1 & 2v+2 \text{ sont représentés 1 fois,} \\ 2v+3 & 2v+4 \text{ sont représentés 2 fois,} \\ 2v+5 & 2v+5 \text{ sont représentés 3 fois,} \\ \cdots & \cdots \end{array}$$

et que dans (A)

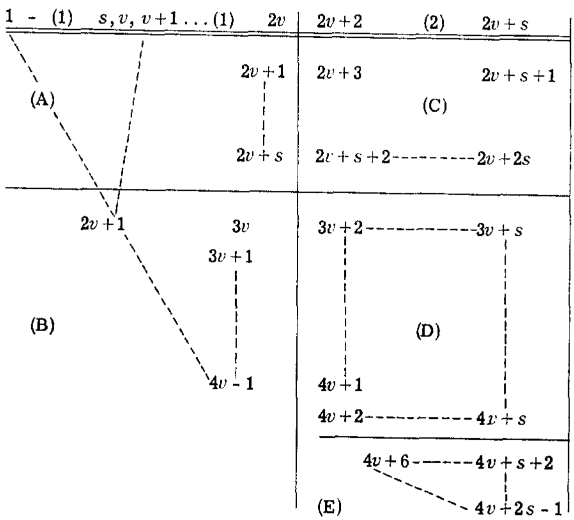
$$\begin{array}{l} 2v+1 \text{ est représenté } s \text{ fois,} \\ 2v+2 \text{ est représenté } s-1 \text{ fois,} \\ 2v+3 \text{ est représenté } s-2 \text{ fois,} \\ \cdots \\ 2v+s \text{ est représenté 1 fois,} \end{array}$$

on voit que seuls les nombres pairs $2v+2$, $2v+4$ apparaîtront dans la suite demandée jusqu'à $2v+s$ (pour s pair) [$2v+s+1$ pour s impair] puisque dans B $2v+s$ sera représenté $s/2$ fois [$(s+1)/2$ pour s impair], dans A une fois et dans les contributions (C) apportées par les nouveaux termes $(s-2)/2$ fois ($(s-1)/2$ pour s impair). Mais $2v+s+2$ sera représenté $s/2+1$ fois ($(s+3)/2$ resp.) dans B, 0 fois dans A et $s/2$ fois ($(s+1)/2$ resp.) par les contributions (C) des nouveaux termes. Quant à $2v+s+1$, il est représenté $s/2+1$ fois dans B et $s/2$ fois par (C) ($(s+3)/2$ et $(s+1)/2$ resp.).

Nous avons donc maintenant le tableau II (pour s pair).

1.0.2. Théorème. Pour s pair $\geqslant 2$, le terme d'indice $(3s/2)+v+2$ est égal à $3v+1$ pour $2s+2>v\geqslant s+2$ et à $4v-s$ pour $v\geqslant 2s+2$. Pour s impair $\geqslant 3$, le terme d'indice $(3s+1)/2+v+2$ est égal à $3v+1$ pour v impair; à $3v+2$ pour v pair, $2s+2>v\geqslant s+2$; à $4v-s-1$ pour v pair $\geqslant 2s+2$.

Table II



1.0.2.1. Démonstration pour s pair. On a dans (B) le nombre de représentations suivantes:

	$2v+s+1$	$2v+s+2$	$2v+s+3$	$2v+s+4$	$2v+s+5$	$2v+s+6$
$v-s=2$	$\frac{s}{2}+1$	$\frac{s}{2}+1$	$\frac{s}{2}+1$			
$v-s=3$	$\frac{s}{2}+1$	$\frac{s}{2}+1$	$\frac{s}{2}+2$	$\frac{s}{2}+1$		
$v-s=4$	$\frac{s}{2}+1$	$\frac{s}{2}+1$	$\frac{s}{2}+2$	$\frac{s}{2}+2$	$\frac{s}{2}+2$	
$v-s=5$	$\frac{s}{2}+1$	$\frac{s}{2}+1$	$\frac{s}{2}+2$	$\frac{s}{2}+2$	$\frac{s}{2}+3$	$\frac{s}{2}+2$

et dans (C)

$v-s=2$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}-1$			
$v-s=3$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}-1$	$\frac{s}{2}-1$		
$v-s=4$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}-1$	$\frac{s}{2}-1$	$\frac{s}{2}-2$	
$v-s=5$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}-1$	$\frac{s}{2}-1$	$\frac{s}{2}-2$	$\frac{s}{2}-2$

Ou encore en sous-entendent $[(s/2) +]$ devant chaque quantité figurant dans le tableau ci-dessous:

B		C
1 1 1 · · · · · · · · · · · ·	0	$0 - 1$
1 1 2 1 · · · · · · · · · · ·	0	$0 - 1 - 1$
1 1 2 2 2 · · · · · · · · · ·	0	$0 - 1 - 1 - 2$
1 1 2 2 2 3 2 · · · · · · ·	0	$0 - 1 - 1 - 2 - 2$
1 1 2 2 3 3 3 · · · · · · ·	0	$0 - 1 - 1 - 2 - 2 - 3$
1 1 2 2 3 3 4 3 · · · · ·	0	$0 - 1 - 1 - 2 - 2 - 3 - 3$
1 1 2 2 3 3 4 4 4 · · · ·	0	$0 - 1 - 1 - 2 - 2 - 3 - 3 - 4$
1 1 2 2 3 3 4 4 5 4 · · ·	0	$0 - 1 - 1 - 2 - 2 - 3 - 3 - 4 - 4$

En additionnant les deux tableaux on obtient $((s +)$ sous entendu devant chaque terme):

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 1 & 0 & & & \\ 1 & 1 & 1 & 0 & & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

On voit donc qu'on a s pour $2v + s + n$ lorsque $v - s = n - 1$, c'est-à-dire lorsque $2v + s + n = 3v + 1$.

Lorsque $v = 2s$ on a une contribution de $(v/2) = s$ dans (B) et de 1 dans (C) pour $3v$; et de $(v/2) = s$ (B) et 0 dans (C) pour $3v + 1$.

Lorsque $v = 2s + 1$ on a une contribution de $(v + 1)/2 = s + 1$ dans (C) et 0 dans (C) pour $3v$; et de $[(v + 1)/2] - 1 = s$ dans (B) et 0 dans (C) pour $3v + 1$.

A partir de $3v + 2$, la contribution de (C) est nulle, mais il y a celle de (D). On a:

	(B)	(D)	(B + D)
$3v + 2$	s	1	$s + 1$
$3v + 3$	s	1	$s + 1$
$3v + 4$	$s - 1$	2	$s + 1$
$3v + 5$	$s - 1$	2	$s + 1$
. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .	. . . . . .
$4v - 5$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$	s
	$\vdots$	$\vdots$	
$4v - 2$	1	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2} + 1$
$4v - 1$	1	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2} + 1$

Le terme suivant $2v + s$ est donc alors $4v - s$.

1.0.2.2. Démonstration pour s impair. En sous-entendant $[(s/2) + \ ]$ dans (B) et (C) et en tenant compte de (D) on a le tableau suivant pour $2v + s + 2$, $2v + s + 3 \cdots$

	(B)	(C)	(D)
$v - s = 2$	$\frac{3}{2}$ 1	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2}$	0 0
3	$\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$	0 0 0 1
4	$\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2}$	0 0 0 0
5	$\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{3}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}$	0 0 0 0 0 1
6	$\frac{3}{2}\ \frac{3}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{5}{2}\ \frac{7}{2}\ \frac{5}{2}$	$\frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} - \frac{3}{2} - \frac{3}{2} - \frac{5}{2}$	0 0 0 0 0 0

Ce qui donne donc comme terme d'indice $(3s + 1)/2 + v + 2$ pour v impair: $3v + 1$ et pour v pair: $3v + 2$.

Pour $v = 3s$ on a:

		$3v = 6s$	$3v + 1$	$3v + 2$
Contribution de	(B)	s	s	$s - 1$
	(C)	1	1	0
	(D)	0	0	$\frac{1}{s}$

Pour $v = 2s + 1$:

	$3v = 6s$	$3v + 1$
(B)	$s + 1$	s
(C)	1	0
(D)	0	$\frac{0}{s}$

Pour $v = 2s + 2$:

	$3v = 6s$	$3v + 1$	$3v + 2$	$3v + 3 \cdots$	$4v - s - 1$
(B)	$s + 1$	$s + 1$	s	s	$\frac{s - 1}{2}$
(D)	0	0	1	1	$\frac{\frac{s + 1}{2}}{s}$

(C) n'apportant plus aucune contribution.

1.1. *Etude détaillée des suites* $(s, 1, v), v > s + 1$.

1.1.1. SUITES 1-ADDITIVES. Elles se poursuivent indéfiniment puisqu'il y a toujours au moins un terme représenté une seule fois à savoir $u_n + u_{n-2}$. Quoique nous réservions pour 1.2 l'étude des suites naturelles, signalons ici que pour $v = 2$, nous avons la suite signalée et étudiée par S. M. Ulam (cf. C. S. Ogilvy, *Mathématiques de demain*, trad. fr., Paris, 1966, p. 75). Elle donne l'impression de grande "irrégularité."

1, 2, 3, 4, 6, 8, 11, 13, 16, 18, 26, 28, 36, 38, 47, 48, 53, 57, 62, 69, 72, 77, 82, 87, 97, 99, 102, 106, 114, 126, 131, 138, 145, 148, 155, 175, 177, 180, 182 ···

1.1.1.2. Pour $v = 3$, les premiers termes sont:

1, 3, 4, 5, 6, 8, 10, 12, 17, 21, 23, 28, 32, 34, 39, 43, 48, 52, 54, 59, 63, 68, 72, 74, 79, 83, 98 (!), 99, 101, 110, 114 ···

Aprés 83 la suite est perturbée car pour 88, $s = 2$ $(54 + 34 = 83 + 5)$. Ensuite 92 $(=88 + 4)$ ne peut plus apparaître, etc.

1.1.1.3. Pour $v \geqslant 4$, la suite est alors:

$1, v$ (1) $2v, 2v + 2, 4v, 4v + 2$ (1) $5v - 1, 5v + 1, 7v +$ (3) (1) $8v + 1, 10v + 2, 11v + 2, 13v + 4$ (1) $14v + 1, 16v + 2, 17v + 2, 19v + 3, 20v + 2, 22v + 3, 23v + 4, 25v + 4, 25v + 5, 26v + 3, 28v + 4, 31v + 5$ (1) $32v + 3, 34v + 5, 38v + 6, 40v + 5, 40v + 8, 43v + 7, 43v + 8, 44v + 6, 46v + 7, 49v + 8$ (1) $49v + 10, 51v + 12$ ···

1.1.2. SUITES 2-ADDITIVES. Les petites valeurs de v donnent des suites qui semblent distribuées au hasard.

Plus v augmente, plus la suite tend vers:

$1, 2, v(1), 2v, 2v + 2, 4v - 2, 4v + 1, 5v, 6v - 1, 6v + 2, 6v + 4, 6v + 5, 6v + 7, 6v + 8, 6v + 10, 6v + 11$ ···

Par "tend", il faut entendre que pour v fixé, la suite a un nombre de termes k donné par la formule ci-dessus, et que pour $v + 1$ la suite en a au moins k; et que plus v augmente, plus ce nombre k augmente.

On a (le premier terme différent étant en italique) pour v croissant >3.

