JOURNAL OF ALGEBRA 37, 111–120 (1975)

Eine Kennzeichnung der 2*I*-Gruppen

G. STROTH

Department of Mathematics, University of Mainz, Mainz, Germany

Communicated by B. Huppert

Received May 2, 1974

In [3] hat M. Aschbacher die kI-Gruppen definiert. Er versteht darunter Gruppen, in denen der Durchschnitt zweier verschiedener 2-Sylowgruppen stets einen 2-Rang kleiner oder gleich k hat. Weiter gibt es einen Durchschnitt, der den 2-Rang k hat. Weiter fordert er, daß der 2-Rang einer kI-Gruppe echt größer als k sei. Diese letzte Bedingung will ich weglassen. Ich definiere somit:

DEFINITION. Eine endliche Gruppe G heißt eine $2I$-gruppe, falls der Durchschnitt zweier verschiedener 2-Sylowgruppen von G stets einen 2-Rang kleiner oder gleich zwei hat und falls es einen Durchschnitt gibt, der den 2-Rang zwei hat.

Für diese Gruppen will ich den folgenden Satz beweisen:

SATZ. *Sei G eine $2I$-Gruppe, dann gilt eine der folgenden Aussagen:*

(a) *G ist auflösbar. Die Ordnung von $G/\mathbf{O}_{2',2}(G)$ teilt* 400, 120, 36 *oder ist ungerade.*

(b) *$G_1 = \mathbf{O}'(G)/\mathbf{O}(G)$ ist zu einer der folgenden Gruppen isomorph.*

(i) $L_2(q)$, *q ungerade und* $\not\equiv 3, 5\ (8)$.

(ii) $L_3(q)$, $U_3(q)$, *q ungerade.*

(iii) $G_2{}^1(q)$, $q = 3^{2n+1}$; A_7, M_{11}.

(iv) $A_5 \times A_5$, $U_3(4) \times U_3(4)$, $A_5 \times U_3(4)$.

(v) $L_2(q) < G_1 \leqslant P\Gamma L(2, q)$, *$q$ ungerade.*

(vi) $U_3(4) < G_1 \leqslant \mathrm{Aut}(U_3(4))$.

(vii) *Eine zerfallende Erweiterung einer auflösbaren Gruppe mit* $Sz(q)$, $L_2(q)$, $U_3(q)$, $q = 2^n$.

(viii) *Eine zerfallende Erweiterung einer auflösbaren Gruppe mit* J_1, $L_2(q)$, $q \equiv 3, 5\ (8)$.

(ix) *Eine nicht zerfallende Erweiterung einer auflösbaren Gruppe mit* A_7, Σ_7, $Sz(8)$.

(x) *Eine nicht zerfallende Erweiterung einer auflösbaren Gruppe mit einer Untergruppe von* $P\Gamma L_2(q)$, $\mathrm{Aut}(\mathrm{Sp}(4, q))$, $\mathrm{Aut}(L_4(q))$, $\mathrm{Aut}(U_4(q))$, q *ungerade.*

(xi) *Eine nicht zerfallende Erweiterung einer auflösbaren Gruppe mit einer Untergruppe von* $\mathrm{Aut}(L_2(q_1) \times L_2(q_2))$, $q_1, q_2 \equiv 3, 5\ (8)$.

1. Beweis von Teil (a) des Satzes

In diesem Paragraphen sei G eine auflösbare Gruppe. Weiter habe G keinen Normalteiler von ungerader Ordnung.

Lemma 1. *Die Ordnung von* $G/\mathbf{O}_2(G)$ *teilt* 400, 120, 36 *oder ist ungerade.*

Beweis. Ist G nicht 2-abgeschlossen, so ist $\mathbf{O}_2(G)$ im Durchschnitt zweier verschiedener 2-Sylowgruppen enthalten. Also ist der 2-Rang von $\mathbf{O}_2(G)$ kleiner oder gleich zwei.

Habe $\mathbf{O}_2(G)$ den 2-Rang eins. Dann ist $\mathbf{O}_2(G)$ eine Quaternionengruppe oder zyklisch. Also teilt die Ordnung von $G/\mathbf{O}_2(G)$ sechs.

Wir können also annehmen, daß $\mathbf{O}_2(G)$ den 2–Rang zwei hat. Anwendung von [10] liefert, daß $\Omega_1(\mathbf{O}_2(G))$ zu V_4, D_2n, $Z_4 \curlyvee D_2n$, $Q_2m \curlyvee D_2n$ isomorph ist.

