Theoretical Computer Science

ELSEVIER Theoretical Computer Science 180 (1997) 81–113

Séparateurs dans les mots infinis engendrés par morphismes

E. Garel *

LITP-IBP 4, Place Jussieu, 75252 PARIS Cedex 05, France

Received June 1995; revised March 1996
Communicated by M. Nivat

Résumé

Nous appelons *séparateur* d'un mot $\mathbf{x}$ à l'indice $n \in \mathbb{N}$ le plus petit facteur de $\mathbf{x}$ dont l'indice du début de la première occurrence est n. Notons $S_{\mathbf{x}}(n)$ la longueur de ce séparateur lorsqu'il existe et posons $S_{\mathbf{x}}(n) = 0$ sinon. Nous montrons que l'application $S_{\mathbf{x}}$ ainsi définie est q-regulière, (au sens d'Allouche et Shallit), lorsque $\mathbf{x}$ est un mot infini engendré par itération d'un morphisme q-uniforme et que $\mathbf{x}$ est circulaire. De manière équivalente, cela revient à dire que la série formelle dont les coefficients sont les valeurs $S_{\mathbf{x}}(n)$ en base q est $\mathbb{N}$-rationnelle (Salomaa, Soittola).

Abstract

Let $\mathbf{x}$ be an infinite word on a finite alphabet A. For each position n, the *separator* of $\mathbf{x}$ at n is the smallest factor of $\mathbf{x}$ which begins at index n and that does not appear before in $\mathbf{x}$. Let $S_{\mathbf{x}}$ be the function such that $S_{\mathbf{x}}(n)$ is the length of the separator of $\mathbf{x}$ at index n if it exists and otherwise 0.

We consider the problem of computing $S_{\mathbf{x}}$ in the case where $\mathbf{x}$ is generated by iterating a morphism $\sigma : A^* \to A^*$. We prove the following theorem:

Theorem. *Let* $\mathbf{x}$ *be an infinite word on a finite alphabet* A. *If* $\mathbf{x}$ *is generated by iterating a* q*-uniform morphism* $\sigma : A^* \to A^*$ *and if* $\mathbf{x}$ *is circular then the application* $S_{\mathbf{x}}$ *above is* q*-regular.*

Details

Note that the theorem holds if $\mathbf{x}$ is ultimately periodic since, in this case, there is only a finite set of separators. From now on, we suppose that $\mathbf{x}$ is an infinite not ultimately periodic word on a finite alphabet A.

Some notations

(1) $\mathbf{x}[i \cdots j]$ is the factor of $\mathbf{x}$ that begins at index i and that ends at index j.

(2) Let $u \in A^*$, $|u|$ is the length of u. If $u \neq \varepsilon$, $u^\bullet$ is u minus its last letter and ${}^\bullet u$ is u minus its first letter.

* Correspondence address: BP 62 35002 Rennes Cedex, France. E-mail: emmanuelle.garel@litp.ibp.fr.

PII S0304-3975(96)000109-0

(3) For any $n \in \mathbb{N}$, $\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$ is the separator of $\mathbf{x}$ at index n. It is easy to establish the following property:

Proposition. *$S_{\mathbf{x}}(n+1) \geqslant S_{\mathbf{x}}(n) - 1$ for any $n \in \mathbb{N}$ and thus ${}^\bullet\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$ is a prefix of $\vartheta_{\mathbf{x}}(n+1)$.*

(4) We say that there is a *jump* between n and $n+1$ if $S_{\mathbf{x}}(n+1) \geqslant S_{\mathbf{x}}(n)$. In this case ${}^\bullet\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$ is a prefix of $\vartheta_{\mathbf{x}}(n+1)^\bullet$.

We say that there is *no jump* between n and $n+1$ or $S_{\mathbf{x}}$ *is monotone in* $[n, n+1]$ if $S_{\mathbf{x}}(n+1) = S_{\mathbf{x}}(n) - 1$. In this case $\vartheta_{\mathbf{x}}(n+1) = {}^\bullet\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$.

About circularity

Our references are Mignosi and Séébold in their article "If a D0L language is k-power free then it is circular". The essential property used is the following:

Proposition. *Let $\mathbf{x}$ be an infinite word on a finite alphabet A that is generated by q-uniform morphism $\sigma : A^* \to A^*$.*

(1) If $\mathbf{x}$ is circular then a constant $D > 0$ exists such that, for any factor w and for any couple of indices n and m such that w begins in n and begins in m, if w factorizes as $w = u\sigma(\mathbf{x}[i \cdots j])v$ in n with $|u| \geqslant D$ and $|v| \geqslant D$, then a couple of indices i' and j' exists such that w factorizes as $w = u\sigma(\mathbf{x}[i' \cdots j'])v$ in m and $\mathbf{x}[i \cdots j] = \mathbf{x}[i' \cdots j']$.

(2) If $\mathbf{x}$ is circular and if the morphism σ is injective then a constant $C > 0$ exists such that, for any factor w and for any couple of indices n and m such that w begins in n and begins in m, if $|w| \geqslant C$ and if w factorizes as $w = u\sigma(\mathbf{x}[i \cdots j])v$ with $u \neq \varepsilon$ and u a suffix of $\sigma(\mathbf{x}[i-1])$ and with $v \neq \varepsilon$ and v a prefix of $\sigma(\mathbf{x}[j+1])$, then a couple of indices i' and j' exists such that w factorizes as $w = u\sigma(\mathbf{x}[i' \cdots j'])v$ in m and $\mathbf{x}[i \cdots j] = \mathbf{x}[i' \cdots j']$.

In particular, in these both cases, we have $n \equiv m$ modulo q.

About q-regularity

Our references are Allouche and Shallit in their article "The ring of k-regular sequences". Let us go into a few details.

A subset of $\mathbb{N}$ is said to be q-recognizable if its elements in base q are recognized by a q-automaton, (i.e. by a deterministic and finite automaton labelled in $\{0, \ldots, q-1\}$ with an output function in a finite set).

A function $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ is q-regular if the sequence $(\ell(n))$ is calculated with a q-transductor, (i.e. by a transductor labelled in $\{0, \ldots, q-1\}$ with an output function in $\{0, \ldots, q-1\}^*$).

Let H be a subset of $\mathbb{N}$ and let $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ be a function. We say that *the restriction of ℓ over H* is q-regular if the function ℓ_H defined by

$$\ell_H(n) = \begin{cases} \ell(n) & \text{if } n \in H, \\ 0 & \text{else} \end{cases}$$

is q-regular.

First, we prove the theorem in the case where the morphism σ is injective and to do that, we construct a finite partition $(H_i)_{i \in I}$ of $\mathbb{N}$ such that the restriction of $S_{\mathbf{x}}$ over each H_i, $i \in I$, is q-regular.

Let $C > 0$ be a constant that is associated with the circularity of $\mathbf{x}$. We establish the following properties.

(1) Let n be an index such that $S_{\mathbf{x}}(n) > C$. Denote by a the last letter of $\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$. We have the factorisation $\vartheta_{\mathbf{x}}(qn) = \sigma(\vartheta_{\mathbf{x}}(n)^\bullet)z$ with z a prefix of $\sigma(a)$ and $z \neq \varepsilon$. In particular that implies $S_{\mathbf{x}}(qn) = q(S_{\mathbf{x}}(n) - 1) + |z|$.

(2) Let $n \in \mathbb{N}$ such that $S_{\mathbf{x}}(n) > C$. Denote by a_k, $k \in \mathbb{N}$, the last letter of $\vartheta_{\mathbf{x}}(q^k n)$ and by z_{k+1} the prefix of $\sigma(a_k)$ such that $\vartheta_{\mathbf{x}}(q^{k+1}n) = \sigma(\vartheta_{\mathbf{x}}(q^k n)^\bullet)z_{k+1}$. Then the sequence (z_k) is proved ultimately periodic. For any k which is large enough the values $S_{\mathbf{x}}(q^k m)$ verify recurrent formula. Thus we can conclude that the restriction of $S_{\mathbf{x}}$ over the set $\{q^k m,\ k \in \mathbb{N}\}$ is q-regular.

(3) The sequence (N_k), where N_k is the number of jumps in the interval $[q^k n_0, q^k(n_0+1)]$, $k \in \mathbb{N}$, is stationary.

(4) For any $n \in \mathbb{N}$, denote by $H(n)$ the set

$$H(n) = \{m \in \mathbb{N} / q^k n \leqslant m \leqslant q^k(n+1),\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Then, an integer s exists such that, for any $n \in [q^s, q^{s+1}]$, $H(n)$ verifies:

(i) either $S_{\mathbf{x}}$ is monotone in each interval $[q^k n, q^k(n+1)]$, $k \in \mathbb{N}$, and in this case, the restriction of $S_{\mathbf{x}}$ over $H(n)$ is q-regular. (Use the recurrent formula giving the values $S_{\mathbf{x}}(q^k m)$),

(ii) or, there is a unique jump in each interval $[q^k n_0, q^k(n_0+1)-1]$ at index m_k, $q^k n_0 \leqslant m_k \leqslant q^k(n_0+1)-1$. In this case, it is proved that the set $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ is q-recognizable and thus the restriction map of $S_{\mathbf{x}}$ over $H(n)$ is q-regular too.

Now, consider the partition of $\mathbb{N}$ consisting of

(1) the finite set $H' = \{m \in N,\ m < q^{k_0}\}$,

(2) the sets $H(n)$, $n \in [q^s, q^{s+1}]$.

The restriction map of $S_{\mathbf{x}}$ over each set of this partition is q-regular and we conclude that $S_{\mathbf{x}}$ is q-regular.

Consider now the general case and let $\mathbf{x}$ be an infinite, not ultimately periodic, word on a finite alphabet A that is generated by iterating a morphism $\sigma : A^* \to A^*$. We get a reduction to the injective case by considering the equivalence relations $\sim_m$, $m \in \mathbb{N}$, defined over A by

$$\forall (a,b) \in A^2, \quad a \sim_m b \iff \sigma^m(a) = \sigma^m(b).$$

Then the sequence of quotient sets $(A/\!\sim_m)$ is stationary. Let s be an integer such that $A/\!\sim_s$ is equal to the limit of $(A/\!\sim_m)$.

Denote by π_s the canonical projection of A^* on A_s^* and let $\eta_s : A_s^* \to A_s^*$ the morphism defined by $\eta_s(\pi_s(a)) = \pi_s(\sigma^s(a))\ \forall a \in A$. Then η_s is injective. So, changing q to q^s we can suppose the following situation.

(1) $\mathbf{x} = \underleftarrow{\lim}_n \sigma^n(a_0)$ for some a_0 in A,

(2) $\sim$ is the equivalence relation defined by $a, \sim b \iff \sigma(a) = \sigma(b)$, $\forall (a,b) \in A^2$,

(3) Let $B = A/\!\sim$, let $\pi : A^* \to B^*$ be the canonical projection, and let $\eta : B^* \to B^*$ be the morphism defined by $\eta(\pi(a)) = \pi(\sigma(a))\ \forall a \in A$.