1, 2, 4 (1) 8, 10, *13* ⋯

1, 2, 5 (1) 10, 12, *16* ⋯

1, 2, 6 (1) 12, 14, 22, 24, 25, 30, 35, 38, 40, *45* ⋯

1, 2, 7 (1) 14, 16, 26, 28, 29, 35, 41, 44, 46, 47, *52* ⋯

1, 2, 8 (1) 16, 18, 30, 32, 33, 40, 47, 50, 52, 53, *56* ⋯

1, 2, 9 (1) 18, 20, 34, 36, 37, 45, 53, 56, 58, 59, 61, *63* ⋯

1, 2, 10 (1) 20, 22, 38, 40, 41, 50, 59, 62, 64, 65, 67, 68, *73* ⋯

1, 2, 11 (1) 22, 24, 42, 44, 45, 55, 65, 68, 70, 71, 73, 74, *77* ⋯

1, 2, 12 (1) 24, 26, 46, 48, 49, 60, 71, 74, 76, 77, 79, 80, 82, *87* ⋯

1, 2, 13 (1) 26, 28, 50, 52, 53, 65, 77, 70, 82, 83, 85, 86, 88, 89, *94* ⋯

. . . .

1.1.3. Suites 3-additives. On a pour v croissant >4

1 (1) 3, 5 (1) 10, 12, 14, *16* ⋯

6 (1) 12, 14, 16, *20* ⋯

7 (1) 14, 16, 18, *22* ⋯

8 (1) 16, 18, 20, 30, 32, 34 (1) 37, *39* ⋯

9 (1) 18, 20, 22, 34, 36, 38 (1) 41, *43* ⋯

10 (1) 20, 22, 24, 38, 40, 42 (1) 45, 52, 65, 68 (1) 70, *72* ⋯

11 (1) 22, 24, 26, 42, 44, 46 (1) 49, 57, 71, 74 (1) 76, *78* ⋯

12 (1) 24, 26, 28, 46, 48, 50 (1) 53, 62, 77, 80 (1) 82, 84 (1) *86* ⋯

. . . .

Ces suites "tendent" vers:

1 (1) 3, v (1) $2v$, $2v+2$, $2v+4$, $4v-2$, $4v$, $4v+2$ (1), $v4+5$, $5v+2$, $6v+5$, $6v+8$ (1) $6v+10$, $6v+12$ (1) $6v+14$ ⋯

1.1.4. Suites 4-additives. (La suite naturelle est finie comme nous le verrons plus loin.) Les suites 4-additives sont également finies pour

$v = 8$ dernier terme 25 d'indice 16,

$v = 12$ dernier terme 69 d'indice 26,

$v = 13$ dernier terme 75 d'indice 27,

$v = 17$ dernier terme 142 d'indice 42.

Toutes les autres semblent se poursuivre indéfiniment et tendent vers:

1, 2, 3, 4, v (1) $2v$, $2v + 2$, $2v + 4$, $4v - 4$, $4v - 2$, $4v$, $4v + 1$, $5v + 1$, $5v + 6$, $5v + 11 \cdots 5v + 5n + 1 \cdots 6v - 4$, $6v - 3$, $6v - 1$, $6v + 1$, $6v + 3$, $6v + 4$, $6v + 6$, $6v + 7$, $6v + 9$, $6v + 12$, $6v + 14 \cdots$

1.1.5. Suites 5-additives. (La suite naturelle semble se poursuivre indéfiniment comme nous le verrons plus loin.) Il en est de même pour $v = 9$; elle est finie pour $v = 7$, 8, 10 et 11 et pour toute valeur $\geqslant 12$:

$v = 7$ dernier terme 48 indice 25,

$v = 8$ dernier terme 28 indice 19,

$v = 10$ dernier terme 32 indice 20,

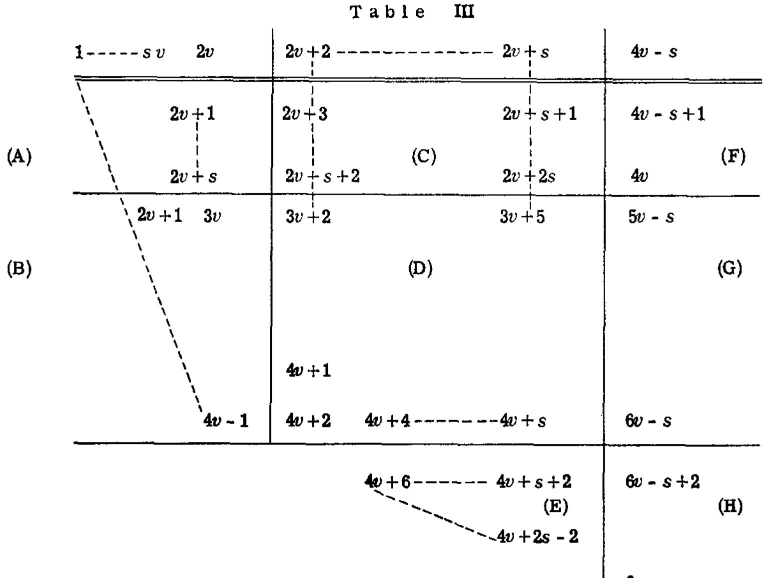
$v = 11$ dernier terme 65 indice 30,

$v \geqslant 12$ dernier terme $6v + 1$ indice $v + 19$.

1.1.6. Suites s-additives, $s \geqslant 6$ (voir Appendice II).

1.1.6.1. Conjecture. Pour tout $s \geqslant 6$ et $v \geqslant s + 2$, toutes les suites s-additives sont finies.

Table III



On peut démontrer le théorème suivant:

1.1.6.2. Théorème. (A): *Pour s pair $\geqslant 6$ et $v \geqslant 2s+2$, la suite est finie et son dernier terme est égal à* $4v+1$ (*d'indice* $2s+v+3$)

$$1\ (1)\ 2v,\ 2v+2\ (2)\ 2v+s,\ 4v-s\ (2)\ 4v,\ 4v+1$$

(B): *pour s impair $\geqslant 11$ et $v \geqslant 2s+2$, la suite est finie et son dernier terme est égal à* $4v+5$ (*d'indice* $2s+v+6$)

$$1\ (1)\ v,\ 2v+2\ (2)\ 2v+s+1,\ 4v-s+1\ (2)\ 4v,\ 4v+2\ (1)\ 4v+5.$$

1.1.6.2.1. *Démonstration pour s pair $\geqslant 6$.* Nous avons vu que pour $v \geqslant 2s+2$ on doit avoir $4v-s$ (Tableau III).

(On voit que ce n'est possible que parce que $4v-s > 3v+s$, c'est-à-dire $v > 2s$.)

Quel est le terme suivant?

Contributions dans

	(B)	(D)	(F)	(B + D + F)
$4v-s+1$	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$	1	$s+1$
$\rightarrow 4v-s+2$	$\frac{s}{2}-1$	$\frac{s}{2}$	1	s
Puis				
$4v-s+3$	$\frac{s}{2}-1$	$\frac{s}{2}$	2	$s+1$
$\rightarrow 4v-s+4$	$\frac{s}{2}-2$	$\frac{s}{2}$	2	s
Et ainsi de suite jusque				
$\rightarrow 4v-2$	1	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}-1$	s
$4v-1$	1	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$	$s+1$
$\rightarrow 4v$	0	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$	s
$\rightarrow 4v+1$	0	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}$	s

Puis

$4v+2$	0	$\frac{s}{2}$	$\frac{s}{2}+1$	$s+1$
$4v+3$	0	$\frac{s}{2}-1$	$\frac{s}{2}$	$s-1$
$4v+4$	0	$\frac{s}{2}-1$	$\frac{s}{2}$	$s-1$
$4v+5$	0	$\frac{s}{2}-1$	$\frac{s}{2}-2$	$s-3$

à partir $4v+6$, il faut tenir compte de (E) pour les nombres pairs:

	(D)	(E)	(F)	
$4v+6$	$\frac{s}{2}-2$	1	$\frac{s}{2}-1$	$s-2$
$4v+7$	$\frac{s}{2}-3$	0	$\frac{s}{2}-2$	$s-5$
$4v+8$	$\frac{s}{2}-3$	1	$\frac{s}{2}-2$	$s-4$
$4v+9$	$\frac{s}{2}-4$	0	$\frac{s}{2}-3$	$s-7$
$4v+10$	$\frac{s}{2}-4$	2	$\frac{s}{2}-3$	$s-5$

. . . .

$4v+1$ est donc le dernier terme et la suite est finie. Tous les termes suivants sont à une "distance" de $4v+1$ plus petite que s et les contributions apportées par (E) inférieures, la contribution maximum dans (E) étant celle de $4v+s+2$ égale à $s/4$ ou $(s-2)/4$ (suivant que $s \equiv 0$ ou 2 mod. 4).

1.1.6.2.2. *Cas où s impair* $\geqslant 11$ (Tableau IV)

On aura:

	(B)	(D)	(E)	(B + D + E)
$4v-s+2$	$\frac{s+1}{2}$	$\frac{s+1}{2}$	0	$s+1$
$\rightarrow 4v-s+3$	$\frac{s-1}{2}$	$\frac{s+1}{2}$	0	s
$4v-s+4$	$\frac{s-1}{2}$	$\frac{s+1}{2}$	1	$s+1$
$\rightarrow 4v-s+5$	$\frac{s-3}{2}$	$\frac{s+1}{2}$	1	s

et ainsi de suite jusque:

$\rightarrow 4v$	0	$\frac{s+1}{2}$	$\frac{s-1}{2}$	s
$4v+1$	0	$\frac{s+1}{2}$	$\frac{s+1}{2}$	s
$\rightarrow 4v+2$	0	$\frac{s+1}{2}$	$\frac{s-1}{2}$	s
$\rightarrow 4v+3$	0	$\frac{s-1}{2}$	$\frac{s+1}{2}$	s
$\rightarrow 4v+4$	0	$\frac{s-1}{2}$	$\frac{s+1}{2}$	s
$\rightarrow 4v+5$	0	$\frac{s-3}{2}$	$\frac{s+3}{2}$	s

Table IV

1 ---------- $2v$	$2v+2$ ------------ $2v+s+1$		$4v-s+1$
(A)	(C)		(F)
$2v+s$	$2v+s+2$	$2v+2s+1$	$4v+1$
$3v$	$3v+2$	$3v+s+1$	$5v-s+1$
(B)	(D)		(G)
$4v-s+1$ ¦ $4v-1$	$4v+1$		
	$4v+2$	$4v+s+1$	$6v-s+1$
	$4v+6$ -------	$4v+s+3$	$6v-s+3$
	(E)		(H)
		$4v+2s$	$6v+2$

A partir de $4v + 6$, il faut tenir compte des contributions de (E).

	(D)	(E)	(F)	(D + E + F)
$4v + 6$	$\frac{s-3}{2}$	1	$\frac{s+3}{2}$	$s + 1$
$4v + 7$	$\frac{s-5}{2}$	0	$\frac{s+3}{2}$	$s - 1$
$4v + 8$	$\frac{s-5}{2}$	1	$\frac{s+1}{2}$	$s - 1$
$4v + 9$	$\frac{s-7}{2}$	0	$\frac{s+1}{2}$	$s - 3$
$4v + 10$	$\frac{s-7}{2}$	2	$\frac{s-1}{2}$	$s - 2$

. . . .

On voit que l'apport de (E) est au maximum de $(s - 1)/4$ ($(s + 1)/4$ resp.) suivant que $s \equiv 1$ (3 resp.) mod. 3 et ne compensera pas le "rapprochement" avec $4v + 5$.

Il faut montrer maintenant qu'il n'y a dans (G) (ni dans H) aucun nombre représenté s fois; en effet la plus grande diagonale donne $(s + 7)/2$ contributions de $4v - s + 1$ à $4v$ et 4 de $4v + 2$ à $4v + 5$. Il faut que:

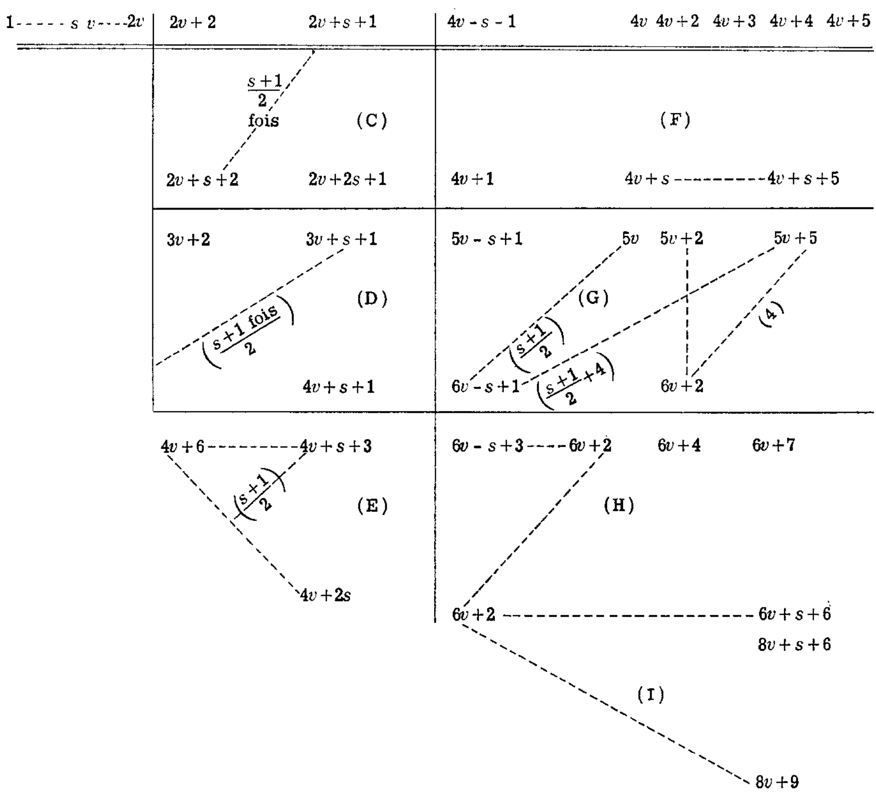
$$(s + 1)/2 + 4 < s$$

soit $s \geqslant 11$.

D'autre part, comme $v \geqslant 2s + 2$ alors $5v - s + 1 > 4v + s + 3$ et s'il y a des contributions de (F) à un nombre de (G) elles seront $<s$. De même s'il y a des contributions de (E) à un nombre de (G), le total sera $<s$ qui doit être $\geqslant 11$ et $\leqslant (v - 2)/2$, conditions qui éliminent la possibilité que des contributions de (E) à (G) puissent égaler s, comme on peut s'en assurer d'après le tableau suivant. (On remarquera d'ailleurs que, si v est impair, dans (E) les contributions concernent des nombres pairs et dans (G) des nombres impairs.)

Enfin, dans (I), à plus forte raison, il ne peut y avoir de nombre représenté plus de $(s + 5)/4$ fois (en tenant compte de l'imparité des ultièmes et pénultièmes termes). Voir le tableau V.

Table V



1.1.6.3. L'examen des tableaux de l'Appendice II peut suggérer un certain nombre des conjectures. Par exemple:

écart $v - s$	pour $s \geqslant$ impair	valeur du dernier terme
3	5	$4s + 8$
4	11	$8s + 2$
5	11	$4s + 12$
6	9	$4s + 20$
7	7	$4s + 16$
8	9	$4s + 26$
9	9	$4s + 20$
10	13	$4s + 32$
11	11	$4s + 24$

Il faudrait se garder cependant des généralisations trop hâtives. Par exemple pour $v - s = 7$ et s pair, on a pour valeur du dernier terme:

$s =$	6	52
	8	60
	10	68
	12	76
	. . . . .	

Ce qui suggère $4s + 28$, mais on a ensuite:

14	87
16	97
. . . . .	

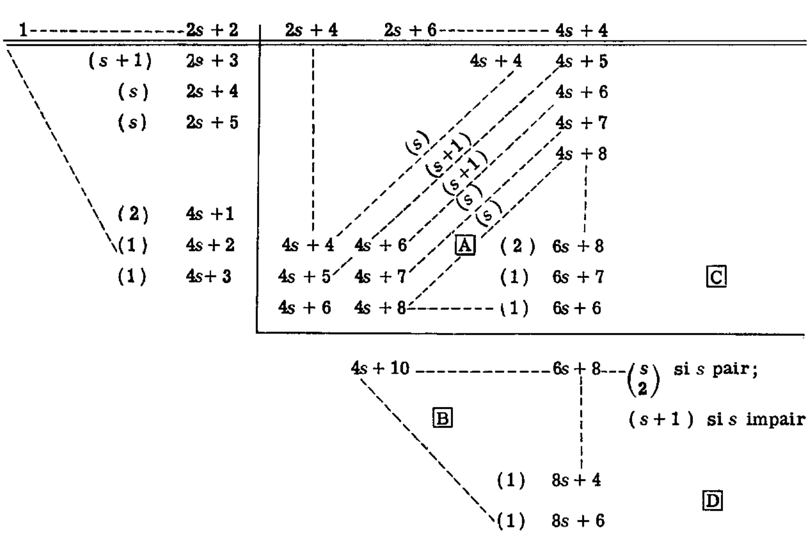
Il faudrait examiner chaque valeur séparément; et, par exemple pour $v - s = 4$, s pair $\geqslant 6$, on a bien, pour tout s, pour valeur du dernier terme $4s + 9$.

1.2. *Séries s-additives naturelles* $(s, 1, s + 1) = (s, 2, 1)$

1.2.0. Nous traitons maintenant le cas où $u = 1$ et $v = s + 1$, c'est-à-dire le cas où la base est formée des $2s$ premiers nombres naturels.

1.2.1. Comme on peut s'en assurer facilement, d'après le tableau VI, les termes suivants sont $2s + 1$, $2s + 2$ puis $2s + 4$ (2) $4s + 4$.

Tableau VI



Le terme suivant est donc $4s + 7$ (quelle que soit la valeur de s); puis $4s + 9 \cdots$ jusque $6s + 7$.

1.2.2. Les $4s + 4$ premiers termes de toute suite s-additive naturelle sont donc: 1 (1) $2s + 1$, $2s + 2$ (2) $4s + 4$, $4s + 7$ (2) $6s + 7$.

1.2.3. Examinons alors les contributions apportées aux nombres $>6s + 7$ par (B), (C), (D). On a

	B	C	D	
$6s + 8$	$\frac{s}{2}\left(\frac{s+1}{2}\right)$	$s + 1$	0	
$6s + 9$	0	$s + 1$	0	
$6s + 10$	$\frac{s}{2}$	s	0	
$6s + 11$	0	s	1	
$\vdots$				B + C + D
$8s + 4$	1	3	0	4
$8s + 5$	0	3	$s - 1$	$s + 2$
$8s + 6$	1	2	0	3
$8s + 7$	0	2	$s - 1$	$s + 1$
$8s + 8$	0	1	0	1
$8s + 9$	0	1	s	$s + 1$

On voit que le plus petit terme suivant (d'indice $4s + 5$) sera:

$$
\begin{array}{ll}
8s + 8 & \text{si} \quad s = 1, \\
8s + 6 & \text{si} \quad s = 3, \\
8s + 4 & \text{si} \quad s = 4, \\
8s + 2 & \text{si} \quad s = 6, \\
8s & \text{si} \quad s = 7,
\end{array}
$$

ou:

$$
\begin{array}{llllll}
\text{pour } s \equiv 0 \ (\text{mod. } 3) & s = 3 & s = 6 & s = 9 & s = 12 \cdots & \\
& 8s + 6 & 8s + 2 & 8s - 2 & 8s - 6 & \cdots 10\,\dfrac{(2s + 3)}{3},
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{llllll}
\text{pour } s \equiv 1 \ (\text{mod. } 3) & s = 1 & s = 4 & s = 7 & s = 10 & \\
& 8s + 8 & 8s + 4 & 8s & 8s - 4 & \cdots 4\,\dfrac{(5s + 7)}{3}.
\end{array}
$$

Dans (D) on a:

$$\begin{array}{ll} 8s+11 & s+1, \\ 8s+13 & s, \\ 8s+15 & s-1. \\ \cdots\cdots & \cdots \end{array}$$

On voit donc que lorsque $s \equiv 2$ (mod. 3), il n'y a pas de nombres ayant moins de $s+1$ représentations dans (B) et (C). Le terme suivant est donc dans ce cas $8s+13$.

Nous avons calculé les séries s-additives naturelles pour $s \leqslant 16$ (voir Appendice I); on peut conjecturer:

1.2.4. CONJECTURE. Pour $s \equiv 2$ (mod. 3), les suites sont infinies. Pour $s \equiv 0$ et $s \equiv 1$ (mod. 3) et $s > 3$, les suites sont finies.

Nous allons examiner chaque cas séparément.

1.2.4.0. $s \equiv 0$ (mod. 3). La suite se poursuit ainsi (pour $s \neq 3$):

$$u_{4s+6} = 8s + 15(2)\, u_{13s+12} = \frac{26s+33}{3}.$$

Pour que l'on ait cette suite, il faut que:

$$\frac{26s+33}{3} \geqslant 8s+15,$$

c'est-à-dire $s \geqslant 6$

La suite naturelle 3-additive est donc irrégulière; on a $u_{18} = 44$ (et non 39).

1.2.4.1. $s \equiv 1$ (mod. 3). Quelque soit s, on a

$$u_{4s+6} = \frac{20s+34}{3}.$$

Puis (pour $s \neq 1$, $s \neq 4$, $s \neq 7$):

$$u_{4s+7} = 8s + 17(2)\, u_{13s+11} = \frac{26s+31}{3}.$$

La suite est donc finie.
Pour qu'il en soit ainsi, il faut que:

$$\frac{26s+31}{3} \geqslant 8s+17,$$

c'est-à-dire $s \geqslant 10$.

Les suites naturelles 1-, 4-, 7-additives sont donc irrégulières.

Pour $s = 1$, on a $u_{11} = 26$ et non 25 et la suite se poursuit indéfiniment (puisqu'on pourra toujours avoir pour u_{n+1} : $u_{n+1} = u_n + u_{n-2}$ qui n'a jamais qu'une seule solution).

Pour $s = 4$, on a $u_{23} = 47$; puis 48, 49, 51, 53, 60, 80 et la suite s'arrête à 85.

Pour $s = 7$, il n'y a pas de terme au-delà d' $u_{4s+6=34} = 58$.

1.2.4.2. $s \equiv 2 \pmod{3}$. La suite (1) se poursuit ainsi:

$$8s + 13\ (2)\ 10s + 13,\ 12s + 19\ (2)\ 14s + 19 \cdots 4ps + 6p + 1\ (2)$$

$4ps + 2s + 6p + 1 \cdots$ jusqu'à un terme u_k puis la suite est "perturbée". Le dernier terme régulier est:

$$\text{pour } s \equiv 2 \pmod{6}\ u_k = 13s + 17,\ k = \frac{11s + 10}{2},$$

$$\text{pour } s \equiv 5 \pmod{6}\ u_k = 4s^2 + 2s - 3,\ k = s^2 + 2s + 3.$$

Le premier terme irrégulier $u_{k+1} = u_k + 1$. Les termes suivants sont réguliers de $u_{k+2} = u_{k+1} + 3$ à:

pour $s \equiv 2 \pmod{6}$

$$u_l = 14s + 21, \qquad l = k + \frac{s}{2} + 1 = 6s + 6, \qquad p = 4,$$

pour $s \equiv 5 \pmod{6}$

$$u_l = 4s^2 + 4s - 5, \qquad l = k + s - 1 = s^2 + 3s + 2, \qquad p = s - 1$$

Les "perturbations" suivantes sont plus laborieuses à déterminer; la question est posée de savoir si elles peuvent aboutir à un arrêt de la suite ou si celle-ci se poursuit indéfiniment.

Pour $s = 2$, la série est perturbée après $u_{k+2} = 47$, car on a

$$k + 2 = \frac{(11s + 14)}{2} = 6s + 6.$$

1.2.5. PROPORTION IMPAIRS/PAIRS DANS LES SUITES NATURELLES s-ADDITIVES FINIES.

		nombres impairs	nombres pairs
	$s = 4$	15	15
$s \geqslant 6$	$s \equiv 0 \pmod{3}$	$\frac{7s + 3}{3}$	$2s + 3$
	$s \equiv 1 \pmod{3}$	$\frac{7s - 1}{3}$	$2s + 4$

Pour s croissant, la proportion impairs/pairs tend donc vers 7/6.

2. CAS $u = 2$

2.0. En ce cas v est >1, car comme nous l'avons vu $(s, 2, 1) = (s, 1, s + 1)$, soit la suite naturelle déjà étudiée; et v est impair d'après 0.6. car: $(s, 2, 2n) = 2(s, 1, n)$.

2.1. Le théorème 0.9 s'applique ici partiellement; la suite est identique à une progression arithmétique de raison 2 jusqu'à un terme d'indice $3s + (v - 1)/2$ et de valeur $v + (v + 4s - 3)$. Le terme suivant est pair et égal à $2(v + 2s - 1)$, mais ce terme est perturbant. Pour $s > 1$, la progression reprend avec $2v + 4s - 1$ jusqu'à $3v + 4s - 2$; puis les nombres impairs continuent par blocs d's termes jusqu'à la perturbation apportée par l'absence du terme $5v + 8s - 4$; les blocs impairs s'arrêtent ou continuent par blocs d'1 à $s + 1$ au maximum, jusqu'à un $s + 2$ ième terme pair à partir duquel ou bien la suite se termine, ou bien des termes impairs réapparaissent et la suite semble se poursuivre indéfiniment.

EXEMPLE DES DEUX CAS:

(3, 2, 9) : [2, 4, 6, 9, 11, 13], 15 (2) 27, 28, 29 (2) 35, 39 (2) 43, 47 (2) 51, 55 (2) 53, 63, 100 |

(4, 2, 9) : [2, 4, 6, 8, 9, 11, 13, 15] 17 (2) 31, 32, 33 (2) 39, 43 (2) 49, 53 (2) 59, 63 (2) 69, 110, 118, 120, 126, 128, 132, 134, 135, 136 ···

On peut émettre la conjecture suivante:

2.2. CONJECTURE. Le dernier terme impair (d.t.i.) précédant le $s + 2$ ième terme pair d'une suite $(s, 2, v)$, v impair, $s > 1$ est donnée par le tableau VII: s est en abscisse et les colonnes donnent les valeurs pour $v = (2s + 2)\,n + 1, (2s + 2)\,n + 3 \cdots (2s + 2)\,n + 2s + 1$.

A 8 se lit: $5v + 8$.

B 16 se lit: $7v + 16$.

Par exemple pour $s = 4$, on a:

	v	valeur d.t.i. avant $s + 2$ième terme pair	indice (non indiqué par le tableau VII)
$(n \geqslant 1)$	$10n + 1$	$5v + 26$	$22n + 37$
$(n \geqslant 0)$	$10n + 3$	$7v + 40$	$26n + 31$
—	$10n + 5$	$5v + 26$	$18n + 26$
—	$10n + 7$	$7v + 50$	$26n + 45$
—	$10n + 9$	$5v + 24$	$18n + 33$

Pour $s = 2$ et $v = 3$, le $s + 2$ième terme impair est égal à 17 et son indice est 10.

Table VII

2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	14	15
A8	A18	A26	A34	A42	A50	A58	A66	A74	A82	A90	A98	A106
B16	B28	B40	B52	B64	B76	B88	B100	B112	B124	B136	B148	B150
B22	A18	A26	A34	A42	A50	A58	A66	A74	A82	A90	A98	A106
	B36	B50	A34	A42	A50	A58	A66	A74	A82	A90	A98	A106
		A24	B64	B78	A50	A58	A66	A74	A82	A90	A98	A106
			A34	A40	B92	B106	A66	A74	A82	A90	A98	A106
				A42	A50	A56	B120	B134	A82	A90	A98	A106
					A50	A58	A66	A72	B148	B162	A98	A106
						A58	A66	A74	A82	A88	B176	B190
							A66	A74	A82	A90	A98	A102
								A74	A82	A90	A98	A106
									A82	A90	A98	A106
										A90	A98	A106
											A98	A106
												A106

2.3. Pour $s = 1$, la suite $(1, 2, v)$ "tend" vers:

$2, v\ (2)\ 2v + 1, 2v + 2, 2v + 3\ (2)\ 3v, 3v + 4\ (4)$

$5v + 2, 5v + 4, 5v + 10, 5v + 12, 5v + 18, 5v + 20, 5v + 26, \ldots$

$7v + 2, 7v + 6 \quad (\text{pour } v \equiv 1 \text{ mod. } 4)$

$7v + 4, 7v + 12 \quad (\text{pour } v \equiv 3 \text{ mod. } 4)$

Elle en diffère au terme d'indice 8 pour $v = 3$, au terme d'indice $2v + 5$ pour $v \geqslant 5$.

2.4. De plus pour $v = 5$, 7 et 9, nous avons trouvé que ces suites sont des multi-progressions arithmétiques (voir ci-dessous 4.2). On a, en utilisant la notation expliquée ci-dessous, 4.2:

$(1, 2, 5) \equiv 126n + [5\ (1)\ 15, 19, 23, 27, 29, 35, 37, 41, 43, 45, 49, 51, 55, 61, 67, 69, 71, 79, 83, 85, 87, 89, 95, 99, 107, 109, 119] \oplus 2, 12$

$(1, 2, 7) \equiv 126n + [7\ (1)\ 21, 25, 29, 33, 37, 39, 45, 47, 53, 61, 69, 71, 73, 75, 85, 89, 101, 103, 117] \oplus 2, 16$

$(1, 2, 9) \equiv 1778n + [444 \text{ termes}] \oplus 2,20$ (voir Appendice III).

3. Cas $u \geqslant 3$

3.1. Comme nous l'avons vu (0.9), pour $s > 1$, toute suite s-additive avec $u \geqslant 3$ est une progression arithmétique avec un terme supplémentaire. Restent donc les suites $(1, u \geqslant 3, v \geqslant 4)$ que nous nous proposons d'étudier dans un prochain travail.

4. Suites 0-additives

4.1. Bien des suites de nombres entiers sont non-additives (à commencer par la suite des nombres impairs); nous réserverons la dénomination de suite 0-additive aux suites construites récursivement à partir d'une base donnée $0 < u < v$.

$u_1 = u$, $u_2 = v$, $u_3 \cdots u_n$ étant calculés, u_{n+1} sera le plus petit nombre $> u_n$ tel que l'équation:

$$u_{n+1} = u_i + u_j \qquad i(u_i, u_j \in S, u_i \neq u_j, i \neq j)$$

n'ait pas de solution. Les premiers termes seront donc:

$$u, v, v+1, v+2 \cdots v+u-1, v+2u \cdots$$

4.2. Les suites 0-additives se trouvent être ce que nous appellerons des multiprogressions arithmétiques, c'est-à-dire l'union ordonnée de progressions arithmétiques de même raison:

$$an + b_1, an + b_2, \ldots, an + b_k \qquad (n = 0, 1 \cdots)$$

ce que nous noterons:

$$an + [b_1, b_2 \cdots b_k] \qquad (0 < b_1 < b_2 \cdots < b_k \leqslant a).$$

De plus, il se trouve que, dans les suites 0-additives, certains termes de ces progressions manquent (en nombre fini) et que d'autres (en nombre également fini) lui sont adjoints. Les termes adjoints figureront après le crochet] précédés du signe $\oplus$ et les termes disjoints du signe $\ominus$.

Exemple. Soit la suite (0, 6, 10):

$$6, 10\ (1)\ 15, 30\ (1)\ 35, 51\ (1)\ 56, \cdots$$

Elle sera notée:

$$21n + [9\ (1)\ 14] \oplus 6, 15 \ominus 9$$

ce qui est rendu manifeste par la disposition suivante:

6	·	10	11	12	13	14	15
·	30	31	32	33	34	35	·
·	51	52	53	54	55	56	·

. . . .

On remarquera qu'une même suite peut être représentée de plusieurs façons différentes; par ex. la suite ci-dessus par:

$$42n + [9\ (1)\ 14,\ 30\ (1)\ 35] \oplus 6,\ 15 \ominus 9$$

Mais on peut toujours éventuellement simplifier, car:

$$pan + [b_1 \cdots b_k,\ a + b_1 \cdots a + b_k \cdots (p-1)\,a + b_1 \cdots (p-1)\,a + b_k] \equiv an + [b_1 \cdots b_k]$$

les termes adjoints et disjoints restant les mêmes. Soit la suite (0, 3, 8):

·	3	8	9	10	14	15	16
20	21	·	27	·	32	33	·
38	39	44	45	·	50	51	·

. . . .

notée: $18n + [2, 3, 8, 9, 14, 15] \oplus 10, 16 \ominus 2, 26$. Elle pourra également être représentée par: $6n + [2, 3] \oplus 10, 16 \ominus 2, 26$:

·	3	·
8	9	10
14	15	16
20	21	·
·	27	·
32	33	·
38	39	·

. . . .

4.3. SUITES $(0, 1, v)$. Si v est impair, on a:

$$(0, 1, 2k+1) : 2n + [1] \ominus 3\ (2)\ 2k - 1.$$

Si v est pair, on a:

$(0, 1, 2) : 3n + [1] \oplus 2,$

$(0, 1, 4) : 12n + [1, 4, 6, 11] \oplus 8,$

$(0, 1, 6) : 9n + [1, 6, 8] \oplus 12,$

$(0, 1, v \geqslant 8) : (4v + 3)n$

$+ [1, 3, v\,(2)\,2v - 2, 2v + 5\,(2)\,3v + 1, 4v, 4v + 2] \oplus 2v, 2v + 3 \ominus 3.$

4.4. SUITES $(0, 2, v)$.

4.4.0. Soit $v \equiv r$ (mod. 4), $r = 0, 1, 2, 3$ et $r' = -3, +3, +9, +7$ pour r resp. $= 0, 1, 2, 3$ c'est-à-dire $r' = -\frac{1}{3}(4r^3 - 12r^2 - 10r + 9)$. On conjecture que la raison de la multiprogression correspondant à une suite $(0, 2, v)$ est donnée par la formule:

$$3(v - r) + r' \qquad \text{pour} \quad v \geqslant 4.$$

(Pour $v = 3$, on a $6n + [2, 3] \oplus 4$.) Pour les autres éléments de la multiprogression, on a:

4.4.1. $v \equiv 0$ (mod. 4) $(v \geqslant 20)$

$[2, 13\,(4)\,v + 1, v + 4, v + 5, v + 8, v + 9, v + 12\,(4)\,2v, 2v + 3\,(4)\,3v - 5]$

$\oplus\, v,\; v + 13\,(4)\,2v - 3$

$\ominus\, 18\,(4)\,v - 3, 3v + 10\,(4)\,4v - 10.$

4.4.2. $v \equiv 1$ (mod. 4) $(v \geqslant 9)$

$[2\,(4)\,v - 3, v, v + 1, v + 4, v + 5 \cdots 2v - 5, 2v - 4, 2v - 1\,(4)\,3v - 2]$

$\ominus\, 6\,(4)\,v - 3$ (valable aussi pour $v = 5$ avec $\ominus\, 0$).

4.4.3. $v \equiv 2$ (mod. 4) $(v \geqslant 10)$.

$[2\,(4)\,v, v + 1, v + 4, v + 5, v + 8, v + 9 \cdots$

$2v - 2, 2v - 1, 2v + 3\,(4)\,3v + 1] \oplus 2v + 2 \ominus 6\,(4)\,v - 4$

(valable aussi pour $v = 6$ avec $\ominus\, 0$).

4.4.4. $v \equiv 3$ (mod. 4)$(v \geqslant 19)$.

$[2,7\,(4), v, v + 4, v + 5, v + 9\,(4)\,2v + 2, 2v + 3\,(4)\,3v - 4]$

$\oplus\, v + 1, v + 8\,(4)\,2v - 3, 4v + 6$

$\ominus\, 7\,(4)\,v - 4, 3v - 5\,(4)\,4v - 10, 6v + 3$ (valable aussi pour $v = 15$, mais $v + 5$ n'existe pas entre les crochets et figure aux termes adjoints).

4.5. SUITES $(0, u \geqslant 3, v)$.

4.5.0. Pour $u \geqslant 4$ et $v \geqslant 2u$, on peut conjecturer une formule générale pour la raison.

Soit k égal à 2 pour u pair et à 3 pour u impair.

Soit l le plus grand entier contenu dans:

$$l = \left[\frac{2v - u - k}{4u}\right].$$

Alors la raison est donnée par:

$$2v + (2l + 1)\,u - 1.$$

Cette formule est aussi valable pour $u = 3$, sauf lorsque $v = 6\,(u + n)$ $(n = 0, 1, \ldots)$.

4.5.1. Les autres éléments obéissent à des lois qu'il ne nous a été possible de déterminer que pour les petites valeurs de v.

$u \geqslant 2, v = u + 1 : 3un + [u\,(1)\,2u - 1] \oplus 2u.$

$u \geqslant 3, u + 2 \leqslant v \leqslant 2u - 1 : (2u + v - 1)\,n + [v - 1\,(1)\,u + v - 2]$
$\oplus\, u, u + v - 1 \ominus v - 1.$

$u \geqslant 3, \quad v = 2u : (5u - 1)n + [u - 1, u, 2u + 1\,(1)\,3u - 2, 4u]$
$\oplus\, 2u, 3u - 1 \ominus u - 1.$

$u \geqslant 3, \quad v = 2u + 1 : (5u + 1)n + [u - 1, u, 2u + 2\,(1)\,3u - 1, 4u + 1,$
$4u + 2] \oplus 2u + 1, 3u \ominus u - 1.$

$u \geqslant 4, \quad v = 2u + 2 : (5u + 3)n + [u - 1, u, 2u + 3\,(1)\,3u, 4u + 2,$
$4u + 3] \oplus 2u + 2, 3u + 1 \ominus u - 1.$

$u \geqslant 6, \quad v = 2u + 3 : (5u + 5)n + [u - 2\,(1)\,u, 2u + 4\,(1)\,3u, 4u + 3\,(1)$
$4u + 6]$
$\oplus\, 2u + 3, 3u + 1, 3u + 2, 8u + 6$
$\ominus\, u - 2, u - 1, 6u + 3, 11u + 8.$

$u \geqslant 8, \quad v = 2u + 4 : (5u + 7)n + [u - 3\,(1)\,u, 2u + 5\,(1)\,3u, 4u + 4\,(1)$
$4u + 8]$
$\oplus\, 2u + 4, 3u + 1\,(1)\,3u + 3, 8u + 8$
$\ominus\, u - 3\,(1)\,u - 1, 6u + 4, 6u + 5, 11u + 11.$

$$u \geqslant 10,\ v = 2u+5 : (5u+9)n + [u-4\,(1)\,u,\ 2u+6\,(1)\,3u,\ 4u+5\,(1)\,4u+10]$$
$$\oplus\, 2u+5,\ 3u+1\,(1)\,3u+4,\ 8u+10$$
$$\ominus\, u-4\,(1)\,u-1,\ 6u+5\,(1)\,6u+7,\ 11u+14.$$

. . . .

$$u \geqslant 8,\quad v = 3u-3 : (9u-7)n + [u-3\,(1)u+1,\ 3u-3\,(1)\,4u-7,\ 5u-2\,(1)\,6u-7,\ 8u-10\,(1)\,8u-7]$$
$$\oplus\, 4u-6\,(1)\,4u-4,\ 5u-3,\ 6u-6,\ 12u-13$$
$$\ominus\, u-3\,(1)\,u-1,\ u-1,\ 8u-10,\ 8u-9,\ 10u-10,\ 17u-17.$$

$$u \geqslant 6,\quad v = 3u-2 : (9u-5)n + [u-2\,(1)\,u+1,\ 3u-2\,(1)\,4u-5,\ 5u-1\,(1)\,6u-5,\ 8u-7\,(1)\,8u-5]$$
$$\oplus\, 4u-4,\ 4u-3,\ 5u-2,\ 6u-4,\ 13u-9$$
$$\ominus\, u-2,\ u-1,\ u+1,\ 8u-7,\ 10u-7,\ 17u-12.$$

$$u \geqslant 4,\quad v = 3u-1 : (9u-3)n + [u-1\,(1)\,u+1,\ 3u-1\,(1)\,4u-3,\ 5u\,(1)\,6u-3,\ 8u-4,\ 8u-3]$$
$$\oplus\, 4u-2,\ 5u-1,\ 6u-2$$
$$\ominus\, u-1,\ u+1,\ 10u-4.$$

$$u \geqslant 3,\quad v = 3u : (9u-1)n + [u,\ u+1,\ 3u\,(1)\,4u-2,\ 5u+1\,(1)\,6u-1,\ 8u-2,\ 8u-1] \oplus 4u-1,\ 5u \ominus u+1.$$

$$u \geqslant 3,\quad v = 3u+1 : (9u+1)n + [u,\ u+1,\ 3u+1\,(1)\,4u-1,\ 5u+2\,(1)\,6u,\ 8u,\ 8u+1]$$
$$\oplus\, 4u,\ 5u+1 \quad \ominus\, u+1.$$

$$u \geqslant 3,\quad v = 3u+2 : (9u+3)n + [u,\ u+1,\ 3u+2\,(1)\,4u,\ 5u+3\,(1)\,6u+1,\ 8u+2,\ 8u+3]$$
$$\oplus\, 4u+1,\ 5u+2 \ominus u+1.$$

$$u \geqslant 4,\quad v = 3u+3 : (9u+5)n + [u,\ u+1,\ 3u+3\,(1)\,4u+1,\ 5u+4\,(1)\,6u+2,\ 8u+4,\ 8u+5]$$
$$\oplus\, 4u+2,\ 5u+3 \ominus u+1.$$

$$u \geqslant 5,\quad v = 3u+4 : (9u+7)n + [u,\ u+1,\ 3u+4\,(1)\,4u+2,\ 5u+5\,(1)\,6u+3,\ 8u+6,\ 8u+7]$$
$$\oplus\, 4u+3,\ 5u+4 \ominus u+1.$$

. . . .

$$u \geqslant 3, \quad v = 4u - 1 : (11u - 3)n + [u, u + 1, 4u - 1\ (1)\ 5u - 3,$$
$$6u\ (1)\ 7u - 2, 10u - 4, 10u - 3]$$
$$\oplus\ 5u - 2, 6u - 1 \ominus u + 1.$$

$$u \geqslant 3, \quad v = 4u : (11u - 1)n + [u - 1, u, 4u + 1\ (1)\ 5u - 2,$$
$$6u\ (1)\ 7u - 2, 8u, 10u - 2, 10u - 1]$$
$$\oplus\ 4u, 5u - 1, 7u - 1 \ominus u - 1, 12u - 2.$$

$$u \geqslant 4, \quad v = 4u + 1 : (11u + 1)n + [u - 1, u, 3u - 1, 4u + 2\ (1)\ 5u - 1,$$
$$6u + 1\ (1)\ 7u - 1, 8u + 1, 8u + 2,$$
$$10u, 10u + 1]$$
$$\oplus\ 4u + 1, 5u, 7u \ominus u - 1, 3u - 1, 12u.$$

$$u \geqslant 5, \quad v = 4u + 2 : (11u + 3)n + [u - 1, u, 3u - 1, 3u, 4u + 3\ (1)\ 5u,$$
$$6u + 2\ (1)\ 7u, 8u + 2\ (1)\ 8u + 4,$$
$$10u + 2, 10u + 3]$$
$$\oplus\ 4u + 2, 5u + 1, 7u + 1$$
$$\ominus\ u - 1, 3u - 1, 3u, 12u + 2.$$

$$u \geqslant 6, \quad v = 4u + 3 : (11u + 5)n + [u - 2\ (1) u, 3u - 2\ (1)\ 3u, 4u + 4\ (1)\ 5u,$$
$$6u + 1\ (1)\ 7u, 8u + 3\ (1) + 8u + 6,$$
$$10u + 3\ (1)\ 10u + 5]$$
$$\oplus\ 4u + 3, 5u + 1, 5u + 2, 8u + 1, 8u + 2,$$
$$16u + 6, 18u + 6, 29u + 11$$
$$\ominus\ u - 2, u - 1, 3u - 2\ (1)\ 3u, 10u + 3, 12u + 3,$$
$$12u + 4, 14u + 3, 21u + 8, 23u + 8, 25u + 8,$$
$$34u + 13, 36u + 13.$$

$$u \geqslant 8, \quad v = 4u + 4 : (11u + 7)n + [u - 3\ (1)\ u, 3u - 3\ (1)\ 3u,$$
$$4u + 5\ (1)\ 5u, 6u + 4\ (1)\ 7u,$$
$$8u + 4\ (1)\ 8u + 8,$$
$$10u + 4\ (1)\ 10u + 7]$$
$$\oplus\ 4u + 4, 5u + 1\ (1)\ 5u + 3, 7u + 1\ (1)\ 7u + 3,$$
$$16u + 8, 18u + 8, 14u + 9, 29u + 15$$
$$\ominus\ u - 3\ (1)\ u - 1, 3u - 3\ (1)\ 3u, 10u + 4, 10u + 5,$$
$$12u + 4\ (1)\ 12u + 6, 14u + 4, 14u + 5,$$
$$21u + 11, 23u + 11, 23u + 12, 25u + 12,$$
$$25u + 12, 34u + 18, 36u + 18.$$

. . . .

$$u \geqslant 6, \quad v = 5u - 2 : (15u - 5)n + [u - 2\,(1)\,u, 3u - 2\,(1)\,3u + 1, 5u - 2\,(1)\,6u - 5, 7u - 2\,(1)\,8u - 5, 9u - 1\,(1)\,10u - 5, 12u - 7\,(1)\,12u - 5, 14u - 7\,(1)\,14u - 5]$$
$$\oplus\, 6u - 4, 6u - 3, 8u - 4, 8u - 3, 9u - 2, 10u - 4, 21u - 9, 23u - 9, 36u - 14$$
$$\ominus\, u - 2, u - 1, 3u - 2\,(1)\,3u + 1, 12u - 7, 14u - 7, 14u - 6, 16u - 7, 18u - 7, 27u - 12, 29u - 12, 31u - 12, 42u - 17, 44u - 17.$$

$$u \geqslant 4, \quad v = 5u - 1 : (15u - 3)n + [u, 3u, 3u + 1, 5u - 1\,(1)\,6u - 3, 7u - 1\,(1)\,8u - 2, 9u\,(1)\,10u - 3, 12u - 4, 12u - 3, 14u - 3]$$
$$\oplus\, 6u - 2, 9u - 1, 10u - 2 \ominus 3u, 3u + 1.$$

$$u \geqslant 3, \quad v = 5u : (15u - 1)n + [u, 3u, 3u + 1, 5u\,(1)\,6u - 2, 7u\,(1)\,8u - 1, 9u + 1\,(1)\,10u - 1, 12u - 2, 12u - 1, 14u - 1] \oplus 6u - 1, 9u \ominus 3u, 3u + 1.$$

$$u \geqslant 3, \quad v = 5u + 1 : (15u + 1)n + [u, 3u + 1, 5u + 1\,(1)\,6u - 1, 7u + (1)\,8u, 9u + 2\,(1)\,10u, 12u, 12u + 1, 14u + 1]$$
$$\oplus\, 6u, 9u + 1 \ominus 3u + 1.$$

$$u \geqslant 3, \quad v = 5u + 2 : (15u + 3)n + [u, 3u + 2\,(1)\,6u, 7u, + 2\,(1)\,8u + 1, 9u + 4\,(1)\,10u + 1, 12u + 2, 12u + 3, 14u + 3]$$
$$\oplus\, 6u + 1, 9u + 2, 9u + 3, 24u + 6$$
$$\ominus\, 3u + 2, 18u + 5, 33u + 8.$$

$$u \geqslant 6, \quad v = 5u + 3 : (15u + 5)n + [u, 3u + 3, 5u + 3\,(1)\,6u + 1, 7u + 3\,(1)\,8u + 2, 9u + 6\,(1)\,10u + 2, 12u + 4, 12u + 5, 14u + 5]$$
$$\oplus\, 6u + 2, 9u + 3\,(1)\,9u + 5, 24u + 8, 24u + 10$$
$$\ominus\, 3u + 3, 18u + 8, 33u + 13.$$

. . . .

$$u \geqslant 5, \quad v = 6u - 1 : (17u - 3)n + [u, 6u - 1\ (1)\ 7u - 3, 8u - 1\ (1)$$
$$9u - 2, 10u - 1\ (1)\ 11u - 6,$$
$$11u - 2, 14u - 4, 14u - 3, 16u - 3]$$
$$\oplus\ 7u - 2, 11u - 5\ (1)\ 11u - 3, 28u - 8, 28u - 6$$
$$\ominus\ \phi.$$

$$u \geqslant 4, \quad v = 6 : (17u - 1)n + [u - 1, u, 5u - 3, 5u - 2, 6u + 1\ (1)$$
$$7u - 2, 8u\ (1)\ 9u - 2, 10u\ (1)\ 11u - 4,$$
$$12u, 14u - 2, 14u - 1, 16u - 2, 16u - 1]$$
$$\oplus\ 6u, 7u - 1, 9u - 1, 11u - 3\ (1)\ 11u - 1, 28u - 4,$$
$$28u - 2$$
$$\ominus\ u - 1, 5u - 3, 5u - 2, 16u - 2, 18u - 2, 22u - 4,$$
$$22u - 3, 35u - 3, 39u - 5, 39u - 4, 56u - 6.$$

. . . .

4.6.1. Pour $v = ku$, $k = 2p + 1$, il est permis de conjecturer que, pour $u \geqslant 3$, $p \geqslant 1$, on peut exprimer la suite $(0, u, (2p + 1)u)$ par:

$$([6p + 3]\, u - 1)n + [u, 3u, 5u \cdots (2p - 1)u,$$
$$(2p - 1)u + 1,$$
$$(2p + 1)u\ (1)\ (2p + 2)\, u - 2,$$
$$(2p + 3)u\ (1)\ (2p + 4)u - 2 \cdots (4p - 1)u (1) 4pu - 2,$$
$$(4p + 1)u + 1, (4p + 2)u - 1,$$
$$(4p + 4)u - 2, (4p + 4)u - 1,$$
$$(4p + 6)u - 1, (4p + 8)u - 1 \cdots (6p + 2)u - 1],$$
$$\oplus\ (2p + 2)u - 1, (4p + 1)u,$$
$$\ominus\ 3u, 5u \cdots (2p - 1)u,$$
$$\ominus\ (2p - 1)u + 1.$$

Ce qui donne bien, par exemple pour $p = 1$, comme alors

ligne 1 : $2p - 1 = 1$,
ligne 3 : $4p - 1 = 2p + 1$,
ligne 6 : $4p + 6 > 6p + 2 = 4p + 4$ donc ϕ,
ligne 8 : $2p - 1 < 3$, donc ϕ.

$$
\begin{aligned}
(9u - 1)n + [u,& \\
& u + 1, \\
& 3u\,(1)\,4u - 2, \\
& 5u + 1, 6u - 1, \\
& 8u - 2, 8u - 1], \\
\oplus\ & 4u - 1, 4u, \\
\ominus\ & u + 1.
\end{aligned}
$$

6.4.2.1. Pour $k = 2p$, on peut inférer que l'on a pour $(0, u, 2pu)$ et $u \geqslant 4$:

$$
\begin{aligned}
([6p - 1]\,u - 1)n + [&u - 1, u, \\
& 5u - 3, 5u - 2, 7u - 3, 7u - 2 \cdots (2p - 1)u - 3, \\
& \quad (2p - 1)u - 2, \\
& 2pu + 1\ (1)\ (2p + 1)u - 2, \\
& (2p + 2)u\ (1)\ (2p + 3)u - 2, \\
& (2p + 4)u\ (1)\ (2p + 5)u - 4, (2p + 6)u\ (1) \\
& \quad (2p + 7)u - 4 \cdots (4p - 2)u\ (1)\ (4p - 1)u - 4, \\
& 4pu, \\
& (4p + 2)u - 2, (4p + 2)u - 1, (4p + 4)u - 2, \\
& (4p + 4)u - 1 \cdots (6p - 2)u - 2, (6p - 2)u - 1].
\end{aligned}
$$

Cette formule est valable pour tout p, en remarquant que:

les termes de la ligne 2 n'apparaissent qu'avec $p = 8(2p - 1 = 5)$,
les termes de la ligne 4 n'apparaissent qu'avec $p = 2$,
les termes de la ligne 5 n'apparaissent qu'avec $p = 3(4p - 2 = 2p + 4)$,
les termes de la ligne 7 n'apparaissent qu'avec $p = 2(4p + 2 = 6\,p - 2)$,

4.6.2.2. Pour les termes adjoints, on peut conjecturer qu'on aura pour $u \geqslant 4$ et $p \geqslant 5$:

$$
\begin{aligned}
\oplus\ & 2pu, (2p + 1)u - 1, \\
& (2p + 3)u - 1, \\
& (2p + 5)u - 3\ (1)\ (2p + 5)u - 1, \\
& (2p + 7)u - 3\ (1)\ (2p + 7)u - 1, \\
& (2p + 9)u - 3\ (1)\ (2p + 9)u - 1 \cdots (4p - 1)u - 3\ (1)\ (4p - 1)u - 1, \\
& (8p + 4)u - 4, \\
& (8p + 8)u - 4, (8p + 10)u - 4 \cdots (10p - 2)u - 4, \\
& (14p + 7)u - 5, (14p + 9)u - 5 \cdots (16p - 3)u - 5.
\end{aligned}
$$

Pour $p = 1$, on ne prend que les termes de la ligne 1,

Pour $p = 2$, on ne prend que les termes des lignes 1 et 2

Pour $p = 3$, on ne prend que les termes des lignes 1, 2, 3 et 6

Pour $p = 4$, on ne prend que les termes des lignes 1, 2, 3, 4, 6 et 7

Pour $p = 5$, $4p - 1 = 2p + 9$, $10p - 2 = 8p + 8$ et $16p - 3 = 14p + 7$.

4.6.2.3. Pour les termes disjoints, on peut conjecturer qu'on aura pour $u \geqslant 4$ et $p \geqslant 5$ (en posant $(6p - 1)u - 1 = R$):

$$
\begin{array}{l}
\ominus\, u - 1,\ u - 1 + R,\ u - 1 + 2R,\\
\quad 5u - 3,\ 5u - 3 + R,\ 5u - 3 + 2R,\ 5u - 3 + 3R,\\
\quad 5u - 2,\ 5u - 2 + R,\ 5u - 2 + 2R,\\
\quad 7u - 3,\ 7u - 3 + R,\ 7u - 3 + 2R,\\
\quad 7u - 3 + 3R,\\
\quad 7u - 2,\ 7u - 2 + R,\\
\quad 9u - 3,\ 9u - 3 + R,\ 9u - 3 + 2R,\ 9u - 3 + 3R,\\
\quad 9u - 2,\ 9u - 2 + R,\\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\quad (2p - 1)u - 3,\ (2p - 1)u - 3 + R,\ (2p - 1)u - 3 + 2R,\\
\qquad (2p - 1)u - 3 + 3R,\\
\quad (2p - 1)u - 2,\ (2p - 1)\,u - 2 + R,\\
\quad (4p - 4)u - 2,\\
\quad (4p + 6)u - 2,\ (4p + 6)u - 2 + R,\\
\quad (4p + 8)u - 2,\ (4p + 8)u - 2 + R,\\
\quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
\quad (6p - 2)u - 2,\ (6p - 2)u - 2 + R.
\end{array}
$$

Pour $p = 1$, on ne prend que le premier terme de la ligne 1,

Pour $p = 2$, on ne prend que les deux premiers termes de la ligne 1,

Pour $p = 3$, on ne prend que les termes des lignes 1, 2, 3 et 12,

Pour $p = 4$, on ne prend que les termes des lignes 1, 2, 3, 4, 12 et 13.

Pour $p = 5$ les lignes 10 et 11 sont identiques aux lignes 7 et 8 et la ligne 14 à la ligne 16.

5. Généralisations diverses ($s \geqslant 1$)

5.1. Suites $f(n)$-additives. Nous avons considéré des suites avec s constant, on peut aussi considérer des suites S telles que, une base B étant donnée, u_n est le plus petit entier plus grand que u_{n-1} tel que l'équation:

$$u_n = u_i + u_j \qquad (u_i \neq u_j, u_i, u_j \in S, u_n \notin B)$$

ait exactement $f(n)$ solutions. Par exemple soit la fonction:

$$\begin{cases} \sigma(2p) = p - 1, \\ \sigma(2p+1) = p, \end{cases}$$

la suite $\sigma(n)$-additive de base $(1, 2)$ est la suite des nombres entiers.

5.2. Suites (s, k)-additives. Une base B étant donnée, soit une suite S telle que u_n est le plus petit entier plus grand que u_{n-1} et $\notin B$ tel que:

$$u_n = u_{i_1} + u_{i_2} + \cdots u_{i_k} \, (u_{i_1} \neq \cdots \neq u_{i_k} \, et \in S)$$

ait exactement s solutions. (Il faut que $k \geqslant 2$).

Exemple. Suite (2, 3)-additive naturelle. Base (1, 2, 3, 4, 5)-suite: 8, 9, 10, 11, 25, 28, 29, 49 $\cdots$

5.3.1. Suites s'-additives. Une suite S' d'entiers positifs strictement croissants ($u_1 > 0$):

$$u_1, u_2 \cdots u_n \cdots$$

est dite s'-additive si:

(1) une base de $2s'$ entiers positifs est donnée;

(2) pour $n \geqslant 2s' + 1$, u_n est le plus grand entier compris entre $u_n + 1$ et $u_{n-1} + u_{n-2}$ et tel que l'équation:

$$u_n = u_i + u_j \qquad (u_i \neq u_j, i \neq j, u_i, u_j \in S')$$

ait exactement s' solutions.

5.3.2. Suites s'-additives naturelles. La base est formée des $2s'$ premiers nombres entiers.

Pour $s' = 1$, on a le plaisir de retrouver les nombres de Fibonacci.

Pour $s' = 2$, la suite obéit à la loi de récurrence:

$$u_{n+1} = u_n + u_{n-4} = u_{n-1} + u_{n-2} .$$

Pour $n > 5 (u_5 = 5)$, on a:

$$u_n = 6 + \sum_{1}^{n-5} u_i .$$

Pour $s' > 2$, les suites s'-additives naturelles sont finies.

Pour s' pair >2, on a la suite:

$$1\ (1)\ 2s' + 1,\ 2s' + 2\ (2)\ 4s' + 1,\ 4s' + 4\ (4),\ 6s' + 4.$$

Pour s' impair, les premiers termes sont:

$$1\ (1)\ 2s' + 1,\ 2s' + 2\ (2)\ 4s' + 1,\ 4s' + 4\ (4)\ 6s' + 2.$$

Puis:

pour $s' = 3$: 22, 29, 33, 42, 49, 62, 71, 91, 104, 133, 153, 195, 224, 286, 328, 348, 481.

pour $s' = 5$: 34, 36, 45, 49, 53, 60, 64, 77.

pour $s' = 7$: 46, 48, 50, 61, 65, 69, 73, 75, 90.

pour $s' \geqslant 9$: $6s' + 4\ (4)\ 10s' + 3,\ 10s' + 5$

pour s' pair >2, la série s'arrête au terme d'indice

$$\left(\frac{7s' + 4}{2}\right)$$

pour s' impair $\geqslant 9$ la série s'arrête au terme d'indice

$$\left(\frac{9s' + 5}{2}\right)$$

APPENDICE I: Suites Naturelles

$$1 \leqslant s \leqslant 16$$

$s = 1$ 1 (1) 4, 6 (2) 8, 11 (2) 13, 16, 18, 26, 28, 36, 38, 47, 48, 53, 57, 62, 69, 72, 77, 82, 87, 97, 99, 102 ···

$= 2$ 1 (1) 6, 8 (2) 12, 15 (2) 19, 29, 31, 33, 43, 47, 51, 54, 58, 68, 69, 78, 79, 86, 95, 99, 110, 113, 117, 133 ···

$s = 3$ 1 (1) 8, 10 (2) 16, 19 (2) 25, 30, 44, 46, 48, 50, 55, 65, 73, 74, 77, 84, 86, 91, 95, 97, 114, 122, 123, 126 ⋯

$= 4$ 1 (1) 10, 12 (2) 20, 23 (2) 31, 36, 38, 47, 48, 49, 51, 53, 60, 80, 85 |

$= 5$ 1 (1) 12, 14 (2) 24, 27 (2) 37, 53 (2) 63, 79 (2) 89, 105 (2) 107, 108, 111, 113, 115, 121, 131, 132, 139, 141, 145, 161 ⋯

$= 6$ 1 (1) 14, 16 (2) 28, 31 (2) 43, 50, 63 |

$= 7$ 1 (1) 16, 18 (2) 32, 35, (2) 49, 56, 58 |

$= 8$ 1 (1) 18, 20 (2) 36, 39 (2) 55, 77 (2) 83, 91 (2) 93, 115 (2) 121, 122, 125 (2) 133, 144, 155, 157, 158, 163 (2) 171 ⋯

$= 9$ 1 (1) 20, 22 (2) 40, 43 (2) 61, 70, 87, 89 |

$= 10$ 1 (1) 22, 24 (2) 44, 49 (2) 67, 76, 78, 97 |

$= 11$ 1 (1) 24, 26 (2), 48, 51 (2) 73, 101 (2) 123, 151 (2) 223, 251 (2) 273, 301 (2) 323, 351 (2) 373, 401 (2) 423, 451 (2) 473, 501, 503, 504 ⋯

$= 12$ 1 (1) 26, 28 (2) 52, 55 (2) 79, 90, 111, 113, 115 |

$= 13$ 1 (1) 28, 30 (2) 56, 59 (2) 85, 96, 98, 121, 123 |

$= 14$ 1 (1) 30, 32 (2) 60, 63 (2) 91, 125 (2) 153, 187 (2) 199, 200, 203 (2) 217, 236 ⋯

$= 15$ 1 (1) 32, 34 (2) 64, 67 (2) 97, 110, 135, 137, 139, 141 |

$= 16$ 1 (1) 34, 36 (2) 68, 71 (2) 103, 116, 118, 145, 147, 149 |

APPENDICE II: Tableau des Suites–Additives

$$5 \leqslant s \leqslant 15$$
$$u = 1$$
$$s + 2 \leqslant v \leqslant 2s + 3$$
$$(9 \leqslant v \leqslant 20 \text{ pour } s = 7)$$

$s = 5$ 1 (1) 5, 7 (1) 14, 16 (2) 20, 22 (2) 28, 32, 35 (2) 39, 48 |

8 (1) 16, 18 (2) 22, 26 (2) 28 |

9 (1) 18, 20 (2) 24, 28 (2) 30, 34, 37, 40, 41, 43, 48, 51, 55, 59, 62, 67, 69, 78, 80, 92, 93, 94, 98 ⋯

10 (1) 20, 22 (2) 26, 32 |

11 (1) 22, 24 (2) 28, 34, 40 (2) 44, 47, 48, 49, 51, 55, 65 |

12 (1) 24, 26 (2) 30, *, 44 (2) 48, 50 (1) 53, 63, 71, 73 |

13 (1) 26, 28 (2) 32, *, 48 (2) 52, 54 (1) 57, 68, 77, 79 |

. . . .

$s = 6$ 1 (1) 6, 8 (1) 16, 18 (2) 22, 25 (2) 29, 33, 34, 36, 39, 41, 44, 52, 56, 61 |

9 (1) 18, 20 (2) 24, 28 (2) 32, 35, 36, 39, 44, 52, 54, 56, 57, 59, 61, 64 |

10 (1) 20, 22 (2) 26, 31, 33 |

11 (1) 22, 24 (2) 28, 34, 36, 41 |

12 (1) 24, 26 (2) 30, 37 |

13 (1) 26, 28 (2) 32, 40, 47, 48, 50, 52 |

14 (1) 28, 30 (2) 34, 50 (2) 56, 57 |

15 (1) 30, 32 (2) 36, 54 (2) 60, 61 |

. . . .

$s = 7$ 1 (1) 7, 9 (1) 18, 20 (2) 26, 28 (2) 36, 40, 43 (2) 49, 62 |

10 (1) 20, 22 (2) 28, 32 (2) 36 |

11 (1) 22, 24 (2) 30, 34 (2) 38, 42, 45, 46, 52, 54, 57, 59, 70, 74 |

12 (1) 24, 26 (2) 32, 38, 40 |

13 (1) 26, 28 (2) 34, 40, 42, 49 |

14 (1) 28, 30 (2) 36, 44 |

15 (1) 30, 32 (2) 38, 46, 54 (2) 58, 60, 63 (1) 65, 81, 85, 87 |

16 (1) 32, 34 (2) 40, $*$, 58 (2) 64, 66 (1) 69, 84, 100 |

17 (1) 34, 36 (2) 42, $*$, 62 (2) 68, 70 (1) 73, 89, 97 (1) 103, 108, 130, 132 |

18 (1) 36, 38 (2) 44, $*$, 66 (2) 72, 74 (1) 77, 94, 106 (1) 109, 114, 134, 136 |

19 (1) 38, 40 (2) 46, $*$, 70 (2) 76, 78 (1) 81, 99, 109 (1) 115, 120, 146, 148 |

20 (1) 40, 42 (2) 48, $*$, 74 (2) 80, 82 (1) 85, 104, 115 (1) 121, 126, 150, 152 |

. . . .

$s = 8$ 1 (1) 8, 10 (1) 20, 22 (2) 28, 31 (2) 37, 41, 42, 44, 47, 49, 51 |

11 (1) 22, 24 (2) 30, 34 (2) 40, 43 (2) 49 |

12 (1) 24, 26 (2) 32, 37 (2) 41 |

13 (1) 26, 28 (2) 34, 40 (2) 44, 49 (1) 52, 66, 68 |

14 (1) 28, 30 (2) 36, 43, 45 |

15 (1) 30, 32 (2) 38, 46, 48, 55 (1) 58, 60 |
16 (1) 32, 34 (2) 40, 49 |
17 (1) 34, 36 (2) 42, 52, 61, 62, 64 (2) 68 |
18 (1) 36, 38 (2) 44, 64 (2) 72, 73 |
↓19 (1) 38, 40 (2) 46, 68 (2) 76, 77 |

. . . .

$s = 9$ 1 (1) 9, 11 (1) 22, 24 (2) 32, 34 (2) 42, 44, 48, 51 (2) 59, 74 |
12 (1) 24, 26 (2) 34, 38 (2) 44 |
13 (1) 26, 28 (2) 36, 40 (2) 46, 50, 53, 54, 56, 70, 72, 78 |
14 (1) 28, 30 (2) 38, 44 (2) 48 |
15 (1) 30, 32 (2) 40, 46 (2) 50, 56 |
16 (1) 32, 34 (2) 42, 50 (2) 52 |
17 (1) 34, 36 (2) 44, 52 (2) 54, 62 |
18 (1) 36, 38 (2) 46, 56 |
19 (1) 38, 40 (2) 48, 58, 68 (2) 76, 79 (1) 81 |
20 (1) 40, 42 (2) 50, $*$, 72 (2) 80, 82 (1) 85, 105, 113 |
↓21 (1) 42, 44 (2) 52, $*$, 76 (2) 84, 86 (1) 89, 110, 119 |

. . . .

$s = 10$ 1 (1) 10, 12 (1) 24, 26 (2) 34, 37 (2) 45, 49, 51, 52, 55 (2) 59, 63 |
13 (1) 26, 28 (2) 36, 40 (2) 48, 51, 52, 53, 57, 59, 70 |
14 (1) 28, 30 (2) 38, 43 (2) 49 |
15 (1) 30, 32 (2) 40, 46 (2) 52, 57 (1) 60, 63 |
16 (1) 32, 34 (2) 42, 49 (2) 53 |
17 (1) 34, 36 (2) 44, 52 (2) 56, 63 (1) 68 |
18 (1) 36, 38 (2) 46, 55 (2) 57, 66 |
19 (1) 38, 40 (2) 48, 58 (2) 60, 69 (1) 72, 74, 76, 81 (2) 85 |
20 (1) 40, 42 (2) 50, 61 |
21 (1) 42, 44 (2) 52, 64 |
22 (1) 44, 46 (2) 54, 78 (2) 88, 89 |
↓23 (1) 46, 48 (2) 56, 82 (2) 92, 93 |

. . . .

$s = 11$ 1 (1) 11, 13 (1) 26, 28 (2) 38, 40 (2) 48, 56, 58, 61 (2) 71 |
14 (1) 28, 30 (2) 40, 44 (2) 52 |
15 (1) 30, 32 (2) 42, 46 (2) 54, 58 61, 62, 64, 67, 74, 80, 86, 90 |
16 (1) 32, 34 (2) 44, 50 (2) 56 |
17 (1) 34, 36 (2) 46, 52 (2) 58, 64 |
18 (1) 36, 38 (2) 48, 56 (2) 60 |
19 (1) 38, 40 (2) 50, 58 (2) 62, 70 |
20 (1) 40, 42 (2) 52, 62 (2) 64 |
21 (1) 42, 44 (2) 54, 64 (2) 66, 67 |
22 (1) 44, 46 (2) 56, 68 |
23 (1) 46, 48 (2) 58, 70, 82 (2) 92, 94 (1) 97 |
24 (1) 48, 50 (2) 60, $*$, 86 (2) 96, 98 (1) 101 |
25 (1) 50, 52 (2) 62, $*$, 90 (2) 100, 102 (1) 105 |

. . . .

$s = 12$ 1 (1) 12, 14 (1) 28, 30 (2) 40, 43 (2) 53, 57 (1) 59, 63, (2) 71 |
15 (1) 30, 32 (2) 42, 46 (2) 56, 59 (1) 60, 63 (2) 69, 75, 88 |
16 (1) 32, 34 (2) 44, 49 (2) 57 |
17 (1) 34, 36 (2) 46, 52 (2) 60, 65 (1) 68, 71, 73, 90, 96 |
18 (1) 36, 38 (2) 48, 55 (2) 61 |
19 (1) 38, 40 (2) 50, 58 (2) 64, 71 (1) 76 |
20 (1) 40, 42 (2) 52, 61 (2) 65, 74 |
21 (1) 42, 44 (2) 54, 64 (2) 68, 77 (1) 82, 84 |
22 (1) 44, 46 (2) 56, 67 (2) 69, 80, 81 |
23 (1) 46, 48 (2) 58, 70 (2) 72, 83 (1) 86, 88 (2) 92 |
24 (1) 48, 50 (2) 60, 73 |
25 (1) 50, 52 (2) 62, 76 |
26 (1) 52, 54 (2) 64, 92 (2) 104, 105 |
27 (1) 54, 56 (2) 66, 96 (2) 108, 109 |

. . . .

$s = 13$ 1 (1) 13, 15 (1) 30, 32 (2) 40, 42 (2) 60, 64, 69 (2) 79, 98 |
16 (1) 32, 34 (2) 44, 45, 50 (2) 60 |

17 (1) 34, 36 (2) 48, 52 (2) 62, 66, 69, 70, 72, 75, 77, 84, 96, 98, 104, 106 |

18 (1) 36, 38 (2) 50, 56 (2) 64 |

19 (1) 38, 40 (2) 52, 58 (2) 66, 72 |

20 (1) 40, 42 (2) 54, 62 (2) 68 |

21 (1) 42, 44 (2) 56, 64 (2) 70, 78 |

22 (1) 44, 46 (2) 58, 68 (2) 72 |

23 (1) 46, 48 (2) 60, 70 (2) 74, 84 |

24 (1) 48, 50 (2) 62, 74 (2) 76 |

25 (1) 50, 52 (2) 64, 76 (2) 78, 90 |

26 (1) 52, 54 (2) 66, 80 |

27 (1) 54, 56 (2) 68, 82, 96 (2) 108, 111, 112, 113 |

28 (1) 56, 58 (2) 70, $*$, 100 (2) 112, 114 (1) 117 |

29 (1) 58, 60 (2) 72, $*$, 104 (2) 116, 118 (1) 121 |

. . . .

$s = 14$ 1 (1) 14, 16 (1) 32, 34 (2) 46, 49 (2) 61, 65, 66, 68, 71 (2) 81 |

17 (1) 34, 36 (2) 48, 52 (2) 64, 67 (2) 79 |

18 (1) 36, 38 (2) 50, 55 (2) 65 |

19 (1) 38, 40 (2) 52, 58 (2) 68, 73 (1) 76, 79 (2) 83, 90, 92, 95, 110 |

20 (1) 40, 42 (2) 54, 61 (2) 69 |

21 (1) 42, 44 (2) 56, 64 (2) 72, 79 (1) 84, 87 |

22 (1) 44, 46 (2) 58, 67 (2) 73, 82 |

23 (1) 46, 48 (2) 60, 70 (2) 76, 85 (1) 92 |

24 (1) 48, 50 (2) 62, 73 (2) 77 |

25 (1) 50, 52 (2) 64, 76 (2) 80, 91 (1) 96, 98, 100 |

26 (1) 52, 54 (2) 66, 79 (2) 81 |

27 (1) 54, 56 (2) 68, 82 (2) 84, 97 (1) 100, 102 (2) 108 |

28 (1) 56, 58 (2) 70, 85 |

29 (1) 58, 60 (2) 72, 88, 103 (1) 104, 106 (2) 116 |

30 (1) 60, 62 (2) 74, $*$, 106 (1) 120, 121 |

31 (1) 62, 64 (2) 76, $*$, 110 (1) 124, 125 |

. . . .

$s = 15$ 1 (1) 15, 17 (1) 34, 36 (2) 50, 52 (2) 68, 72, 75 (2) 89 |
18 (1) 36, 38 (2) 52, 56 (2) 68 |
19 (1) 38, 40 (2) 54, 58 (2) 70, 74, 77, 78, 80, 83, 85, 87, 96, 104, 112, 114, 116, 120, 122 |
20 (1) 40, 42 (2) 56, 62 (2) 72 |
21 (1) 42, 44 (2) 58, 64 (2) 74, 80 |
22 (1) 44, 46, (2) 60, 68 (2) 76 |
23 (1) 46, 48 (2) 62, 70 (2) 78, 86 |
24 (1) 48, 50 (2) 64, 74 (2) 80 |
25 (1) 50, 52 (2) 66, 76 (2) 82, 92 |
26 (1) 52, 54 (2) 68, 80 (2) 84 |
27 (1) 54, 56 (2) 70, 82 (2) 86, 98 |
28 (1) 56, 58 (2) 72, 86 (2) 88 |
29 (1) 58, 60 (2) 74, 88 (2) 90, 104 |
30 (1) 60, 62 (2) 76, 92 |
31 (1) 62, 64 (2) 78, 94, 110 (2) 124, 127 (1) 129 |
32 (1) 64, 66 (2) 80, * 114 (2) 128, 130 (1) 133 |
33 (1) 66, 68 (2) 82, * 118 (2) 132, 134 (1) 137 |
. . . .

APPENDICE III: Suite (1, 2, 9)

$1778n +$ [9 (2) 27, 31 (4) 47, 49, 55, 57, 63, 65, 69, 71, 73, 77, 79, 81, 85, 87, 101, 103, 107, 109, 117, 119, 123, 125, 129, 131, 133, 135, 139, 141, 145, 147, 151, 155, 157, 161, 163, 167, 169, 175, 181, 187, 195, 197, 199, 207, 209, 211, 213, 217, 227, 231, 237, 239, 241, 243, 245, 251, 253, 255, 259, 263, 271, 275, 277, 283, 285, 287, 289, 295, 303, 307, 315, 317, 319, 321, 327, 329, 331, 333, 337, 341, 343, 345, 349, 353, 355, 361, 365, 367, 373, 381, 383, 387, 389, 391, 401, 407, 411, 413, 415, 417, 419, 427, 429, 433, 437, 447, 453, 455, 467, 469, 471, 475, 477, 479, 481, 483, 485, 489, 495, 499, 503, 509, 511, 513, 519, 521, 529, 533, 535, 537, 541, 543, 545, 547, 553, 557, 559, 563, 567, 569, 571, 577, 583, 585, 589, 597, 599, 601, 605, 607, 617, 621, 623, 627, 629, 631, 633, 635, 641, 647, 651, 655, 657, 659, 667, 669, 675, 679, 681, 683, 685, 689, 691, 693, 699, 703, 709, 713, 715, 717, 723, 725, 727, 733, 737, 739, 741, 745, 753, 755, 759, 765, 767, 769, 771, 775, 777, 785, 789, 795, 805, 807, 815, 817, 819, 821, 823, 827, 829, 831, 833, 837, 841, 847, 851, 857, 859, 867, 869, 877, 887, 897, 899, 901, 903, 905, 917, 921, 925, 927, 929, 931, 933, 935, 941, 943, 947, 951, 955, 957, 959, 963, 965, 971, 973, 977, 983, 991, 997, 999, 1001, 1011, 1013, 1015, 1019, 1031, 1035, 1037, 1051, 1053, 1057, 1059, 1061, 1063, 1065, 1067, 1069, 1073, 1075, 1079, 1083, 1087, 1093, 1099, 1101, 1107, 1109, 1111, 1119, 1127, 1131, 1133, 1135, 1137, 1147, 1149, 1153, 1157, 1159, 1161, 1163, 1165, 1169, 1171, 1177, 1181, 1185, 1187, 1191, 1193, 1195, 1201, 1203, 1207, 1209, 1213, 1221, 1227, 1233, 1235, 1237, 1239, 1247, 1249, 1251, 1255, 1259, 1261, 1263, 1265, 1269, 1275, 1277, 1281, 1285, 1287, 1295, 1301, 1303, 1307, 1309, 1311, 1313, 1321, 1327, 1331, 1341, 1343, 1345, 1351, 1353, 1355, 1357, 1359, 1363, 1371, 1375, 1379, 1381, 1391, 1393, 1399, 1411, 1419, 1421, 1423, 1425, 1427, 1429, 1439, 1443, 1447, 1459, 1461, 1467, 1469, 1471, 1473, 1475, 1477, 1481, 1483, 1485, 1489, 1493, 1497, 1499, 1503, 1509, 1511, 1517, 1523, 1525, 1527, 1531, 1533, 1535, 1543, 1547, 1549, 1553, 1563, 1565, 1569, 1571, 1583, 1589, 1603, 1605, 1607, 1623, 1627, 1629, 1631, 1633, 1635, 1637, 1639, 1641, 1647, 1651, 1655, 1659, 1667, 1669, 1675, 1677, 1687, 1695, 1707, 1709, 1711, 1713, 1727, 1731, 1747, 1749, 1767] $\oplus$ 2,20