Setze $\mathfrak{K} = ((\mathbf{C}(\Omega_1(\mathbf{O}_2(G)))\,\mathbf{O}_2(G)) \cap \mathbf{O}_{2,2'}(G))/\mathbf{O}_2(G)$. Sei $\mathfrak{K} \neq 1$. Da G auflösbar ist, ist $\mathbf{C}(\mathbf{O}_2(G))$ in $\mathbf{O}_2(G)$ enthalten. Also ist $[\mathfrak{K}, \mathbf{O}_2(G)] \neq 1$. Setze $A = [\mathfrak{K}, \mathbf{O}_2(G)]$. Anwendung von [15; Lemma (5.28)] liefert, daß A eine Quaternionengruppe von der Ordnung acht oder speziell von der Ordnung 64 ist. Also teilt die Ordnung von $\mathfrak{K}$ fünf oder drei.

Setze nun $\mathfrak{L} = \mathbf{O}_{2,2'}(G)/\mathbf{O}_2(G)$. Dann bewirkt $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}$ eine Automorphismengruppe auf $\Omega_1(\mathbf{O}_2(G))$. Also hat $\mathfrak{L}/\mathfrak{K}$ die Ordnung 1, 3, 5. Damit hat $\mathfrak{L}$ die Ordnung 3, 5, 9, 15 oder 25. Hat $\mathfrak{L}$ die Ordnung 3, 5, 15, so that $G/\mathbf{O}_2(G)$ die Ordnung 6, 10, 20, 30, 60 oder 120. Hat $\mathfrak{L}$ die Ordnung 9 oder 25, so hat $\mathfrak{K}$ die Ordnung 3 bzw. 5. Also teilt die Ordnung von $G/\mathbf{O}_2(G)$ 36 bzw. 400. Somit ist das Lemma bewiesen.

2. Beweis von Teil (b) des Satzes

Lemma 2. *Die Liste in Teil* (b) *des Satzes ist bezüglich zentraler Produkte und Erweiterungen mit auflösbaren Gruppen abgeschlossen.*

Beweis. Sei H ein minimales Gegenbeispiel. Wir betrachten zuerst Erweiterungen mit auflösbaren Gruppen. Dann hat H eine Untergruppe A

vom Index 2. Somit ist A keine TI-Gruppe. Sei nun A eine $1I$-Gruppe. Vergleich mit der Liste in [3] liefert einen Widerspruch. Also ist A eine $2I$-Gruppe, die in der Liste von Teil (b) des Satzes vorkommt.

Sei M der maximale auflösbare Normalteiler von A. Sei zunächst A/M nicht einfach. Dann ist A zu $A_5 \times A_5$, $U_3(4) \times U_3(4)$ oder $U_3(4) \times A_5$ isomorph. Sei t in H nicht in A. Da der Durchschnitt zweier 2-Sylowgruppen von H höchstens den 2-Rang zwei haben kann, muß t die beiden Komponnenten von A vertauschen. Die Gruppe A enthält eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 16. Diese wird von einer Gruppe von der Ordnung 9 normalisiert. Man kann nun t so wählen, daß t die elementar abelsche Gruppe und die Gruppe von der Ordnung 9 normalisiert. Weiter zentralisiert t die Gruppe von der Ordnung 9 nicht. Dann gibt es aber einen Durchschnitt zweier 2-Sylowgruppen, der eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 16 enthält. Das ist ein Widerspruch.

Wir können also annehmen, daß A/M einfach ist. Sei zunächst $M = 1$. Dann ist A zu $L_3(q)$, $U_3(q)$, q ungerade; $G_2{}^1(q)$, $q = 3^{2n+1}$; A_7 oder M_{11} isomorph. Sei wieder t in H nicht in A. Wähle t so, daß t eine 2-Sylowgruppe von A normalisiert. Sei A zu $L_3(q)$ oder $U_3(q)$ isomorph. Dann normalisiert t eine Vierergruppe. Also gibt es eine elementar abelsche Untergruppe von H, die die Ordnung 8 hat. Weiter enthält der Normalisator dieser Untergruppe eine $\sum_3$. Das ist aber ein Widerspruch. Ist A zu M_{11} isomorph, so erhält man genauso einen Widerspruch. Sei nun A zu $G_2{}^1(q)$ isomorph. Nach [12] werden die äußeren Automorphismen von $G_2{}^1(q)$ von Körperautomorphismen induziert. Also ist A nicht zu $G_2{}^1(q)$ isomorph. Da G nicht zu $\sum_7$ isomorph sein kann, ist A nicht zu A_7 isomorph.

Wir haben somit gezeigt, daß $M \neq 1$ ist. Wir wollen zunächst annehmen, daß A über M zerfällt.

Dann ist A/M eine TI-Gruppe oder zu $L_2(q)$, $q \equiv 3, 5\ (8)$ oder J_1 isomorph. Sei zunächst A/M eine TI-Gruppe. Sei S eine 2-Sylowgruppe von A. Da H/M keine TI-Gruppe ist, ist $\mathbf{N}_H(S)$ nicht 2-abgeschlossen. Dann gibt es aber Durchschnitte von 2-Sylowgruppen, die einen 2-Rang größer als zwei haben. Sei nun A/M zu $L_2(q)$, $q \equiv 3, 5\ (8)$ oder J_1 isomorph. Dann gibt es Durchschnitte in H/M, die in A/M liegen und den 2-Rang zwei haben. Da A über M zerfällt, gibt es in H Durchschnitte, die einen 2-Rang größer als zwei haben.

Also ist A eine nicht zerfallende Erweiterung von M mit A/M. Dann ist A/M zu $Sz(8)$ isomorph. Da $Sz(8)$ keine äußeren Automorphismen von der Ordnung zwei hat, ist $\mathbf{Z}(H/M) \neq 1$. Also ist H in der Liste des Satzes. Das ist ein Widerspruch.

Sei nun H das zentrale Produkt von Gruppen aus der Liste des Satzes. Dann besteht H aus genau zwei Komponenten. Diese wollen wir mit A_1 und A_2 bezeichnen. Wir können annehmen, daß $r(A_1) \leqslant r(A_2)$ ist. Sei A_1

oder A_2 auflösbar. Dann ist H/M in der Liste des Satzes. Sei zunächst die Erweiterung von M nicht zerfallend. Dann ist H/M zu $L_3(q)$, $U_3(q)$, q ungerade; $G_2^1(q)$, $q = 3^{2n+1}$; $A_5 \times U_3(4)$, $U_3(4) \times U_3(4)$, M_{11}, J_1, einer Untergruppe von $\mathrm{Aut}(U_3(4))$ oder einer TI-Gruppe isomorph. Ist H/M nicht zu $A_5 \times U_3(4)$ isomorph, so können wir nach Lemma 1 annehmen, daß H/M trivial auf M operiert. Ein Resultat von Griess [8] in Verbindung mit [2; Theorem 1] und [13; Theorem 4.1] liefert, daß all diese Gruppen keinen 2-Anteil in der Ordnung des Schurmultiplikators haben. Somit zerfällt die Erweiterung von M. Also ist H/M zu der Gruppe $A_5 \times U_3(4)$ isomorph. Dann wird M von $U_3(4)$ zentralisiert. Weiter ist die Erweiterung von M mit $U_3(4)$ zerfallend. Dann gibt es aber einen Durchschnitt zweiter 2-Sylowgruppen von H, der eine 2-Sylowgruppe von $MU_3(4)$ enthält. Diese hat aber mindestens den 2-Rang drei.

Wir haben somit gezeigt, daß H über M zerfällt. Also ist H/M eine *TI*-Gruppe oder eine 1*I*-Gruppe. Anwendung von [3] liefert einen Widerspruch.

Wir können jetzt annehmen, daß sowohl A_1 als auch A_2 nicht auflösbar ist. Dann ist aber A_1 oder A_2 keine 2*I*-Gruppe. Damit ist das Lemma bewiesen.

LEMMA 3. *Ist G eine 2I-Gruppe, die eine zentrale Erweiterung einer nicht trivialen abelschen Gruppe mit einer einfachen Gruppe ist, so ist G in der Liste von Teil* (b) *des Satzes.*

Beweis. Sei G ein minimales Gegenbeispiel. Wir nehmen zunächst an, daß die abelsche Gruppe zyklisch ist. Wir können annehmen, daß $SCN_2(2)$ nicht leer ist. Sei T eine 2-Sylowgruppe von G, dann gibt es Involutionen, die in T, aber nicht in $\mathbf{O}_2(G)$ liegen. Für eine jede solche Involution i ist $\mathbf{C}_T(i)$ eine 2-Sylowgruppe von $\mathbf{C}_G(i)$. Bezeichne das Urbild von $\mathbf{Z}(T/\mathbf{O}_2(G))$ mit U. Weiter sei nun i eine Involution, die in U, aber nicht in $\mathbf{O}_2(G)$ liegt. Dann ist der schwache Abschluß von $i\mathbf{O}_2(G)$ in $T/\mathbf{O}_2(G)$ abelsch. Wir wollen diesen mit U_1 bezeichnen. Ist U_1 stark abgeschlossen in $T/\mathbf{O}_2(G)$ bezüglich $G/\mathbf{O}_2(G)$, so erhalten wir mit [5] einen Widerspruch. Also gibt es einen Durchschnitt, der U_1 enthält. Dann ist die Anzahl der Konjugierten von $i\mathbf{O}_2(G)$ eine Primzahl. Also liegt jede zu i konjugierte Involution aus U in $\mathbf{O}_{2',2}(\mathbf{C}_G(i))$. Dann liegt U_1 in $\mathbf{O}_{2',2}(\mathbf{C}_{G/\mathbf{O}_2(G)}(i\mathbf{O}_2(G)))$. Mit [5; Corollary 2] erhält man nun einen Widerspruch.

Sei jetzt die abelsche Gruppe vom Typ $Z_n \times Z_m$. Sei weiter T eine 2-Sylowgruppe von G. Ist $\Omega_1(T)$ in $\mathbf{O}_2(G)$ enthalten, so liefert [6, Main Theorem, Corollary B] einen Widerspruch. Sei U das Urbild von $\mathbf{Z}(T/\mathbf{O}_2(G))$.

Wir nehmen zunächst an, daß $\Omega_1(U)$ in $\mathbf{O}_2(G)$ enthalten sei. Indem wir G/Z_n und G/Z_m betrachten, sehen wir, daß es in U Elemente gibt, die nicht in $\mathbf{O}_2(G)$ liegen, deren Quadrat aber in Z_n bzw. in Z_m liegt. Also hat $\Omega_1(U/\mathbf{O}_2(G))$ mindestens die Ordnung vier. Da $SCN_3(2)$ leer ist, liefert Anwendung von [11], daß $\Omega_1(U/\mathbf{O}_2(G))$ höchstens die Ordnung acht hat.

Sei i ein Element aus U, das nicht in $\mathbf{O}_2(G)$ liegt, dessen Quadrat aber in $\mathbf{O}_2(G)$ liegt. Ist $\mathbf{C}_G(i)$ auflösbar, so zeigen wir, daß $\Omega_1(U/\mathbf{O}_2(G))$ stark abgeschlossen in $T/\mathbf{O}_2(G)$ bezüglich $\mathbf{C}_{G/\mathbf{O}_2(G)}(i\mathbf{O}_2(G))$ ist. Klar ist dies, falls $\mathbf{C}_{G/\mathbf{O}_2(G)}(i\mathbf{O}_2(G))$ 2-abgeschlossen ist. Sei nun $\Omega_1(U/\mathbf{O}_2(G))$ nicht stark abgeschlossen, so hat $\Omega_1(\mathbf{Z}(\mathbf{O}_2(\mathbf{C}_{G/\mathbf{O}_2(G)}(i\mathbf{O}_2(G)))))$ die Ordnung acht oder sechzehn. Dann hat T eine Untergruppe vom Index zwei, deren sämtliche Involutionen in $\mathbf{O}_2(G)$ liegen. Also hat G eine Untergruppe vom Index zwei. Das ist ein Widerspruch. Sei nun $\mathbf{C}_G(i)$ nicht auflösbar. Dann ist $\mathbf{C}_G(i)$ nicht 2-constrained. Sei $i^2 \in Z_n$. Dann gibt es in $\mathbf{C}_{G/\mathbf{O}_2(G)}(i\mathbf{O}_2(G))$ einen Normalteiler vom Index vier oder zwei, so daß alle unter G zu i Konjugierten Elemente, die in diesem Normalteiler liegen, im Zentrum dieses Normalteilers modulo $\mathbf{O}_2(G)$ liegen. Klar ist, daß dies richtig ist für $\mathbf{C}_G(i)$. Denn ist i zu einem Element j aus $\mathbf{C}_G(i)$ konjugiert, so liegt j in $\mathbf{Z}(\mathbf{C}_G(i)/\mathbf{O}_2(G))$, da es sonst Durchschnitte vom Rang drei gäbe. Es bleibt also zu zeigen, daß $\mathbf{C}_G(i)$ ungleich $\mathbf{C}_{G/\mathbf{O}_2(G)}(i\mathbf{O}_2(G))$ ist. Wäre das nicht der Fall, so läge i im Zentrum einer 2-Sylowgruppe von G. Mit [4] folgt dann, daß i in $\mathbf{O}_{2',2}(G)$ läge. Sei $\mathbf{O}_2(\mathbf{C}_{G/\mathbf{O}_2(G)}(i\mathbf{O}_2(G)))$ nicht abelsch, so ist der einzige nicht auflösbare Kompositionsfaktor von $\mathbf{C}_G(i)$ zu $L_2(q)$ oder A_7 isomorph. Dann gibt es in $\mathbf{C}_G(i)$ keine Involutionen, die nicht in $\mathbf{O}_2(G)$ liegen. Sei nun $\mathbf{O}_2(\mathbf{C}_{G/\mathbf{O}_2(G)}(i\mathbf{O}_2(G)))$ abelsch. Dann können wir annehmen, daß diese Gruppe sogar zyklisch ist, da wir sonst wie oben schließen können. Weiter ist der 2-Rang des einfachen Kompositionsfaktors von $\mathbf{C}_G(i)$ echt kleiner als vier. Angenommen es gäbe in $\mathbf{C}_G(i)$ Involutionen, die nicht in $\mathbf{O}_2(G)$ liegen. Dann gibt es in dem einfachen Kompositionsfaktor Involutionen, deren Zentralisator 2-abgeschlossen ist. Gehen wir nun die Liste durch, so sehen wir, daß der einfache Kompositionsfaktor eine TI-Gruppe sein muß. Dann wird aber eine Involution modulo $\mathbf{O}_2(G)$ von $\mathbf{C}_{G/\mathbf{O}_2(G)}(i\mathbf{O}_2(G))$ zentralisiert. Das ist ein Widerspruch. Also haben wir in jedem Fall, daß es in $\mathbf{C}_G(i)$ keine Involution gibt, die nicht in $\mathbf{O}_2(G)$ liegt. Dann hat $\mathbf{C}_G(i)\,\mathbf{O}_2(G)/\mathbf{O}_2(G)$ den Index vier in $\mathbf{C}_{G/\mathbf{O}_2(G)}(i\mathbf{O}_2(G))$. Nun sind zwei Involutionen aus T genau dann konjugiert, wenn sie in $\mathbf{N}(T)$ konjugiert sind. Da die Nebenklassen von $\mathbf{C}_G(i)$ in $\mathbf{C}_{G/\mathbf{O}_2(G)}(i\mathbf{O}_2(G))$ nicht konjugiert sind, gibt es nach [15; Lemma (5.38)] eine Untergruppe vom Index zwei.

Wir haben somit gezeigt, daß jede zu $\Omega_1(U/\mathbf{O}_2(G))$ unter G konjugierte Untergruppe von T die Gruppe $\Omega_1(U/\mathbf{O}_2(G))$ trivial anschneidet. Also hat $\Omega_1(U/\mathbf{O}_2(G))$ die Ordnung vier. Weiter ist dann das Urbild U_1 von $\Omega_1(U/\mathbf{O}_2(G))$ abelsch. Sei U_2 ein Konjugiertes von U_1, das in T liegt. Dann ist $\mathbf{C}_{T/\mathbf{O}_2(G)}(U_2/\mathbf{O}_2(G))$ ein Durchschnitt zweier 2-Sylowgruppen. Wir wollen diesen mit T_1 bezeichnen. Wir wählen U_2 so, daß die Ordnung von T_1 maximal ist. Dann ist T_1 abelsch, da sonst die Kommutatorgruppe von T_1 die Gruppe $U_1/\mathbf{O}_2(G)$ anschneidet und damit der Normalisator von T_1 in $\mathbf{C}_{G/\mathbf{O}_2(G)}(U_1/\mathbf{O}_2(G))$ liegt, was nicht geht. Also ist $T_1/\mathbf{O}_2(G)$ elementar abelsch von der Ordnung sechzehn. Weiter ist $\mathbf{N}(T_1/\mathbf{O}_2(G))/\mathbf{C}(T_1/\mathbf{O}_2(G))$ eine Untergruppe von A_8. Diese Gruppe ist auflösbar und hat eine $2'$-Hallgruppe von der Ordnung 5, 3 oder 9. Also hat sie die Ordnung 10, 20, 6, 18, 36 oder 72. Teilt 3 die Ordnung der Automorphismengruppe, so gibt es in $T_1/\mathbf{O}_2(G)$ drei Konjugiertenklassen, die die Längen 3, 3 und 9 haben. Also hat die Automorphismengruppe die Ordnung 6 oder 18. Weiter zentralisiert ein Element von der Ordnung zwei aus der Automorphismengruppe keinen Unterraum von der Dimension drei. Also hat eine 2-Sylowgruppe von G die Ordnung 2^5. Da alle Involutionen von T_1 in $\mathbf{O}_2(G)$ liegen, hat G nach [15; Lemma (5.38)] eine Untergruppe vom Index zwei. Also hat die Automorphismengruppe die Ordnung 20, da wir bei der Ordnung 10 wie oben schließen könnten. Damit hat die 2-Sylowgruppe von $G/\mathbf{O}_2(G)$ die Ordnung 64 und $T_1/\mathbf{O}_2(G)$ ist die einzige elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 16 in $T/\mathbf{O}_2(G)$. Dann ist aber $T_1/\mathbf{O}_2(G)$ der schwache Abschluß von $U_1/\mathbf{O}_2(G)$ in $T/\mathbf{O}_2(G)$ bezüglich $G/\mathbf{O}_2(G)$. Mit [5; Corollary 2] erhält man einen Widerspruch.

Wir haben somit gezeigt, daß es in U_1 Involutionen gibt, die nicht in $\mathbf{O}_2(G)$ liegen. Dann ist U_1 stark abgeschlossen in T bezüglich G. Ein Resultat von Goldschmidt liefert dann den Widerspruch.

Lemma 4. *Sei G eine nicht auflösbare 2I-Gruppe. Sei H ein maximales Element aus der Menge $\{U \mid U \lhd G,\ U \neq G\}$. Ist H eine nicht triviale TI-Gruppe, so ist G in der Liste von Teil* (b) *des Satzes.*

Beweis. Sei zunächst H auflösbar. Setze $K = \mathbf{C}_G(H)$. Sei weiter G ein minimales Gegenbeispiel. Ist $G \neq K \nleq H$, so ist K eine nicht auflösbare TI-Gruppe oder $1I$-Gruppe. Vergleich der Listen aus [14] und [3] mit der Liste des Satzes liefert einen Widerspruch. Sei nun K gleich G. Dann erhält man die Behauptung mit Lemma 3. Also können wir annehmen, daß K in H enthalten ist. Nun betrachten wir die Gruppe $K_1 = \mathbf{C}_G(\Omega_1(\mathbf{O}_2(H)))$. Ist K_1 nicht in H enthalten, so schließen wir wie oben und erhalten einen Widerspruch. Also können wir annehmen, daß K_1 in H liegt. Also bewirkt G/H eine Automorphismengruppe auf $\Omega_1(\mathbf{O}_2(H))$. Weiter ist G nicht auflösbar. Also liefert ein Ergebnis von Johnsen, daß $\Omega_1(\mathbf{O}_2(G))$ zu $Q_8 \curlyvee D_8$ isomorph ist. Dann ist aber G/H zu A_5 isomorph. Damit ist G in der Liste von Teil (b) des Satzes. Dies ist ein Widerspruch.

Also ist H nicht auflösbar. Setze wieder $K = \mathbf{C}_G(H)$. Sei zunächst $K = 1$. Dann ist $|G : H| = 2$. Damit ist G in der Liste. Also ist $HK = G$. Ist K auflösbar, so ist G keine $2I$-Gruppe. Also ist K nicht auflösbar. Dann ist G zu $A_5 \times A_5$, $U_3(4) \times U_3(4)$ oder $A_5 \times U_3(4)$ isomorph. Also ist G in der Liste.

Lemma 5. *Sei G eine nicht auflösbare 2I-Gruppe. Sei H ein maximales*

Element aus der Menge $\{U \mid U \lhd G, U \neq G\}$. *Ist* H *eine* $1I$-*Gruppe, so ist* G *in der Liste von Teil* (b) *des Satzes.*

Beweis. Sei zunächst H auflösbar. Setze $K = \mathbf{C}_G(H)$. Sei weiter G ein minimales Gegenbeispiel. Ist $G \neq K \nleq H$, so ist K eine TI-Gruppe oder eine $1I$-Gruppe. Vergleich der Listen aus [14] und [3] mit der Liste des Satzes liefert einen Widerspruch. Sei nun $K = G$. Dann ist H abelsch. Also ist H keine $1I$-Gruppe. Somit ist K in H enthalten. Setze $K_1 = \mathbf{C}_G(\Omega_1(\mathbf{O}_2(H)))$. Wie oben folgt, daß K_1 in H liegt. Wie in Lemma 3 folgt, daß G/K_1 zu A_5 isomorph ist.

Also ist H nicht auflösbar. Sei M der maximale auflösbare Normalteiler von H. Ist G/H auflösbar, so ist $\mid G : H \mid = 2$. Weiter bewirkt G/H eine Automorphismengruppe von der Ordnung zwei auf H/M. Die Liste aus [3] liefert nun einen Widerspruch. Also ist G/H nicht auflösbar. Dann ist $G = M\mathbf{C}_G(M)$. Sei $G \neq \mathbf{C}_G(M)$. Dann ist $\mathbf{C}_G(M)$ keine $2I$-Gruppe. Sei M_1 der maximale auflösbare Normalteiler von $\mathbf{C}_G(M)$. Dann wird M_1 von H normalisiert. Also ist $\mathbf{Z}(M) = M_1$. Weiter ist $\mathbf{Z}(M)$ zyklisch. Die Liste aus [3] liefert nun, daß $G = \mathbf{C}_G(M)$ sein muß. Klar ist, daß G/H einfach ist. Also hat H kein Komplement in G. Weiter zerfällt H nicht über M. Gibt es in H noch Involutionen, die nicht in M liegen, so liegen sie im Zentrum einer 2-Sylowgruppe von H/M. Weiter hat eine 2-Sylowgruppe von H den 2-Rang zwei. Somit ist $L_2(q)$ mit $q \equiv 3, 5\ (8)$ der einzige nicht auflösbare Hauptfaktor von H. Liegen alle Involutionen von H in M, so ist A_r oder $L_2(q)$ mit ungeradem q der einzige nicht auflösbare Hauptfaktor von H. Sei K ein Komplement von H/M in G/M. Setze $K_1 = K (\mathrm{mod}\ M)$. Liegen alle Involutionen von K_1 in M, so ist K_1 zu $\hat{A}_7$ oder einer Faktorgruppe von $SL_2(q)$ mit ungeradem q isomorph. Involviert H oder K_1 die Gruppen $\hat{A}_7$ oder $L_2(q)$ mit $q \equiv 3, 5\ (8)$, so gibt es einen Durchschnitt der zu $Q_8 \curlyvee Q_8$ isomorph ist. Also ist G keine $2I$-Gruppe. In den übrigen Fällen ist G in der Liste des Satzes. Also gibt es in K_1 Involutionen, die nicht in M liegen. Dann hat K_1 den 2-Rang zwei. Weiter ist K_1 eine $2I$-Gruppe und damit in der Liste des Satzes. Anwendung von [6; Main Theorem, Corollary B] liefert, daß K_1 zu $Sp(4, q)$, mit ungeradem q, isomorph ist. Dann gibt es aber in G einen Durchschnitt, der eine Untergruppe enthält, die zu $Q_8 \curlyvee Q_8 \curlyvee D_8$ isomorph ist. Insbesondere ist G keine $2I$-Gruppe. Damit ist das Lemma bewiesen.

LEMMA 6. *Ist* G *eine einfache* $2I$-*Gruppe, so ist* G *in der Liste von Teil* (b) *des Satzes.*

Beweis. Ist S eine 2-Sylowgruppe von G und ist $\Omega_1(\mathbf{Z}(S))$ stark abgeschlossen in S bezüglich G, so folgt mit [5], daß G zu $G_2{}^1(q)$, $q = 3^{2n+1}$, isomorph ist. Dann gibt es eine Involution i aus $\mathbf{Z}(S)$ und eine Involution j, die in $S - \mathbf{Z}(S)$ liegt und zu i in G konjugiert ist. Dann hat $\mathbf{C}_S(j)$ den 2-Rang zwei. Insbesondere ist $\mathbf{Z}(S)$ zyklisch. Weiter enthält $\mathbf{C}_S(j)$ genau drei Involutionen. Wir wählen nun j so, daß die Ordnung von $\mathbf{C}_S(j)$ maximal ist. Dann ist j zu i und ij in $\mathbf{N}_G(\mathbf{C}_S(j))$ konjugiert. Anwendung eines Ergebnisses von G. Higman [9] liefert, daß $\mathbf{C}_S(j)$ zu $Z_n \times Z_n$ oder zu einer speziellen Gruppe von der Ordnung 16 oder 64 isomorph ist. Die Gruppe $\mathbf{N}_S(\mathbf{C}_S(j))$ enthält $\mathbf{C}_S(j)$ mit dem Index zwei. Nach dem Resultat von Goldschmidt muß es in $\mathbf{N}_S(\mathbf{C}_S(j))$ eine Involution geben, die nicht in $\mathbf{C}_S(j)$ liegt.

Sei $\mathbf{C}_S(j)$ zunächst abelsch. Dann ist S eine Diedergruppe, eine Semidiedergruppe oder ein Kranzprodukt $Z_n \wr Z_2$. Anwendung von [7] und [1] liefert, daß G in der Liste ist.

Sei jetzt $\mathbf{C}_S(j)$ eine spezielle Gruppe von der Ordnung 16 oder 64. Dann hat S die Ordnung 32 oder 128. Weiter gibt es in S außerhalb von $\mathbf{C}_S(j)$ noch eine Involution. Nach [15; Lemma (5.38)] ist diese zu i in G konjugiert. Sei k eine solche Involution. Ist $\mathbf{C}_S(k)$ abelsch, so erhalten wir mit [7] oder [1] einen Widerspruch. Also ist $\mathbf{C}_S(k)$ speziell von der Ordnung 16 oder 64. Das widerspricht aber der Struktur von S. Somit ist das Lemma bewiesen.

LEMMA 7. *Ist G ein minimales Gegenbeispiel zu Teil* (b) *des Satzes, so ist jeder echte Normalteiler von G auflösbar.*

Beweis. Sei H ein maximaler Normalteiler von G ungleich G, der nicht auflösbar ist. Nach Lemma 3 und Lemma 4 ist H eine $2I$-Gruppe. Also ist H in der Liste von Teil (b) des Satzes. Weiter ist G/H einfach. Sei M der maximale Normalteiler von H, der auflösbar ist.

Sei zunächst M von der Einsgruppe verschieden. Setze $K = \mathbf{C}_G(M)$. Dann ist K nicht auflösbar. Sei zunächst $K = G$. Dann ist M abelsch. Betrachte G/M. Diese Gruppe ist ein direktes Produkt von einfachen Gruppen. Ist H/M einfach, so ist G ein zentrales Produkt von zwei $2I$-Gruppen. Also ist G nach Lemma 2 kein Gegenbeispiel. Also ist H/M zu $L_2(q_1) \times L_2(q_2)$, mit $q_1, q_2 \equiv 3, 5$ (8), isomorph. Da die 2-Sylowgruppe von H ein Durchschnitt zweier 2-Sylowgruppen von G ist, zerfällt H über M nicht. Dann enthält ein Durchschnitt zweier 2-Sylowgruppen von G eine Untergruppe, die zu $Q_8 \curlyvee Q_8$ isomorph ist. Diese enthält aber eine elementar abelsche Untergruppe von der Ordnung 8. Dies ist ein Widerspruch. Somit haben wir gezeigt, daß K ungleich G ist. Sei zunächst K nicht in H enthalten. Dann ist K keine $2I$-Gruppe. Also ist K eine $1I$-Gruppe. Weiter ist G/K nicht auflösbar. Also enthält M eine Untergruppe, die zu $Q_8 \curlyvee Q_8$ isomorph ist. Da K nicht in H enthalten ist, enthält H eine Untergruppe, die eine Erweiterung von M mit A_5 ist. Eine 2-Sylowgruppe von K hat 2-Rang zwei oder eins. Mit [3] folgt, daß $K/\mathbf{Z}(M)$ einfach ist. Nach [6; Main Theorem, Corollary B] hat K den 2-Rang eins. Vergleich mit [3] liefert, daß $K/\mathbf{Z}(M)$ zu A_7 isomorph ist. Dann ist G/M zu $A_5 \times A_7$ isomorph. Dann gibt es aber einen Durchschnitt, der eine Untergruppe, die zu $Q_8 \curlyvee Q_8$ isomorph ist, enthält.

Wir haben somit gezeigt, daß K in H enthalten ist. Also ist H/K auflösbar. Weiter ist G/H zu A_5 isomorph. Weiter ist K wieder eine $1I$-Gruppe. Eine 2-Sylowgruppe von K hat den 2-Rang eins, da K nicht zu $Sp(4, q)$ isomorph ist. Nun erhalten wir wie oben einen Widerspruch.

Habe nun H keinen auflösbaren Normalteiler. Dann operiert G/H trivial auf H. Weiter hat eine 2-Sylowgruppe von H den 2-Rang zwei. Also ist H einfach. Dann ist G zu $H \times A_5$ isomorph. Damit gibt es Durchschnitte, die elementar abelsche Untergruppen von der Ordnung 16 enthalten. Dies ist ein Widerspruch.

LEMMA 8. *Ist G eine nicht auflösbare $2I$-Gruppe, so steht G in der Liste von Teil* (b) *des Satzes.*

Beweis. Sei G ein minimales Gegenbeispiel. Nach Lemma 5 ist G nicht einfach. Nach Lemma 6 ist jeder Normalteiler von G auflösbar. Nach Lemma 3 und Lemma 4 ist ein maximaler Normalteiler von G eine $2I$-Gruppe. Sei H dieser maximale Normalteiler. Setze $K = \mathbf{C}_G(H)$. Sei K zunächst gleich G. Dann ist H abelsch. Also ist H eine TI-Gruppe. Somit ist K in H enthalten. Weiter ist G/H eine einfache Automorphismengruppe von $\Omega_1(\mathbf{O}_2(H))$. Anwendung von [10] liefert, daß G/H zu A_5 isomorph ist. Dann ist G eine Gruppe, die in der Liste vorkommt. Also ist G kein Gegenbeispiel und damit ist das Lemma und der Satz bewiesen.

REFERENZEN

1. J. L. ALPERIN, R. BRAUER, AND D. GORENSTEIN, Finite groups with quasidihedral and wreathed Sylow 2-subgroups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **151** (1970), 1–262.
2. J. L. ALPERIN AND D. GORENSTEIN, The multiplicators of certain simple groups, *Proc. Amer. Math. Soc.* **17** (1966), 515–519.
3. M. ASCHBACHER, A class of generalized TI-groups, *Illinois J. Math.* **16** (1972), 529–532.
4. G. GLAUBERMANN, Central elements in core-free groups, *J. Algebra* **4** (1966), 403–421.
5. D. GOLDSCHMIDT, 2-fusion in finite groups, *Ann. Math.* **99**, no. 1 (1974), 70–118.
6. D. GORENSTEIN, AND K. HARADA, Finite groups of sectional 2-rank at most 4, "Finite groups" **72**, *Proc. Gainsville Conf.* (1972), 57–67.
7. D. GORENSTEIN, AND J. H. WALTER, On finite groups with dihedral Sylow 2-subgroups, *Illinois J. Math.* **6** (1962), 533–593.
8. R. GRIESS, "Schur Multipliers of the Known Finite Simple Groups," Thesis, University of Chicago, 1971.
9. G. HIGMAN, Suzuki 2-groups, *Illinois J. Math.* **7** (1963), 79–96.
10. K. JOHNSEN, 2-Gruppen vom 2-Rang zwei, erscheint.
11. A. MACWILLIAMS, On 2-groups with no normal abelian subgroup of rank 3, and their occurrence as Sylow 2-subgroups of finite simple groups, *Trans. Amer. Math. Soc.* **150** (1970), 345–408.

12. R. Ree, A family of simple groups associated with the simple Lie algebra of type (G_2), *Amer. J. Math.* **83** (1961), 432–462.
13. R. Steinberg, Générateurs, relations et revêtements de groupes algébriques, *Colloque sur la theorie des groupes algébriques, Bruxelles* (1962), 113–127.
14. M. Suzuki, Finite groups of even order in which Sylow 2-groups are independent, *Ann. of Math.* **80** (1964), 58–77.
15. J. G. Thompson, Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable, *Bull. Amer. Math. Soc.* **74** (1968), 383–437.