(4) Let $\mathbf{y} = \underleftarrow{\lim}_n \eta^n(\pi(a_0))$.

The infinite word $\mathbf{y}$ is generated by iterating the q-uniform and injective morphism η. It is proved that $\mathbf{x}$ circular implies $\mathbf{y}$ is circular. Thus the application $S_{\mathbf{y}}$ such that $S_{\mathbf{y}}(n)$ is the length of the separator of $\mathbf{y}$ at index n, is q-regular.

Finally, using the relations connecting the separators of $\mathbf{x}$ and the separators of $\mathbf{y}$, it is proved that $S_{\mathbf{y}}$ q-regular implies that $S_{\mathbf{x}}$ is q-regular too.

Keywords: Combinatorics on infinite words; circularity; q-regularity

1. Introduction

Considérons un mot infini $\mathbf{x}$ dont l'alphabet est un ensemble fini A. Appelons *séparateur de* $\mathbf{x}$ *en* $n \in \mathbb{N}$ le plus petit facteur de $\mathbf{x}$ dont l'indice du début de la première occurrence est n. Notons $S_{\mathbf{x}}$ la fonction $S_{\mathbf{x}} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $S_{\mathbf{x}}(n)$ est égal à la longueur du séparateur de $\mathbf{x}$ à l'indice n lorsqu'il existe et vaut 0 sinon.

Dans cet article nous démontrons que, dans le cas des mots infinis $\mathbf{x}$ qui sont engendrés par un morphisme q-uniforme et qui sont circulaires, l'application $S_{\mathbf{x}}$ définie précédemment est q-régulière.

Cette étude s'inscrit dans une étude plus générale sur les lois satisfaites par les facteurs des mots infinis. De part la définition même des séparateurs, elle se trouve directement liée aux problèmes de recherche de mots (String Matching). Ici nous ne cherchons pas à détecter le mécanisme des répétitions des facteurs dans les mots infinis. Nous prenons en quelque sorte le point de vue inverse et nous essayons de comprendre comment s'effectue l'apparition des nouveaux facteurs. Remarquons que, si v est le séparateur d'un mot infini $\mathbf{x}$ en un indice n, en quelque sorte v "sépare" l'entier n des indices précédents dans la mesure où, d'une part v n'apparaît pas en $j < n$, d'autre part v est minimal parmi les facteurs de $\mathbf{x}$ dont l'indice de la première occurrence est n. Notons que, pour tout mot infini non ultimement périodique nous avons $\lim_{\overrightarrow{n}} S_{\mathbf{x}}(n) = +\infty$.

Le calcul de $S_{\mathbf{x}}$ dans des cas particuliers de mots infinis $\mathbf{x}$ qui sont engendrés par morphismes, c'est-à-dire de mots pour lesquels il existe une lettre $a \in A$ et un morphisme $\sigma : A^* \to A^*$ tels que $\mathbf{x} = \lim_{\overrightarrow{n}} \sigma^n(a)$, fait apparaître l'existence de relations de récurrence dans lesquelles intervient la suite des longueurs $(|\sigma^n(a)|)$.

Illustrons ceci par un exemple. Soit $\sigma : \{0,1\}^* \to \{0,1\}^*$ le morphisme défini par $\sigma(0) = 01$ et $\sigma(1) = 0$. La limite préfixe de la suite $(\sigma^n(0))$ est le mot infini $\mathbf{x} = \lim_{\overrightarrow{n}} \sigma^n(0)$ qui est communément appelé mot de Fibonacci.

$$\mathbf{x} = 0\,1\,0\,0\,1\;0\,1\,0\,0\,1\,0\,0\,1\;0\,1\,0\,0\,1\,0\,1\,0\;0\,1\,0\ldots$$

Posons (u_n) la suite des entiers de Fibonacci: $\begin{cases} u_0 = 1,\ u_1 = 2, \\ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n. \end{cases}$

Nous avons $|\sigma^n(0)| = u_n\ \forall n \in \mathbb{N}$. Considérons deux entiers m et n vérifiant $m \geqslant 2$ et $u_n \leqslant m < u_{n+1}$. Le séparateur de $\mathbf{x}$ en m se factorise alors sous la forme vwa avec, pour v le suffixe de $\sigma^{n-1}(0)$ de longueur $u_{n+1} - m$, pour w le préfixe de $\sigma^n(0)$ de longueur $u_n - 2$ et $a \in \{0,1\}$. Nous obtenons $S_{\mathbf{x}}(m) = u_{n+2} - m - 1$. Le transducteur T décrit ci-dessous permet le calcul de la fonction $S_{\mathbf{x}}$ dans la base de Fibonacci en procédant de la manière suivante: (nous omettons la vérification de ce résultat) Fixons un entier $m \geqslant 2$. Notons $w(m) = \alpha_0 \ldots \alpha_p$, $\alpha_i \in \{0,1\}$ le mot de l'écriture de m en base de Fibonacci, c'est-à-dire tel que

(1) $\alpha_p = 1$,

(2) $w(m)$ ne comporte pas deux 1 consécutifs,

(3) $m = \sum_{i=0}^{p} \alpha_i u_i$.

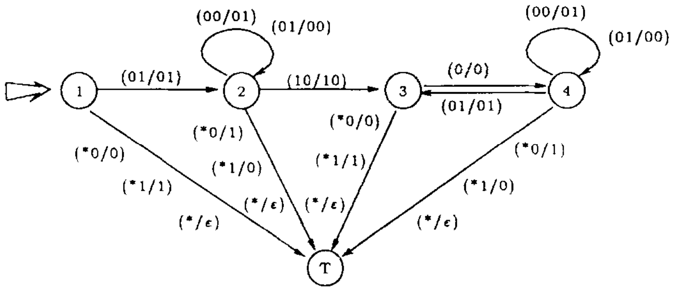

Fig. 1. Transducteur T.

Pour obtenir le mot de l'écriture de $S_{\mathbf{x}}(m)$ en base de Fibonacci, il suffit d'appliquer T, de la droite vers la gauche, au mot $*w(m)$ où $*$ est un caractère arbitraire, différent de 0 et de 1 et servant à marquer le début de $w(m)$. Prenons par exemple $m = 10$. Nous avons $w(m) = 01001$. L'application du transducteur T à $*01001$ donne 01001 dont la valeur entière est 10. Le séparateur de $\mathbf{x}$ à l'indice 10 est le facteur de $\mathbf{x}$, de longueur égale à 10 et qui commence à l'indice 10, soit 0010100101.

Dans cet article, nous étudions les propriétés de la fonction $S_{\mathbf{x}}$ dans le cas où les mots infinis $\mathbf{x}$ sont engendrés par itération d'un morphisme q-uniforme. Nous montrons que si $\mathbf{x}$ est circulaire alors $S_{\mathbf{x}}$ est q-régulière.

Rappelons que la q-régularité généralise la notion de q-automaticité introduite par Cobham [5] (uniform tag-systems) et que cette généralisation est due à Allouche et Shallit [2].

La notion de circularité provient de la théorie ergodique et à été utilisée en théorie des codes. Mignosi and Séébold en donnent un sens particulier dans le cadre des D0L-systems [12]. C'est cette définition que nous adoptons. De façon informelle cela signifie que, pour tout facteur v suffisamment long d'un mot infini engendré par morphisme, et quitte à réduire un peu v à droite et à gauche en un mot v', il existe un unique facteur u de $\mathbf{x}$ dont v' est l'image par le morphisme.

Plan adopté: Dans la première section nous précisons les notations utilisées, les concepts fondamentaux et présentons le théorème principal. Dans la deuxième section nous traitons le cas des mots infinis engendrés par un morphisme injectif. Dans la troisième section nous montrons comment, dans le cas d'un morphisme quelconque, l'on peut se ramener au cas injectif et ainsi clore la preuve du théorème.

2. Concepts fondamentaux, théorème

2.1. Notations et rappels. Nous notons A un alphabet fini, A^* et A^ω les ensembles des mots finis et infinis sur A, ε le mot vide, $|u|$ la longueur d'un élément u de A^* et u^n le produit de n copies de u.

Un mot $v \in A^*$ est *facteur* d'un mot u si u se factorise sous la forme $u = u'vu''$ avec d'une part $u' \in A^*$, d'autre part $u'' \in A^*$ si $u \in A^*$ et $u'' \in A^\omega$ si $u \in A^\omega$; v est *préfixe* de u si $u' = \varepsilon$ et *suffixe* de u si $u'' = \varepsilon$. L'ensemble des *facteurs* d'un mot $\mathbf{x}$ est noté $F(\mathbf{x})$. Nous notons $u[i,j]$ le facteur de u qui commence à l'indice i et se termine à l'indice j.

Un mot infini $\mathbf{x}$ est *limite préfixe* d'une famille (u_n), $u_n \in A^*$, et nous notons $\mathbf{x} = \overleftarrow{\lim_n} u_n$, si

(i) pour tout n, u_n est préfixe de u_{n+1},

(ii) pour tout préfixe $v \in A^*$ de $\mathbf{x}$ il existe un entier n tel que v soit préfixe de u_n.

Il est dit *ultimement périodique* s'il existe deux mots $u \in A^*$ et $v \in A^*$ tels que $\mathbf{x} = \overleftarrow{\lim_n} uv^n$.

Il est *engendré par itération d'un morphisme* $\sigma : A^* \to A^*$ s'il existe une lettre $a \in A$ telle que $\mathbf{x} = \overleftarrow{\lim_n} \sigma^n(a)$. Si l'on étend σ à l'ensemble A^ω par limite préfixe, le mot $\mathbf{x}$ vérifie $\sigma(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ et $\mathbf{x}$ est un point fixe de σ.

Nous appelons *séparateur* d'un mot $\mathbf{x}$ à l'indice $n \in \mathbb{N}$ le plus petit facteur de $\mathbf{x}$ dont l'indice du début de la première occurrence est n.

Nous notons $S_\mathbf{x} : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ la fonction telle que, pour tout entier n, $S_\mathbf{x}(n)$ est la longueur du séparateur de $\mathbf{x}$ lorsqu'il existe et 0 sinon.

Remarquons que, pour tout mot infini ultimement périodique, $S_\mathbf{x}$ est partout nulle sauf pour un nombre fini d'entiers n, et que, dans le cas contraire nous avons $\overleftarrow{\lim_n} S_\mathbf{x}(n) = +\infty$.

Un *q-automate* est un automate fini déterministe dont les étiquettes sont éléments de l'ensemble $\{0, \dots, q-1\}$ et qui est muni d'une fonction de sortie à valeurs dans un ensemble fini (voir Cobham [5] et Eilenberg [8]).

Une partie de $\mathbb{N}$ est *q-reconnaissable* si ses éléments calculés en base q sont reconnus par un q-automate.

Un *q-transducteur* est un transducteur dont les étiquettes sont éléments de l'ensemble $\{0, \dots, q-1\}$ et qui est muni d'une fonction de sortie définie sur l'ensemble des états de l'automate et à valeurs dans $\{0, \dots, q-1\}^*$.

2.2. q-Régularité. Nous adoptons les définitions données par Allouche et Shallit dans [2]. Nous ne considérons ici que des suites à valeurs dans $\mathbb{N}$ et l'anneau de base est l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$. Notons $K(u)$ le *q-noyau* d'une suite $u = (u_n)$, c'est-à-dire l'ensemble des sous-suites de la forme $(u_{q^a n+b})$, avec a et $b \in \mathbb{N}$ et $0 \leqslant b < q^a$.

La suite $u = (u_n)$ est *q-régulière* si le $\mathbb{Z}$-module engendré par $K(u)$ est de type fini.

Une fonction $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ est *q-régulière* si la suite de ses valeurs est q-régulière.

Soit H une partie de $\mathbb{N}$ et $\ell : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction. Nous dirons que *la restriction de ℓ à H est q-régulière* si la fonction ℓ_H définie en posant

$$\ell_H(n) = \begin{cases} \ell(n) & \text{si } n \in H, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

est q-régulière.

Rappelons quelques-unes des propriétés des suites q-régulières parmi celles que nous allons utiliser.

1. Soient (u_n) et (v_n) deux suites q-régulières et soit $\alpha \in \mathbb{Z}$. Les suites (αu_n), $(u_n) + (v_n)$ et $(u_n v_n)$ sont aussi q-régulières.

2. Fixons q et n_0 deux entiers $\geqslant 2$. Notons H la partie de $\mathbb{N}$ suivante:

$$H = \{m \in N, q^k n_0 \leqslant m < q^k(n_0+1),\ k \in \mathbb{N}\}.$$

La suite (u_m) définie en posant

$$u_m = \begin{cases} m - q^k n_0 & \text{si } q^k n_0 \leqslant m < q^k(n_0+1), \\ 0 & m \notin H \end{cases}$$

est q-régulière,

Considérons maintenant l'ensemble $\{q^k n_0,\ k \in \mathbb{N}\}$. Fixons $D \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$ un entier et $\{a_0, \ldots, a_{D-1}\}$ un sous-ensemble de $\{0, \ldots, q-1\}$. Soit v_0 un entier quelconque. La suite $(l(m))$ définie en posant

$$l(n_0) = v_0$$

$$l(q^{k+1} n_0) = q l(q^k n_0) + a_{(k+1) \bmod D}, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

$$l(m) = 0 \quad \text{si } m \notin \{q^j n_0,\ j \in \mathbb{N}\}$$

est q-régulière.

3. Soit s un entier $\geqslant 1$. La suite (u_n) est *q-régulière* si et seulement si (u_n) est *q^s-régulière*.

2.3. Circularité. La définition que nous utilisons est celle introduite par Mignosi et Séébold [12] dans le cas des D0L-systems. Considérons un mot infini $\mathbf{x} \in A^\omega$ qui est point fixe d'un morphisme $\sigma : A^* \to A^*$.

Une *interprétation* d'un facteur w de $\mathbf{x}$ est la donnée d'un quadruplet (u, i, j, v), $i, j \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $i \leqslant j$, $u, v \in A^*$, tel que

1. u est un suffixe non vide de $\sigma(\mathbf{x}[i-1])$,
2. v est un préfixe non vide de $\sigma(\mathbf{x}[j+1])$ et tel que
3. $w = u\sigma(\mathbf{x}[i,j])v$.

Par abus de notations nous écrirons $w = u\sigma(\mathbf{x}[i,j])v$ au lieu du quadruplet (u, i, j, v).

2.3.1. Un mot infini $\mathbf{x}$ qui est engendré par un morphisme σ est *circulaire* s'il existe une constante $K > 0$, (le délai de synchronisation), telle que, pour tout facteur w de $\mathbf{x}$ et pour toutes les interprétations $w = u\sigma(\mathbf{x}[i,j])v$ et $w = u'\sigma(\mathbf{x}[i',j'])v'$, s'il existe h tel que $|u\sigma(\mathbf{x}[i,h-1])| \geqslant K$ et $|\sigma(\mathbf{x}[h+1,j])v| \geqslant K$, alors il existe h' tel que

$$\mathbf{x}[h] = \mathbf{x}[h'], \qquad u\sigma(\mathbf{x}[i,h-1]) = u'\sigma(\mathbf{x}[i',h'-1]).$$

En particulier ceci entraîne $\sigma(\mathbf{x}[h+1,j])v = \sigma(\mathbf{x}[h'+1,j'])v'$.

Notons que si le morphisme est q-uniforme la propriété de circularité implique que, pour tout facteur w de $\mathbf{x}$ de longueur $|w| \geqslant 2K+2q$, les indices des débuts d'occurrences de w dans $\mathbf{x}$ sont tous congrus à une même valeur modulo q. Dans le cas d'un morphisme q-uniforme et injectif nous obtenons:

2.3.2. Proposition. *Soit* $\mathbf{x}$ *un mot infini engendré par itération d'un morphisme injectif et q-uniforme* $\sigma : A^* \rightarrow A^*$. *Le mot* $\mathbf{x}$ *est circulaire si et seulement s'il existe une constante* $C > 0$ *telle que, pour tout facteur* w *de longueur* $|w| \geqslant C$, *pour tous les indices* n *et* m *qui sont des débuts d'une occurrence de* w, *si les interprétations de* w *en ces indices s'écrivent sous la forme* $w = u\sigma(\mathbf{x}[i,j])v$ *et* $w = u'\sigma(\mathbf{x}[i',j'])v'$, *alors nous avons* $\mathbf{x}[i,j] = \mathbf{x}[i',j']$ *et* $u = u'$. *En particulier ceci implique* $v = v'$ *et* $n \equiv m$ *modulo* q.

Une dernière remarque.

2.3.3. Proposition. *Pour tout mot infini* $\mathbf{x}$ *engendré par itération d'un morphisme* $\sigma : A^* \rightarrow A^*$ *nous avons*

1. *pour tout* $s \in \mathbb{N}\backslash\{0\}$, $\mathbf{x}$ *est engendré par itération de* σ^s.
2. $\mathbf{x}$ *est circulaire en tant que mot engendré par* σ *si et seulement si* $\mathbf{x}$ *est circulaire en tant que mot engendré par* σ^s.

Donnons maintenant le théorème principal et quelques exemples.

Théorème 1. Pour tout mot infini $\mathbf{x}$ qui est engendré par itération d'un morphisme q-uniforme et qui est circulaire, la fonction $S_{\mathbf{x}}$, qui à tout entier $n \in \mathbb{N}$ associe la longueur du séparateur de $\mathbf{x}$ en n, est q-régulière.

2.4. Exemples

(1) Soit $A = \{0,1,2,3\}$ et $\eta : A^* \rightarrow A^*$ le morphisme défini en posant $\eta(0) = 01$, $\eta(1) = 21$, $\eta(2) = 03$, $\eta(3) = 23$. Nous obtenons le point fixe $\mathbf{x} = \lim_{\overrightarrow{n}} \eta^n(0)$,

$$\mathbf{x} = 0121\ 0321\ 0123\ 0321\ 0121\ 0323\ldots$$

Ce mot est associé à la suite du dragon (voir [7] et [9]). Il vérifie les hypothèses du théorème.

Soit $B = \{0,1\}$. Considérons la projection $\pi : A^* \rightarrow B^*$ définie par $\pi(0) = \pi(1) = 1$, $\pi(2) = \pi(3) = 0$ et le mot image de $\mathbf{x}$ par π, $\mathbf{w} = \pi(\mathbf{x})$. Ce mot est associé à la suite régulière de pliage de papier (voir [11]).

$$\mathbf{w} = 1101\ 1001\ 1100\ 1001\ 1101\ 1000\ldots$$

Le calcul de $S_{\mathbf{x}}$ donne:

$S_{\mathbf{x}}(0) = S_{\mathbf{x}}(1) = S_{\mathbf{x}}(2) = 1$ pour tout entier $m \geqslant 3$

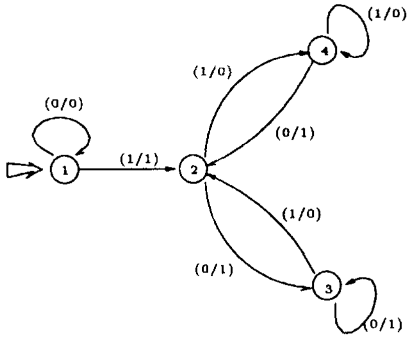

Fig. 2. Automate $A(H)$ qui calcule $S_{\mathbf{x}H}$.

$$S_{\mathbf{x}}(m) = \begin{cases} 5 \times 2^k - m & \text{si } 3 \times 2^k \leqslant m < 4 \times 2^k, \\ 6 \times 2^k - m & \text{si } 4 \times 2^k \leqslant m < 5 \times 2^k + 2^{k-1},\ k \geqslant 2, \\ 6 \times 2^k + 2^{k-1} - m & \text{si } 5 \times 2^k + 2^{k-1} \leqslant m < 6 \times 2^k. \end{cases}$$

Pour tout entier m, notons $w(m) = a_0 \cdots a_r$ le mot miroir de l'expression binaire de m. Plus précisément tel que $a_i \in \{0,1\}$, $a_r = 1$ et $m = a_0 + a_1 2 + \cdots + a_r 2^r$. Considérons par exemple l'ensemble

$$H = \{m \geqslant 3,\ 3 \times 2^k \leqslant m < 4 \times 2^k,\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Pour tout $m \in H$, le mot miroir de l'expression binaire de $S_{\mathbf{x}}(m)$ peut être obtenu en appliquant le transducteur noté $A(H)$ et qui est décrit ci-dessous au mot $w(m)^{\bullet(2)}$, c'est-à-dire à $w(m)$ privé de ses deux dernières lettres. (La fonction de sortie de $A(H)$ est la concaténation avec 01 pour l'état 1 et la concaténation avec 1 pour n'importe quel autre état.)

Considérons par exemple les valeurs 6 et 13. En $m = 6$ nous avons $w(m) = 011$, $w(S_{\mathbf{x}}(m)) = 001$, $S_{\mathbf{x}}(m) = 4$ et le séparateur de $\mathbf{x}$ en 6 est 2101, en $m = 13$ nous obtenons $w(m) = 1011$, $w(S_{\mathbf{x}}(m)) = 111$, $S_{\mathbf{x}}(m) = 7$, le séparateur de $\mathbf{x}$ en 13 est 3210121.

Il est facile de vérifier ensuite que $S_{\mathbf{W}}(m) = S_{\mathbf{x}}(m)$ pour tout $m \geqslant 24$.

(2) Soit $\mathbf{x}$ un mot infini d'alphabet fini A. Notons $J_{\mathbf{x}} : F(\mathbf{x}) \to \mathbb{N}$ l'application qui associe à tout facteur $w \in F(\mathbf{x})$ l'indice du début de la première occurrence de w dans $\mathbf{x}$. Nous avons la proposition suivante:

Proposition. *L'application $J_{\mathbf{x}}$ est surjective si et seulement si $\mathbf{x}$ n'est pas ultimement périodique.*

Démonstration. Il est facile de voir que l'application $J_{\mathbf{x}}$ est bornée lorsque $\mathbf{x}$ est ultimement périodique. En effet supposons qu'il existe deux mots u et v de A^* tels que $\mathbf{x} = \lim\limits_{\overleftarrow{n}} uv^n$. Tout facteur w de $\mathbf{x}$ est soit facteur d'un mot de la forme uv^p et dans ce cas $J_{\mathbf{x}}(w) \leqslant |u|$, soit facteur d'un mot de la forme v^p et dans ce cas $J_{\mathbf{x}}(w) \leqslant |uv|$. L'application $J_{\mathbf{x}}$ est bornée par $|uv|$.

Inversement, supposons $J_{\mathbf{x}}$ bornée par un entier M. Fixons un entier $m > M$. Notons H l'ensemble des facteurs de $\mathbf{x}$ qui commencent en m, $q = \sup_{w \in H} J_{\mathbf{x}}(w)$ et choisissons $v \in H$ tel que $J_{\mathbf{x}}(v) = q$.

Tout facteur $w \in H$ tel que $|w| \geqslant |v|$ admet v pour préfixe et vérifie de ce fait $J_{\mathbf{x}}(w) = q$, (en effet nous avons $J_{\mathbf{x}}(w) < q \Rightarrow J_{\mathbf{x}}(v) < q$ ce qui est contraire au choix de v).

Soit $u = \mathbf{x}[q, m-1]$. Considérons $w \in H$ de longueur $|w| \geqslant \sup(2|u|, |v|)$. Comme $J_{\mathbf{x}}(w) = q$ nous obtenons u préfixe de w. Les indices q et m sont tous deux les indices du début d'une occurrence de u et ainsi u^2 est préfixe de w.

On vérifie ensuite par récurrence que tout mot $w \in H$ de longueur $|w| \geqslant \sup(n|u|, |v|)$ admet u^n pour préfixe et $\mathbf{x} = \underset{\overleftarrow{n}}{\lim}(\mathbf{x}[0, q-1]u^n)$.

Supposons maintenant $\mathbf{x}$ non ultimement périodique. Soit m un entier appartenant à l'image de $J_{\mathbf{x}}$ et soit $w \in F(\mathbf{x})$ tel que $J_{\mathbf{x}}(w) = m$. Pour tout indice $j < m$ nous avons alors $J_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}[j, m-1]w) = j$ (noter que l'on a $J_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}[j, m-1]w) < j \Rightarrow J_{\mathbf{x}}(w) < m$). Comme $J_{\mathbf{x}}$ est non bornée, $J_{\mathbf{x}}$ est surjective. $\square$

Dans le cas d'un mot infini ultimement périodique $\mathbf{x}$ nous n'avons qu'un nombre fini de séparateurs. $S_{\mathbf{x}}$ est alors partout nulle sauf sur une partie bornée de $\mathbb{N}$ et toute propriété de q-régularité est de ce fait automatiquement vérifiée. Remarquons enfin que pour tout mot infini non ultimement périodique nous avons $\underset{\overleftarrow{n}}{\lim} S_{\mathbf{x}}(n) = +\infty$.

3. Cas injectif

Dans cette partie nous allons vérifier la q-régularité de $S_{\mathbf{x}}$ pour les mots infinis qui sont engendrés par des morphisme q-uniformes et injectifs et qui sont circulaires. Pour cela nous allons montrer l'existence d'une partition finie de $\mathbb{N}$ telle que la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à chacune de ses parties s'exprime par des formules de récurrence, facilement calculables et qui entraînent la q-régularité. Pour alléger les preuves introduisons quelques notations supplémentaires.

Pour tout $u \in A^*$, $u^\bullet$ désigne le mot u privé de sa dernière lettre, respectivement ${}^\bullet u$ est u privé de sa première lettre et plus généralement, pour tout $s \in \mathbb{N}$, $u^{\bullet(s)}$ désigne u privé de ses s dernières lettres et ${}^{\bullet(s)}u$ désigne u privé de ses s premières lettres.

Soient u et v deux mots de A^*. Nous notons $gpc(u, v)$ le plus long préfixe commun à u et v et $gsc(u, v)$ leur plus long suffixe commun.

Soit $\mathbf{x} \in A^\omega$ un mot non ultimement périodique. Nous notons $\vartheta_{\mathbf{x}}$ et $J_{\mathbf{x}}$ Les applications suivantes:

$\vartheta_{\mathbf{x}} : \mathbb{N} \to F(\mathbf{x})$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$ est le séparateur de $\mathbf{x}$ en n.

$J_{\mathbf{x}} : F(\mathbf{x}) \to \mathbb{N}$, $\forall w \in F(\mathbf{x})$, $J_{\mathbf{x}}(w)$ est l'indice du début de la première occurrence de w dans $\mathbf{x}$. (En particulier nous avons $J_{\mathbf{x}}(\vartheta_{\mathbf{x}}(n)) = n$ pour tout n.)

Tout d'abord remarquons une propriété caractéristique de $S_{\mathbf{x}}$ et dégageons-en quelques conséquences.

3.1. Proposition. *Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$ nous avons $S_{\mathbf{x}}(n+1) \geqslant S_{\mathbf{x}}(n) - 1$ et ${}^{\bullet}\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$ est préfixe de $\vartheta_{\mathbf{x}}(n+1)$.*

Démonstration. Supposons $S_{\mathbf{x}}(n+1) < S_{\mathbf{x}}(n) - 1$. Le mot $\vartheta_{\mathbf{x}}(n+1)$ est alors préfixe de ${}^{\bullet}\vartheta_{\mathbf{x}}(n)^{\bullet}$. L'inégalité $J_{\mathbf{x}}(\vartheta_{\mathbf{x}}(n)^{\bullet}) < n$ entraîne l'inégalité $J_{\mathbf{x}}(\vartheta_{\mathbf{x}}(n+1)) < n+1$ et cette dernière est incompatible avec la définition de $\vartheta_{\mathbf{x}}(n+1)$. □

3.2. Nous dirons qu'il y a un *saut* à l'indice $n+1$ ou encore un saut entre les indices n et $n+1$ si $S_{\mathbf{x}}(n+1) \geqslant S_{\mathbf{x}}(n)$. Notons qu'alors ${}^{\bullet}\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$ est un préfixe strict de $\vartheta_{\mathbf{x}}(n+1)$.

Nous dirons qu'il n'y a *pas de saut* à l'indice $n+1$ ou que $S_{\mathbf{x}}$ est *monotone* dans l'intervalle $[n, n+1]$ si $S_{\mathbf{x}}(n+1) = S_{\mathbf{x}}(n) - 1$. Dans ce cas nous obtenons $\vartheta_{\mathbf{x}}(n+1) = {}^{\bullet}\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$.

Plus généralement, si $S_{\mathbf{x}}$ est monotone dans l'intervalle $[n, n+d]$ nous avons $S_{\mathbf{x}}(n+d) = S_{\mathbf{x}}(n) - d$ et $\vartheta_{\mathbf{x}}(n+d) = {}^{\bullet(d)}\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$. L'existence d'un saut entre n et $n+d$ implique $S_{\mathbf{x}}(n+d) \geqslant S_{\mathbf{x}}(n) - d + 1$ et ${}^{\bullet(d)}\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$ préfixe de $\vartheta_{\mathbf{x}}(n+d)^{\bullet}$.

Dans toute la partie 3 nous allons supposer le mot $\mathbf{x} \in A^{\omega}$ non ultimement périodique, engendré par un morphisme q-uniforme et injectif noté $\sigma : A^* \to A^*$. Nous supposons également $\mathbf{x}$ circulaire et nous fixons $C > 2$ une constante associée à la propriété de circularité conformément à la proposition 2.3.2.

3.3. Proposition. *Sous ces hypothèses, pour tout indice $n \in \mathbb{N}$ tel que $S_{\mathbf{x}}(n) \geqslant C$ nous avons les inégalités:*

$$qS_{\mathbf{x}}(n) - q + 1 \leqslant S_{\mathbf{x}}(qn) \leqslant qS_{\mathbf{x}}(n).$$

Notons a la dernière lettre de $\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$. Le séparateur de $\mathbf{x}$ à l'indice qn se factorise alors sous la forme $\vartheta_{\mathbf{x}}(qn) = \sigma(\vartheta_{\mathbf{x}}(n)^{\bullet})z$ avec z un préfixe non vide de $\sigma(a)$.

Démonstration. Soit n un indice tel que $S_{\mathbf{x}}(n) \geqslant C$. Factorisons $\vartheta_{\mathbf{x}}(n)$ sous la forme $\vartheta_{\mathbf{x}}(n) = va$ avec $a \in A$ et soit $i < n$ l'indice d'une occurrence de v dans $\mathbf{x}$.

Par application de σ au mot $\mathbf{x}$ nous obtenons une occurrence de $\sigma(v)\sigma(a)$ en qn et une occurrence de $\sigma(v)$ en $qi < qn$. On en déduit les inégalités $J_{\mathbf{x}}(\sigma(v)) < qn$ et $q(S_{\mathbf{x}}(n) - 1) < S_{\mathbf{x}}(qn)$.

Supposons maintenant $S_{\mathbf{x}}(qn) > qS_{\mathbf{x}}(n)$. Dans ce cas $\sigma(v)\sigma(a)$ est un préfixe strict de $\vartheta_{\mathbf{x}}(qn)$ et l'on peut trouver une occurrence de $\sigma(v)\sigma(a)$ en un indice $j < qn$. Par circularité, j est un multiple de q et l'on obtient $j = qi$ avec $i < n$. Nous avons supposé σ injective. L'égalité $\sigma(va) = \sigma(\mathbf{x}[i, i + |va| - 1])$ implique $va = \mathbf{x}[i, i + |va| - 1]$ et $J_{\mathbf{x}}(va) < n$, ce qui est contraire à la définition de séparateur, d'où la proposition. □

3.4. Corollaire. *Pour tout entier n tel que $S_{\mathbf{x}}(n) \geqslant C$ nous avons:*

(1) $S_{\mathbf{x}}(m) \geqslant C$ pour tout m tel que $qn \leqslant m \leqslant qn+q-1$.

(2) L'existence d'un saut en $n+1$ entraîne l'existence d'au moins un saut entre qn et $qn+q$.

Démonstration. Pour la partie (1) utilisons les résultats de la Proposition 3.3 et l'hypothèse $S_{\mathbf{x}}(n) \geqslant C$. Nous avons

$$S_{\mathbf{x}}(qn) \geqslant qS_{\mathbf{x}}(n) - q + 1 \geqslant qC - q + 1,$$

et pour tout entier m tel que $qn \leqslant m \leqslant qn+q-1$

$$S_{\mathbf{x}}(m) \geqslant S_{\mathbf{x}}(qn) - (m - qn) \geqslant qC - 2(q-1).$$

L'inégalité $qC - 2(q-1) \geqslant C$, c'est-à-dire $(C-2)(q-1) \geqslant 0$ est satisfaite dès que $C \geqslant 2$. La condition imposée à C ($C > 2$) assure le résultat de la partie (1).

Remarque. L'hypothèse $S_{\mathbf{x}}(n) > C$ implique $S_{\mathbf{x}}(m) > C$ pour tout m tel que $qn \leqslant m \leqslant qn+q-1$.

(2) Traduisons l'hypothèse de l'existence d'un saut en $n+1$ et utilisons les résultats de la Proposition 3.3. Nous pouvons écrire les inégalités

$$S_{\mathbf{x}}(n) \leqslant S_{\mathbf{x}}(n+1)$$

$$qS_{\mathbf{x}}(n) - q + 1 \leqslant S_{\mathbf{x}}(qn) \leqslant qS_{\mathbf{x}}(n)$$

$$qS_{\mathbf{x}}(n+1) - q + 1 \leqslant S_{\mathbf{x}}(qn+q) \leqslant qS_{\mathbf{x}}(n+1).$$

De tout ceci nous déduisons

$$S_{\mathbf{x}}(qn) - q + 1 \leqslant qS_{\mathbf{x}}(n) - q + 1 \leqslant qS_{\mathbf{x}}(n+1) - q + 1 \leqslant S_{\mathbf{x}}(qn+q).$$

D'où le résultat. □

Notons n_k, $k \in \mathbb{N}$, le nombre de sauts existant dans l'intervalle $[q^k, q^{k+1}]$. Nous allons vérifier que la suite (n_k) est stationnaire. Pour cela fixons un entier n_0 tel que $S_{\mathbf{x}}(n_0) > C$ et posons

$$H(n_0) = \{q^k n_0 \leqslant m \leqslant q^k(n_0+1),\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Nous allons définir pour chaque indice $m \in H(n_0)$ un ensemble fini d'indices qui décrit les occurrences de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m)^{\bullet}$ de la manière suivante:

3.5. Ensembles $I(m)$. Tout d'abord factorisons les séparateurs en n_0 et n_0+1 sous la forme

$$\vartheta_{\mathbf{x}}(n_0) = bva, \quad a, b \in A,\ v \in A^{\star}, \quad \text{et} \quad \vartheta_{\mathbf{x}}(n_0+1) = vaw, \quad w \in A^{\star}.$$

Notons I l'ensemble

$$I = \{i \leqslant n_0 \text{ tels qu'un facteur } v \text{ commence en } i\}.$$

Pour $m \in H(n_0)$, $q^k n_0 \leqslant m \leqslant q^k(n_0+1)$, notons $I(m)$ l'ensemble

$$I(m) = \{i \in I \text{ tels qu'un facteur } \vartheta_{\mathbf{x}}(m)^{\bullet} \text{ commence en } q^k(i-1)+(m-q^k n_0)\}.$$

Des propriétés de circularité de $\mathbf{x}$ et d'injectivité de σ, nous déduisons l'existence d'une bijection entre l'ensemble $I(m)$ et l'ensemble des indices $j < m$ correspondant aux indices des débuts d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m)^{\bullet}$.

Plus précisément soit $m = q^k n_0 + m'$ avec $0 \leqslant m' \leqslant q^k$. Le séparateur $\vartheta_{\mathbf{x}}(m)$ se factorise sous la forme $\vartheta_{\mathbf{x}}(m) = {}^{\bullet(m')}\sigma^k(b)\sigma^k(v)Z$ où Z est un préfixe non vide de $\sigma^k(a)$. Soit $j < m$ l'indice d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m)^{\bullet}$. Par circularité nous avons $j = q^k(i-1)+m'$ et le mot $\sigma^k(v)$ commence à l'indice $q^k i$. Comme σ est injective, v commence en i. Comme de plus nous avons $(j < m \Rightarrow i < n_0 + 1)$ nous en déduisons $i \in I$.

Précisons un peu plus les propriétés des ensembles $I(m)$.

3.6. Proposition. (1) *Nous avons* $I(qm) \subset I(m)$, $\forall m \in H(n_0)$.

(2) *Pour tous les entiers* m_1 *et* m_2 *vérifiant* $q^k n_0 \leqslant m_1 < m_2 \leqslant q^k(n_0+1)$, $k \in \mathbb{N}$ *nous avons*

$$I(m_1) \cap I(m_2) = \emptyset \textit{ s'il existe un saut dans l'intervalle } [m_1, m_2]$$

et

$$I(m_1) \subset I(m_2) \textit{ si } S_{\mathbf{x}} \textit{ est monotone dans l'intervalle } [m_1, m_2].$$

Démonstration. Vérifions (1). Soit $m \in H(n_0)$, $m = q^k n_0 + m'$, $0 \leqslant m' \leqslant q^k$. Nous avons $qm = q^{k+1} n_0 + qm'$ et $0 \leqslant qm' \leqslant q^{k+1}$.

Pour tout $i \in I(qm)$ l'indice $j = q^{k+1}(i-1) + qm'$ est l'indice d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(qm)^{\bullet}$ et donc celui d'une occurrence de $\sigma(\vartheta_{\mathbf{x}}(m)^{\bullet})$. Par circularité $j = qj'$, ici $j' = q^k(i-1)+m'$. Comme σ est injective nous déduisons une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m)^{\bullet}$ en j' et $i \in I(m)$.

Vérifions (2). Posons $m_1 = q^k n_0 + m_1'$, $0 \leqslant m_1' \leqslant q^k$ et $m_2 = q^k n_0 + m_2'$, $0 \leqslant m_2' \leqslant q^k$. Les séparateurs en m_1 et m_2 se factorisent sous la forme

$$\vartheta_{\mathbf{x}}(m_1) = {}^{\bullet(m_1')}\sigma^k(b)\sigma^k(v)Z_1, \text{ et } \vartheta_{\mathbf{x}}(m_2) = {}^{\bullet(m_2')}\sigma^k(b)\sigma^k(v)Z_2,$$

avec pour Z_1 et Z_2 deux préfixes non vides de $\sigma^k(a)$.

Dans le cas où il existe un saut entre m_1 et m_2 nous avons Z_1 préfixe de $Z_2{}^{\bullet}$. Raisonnons par l'absurde et supposons qu'il existe un indice $i \in I(m_1) \cap I(m_2)$. Les facteurs $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_1)^{\bullet}$ et $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_2)^{\bullet}$ commencent respectivement aux indices $j_1 = q^k(i-1)+m_1'$ et $j_2 = q^k(i-1)+m_2'$, $j_1 < j_2$. Dans les deux cas $\sigma^k(v)$ commence à l'indice $q^k i$ et se termine à l'indice $q^k i + |\sigma^k(v)| - 1$. Le facteur $Z_2{}^{\bullet}$ (et donc aussi Z_1) commence à l'indice $q^k i + |\sigma^k(v)|$. Or ${}^{\bullet(m_1')}\sigma^k(b)$ commence à l'indice j_1 et se termine à l'indice $q^k i - 1$. On trouve une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_1)$ en $j_1 < m_1$ ce qui est impossible. Nous concluons que $I(m_1) \cap I(m_2) = \emptyset$.

Dans le cas où $S_{\mathbf{x}}$ est monotone dans l'intervalle $[m_1, m_2]$, nous avons $Z_1 = Z_2$ et de ce fait $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_2)$ est un suffixe de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_1)$. Soit j l'indice d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_1)^\bullet$, l'indice $j + m_2' - m_1'$ est alors l'indice d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_2)^\bullet$. En particulier si $j = q^k(i-1) + m_1'$ avec $i \in I(m_1)$, nous avons $j + m_2' - m_1' = q^k(i-1) + m_2'$ et nous en déduisons alors que $i \in I(m_2)$, d'où l'inclusion. □

Notons $N_k(n_0)$ le nombre de sauts existant entre $q^k n_0$ et $q^k(n_0+1)$. Nous avons

Lemme. *La suite $(N_k(n_0))$ est stationnaire.*

Démonstration. Soit $m \in H(n_0)$. Nous savons que l'existence d'un saut entre m et $m+1$ entraîne l'existence d'au moins un saut entre qm et $qm+q$ dès que $S_{\mathbf{x}}(m) \geqslant C$. La suite $(N_k(n_0))$ est croissante.

Fixons un entier $k \in \mathbb{N}$ et notons $m_1, \ldots, m_r$ la suite de tous les indices tels que $q^k n_0 \leqslant m_1 < \cdots < m_r < q^k(n_0+1)$ et tels qu'il existe un saut entre m_i et $m_i + 1$. En particulier nous avons $r = N_k(n_0)$. Les ensembles $I(m_i)$ sont non vides, contenus dans I et deux à deux disjoints, d'où $r \leqslant Card I$.

La suite $(N_k(n_0))$ est croissante et majorée, et donc stationnaire. □

3.7. Corollaire. *La suite (n_k) du nombre de sauts entre $[q^k, q^{k+1}]$ est stationnaire.*

Démonstration. Fixons un entier k_0 tel que l'on ait $S_{\mathbf{x}}(m) > C$, $\forall m \in [q^{k_0}, q^{k_0+1}[$. Notons $N_k(m)$, $m \in [q^{k_0}, q^{k_0+1}[$, le nombre de sauts existant entre $q^k m$ et $q^k(m+1)$. Nous avons alors

$$n_k = \sum_{m=q^{k_0}}^{q^{k_0+1}-1} N_k(m).$$

Les suites $(N_k(m))_{k \geqslant k_0}$ sont croissantes et stationnaires et nous en déduisons les mêmes propriétés pour la suite (n_k). □

3.8. Une conséquence de ce corollaire est que, pour tout entier k_0 suffisamment grand, les ensembles $H(n_0)$, $n_0 \in [q^{k_0}, q^{k_0+1}[$, sont de deux types (que nous allons noter S1 et S2 à partir de maintenant):

S1. la fonction $S_{\mathbf{x}}$ est monotone dans chaque intervalle $[q^k n_0, q^k(n_0+1)]$, $k \in \mathbb{N}$,

S2. $S_{\mathbf{x}}$ admet exactement un saut dans chaque intervalle $[q^k n_0, q^k(n_0+1)]$, $k \in \mathbb{N}$.

Montrons tout d'abord la q-régularité de $S_{\mathbf{x}}$ sur le sous-ensemble $\{q^k n_0, k \in \mathbb{N}\}$.

3.9. Proposition. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $S_{\mathbf{x}}(n_0) > C$ et H l'ensemble $H = \{q^k n_0, k \in \mathbb{N}\}$. Alors, la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à H est q-régulière.*

Démonstration. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ tel que $S_{\mathbf{x}}(n_0) > C$ et soit $H = \{q^k n_0,\ k \in \mathbb{N}\}$. Dans le cas présent, modifions légèrement la définition des ensembles d'indices introduits en 3.5. Posons

$$J = \{i < n_0, \text{tels que } \vartheta_{\mathbf{x}}(n_0)^\bullet \text{ commence en } i\}$$

$$J(k) = \{i \in J, \text{ tels que } \vartheta_{\mathbf{x}}(q^k n_0)^\bullet \text{ commence en } q^k i\}, \text{ pour } k \in \mathbb{N}.$$

Examinons la suite $(J(k))$. Il existe encore ici une bijection entre $J(k)$ et l'ensemble des indices $j < q^k n_0$ qui sont les débuts d'un facteur $\vartheta_{\mathbf{x}}(q^k n_0)^\bullet$. Plus précisément, un indice $j < q^k n_0$ est l'indice du début d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(q^k n_0)^\bullet$ si et seulement si j est de la forme $j = q^k i$ avec $i \in J(k)$.

L'inclusion $J(k+1) \subset J(k)$ est donnée par la Proposition 3.6(1).

La suite $(J(k))$ est une suite décroissante d'ensembles finis non vides. Cette suite est stationaire et sa limite est un sous-ensemble non vide de J que nous allons noter $E = \{i_1, \ldots, i_h\}$. Fixons également $k_0 \in \mathbb{N}$ tel que $J(k) = E$, $\forall k \geqslant k_0$.

Définissons la suite $(d_k)_{k \geqslant k_0}$ à valeurs dans A^{h+1} de la façon suivante:

(i) $d_k = (a_0^k, a_1^k, \ldots, a_h^k)$, $a_j^k \in A$,

(ii) a_0^k est la dernière lettre de $\vartheta_{\mathbf{x}}(q^k n_0)$,

(iii) a_j^k, $1 \leqslant j \leqslant h$, est la lettre qui suit immédiatement le facteur $\vartheta_{\mathbf{x}}(q^k n_0)^\bullet$ qui commence en $q^k i_j$.

Notons w_{k+1} le préfixe non vide de $\sigma(a_0^k)$ $(k \geqslant k_0)$ tel que

$$\vartheta_{\mathbf{x}}(q^{k+1} n_0) = \sigma(\vartheta_{\mathbf{x}}(q^k n_0)^\bullet) w_{k+1}.$$

Lemme. *La suite $(d_k)_{k \geqslant k_0}$ est ultimement périodique.*

Démonstration. Nous avons $J(k) = E$, $\forall k \geqslant k_0$. Ainsi, un indice $j < q^k n_0$ est le début d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(q^k n_0)^\bullet$ si et seulement j est de la forme $j = q^k i$ avec $i \in E$. En particulier, si nous reprenons la factorisation de $\vartheta_{\mathbf{x}}(q^{k+1} n_0)$ sous la forme $\vartheta_{\mathbf{x}}(q^{k+1} n_0) = \sigma(\vartheta_{\mathbf{x}}(q^k n_0)^\bullet) w_{k+1}$, w_{k+1} préfixe non vide de $\sigma(a_0^n)$, alors w_{k+1} vérifie

$$w_{k+1}^\bullet = gpc(\sigma(a_0^k), \sigma(a_j^k)), \quad \forall j \in \{1, \ldots, h\}.$$

La suite (d_k) prend ses valeurs dans un ensemble fini. Soient k' et k'', deux entiers distincts tels que $d_{k'} = d_{k''}$ et soit j un indice $1 \leqslant j \leqslant h$. Nous avons

$$\begin{aligned} a_j^{k'} = a_j^{k''} &\Rightarrow \sigma(a_j^{k'}) = \sigma(a_j^{k''}) \\ &\Rightarrow w_{k'+1}^\bullet = gpc(\sigma(a_0^{k'}), \sigma(a_j^{k'})) = w_{k''+1}^\bullet = gpc(\sigma(a_0^{k''}), \sigma(a_j^{k''})) \\ &\Rightarrow a_0^{k'+1} = a_0^{k''+1} \quad \text{et} \quad a_j^{k'+1} = a_j^{k''+1}, \end{aligned}$$

d'où $d_{k'+1} = d_{k''+1}$. La suite $(d_k)_{k \geqslant k_0}$ est bien ultimement périodique. □

Fixons maintenant un entier $k_1 \geqslant k_0$ tel que $(d_k)_{k \geqslant k_1}$ soit périodique et soit D une période de cette suite. L'ensemble $\{w_k,\ k \geqslant k_1\}$ des suffixes des facteurs $\vartheta_{\mathbf{x}}(q^k n_0)$

définis précédemment se réduit à l'ensemble fini $\{w_{k_1}, \dots, w_{k_1+D-1}\}$. Nous pouvons toujours choisir k_1 de façon à avoir $k_1 + j \equiv j \bmod D$ pour tout $j \in \{0, \dots, D-1\}$. Nous poserons alors pour simplifier $w_j = w_{k_1+j}$, pour $j \in \{0, \dots, D-1\}$. Nous obtenons les formules suivantes (pour $k \geqslant k_1$):

$$\vartheta_{\mathbf{x}}(q^{k+1}n_0) = \sigma(\vartheta_{\mathbf{x}}(q^k n_0)^{\bullet})w_{(k+1) \bmod D}, \quad \text{et}$$
$$S_{\mathbf{x}}(q^{k+1}n_0) = q(S_{\mathbf{x}}(q^k n_0) - 1) + |w_{(k+1) \bmod D}|.$$

Ces formules nous donnent la q-régularité de la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à H. □

3.10. Corollaire. *Soit $n_0 \in N$ tel que $S_{\mathbf{x}}(n_0) > C$ et soit*

$$H(n_0) = \{m \in \mathbb{N} / q^k n_0 \leqslant m \leqslant q^k(n_0 + 1),\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Supposons que $S_{\mathbf{x}}$ soit monotone dans chaque intervalle $[q^k n_0, q^k(n_0 + 1)]$. Dans ces conditions, la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à $H(n_0)$ est q-régulière.

Démonstration. Reprenons, pour le sous-ensemble $\{q^k n_0,\ k \in \mathbb{N}\}$, les notations et les formules établies précédemment. Nous avons pour k suffisamment grand ($k \geqslant k_1$)

$$S_{\mathbf{x}}(q^{k+1}n_0) = q(S_{\mathbf{x}}(q^k n_0) - 1) + |w_{(k+1) \bmod D}|.$$

L'application $S_{\mathbf{x}}$ est monotone dans l'intervalle $[q^{k+1}n_0, q^{k+1}(n_0 + 1)]$ et la valeur de $S_{\mathbf{x}}$ en un indice $q^{k+1}n_0 \leqslant m \leqslant q^{k+1}(n_0 + 1)$ est

$$S_{\mathbf{x}}(m) = q(S_{\mathbf{x}}(q^k n_0) - 1) - (m - q^k n_0) + |w_{(k+1) \bmod D}|.$$

On en déduit la q-régularité de la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à $H(n_0)$. □

3.11. Proposition. *Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier tel que $S_{\mathbf{x}}(n_0) > C$ et soit*

$$H(n_0) = \{m \in \mathbb{N} / q^k n_0 \leqslant m \leqslant q^k(n_0 + 1),\ k \in \mathbb{N}\}.$$

Supposons que, dans chaque intervalle $[q^k n_0, q^k(n_0 + 1)]$, $S_{\mathbf{x}}$ admette exactement un saut, et ceci entre les indices m_k et $m_k + 1$ ($q^k n_0 \leqslant m_k < m_k + 1 \leqslant q^k(n_0 + 1)$). Nous avons alors

(1) *l'ensemble $\{m_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est q-reconnaissable,*
(2) *la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à $H(n_0)$ est q-régulière.*

Démonstration. Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ un entier tel que $S_{\mathbf{x}}(n_0) > C$. Factorisons les séparateurs en n_0 et en $n_0 + 1$ sous la forme

$$\vartheta_{\mathbf{x}}(n_0) = bva, \quad a, b \in A,\ v \in A^{\star} \quad \text{et} \quad \vartheta_{\mathbf{x}}(n_0 + 1) = vaw, \quad w \in A^{\star}.$$

De l'existence d'un unique saut entre n_0 et $n_0 + 1$ et entre m_k et $m_k + 1$ dans tout intervalle $[q^k n_0, q^k(n_0 + 1)]$ nous déduisons que:

(1) $|w| \geqslant 1$ et ${}^{\bullet}\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k)$ est préfixe de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k + 1)^{\bullet}$,

(2) $S_{\mathbf{x}}$ est monotone dans les intervalles $[q^k n_0, m_k]$ et $[m_k + 1,\ q^k(n_0 + 1)]$. En particulier, pour tout entier k suffisamment grand, $S_{\mathbf{x}}$ peut être calculée dans chacun de ces intervalles à l'aide de formules analogues à celles qui ont été établies dans le Corollaire 3.10.

Nous avons donc, sous les hypothèses données, la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à $H(n_0)$ est q-régulière si et seulement si l'ensemble $\{m_k,\ k \in \mathbb{N}\}$ est q-reconnaissable.

Démontrons ce dernier point et pour cela réintroduisons les ensembles d'indices $I(m)$ définis en 3.5, c'est-à-dire:

$$I = \{i \leqslant n_0 \text{ tel qu'une occurrence de } v \text{ commence en } i\}$$

et pour $q^k n_0 \leqslant m \leqslant q^k(n_0 + 1)$,

$$I(m) = \{i \in I \text{ tel que } \vartheta_{\mathbf{x}}(m)^\bullet \text{ commence } q^k(i-1) + (m - q^k n_0)\},$$

Notons

(i) E la valeur limite de la suite stationnaire $(I(q^k(n_0 + 1)),$

(ii) k_0 un entier tel que $I(q^k(n_0 + 1)) = E,\ \forall k \geqslant k_0$.

(iii) $b_0 = \mathbf{x}[n_0]$,

(iv) $b_i = \mathbf{x}[i - 1],\ \forall i \in E$,

(v) $w(k,i) = gcs(\sigma^k(b_i), \sigma^k(b_0)),\ i \in E$ et $k \in N$, le plus long suffixe commun aux mots $\sigma^k(b_i)$ et $\sigma^k(b_0)$,

(vi) $m_k = q^k n_0 + m'_k$ avec $m'_k < q^k$.

Dans un premier temps montrons que la suite $(I(m_k + 1))$ est stationnaire et que sa limite est un sous-ensemble de E. Le séparateur en $m_k + 1$ se factorise sous la forme

$$\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k + 1) = {}^{\bullet(m'_k+1)}\sigma^k(b)\sigma^k(v)Z_k$$

avec Z_k préfixe non vide de $\sigma^k(a)$. Comme $S_{\mathbf{x}}$ est monotone dans l'intervalle $[m_k + 1,\ q^k(n_0 + 1)]$. Nous obtenons en particulier $\vartheta_{\mathbf{x}}(q^k(n_0 + 1))$ suffixe de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k + 1)$ c'est-à-dire ici $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k + 1) = \sigma^k(v)Z_k$.

Soit $j < m_k + 1$ l'indice d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k + 1)^\bullet$. L'indice j est de la forme $j = q^k(i-1) + m'_k + 1$ avec $i \in I(m_k + 1)$. Une occurrence de $\sigma^k(v)Z_k$ se trouve en $q^k i$ et ainsi $i \in I(q^k(n_0 + 1))$.Nous avons $I(m_k + 1) \subset I(q^k(n_0 + 1))$ et pour $k \geqslant k_0$ l'inclusion $I(m_k + 1) \subset E$.

Examinons le préfixe ${}^{\bullet(m'_k+1)}\sigma^k(b)$ de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k + 1)$. Fixons $i \in I(m_k + 1)$. Une occurrence de ${}^{\bullet(m'_k+1)}\sigma^k(b)$ commence à l'indice $q^k(i-1) + m'_k + 1$ et se termine à l'indice $q^k i - 1$. Nous obtenons

$${}^{\bullet(m'_k+1)}\sigma^k(b_i) = {}^{\bullet(m'_k+1)}\sigma^k(b_0) = \mathbf{x}[m_k + 1, q^k(n_0 + 1) - 1]$$

et $\mathbf{x}[m_k + 1, q^k(n_0 + 1) - 1]$ est suffixe de $w(k,i)$.

Notons que l'inégalité $|w(k,i)| > |\mathbf{x}[m_k + 1, q^k(n_0 + 1) - 1]| = q^k(n_0 + 1) - m_k - 1$ implique$\mathbf{x}[m_k] = \mathbf{x}[q^k(i-1) + m'_k]$. Comme ${}^\bullet\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k)$ est préfixe de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k + 1)^\bullet$ nous obtenons de ce fait l'existence d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k)$ en $q^k(i-1)+m'_k < m_k$ ce qui est impossible. Nous avons donc

(1) $i \in I(m_k+1) \Rightarrow \mathbf{x}[m_k+1, q^k(n_0+1)-1] = w(k,i)$,

(2) $i \in I(m_k+1) \Leftrightarrow w(k,i) = \sup_{j\in E} w(k,j)$.

Vérifions l'inclusion $I(m_{k+1}+1) \subset I(m_k+1)$. Nous savons par le Corollaire 3.4 qu'il existe un saut entre qm_k et $q(m_k+1)$. D'autre part nous avons fait l'hypothèse d'un saut unique dans l'intervalle $[q_{k+1}n_0+1, q_{k+1}(n_0+1)]$. Nous avons donc $m_{k+1} \in [qm_k, qm_k+q]$ et $S_{\mathbf{x}}$ est monotone dans l'intervalle $[m_{k+1}+1, qm_k+q]$. Nous avons alors les inclusions (Proposition 3.6)

$$I(m_{k+1}+1) \subset I(q(m_k+1)) \subset I(m_k+1).$$

La suite $(I(m_k+1))$ est une suite décroissante d'ensembles non vides. Elle est stationnaire et sa limite est un ensemble non vide que nous notons E'. Remarquons aussi que $E' \subset E$. Fixons également $k_1 \geqslant k_0$ un entier tel que $I(m_k+1) = E'$ pour tout $k \geqslant k_1$.

Remarques. Pour tout entier $k \geqslant k_1$ nous avons

(1) Un indice $j < m_k+1$ est l'indice d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k+1)^\bullet$ si et seulement si j est de la forme $j = q^k(i-1)+m'_k+1$ avec $i \in E'$.

(2) $w(k,i) = w(k,i') = \mathbf{x}[m_k+1, q^k(n_0+1)-1]$, $\forall i,i' \in E'$.

(3) Soient i et $i' \in E'$. Notons α, β et γ les lettres de A telles que l'on ait

$$\sigma^k(b_i) = u\beta w(k,i), \quad u \in A^* \quad \text{et} \quad \sigma^k(b_{i'}) = u'\beta w(k,i'), \quad u' \in A^*.$$
$$\sigma^k(b_0) = u''\alpha w(k,i) = u''\alpha w(k,i'), \quad u'' \in A^*,$$

En particulier $\alpha \neq \beta$ et $\alpha \neq \gamma$. Par application de σ nous obtenons $\sigma(\alpha) \neq \sigma(\beta)$ et $\sigma(\alpha) \neq \sigma(\gamma)$ et plus précisément

$$w(k+1,i) = gcs(\sigma^{k+1}(b_i), \sigma^{k+1}(b_0)) = gcs(\sigma(\alpha),\sigma(\beta))\sigma(w(k,i)) \text{ d'une part}$$
$$w(k+1,i') = gcs(\sigma^{k+1}(b_{i'}), \sigma^{k+1}(b_0)) = gcs(\sigma(\alpha),\sigma(\gamma))\sigma(w(k,i')) \text{ d'autre part.}$$

Nous en déduisons l'égalité $gcs(\sigma(\alpha),\sigma(\beta)) = gcs(\sigma(\alpha),\sigma(\gamma))$.

Tout ceci va nous permettre de démontrer que la suite $(p_k)_{k\geqslant k_1}$ à valeurs dans A^{h+1} définie ci-dessous est ultimement périodique. Posons

(i) $E' = \{i_1,\ldots,i_h\}$,

(ii) $p_k = (b_0^k, b_1^k, \ldots, b_h^k)$, $b_j^k \in A$, $j \in \{0,\ldots,h\}$,

(iii) $b_0^k = \mathbf{x}[m_k]$ est la lettre qui précède le facteur $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k+1)$ qui commence en m_k+1,

(iv) $b_j^k = \mathbf{x}[q^k(i_j-1)+m'_k]$ est la lettre qui précède le facteur $\vartheta_{\mathbf{x}}(m_k+1)^\bullet$ qui commence en $q^k(i_j-1)+m'_k+1$, $j \in \{1,\ldots,h\}$. (Cette lettre existe toujours puisque $i_j \in E'$)

(v) $z_k = gsc(\sigma(b_j^{k-1}), \sigma(b_0^{k-1}))$, j l'un des indices $j \in \{1,\ldots,h\}$. (Notons que $\sigma(b_j^{k-1}) \neq \sigma(b_0^{k-1})$ implique $0 \leqslant |z_k| < q$)

Lemme. *La suite (p_k) est ultimement périodique.*

Démonstration. La suite (p_k) prend ses valeurs dans un ensemble fini. Considérons deux entiers $k' \neq k''$ tels que l'on ait $p_{k'} = p_{k''}$, c'est-à-dire $b_j^{k'} = b_j^{k''}$, $\forall j \in \{0, \dots, h\}$. Pour tout indice $1 \leqslant j \leqslant h$ nous avons

$$\begin{aligned} b_j^{k'} = b_j^{k''} &\Rightarrow \sigma(b_j^{k'}) = \sigma(b_j^{k''}) \\ &\Rightarrow z_{k'+1} = gsc(\sigma(b_0^{k'}), \sigma(b_j^{k'})) = z_{k''+1} = gsc(\sigma(b_0^{k''}), \sigma(b_j^{k''})) \\ &\Rightarrow b_0^{k'+1} = b_0^{k''+1} \quad \text{et} \quad b_j^{k'+1} = b_j^{k''+1} \end{aligned}$$

D'où $p_{k'+1} = p_{k''+1}$. Nous en déduisons donc que la suite (p_k) est bien ultimement périodique. □

Fixons maintenant $k_2 \geqslant k_1$ un entier tel que $(p_k)_{k \geqslant k_2}$ est périodique et soit $D > 0$ une période. L'ensemble des suffixes $\{z_k,\ k \geqslant k_2\}$ définis précédemment est un ensemble fini $\{z_{k_2}, \dots, z_{k_2+D-1}\}$. Nous pouvons toujours choisir k_2 de façon à avoir $k_2 + j \equiv j \bmod D$ pour $j \in \{0, \dots, D-1\}$ et nous poserons pour simplifier $z_j = z_{k_2+j}$, $j \in \{0, \dots, D-1\}$.

Nous obtenons pour tout $i \in E'$, pour tout $k \geqslant k_2$,

$$w(k+1, i) = z_{k+1}\sigma(w(k,i)) = z_{(k+1) \bmod D}\sigma(w(k,i)),$$

ce qui implique

$$|w(k+1, i)| = |z_{(k+1) \bmod D}| + q|w(k,i)|.$$

Or nous avons

$$m_k + 1 = q^k(n_0 + 1) - |w(k,i)| \quad \text{et} \quad m_{k+1} + 1 = q^{k+1}(n_0 + 1) - |w(k+1, i)|.$$

Finalement nous obtenons

$$m_{k+1} = qm_k + q - 1 - |z_{(k+1) \bmod D}|, \quad \forall k \geqslant k_2.$$

d'où la q-reconnaissablilité de l'ensemble $\{m_k,\ k \in \mathbb{N}\}$. □

Nous avons ainsi démontré que la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à $H(n_0)$ est q-régulière dans le cas $S2$. □

3.12. Théorème. *Pour tout mot infini* $\mathbf{x}$ *non ultimement périodique, qui est engendré par itération d'un morphisme q-uniforme et injectif σ et qui est circulaire, l'application $S_{\mathbf{x}}$ correspondante est q-régulière.*

Démonstration. Notons toujours $C > 2$ une constante associée à la propriété de circularité de $\mathbf{x}$. Choisissons un entier k_0 tel que l'on ait

(1) d'une part $S_{\mathbf{x}}(m) > C$ pour tout $m \geqslant q^{k_0}$,

(2) d'autre part la suite $(n_k)_{k \geqslant k_0}$, où n_k est le nombre de sauts existant dans les intervalles $[q^k, q^{k+1}]$, est constante.

Les ensembles $H(n) = \{m \in \mathbb{N}, q^k n \leqslant m < q^k(n+1), k \in \mathbb{N}\}$, $n \in [q^{k_0}, q^{k_0+1}[$ vérifient alors les propriétés $S1$ ou $S2$ introduites en 3.8.

Notons H' l'ensemble $H' = \{m \in \mathbb{N},\ m < q^{k_0}\}$ et considérons la partition finie de $\mathbb{N}$ donnée par la famille $(H', (H(n))_{n\in[q^{k_0}, q^{k_0+1}[})$.

L'ensemble H' est fini. La restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à chaque partie $H(n)$ est q-régulière. Nous pouvons conclure à la q-régularité de $S_{\mathbf{x}}$ sur $\mathbb{N}$ tout entier. □

4. Cas général

Dans cette partie nous considérons un mot infini $\mathbf{x}$ point fixe d'un morphisme q-uniforme σ. Nous supposons $\mathbf{x}$ circulaire. Aucune autre hypothèse n'est faite. Pour démontrer la q-régularité de $S_{\mathbf{x}}$, nous allons tout d'abord nous ramener au cas d'un morphisme injectif.

4.1. Réduction à un morphisme injectif. Notons $\sim_m$, $m \in \mathbb{N}$, la relation d'équivalence définie sur A en posant

$$\forall (a,b) \in A^2, \quad a \sim_m b \Leftrightarrow \sigma^m(a) = \sigma^m(b)$$

et notons A_m l'ensemble quotient $A_m = A/{\sim_m}$.

La relation $\sim_m$ est plus fine que $\sim_{m+1}$ et la suite des cardinaux $(Card\, A_m)$ est une suite d'entiers décroissants et jamais nuls. Cette suite est stationnaire. Fixons s un entier tel que $\forall m \in \mathbb{N}$ $(m \geqslant s \Rightarrow A_m = A_s)$.

Notons $\pi_m : A^* \to A_m^*$ le morphisme associé à la projection canonique de A sur A_m. ($\forall a \in A$, $\pi_m(a)$ noté $\bar{a}$ est la classe de a modulo $\sim_m$).

Considérons le morphisme q^m-uniforme $\eta_m : A_m^* \to A_m^*$ défini en posant pour tout $a \in A$, $\eta_m(\pi_m(a)) = \pi_m(\sigma^m(a))$.

Quelques remarques. Nous avons pour tout entier m:

(1) le morphisme η_m est injectif si $m \geqslant s$,

(2) soit $a_0 \in A$ tel que $\mathbf{x} = \varprojlim_n \sigma^n(a_0)$. Nous avons $\mathbf{x} = \varprojlim_n \sigma^n(\sigma^m(a_0))$ et ainsi $\mathbf{x}$ est engendré par le morphisme q^m-uniforme σ^m,

(3) $\mathbf{x}$ circulaire relativement à σ est équivalent à $\mathbf{x}$ circulaire relativement à σ^m,

(4) $S_{\mathbf{x}}$ q-régulière est équivalent à $S_{\mathbf{x}}$ q^m-régulière.

Ainsi, quitte à remplacer σ par une puissance convenable de σ, (ici σ^s par exemple), nous pouvons supposer que nous sommes dans la situation suivante:

(1) $\mathbf{x}$ est un mot infini engendré par un morphisme q-uniforme σ pour lequel il est circulaire,

(2) $\sim$ est la relation d'équivalence définie sur A par

$$\forall (a,b) \in A^2, \quad a \sim b \Leftrightarrow \sigma(a) = \sigma(b),$$

(3) B est l'ensemble quotient $B = A/{\sim}$, $\pi : A^* \to B^*$ le morphisme canonique défini par ($\forall a \in A$, $\pi(a)$, encore noté $\bar{a}$, est la classe de a modulo $\sim$),

(4) $\eta : B^* \to B^*$ est le morphisme q-uniforme défini en posant pour tout $a \in A$, $\eta(\pi(a)) = \pi(\sigma(a))$. Ce morphisme est injectif et vérifie le lemme suivant qui est une conséquence directe de la définition de $\sim$ et du fait que η est injectif:

Lemme. *Pour tous facteurs u et v de* $\mathbf{x}$ *nous avons*
(1) $\pi(u) = \pi(v) \Leftrightarrow \sigma(u) = \sigma(v)$,
(2) $\sigma^2(u) = \sigma^2(v) \Rightarrow \sigma(u) = \sigma(v)$.

(5) Notons enfin $\mathbf{y}$ l'image de $\mathbf{x}$ par le morphisme étendu π et $a_0 \in A$ telle que $\mathbf{x} = \lim\limits_{\overleftarrow{n}} \sigma^n(a_0)$. Nous avons $\mathbf{y} = \lim\limits_{\overleftarrow{n}} \eta^n(\pi(a_0))$. Le mot infini $\mathbf{y}$ est engendré par le morphisme η qui est q-uniforme et injectif.

4.2. Proposition. Sous les hypothèses précédentes, nous avons si $\mathbf{x}$ circulaire alors $\mathbf{y}$ est circulaire.

Démonstration. Fixons $K > 0$ une constante asssociée à la propriété de circularité de $\mathbf{x}$ conformément à la caractérisation donnée en 2.3.1.

Soit $\overline{w}$ un facteur de $\mathbf{y}$ suffisamment long, par exemple $|\overline{w}| > 4K + 4q$. Soient m et n deux indices d'une occurrence de $\overline{w}$. Notons w_1 le facteur de $\mathbf{x}$ au-dessus de $\overline{w}$ à l'indice m et w_2 le facteur de $\mathbf{x}$ au-dessus de $\overline{w}$ à l'indice n. Notons également h et l les indices qui sont solutions des équations:

$$h - m = \left[\frac{K}{q}\right] + 1 \quad \text{et} \quad m + |\overline{w}| - l = \left[\frac{K}{q}\right] + 1.$$

Nous avons

$$\pi(w_1) = \pi(w_2) \Rightarrow \sigma(w_1) = \sigma(w_2) = \sigma(\mathbf{x}[m, m + |w| - 1]) = \sigma(\mathbf{x}[n, n + |w| - 1]).$$

Les indices h et l vérifient

$$m < h \leqslant l < m + |w| - 1,$$

$$|\sigma(\mathbf{x}[m, h-1])| > K \quad \text{et} \quad |\sigma(\mathbf{x}[l+1, m + |w| - 1])| > K.$$

Nous pouvons appliquer la propriété de circularité de $\mathbf{x}$. Au couple (h, l) correspond un couple d'indices (h', l') vérifiant

$$n < h' \leqslant l' < n + |w| - 1,$$

$$\mathbf{x}[h, l] = \mathbf{x}[h', l'] \quad \text{et} \quad \sigma(\mathbf{x}[m, h-1]) = \sigma(\mathbf{x}[n, h'-1]).$$

Par choix de h et l nous avons

$$|\mathbf{x}[h, l]| = l - h + 1 \geqslant 2K + 2q.$$

Précisons les interprétations du facteur $\mathbf{x}[h, l]$ en h et en h'. Elles s'écrivent sous la forme

$$\mathbf{x}[h, l] = u_1 \sigma(\mathbf{x}[i_1, j_1]) v_1 \quad \text{et} \quad \mathbf{x}[h', l'] = u_1' \sigma(\mathbf{x}[i_1', j_1']) v_1'.$$

Nous pouvons alors trouver des indices h_1 et l_1 tels que

$$i_1 \leqslant h_1 \leqslant l_1 \leqslant j_1,$$

$$|u_1\sigma(\mathbf{x}[i_1, h_1 - 1])| \geqslant K \quad \text{et} \quad |\sigma(\mathbf{x}[l_1 + 1, j_1])v_1| \geqslant K.$$

Appliquons à nouveau la propriété de circularité de $\mathbf{x}$. Au couple (h_1, l_1) correspond un couple d'indices (h_2, l_2) tels que l'on ait

$$i_2 \leqslant h_2 \leqslant l_2 \leqslant j_2,$$

$$\mathbf{x}[h_1, l_1]) = \mathbf{x}[h_2, l_2] \quad \text{et} \quad u_1\sigma(\mathbf{x}[i_1, h_1 - 1]) = u_2\sigma(\mathbf{x}[i_2, h_2 - 1]).$$

Notons $u = u_1 = u_2$ et $v = v_1 = v_2$. En m et en n nous obtenons les factorisations de w_1 et de w_2 suivantes:

$$w_1 = \mathbf{x}[m, h-1]u\sigma(\mathbf{x}[i_1, h_1 - 1])\sigma(\mathbf{x}[h_1, l_1])\sigma(\mathbf{x}[l_1 + 1, j_1])v\mathbf{x}[l + 1, m + |\overline{w}| - 1],$$

et

$$w_2 = \mathbf{x}[n, h'-1]u\sigma(\mathbf{x}[i_2, h_2 - 1])\sigma(\mathbf{x}[h_2, l_2])\sigma(\mathbf{x}[l_2 + 1, j_2])v\mathbf{x}[l' + 1, n + |\overline{w}| - 1].$$

De plus nous avons

$$\sigma(\mathbf{x}[i_1, h_1 - 1] = \sigma(\mathbf{x}[i_2, h_2 - 1]) \Rightarrow \pi(\mathbf{x}[i_1, h_1 - 1]) = \pi(\mathbf{x}[i_2, h_2 - 1]),$$

$$\sigma(\mathbf{x}[h_1 + 1, j_1]) = \sigma(\mathbf{x}[h_2 + 1, j_2]) \Rightarrow \pi(\mathbf{x}[h_1 + 1, j_1]) = \pi(\mathbf{x}[h_2 + 1, j_2]),$$

et

$$\sigma(\mathbf{x}[m, h - 1]) = \sigma(\mathbf{x}[n, h' - 1]) \Rightarrow \mathbf{y}[m, h - 1] = \mathbf{y}[n, h' - 1],$$

c'est-à-dire

$$\mathbf{y}[i_1, h_1 - 1]) = \mathbf{y}[i_2, h_2 - 1]) \quad \text{et} \quad \mathbf{y}[h_1 + 1, j_1]) = \mathbf{y}[h_2 + 1, j_2]).$$

Nous obtenons les factorisations de $\overline{w}$

en m: $\quad \overline{w} = \mathbf{y}[m, h - 1]\overline{u}\eta(\mathbf{y}[i_1, j_1])\overline{v}\mathbf{y}[l + 1, m + |\overline{w}| - 1],$

en n: $\quad \overline{w} = \mathbf{y}[n, h' - 1]\overline{u}\eta(\mathbf{y}[i_2, j_2])\overline{v}\mathbf{y}[l' + 1n + |\overline{w}| - 1],$

avec

$$\mathbf{y}[i_1, j_1] = \mathbf{y}[i_2, j_2]) \quad \text{et} \quad \mathbf{y}[m, h - 1]\overline{u} = \mathbf{y}[n, h' - 1]\overline{u},$$

et ainsi le mot $\mathbf{y}$ est bien circulaire. □

4.3. Proposition. *L'application $S_{\mathbf{y}}$, qui à tout entier m associe la longueur du séparateur de $\mathbf{y}$ en m, est q-régulière.*

Démonstration. Nous avons $\mathbf{x} = \underleftarrow{\lim}_n \sigma^n(a_0)$ et $\mathbf{y} = \underleftarrow{\lim}_n \eta^n(\pi(a_0))$. