Available online at www.sciencedirect.com

ScienceDirect

Linear Algebra and its Applications 418 (2006) 657–664

LINEAR ALGEBRA AND ITS APPLICATIONS

www.elsevier.com/locate/laa

Les algèbres de Lie résolubles rigides réelles ne sont pas nécessairement complètement résolubles ☆

J.M. Ancochea Bermúdez, R. Campoamor-Stursberg *, L. García Vergnolle

Dpto. Geometría y Topología, Facultad CC. Matemáticas, U.C.M. Plaza de Ciencias 3, E-28040 Madrid, Spain

Received 13 October 2005; accepted 28 February 2006
Available online 27 April 2006
Submitted by R.A. Brualdi

Résumé

On montre qu'une algèbre de Lie résoluble rigide réelle n'est pas nécessairement complètement résoluble. On construit un exemple $\mathfrak{n} \oplus \mathfrak{t}$ de dimension minimale dont le tore extérieur $\mathfrak{t}$ n'est pas formé par des dérivations ad-semi-simples sur $\mathbb{R}$. Nous étudions les formes réelles des nilradicaux des algèbres de résolubles rigides en dimension $n \leqslant 7$ et donnons la classification des algèbres résolubles rigides sur $\mathbb{R}$ en dimension 8.

AMS classification: 17B30; 17B56

Keywords: Algèbre de Lie; Rigide; Complètement résoluble; Formes réelles

1. Preliminaries

Rappellons qu'une algèbre de Lie $\mathfrak{g}$ sur un corps $\mathbb{K}$ de caractéristique 0 est dite rigide lorsque son orbite dans le schéma L_n donné par les rélations de Jacobi sur la famille des lois d'algèbres

☆ Les auteurs ont été supportés par le projet de recherche PR1/05-13283 de la UCM. Le troisième auteur (L.G.V.) a été supporté par une bourse prédoctorale de la Fundación Ramón Areces.

* Corresponding author.
E-mail addresses: ancochea@mat.ucm.es (J.M. Ancochea Bermúdez), rutwig@mat.ucm.es (R. Campoamor-Stursberg), lucigarcia@mat.ucm.es (L.G. Vergnolle).

0024-3795/$ - see front matter
doi:10.1016/j.laa.2006.02.033

de Lie sur $\mathbb{K}^n$ est ouverte sous l'action du groupe $GL(n, \mathbb{K})$. Si $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g})$ est le deuxième groupe de cohomologie à valeurs dans le module adjoint, le critère de rigiditè de Nijenhuis et Richardson [11] donne une condition suffisante: si $H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0$, alors l'algèbre $\mathfrak{g}$ est rigide dans L_n. Dans [6], on montre que sur un corps $\mathbb{K}$ algébriquement clos de caractéristique 0, toute algèbre de Lie résoluble rigide vérifie la décomposition suivante:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{t},$$

où $\mathfrak{n}$ est le nilradical de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre abélienne dont les éléments sont $\mathrm{ad}_{\mathfrak{g}}$-semi-simples, appelé tore extérieur de $\mathfrak{g}$. En utilisant cette propriété, on peut développer une théorie de racines qui permet classifier les algébres de Lie résolubles rigides complexes par rapport au spectre du tore extérieur.

Définition 1. Un élément $X \in \mathfrak{t}$ est dit régulier si la dimension du noyau $\ker \mathrm{ad}(X)$ est minimale.

Comme $\mathrm{ad}(X)$ est diagonalisable et le nilradical est invariant par cet opérateur, on peut trouver une base $\{X_1, \ldots, X_n = X\}$ de vecteurs propres telle que $\{X_1, \ldots, X_{p+q}\}$ soit une base de $\mathfrak{n}$, $\{X_{p+q+1}, \ldots, X_n = X\}$ soit une base de $\mathfrak{t}$ et $\{X_{p+1}, \ldots, X_n = X\}$ une base de $\ker \mathrm{ad}(X)$. Alors on considère le système linéaire de racines S à $\dim \mathfrak{g} - 1$ variables x_i dont les équations sont $x_i + x_j = x_k$ si la composante du vecteur $[X_i, X_j]$ sur X_k est non nulle. De cette façon, on obtient un critère de rigidité:

Proposition 1 [1]. *Si $\mathfrak{g}$ est rigide, alors pour tout vecteur régulier X on a* $\mathrm{rank}(S) = \dim \mathfrak{n} - 1$.

En utilisant ce système, on a classifié les algèbres de Lie résolubles rigides complexes jusqu'à dimension huit [1]. De plus, cette propriété linéaire implique une autre d'ordre structurale:

Définition 2. Une algèbre de Lie $\mathfrak{r}$ de dimension n est dite complètement résoluble s'il existe une suite décroissante d'idéaux

$$\mathfrak{g} = I_0 \supset I_1 \supset \cdots I_{n-1} \supset I_n = 0$$

telle que $\dim_{\mathbb{K}} I_k/I_{k+1} = 1$ pour tout $k = 0, \ldots, n-1$.

En particulier, toute algébre complètement résoluble est résoluble, et sur un corps algébriquement fermé, la résolubilité et la résolubilité complète sont des propriétés équivalentes [8]. Ceci implique que toute algèbre de Lie résoluble rigide complexe est complètement résoluble.

Dans [2] on a montré l'existence des algèbres de Lie rigides complexes non-réelles. D'après le théorème du rang, ça implique que le tenseur de structure du nilradical n'est pas réel, c'est-à-dire, le nilradical n'admet pas des formes réelles.[1] On appellera une algèbre de Lie complexe sans formes réelles purement complexe.

Proposition 2. *Toute algèbre de Lie résoluble rigide complexe $\mathfrak{g} = \mathfrak{n} \oplus \mathfrak{t}$ dont le nilradical n'est pas purement complexe admet des formes réelles.*

[1] Rappellons qu'une forme réelle d'une algèbre de Lie complexe $\mathfrak{g}$ est une algèbre réelle $\mathfrak{g}'$ telle que $\mathfrak{g}' \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g}$.

La preuve est immédiate. En effet, si le nilradical n'est pas purement complexe, alors les constantes de structure de $\mathfrak{n}$ sont réelles. Par le théorème du rang, on peut trouver des générateurs du tore extérieur ayant des valeurs propres entières. Alors la restriction par scalaires donne une algèbre de Lie réelle, appelée la forme réelle normale. De plus, toute autre forme réelle $(\mathfrak{n}' \oplus \mathfrak{k})$ possède au moins un générateur $X \in \mathfrak{k}$ tel que $\mathrm{ad}(X)$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, mais $X \in \mathfrak{t}$ vu comme générateur de l'algèbre complexifiée.

2. L'exemple

Dans ce paragraphe on montre, par construction d'un exemple, que pour les algèbres de Lie réelles résolubles rigides la propriété de résolubilité complète ne reste pas valable si la forme réelle n'est pas la normale, c'est-à-dire, la forme obtenue par restriction de scalaires. L'exemple construit est aussi de dimension minimale.

Considérons les lois d'algèbres de Lie nilpotentes $\mathfrak{g}_1 = (\mathbb{R}^6, \mu_1)$ et $\mathfrak{g}_2 = (\mathbb{R}^6, \mu_2)$ définies dans une base $\{X_1, \ldots, X_6\}$ par les crochets:

$$\begin{aligned} &\mu_1(X_1, X_i) = X_{i+1} \ \ (2 \leqslant i \leqslant 4), \quad \mu_1(X_3, X_2) = X_6, \quad \mu_1(X_6, X_2) = X_5, \\ &\mu_2(X_1, X_i) = X_{i+1} \ \ (2 \leqslant i \leqslant 4), \quad \mu_2(X_3, X_2) = -X_6, \quad \mu_2(X_6, X_2) = X_5. \end{aligned}$$

Les algèbres ne sont pas isomorphes, et correspondent aux classes d'isomorphisme $N_{6,6}$ et $N_{6,7}$ de la liste [7]. Si on considère le produit tensoriel, on a $\mathfrak{g}_1 \otimes \mathbb{C} \simeq \mathfrak{g}_2 \otimes \mathbb{C}$.

Lemme 1. *L'algèbre $\mathfrak{g}_1 = (\mathbb{R}^6, \mu_1)$ admet une dérivation diagonalisable f_1^1 et une dérivation non-nilpotente f_1^2 données respectivement par*

$$\begin{aligned} &f_1^1(X_i) = X_i \ \ (i = 1, 2), \quad f_1^1(X_i) = (i-1)X_i \ \ (i = 3, 4, 5), \quad f_1^1(X_6) = 3X_6, \\ &f_1^2(X_1) = X_2, \quad f_1^2(X_2) = -X_1, \quad f_1^2(X_4) = -X_6. \quad f_1^2(X_6) = X_4. \end{aligned}$$

sur la base $\{X_1, \ldots, X_6\}$. De plus, $f_1^1 \circ f_1^2 = f_1^2 \circ f_1^1$.

C'est facile de voir que toute dérivation non nilpotente de l'algèbre $(\mathbb{R}^6, \mu_1)$ fait intervenir une combinaison linéaire des dérivations f_1^1 et f_1^2. Comme le polynôme caractéristique de f_1^2 sur la base donnée est $P(T) = T^2(T^2 + 1)^2$, cette dérivation n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$. De cette façon, on obtient une algèbre abelienne $\mathfrak{t} \in \mathrm{Der}(\mathfrak{g}_1)$ constituée par dérivations non nilpotentes, mais dont seulement une est diagonalisable.

Lemme 2. *L'algèbre $\mathfrak{g}_2 = (\mathbb{R}^6, \mu_2)$ admet un tore exterieur $\mathfrak{t}$ de rang 2.*

Toute dérivation non nilpotente de l'algèbre $(\mathbb{R}^6, \mu_2)$ fait intervenir une combinaison linéaire des dérivations

$$\begin{aligned} &g_1^1(X_i) = X_i \ \ (i = 1, 2), \quad g_1^1(X_i) = (i-1)X_i \ \ (i = 3, 4, 5), \quad g_1^1(X_6) = 3X_6, \\ &g_1^2(X_1) = X_2, \quad g_1^2(X_2) = X_1, \quad g_1^2(X_4) = X_6, \quad g_1^2(X_6) = X_4. \end{aligned}$$

C'est immédiat que les dérivations sont diagonalisables, et sur la base de vecteurs propres

$$\Big\{X_1' = \tfrac{1}{2}(X_1 + X_2), \quad X_2' = \tfrac{1}{2}(X_2 - X_1), \quad X_3' = \tfrac{1}{2}X_3, \quad X_4' = \tfrac{1}{4}(X_4 - X_6), \\ X_5' = \tfrac{1}{4}(X_6 + X_4), \quad X_6' = \tfrac{1}{4}X_5\Big\}$$

on obtient les crochets

$$\mu_2(X'_1, X'_i) = X'_{i+1} \ (i = 2, 3, 5), \quad \mu_2(X'_3, X'_2) = -X'_5, \quad \mu_2(X'_2, X'_4) = X'_6.$$

Les valeurs propres des dérivations g_1^1 et g_1^2 sont, respectivement

$$\sigma(g_1^1) = (1, 1, 2, 3, 3, 4),$$
$$\sigma(g_1^2) = (-1, 1, 0, -1, 1, 0).$$

Pour commodité, on considère les dérivations $f_2^1 = \frac{1}{2}(3g_1^1 + g_1^2)$ et $f_2^2 = \frac{1}{2}(g_1^1 + g_1^2)$. Pour cette base du tore $\mathfrak{t}$, les valeurs propres sont:

$$f_2^1(X'_i) = iX'_i \ (1 \leqslant i \leqslant 6),$$
$$f_2^2(X'_i) = X'_i \ (2 \leqslant i \leqslant 4), \quad f_2^2(X'_i) = 2X'_i \ (i = 5, 6).$$

Soient $\hat{\mathfrak{g}}_1 = (\mathbb{R}^8, \hat{\mu}_1)$ et $\hat{\mathfrak{g}}_2 = (\mathbb{R}^8, \hat{\mu}_2)$ les algèbres résolubles non nilpotentes définies par

$$\hat{\mu}_1(X_1, X_i) = X_{i+1} \ (2 \leqslant i \leqslant 4), \quad \hat{\mu}_1(X_3, X_2) = X_6, \quad \hat{\mu}_1(X_6, X_2) = X_5,$$
$$\hat{\mu}_1(X_7, X_i) = X_i \ (i = 1, 2), \quad \hat{\mu}_1(X_7, X_3) = 2X_3, \quad \hat{\mu}_1(X_7, X_5) = 4X_5,$$
$$\hat{\mu}_1(X_7, X_i) = 3X_i \ (i = 4, 6), \quad \hat{\mu}_1(X_8, X_1) = X_2, \quad \hat{\mu}_1(X_8, X_2) = -X_1,$$
$$\hat{\mu}_1(X_8, X_4) = -X_6, \quad \hat{\mu}_1(X_8, X_6) = X_4.$$

$$\hat{\mu}_2(X_1, X_i) = X_{i+1} \ (i = 2, 3, 5), \quad \hat{\mu}_2(X_3, X_2) = -X_5, \quad \hat{\mu}_2(X_2, X_4) = X_6,$$
$$\hat{\mu}_2(X_7, X_i) = X_i, \ \ 1 \leqslant i \leqslant 6, \quad \hat{\mu}_2(X_8, X_i) = X_i \ (i = 2, 3, 4),$$
$$\hat{\mu}_2(X_8, X_i) = 2X_i \ (i = 5, 6).$$

sur une base $\{X_1, \ldots, X_8\}$. On observe que le nilradical de $\hat{\mathfrak{g}}_i$ est isomorphe à $\mathfrak{g}_i$ pour $i = 1, 2$. Pour la deuxième algèbre, nous utilisons une base de vecteurs propres de $\mathfrak{g}_2$.

Lemme 3. *Les algèbres $\hat{\mathfrak{g}}_1 \otimes \mathbb{C} \simeq \hat{\mathfrak{g}}_2 \otimes \mathbb{C}$ sont isomorphes. De plus, l'algèbre $\hat{\mathfrak{g}}_1 \otimes \mathbb{C}$ est rigide à cohomologie nulle.*

En effet, l'algèbre $\hat{\mathfrak{g}}_1 \otimes \mathbb{C}$ coïncide avec l'algèbre résoluble rigide $\mathfrak{r}_8^{22}$ de la liste [9]. En particulier, il en résulte que $H^2(\mathfrak{g}_1 \otimes \mathbb{C}, \mathfrak{g}_1 \otimes \mathbb{C}) = 0$.

Théorème 1. *Les algèbres de Lie $\hat{\mathfrak{g}}_1$ et $\hat{\mathfrak{g}}_2$ sont rigides complètes sur $\mathbb{R}$. De plus, $\hat{\mathfrak{g}}_1$ n'est pas complètement résoluble.*

Démonstration. D'après le Lemme 3, l'algèbre complexifiée $\hat{\mathfrak{g}}_2 \otimes \mathbb{C}$ de $\hat{\mathfrak{g}}_2$ est rigide et satisfait $H^2(\hat{\mathfrak{g}}_2 \otimes \mathbb{C}, \hat{\mathfrak{g}}_2 \otimes \mathbb{C}) = 0$. D'après les propriétés de la cohomologie, le deuxième groupe de cohomologie de $\hat{\mathfrak{g}}_1$ et $\hat{\mathfrak{g}}_1$ est aussi nul, ce qui montre la rigidité en applicant le théorème de rigidité de Nijenhuis et Richardson. Considérons l'opérateur adjoint $\mathrm{ad}_{\hat{\mu}_1}(X_8)$. Sur la base $\{X_1, \ldots, X_8\}$, cet opérateur est donné par la matrice

$$\mathrm{ad}_{\hat{\mu}_1}(X_8) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

et comme le polynôme minimal est $m(T) = T + T^3$, $\mathrm{ad}_{\hat{\mu}_1}(X_8)$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$, alors l'algèbre n'est pas complétement résoluble.
D'un autre côté, l'algèbre $\hat{\mathfrak{g}}_2$ et l'algèbre r_8^{22} dans [9] ont les mêmes constantes de structure, ce qui prouve que cette forme réelle est la normale. La complètude est une conséquence de la suite bien connue [6]:

$$\dim \mathrm{Der}(\mathfrak{g}) = \dim \mathfrak{g} + \dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}),$$

et la nullité du groupe de cohomologie. □

L'algèbre $\hat{\mathfrak{g}}_1$ admet une décomposition $\hat{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{g}_1 \overrightarrow{\oplus} \mathfrak{t}$, où $\mathfrak{t}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathrm{Der}\,\mathfrak{g}_1$ générée par X_7 et X_8. Cependant, tout vecteur de $\hat{\mathfrak{g}}_1$ qui soit ad-semi-simple fait intervenir une combinaison linéaire des vecteurs X_7 et X_8, et comme $\mathrm{ad}_{\hat{\mu}_1}(X_8)$ n'est pas diagonalisable, la seule possibilité c'est considérer des multiples du vecteur X_7. De cette façon, au contraire que dans le cas complexe, l'algèbre $\hat{\mathfrak{g}}_1$ n'admet pas une décomposition du type $\hat{\mathfrak{g}}_1 = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{k}$, où $\mathfrak{k}$ est une sous-algèbre abélienne de $\mathrm{Der}(\mathfrak{g}_1)$ générée par des éléments ad-semi-simples. Dans ce cas l'algèbre $\mathfrak{t}$ joue le rôle du tore maximal de dérivations et tout système linéaire de racines associé au vecteur régulier X_7 est de corang 1 et $\dim \mathfrak{t} = 2$. Cette remarque montre que, pour couvrir le cas réel, la théorie des systèmes linéaires obtenue en [1], ainsi comme les notions du graphe des poids [3,5], doient être modifiées. En particulier, on obtient le critère suivant:

Proposition 3. *Soit $\mathfrak{g}$ une algèbre de Lie résoluble rigide complexe. Alors seulement la forme réelle normale $\mathfrak{g}_{\mathbb{R}}$ est complètement résoluble.*

Démonstration. En effet, si $\mathfrak{g}$ admet des formes réelles, la forme normale a les mêmes constantes de structure, alors elle est complètement résoluble. Comme en tout cas la partie nilpotente a des constantes de structure sur $\mathbb{R}$, si la forme réelle $\mathfrak{g}'$ n'est pas la normale, alors son nilradical possède une dérivation non diagonale sur $\mathbb{R}$ mais sur $\mathbb{C}$ qui appartient au tore extérieur. En conséquence, $\mathfrak{g}'$ n'est pas complètement résoluble. □

3. Sur la classification réelle jusqu'à dimension 8

Soit $\mathfrak{g}$ algèbre de Lie réelle. Alors on a $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = \dim H^2(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}, \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C})$, étant donné que les coefficients du système qui donne les cocycles est à coefficients réels. Alors on peut établir l'équivalence suivante:

$$H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = 0 \;\Leftrightarrow\; H^2(\mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}, \mathfrak{g} \otimes \mathbb{C}) = 0.$$

Comme conséquence, pour les algèbres algébriquement rigides,[2] une algèbre qui ne soit pas purement complexe est rigide si et seulement si les formes réelles sont rigides. On peut prouver facilement que pour dimension $n \leqslant 8$, toute algèbre de Lie rigide sur $\mathbb{C}$ est à cohomologie nulle. Alors, pour obtenir une classification réelle, il suffit d'ajouter les formes réelles correspondantes. Comme en dimension $n \leqslant 5$ la classification des algèbres de Lie nilpotentes sur $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$ coïncide, toute algèbre résoluble rigide réelle s'appuie sur des nilradicaux complexes. L'exemple antérieur montre que en dimension 8, la classification réelle diffère de la complexe.

Proposition 4. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie résoluble algébriquement rigide de dimension* 8 *réelle dont le tore contient au moins une dérivation non-diagonale. Alors le nilradical* $\mathfrak{n}$ *est de dimension* $m \leqslant 6$.

Démonstration. Soit $\mathfrak{g}$ de rang 1, c'est-à-dire, $\dim \mathfrak{n} = 7$. Comme tout espace complémentaire de $\mathfrak{n}$ dans $\mathfrak{g}$ est de dimension 1, généré par un vecteur X, et l'opérateur $\mathrm{ad}(X)$ n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (mais sur $\mathbb{C}$), les valeurs propres de $\mathrm{ad}(X)$ sont purement imaginaires ou zéro. En effet, la forme de Jordan réelle de $\mathrm{ad}(X)$ restreint au nilradical est une matrice du type

$$\mathrm{ad}(X) \sim \begin{pmatrix} \lambda_1 & a_1 & & & & & & \\ -a_1 & \lambda_1 & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & \\ & & & \lambda_k & a_k & & & \\ & & & -a_k & \lambda_k & & & \\ & & & & & b_1 & & \\ & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & b_s \end{pmatrix},$$

où $k \geqslant 1$ et $\lambda_i, a_i, b_i \in \mathbb{R}$. Par la dimension impaire de $\mathfrak{n}$ il existe au moins un valeur propre réel. D'après la proposition 1, pour toute algèbre de Lie résoluble complexe rigide il existe une base $\{X_1, \dots, X_r\}$ du tore extérieur $\mathfrak{t}$ telle que les valeurs propres des opérateurs adjointes sont des entières. En effet, étant donnée une base $\{Y_1, \dots, Y_r\}$ de $\mathfrak{t}$, les valeurs propres des opérateurs $\mathrm{ad}(Y_j)$ sont des solutions du système $S(X)$. Comme celui-ci est à coefficient entiers, il existe une base de solutions rationelles, et pourtant on peut trouver une base de solutions entières. En conséquence, ils sont tous réels ou imaginaires pures, d'où $\lambda = 0$ est nécessairement un valeur propre du opérateur $\mathrm{ad}(X)$. Alors l'algèbre rigide complexifiée admet zéro comme poid. D'après la classification de [1], une algèbre de Lie résoluble de rang un admettant $\lambda = 0$ comme poid ne peut pas être rigide, d'où l'affirmation. □

Proposition 5. *Soit* $\mathfrak{g}$ *une algèbre de Lie réelle résoluble et algèbriquement rigide de dimension* 8. *Alors* $\mathfrak{g}$ *est isomorphe à l'une des formes réelles des algèbres* $(\mathfrak{r}_{8,i})$ *de la liste* [9], *où à l'une des formes réelles suivantes si le nilradical* $\mathfrak{n}$ *de* $\mathfrak{g}$ *admet plus d'une forme réelle*:

– $\mathfrak{r}_{8,22}^2 = \hat{\mathfrak{g}}_1$:

$$[X_1, X_i] = X_{i+1} \ (2 \leqslant i \leqslant 4), \quad [X_3, X_2] = X_6, \quad [X_6, X_2] = X_5,$$
$$[X_7, X_i] = X_i \ \ (i = 1, 2), \quad [X_7, X_3] = 2X_3, \quad [X_7, X_5] = 4X_5,$$

[2] On appelle une algèbre algébriquement rigide si elle satisfait le critère de Nijenhuis et Richardson (voir [11]).

$$[X_7, X_i] = 3X_i \ \ (i = 4, 6), \quad [X_8, X_1] = X_2, \quad [X_8, X_2] = -X_1,$$
$$[X_8, X_4] = -X_6, \quad [X_8, X_6] = X_4.$$

– $\mathfrak{r}^2_{8,29}$:

$$[X_1, X_i] = X_{i+2} \ \ (2 \leqslant i \leqslant 4), \quad [X_2, X_3] = X_6, \quad [X_2, X_4] = -X_5,$$
$$[X_7, X_i] = X_i \ \ (i = 1, 2), \quad [X_7, X_i] = 2X_i \ \ (i = 3, 4),$$
$$[X_7, X_i] = 3X_i \ \ (i = 5, 6), \quad [X_8, X_1] = X_2, \quad [X_8, X_2] = -X_1,$$
$$[X_8, X_5] = X_6, \quad [X_8, X_6] = -X_5.$$

Démonstration. Comme les algèbres résolubles rigides complexes de dimension $n \leqslant 8$ sont rationelles, alors les formes réelles des classes d'isomorphisme $\mathfrak{r}_{8,i}$ de la liste [9] sont rigides. D'après la remarque antérieure, il suffit déterminer les formes reélles des algèbres nilpotentes qui apparaissent comme nilradical d'une algèbre de Lie résoluble complexe rigide en dimension 8 et possèdent des dérivations non diagonales sur $\mathbb{R}$. Ça implique que la dimension du nilradical est 6 ou 7, mais par la proposition 5, la dimension ne peut pas être 7. Le problème est alors réduit à voir les formes réelles des algèbres nilpotentes complexes de dimension 6. Parmi ces algèbres, seulement $\mathcal{N}_{6,6} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{N}_{6,7} \otimes \mathbb{C}$ et $\mathcal{N}_{6,12} \otimes \mathbb{C} \simeq \mathcal{N}_{6,14} \otimes \mathbb{C}$ aparaissant comme des nilradicaux des algèbres de Lie rigides complexes $\mathfrak{r}_{8,22}$ et $r_{8,29}$ de la liste [9], où les algèbres $\mathcal{N}_{6,6}$, $\mathcal{N}_{6,7}$, $\mathcal{N}_{6,12}$ et $\mathcal{N}_{6,14}$ sont défnies par les crochets:

1. $\mathcal{N}_{6,12}$:

$$[X_1, X_2] = X_4, \quad [X_1, X_3] = X_5, \quad [X_1, X_4] = X_5, \quad [X_2, X_4] = X_6.$$

2. $\mathcal{N}_{6,14}$:

$$[X_1, X_2] = X_4, \quad [X_1, X_3] = X_5, \quad [X_1, X_4] = X_6, \quad [X_2, X_3] = X_6,$$
$$[X_2, X_4] = -X_5.$$

Les algèbres $\mathcal{N}_{6,6}$ et $\mathcal{N}_{6,7}$ sont celles employées dans l'exemple de la section 2. L'algèbre $\mathcal{N}_{6,12}$ admet un tore extérieur $\mathfrak{t}$ de dimension 2, et la somme semi-directe $\mathcal{N}_{6,12} \overrightarrow{\oplus} \mathfrak{t}$ est isomorphe à l'algèbre $\mathfrak{r}_{8,29}$ de [9]. L'algèbre $\mathcal{N}_{6,14}$ admet seulement une dérivation diagonalisable, et une nondiagonalisable. La somme semi-directe correspond à $\mathfrak{r}^2_{8,29}$. $\square$

Remarque finale 1. On peut se poser la question si pour les algèbres de Lie complexes et réelles la rigidité se preverse par complexification et réalification (comme pour la semi-simplicité). Ici il y a deux problèmes: D'abord, on peut construire des algèbres résolubles complexes sans formes réelles (voir [2]), et la nullité de la cohomologie n'est pas une condition nécessaire. Est-ce que on peut trouver des algèbres réelles rigides $\mathfrak{g}$ sur $\mathbb{R}$ (et dont $\dim H^2(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) \neq 0$) qui ne soient pas rigides sur $\mathbb{C}$? On peut conjéturer qu'une algèbre de Lie réelle est rigide (sur le corps réel) si et seulement l'algèbre complexifiée l'est sur le corps complexe. Mais pour les algèbres avec cohomologie non nulle il nous manque d'une méthode effective qui nous permet d'étudier la rigidité. Surtout pour rang un, l'existance de formes réelles non normales équivaut a la conjecture posée dans [4] concernant l'impossibilité du poid $\lambda = 0$ dans le cas complexe.

Références

[1] J.M. Ancochea, M. Goze, Le rang du système linéaire des racines d'une algèbre de Lie rigide résoluble complexe, Comm. Algebra 20 (1992) 875–887.

[2] J.M. Ancochea, M. Goze, On the nonrationality of rigid Lie algebras, Proc. Amer. Math. Soc. 127 (1999) 2611–2618.

[3] J.M. Ancochea, R. Campoamor-Stursberg, 2-Step solvable Lie algebras and weight graphs, Transform. Groups 7 (2002) 307–320.

[4] R. Campoamor-Stursberg, Invariants of solvable rigid Lie algebras up to dimension 8, J. Phys. A: Math. Gen. 35 (2002) 6293–6306.

[5] R. Campoamor-Stursberg, A graph theoretical determination of solvable complete rigid Lie algebras, Linear Algebra Appl. 372 (2003) 53–66.

[6] R. Carles, Sur la structure des algèbres de Lie rigides, Ann. Inst. Fourier 34 (1984) 65–82.

[7] A. Cerezo, Les algèbres de Lie nilpotentes réelles et complexes de dimension 6, Prépublications Université de Nice, 1983.

[8] J. Dixmier, Algèbres enveloppantes, Gauthier-Villars, Paris, 1974.

[9] M. Goze, J.M. Ancochea, On the classification of rigid Lie algebras, J. Algebra 245 (2001) 68–91.

[10] A.I. Mal'cev, Solvable Lie algebras, Izv. Akad. Nauk SSSR 9 (1945) 329–356.

[11] A. Nijenhuis, R.W. Richardson, Deformations of Lie algebra structures, J. Math. Mech. 17 (1967) 89–105.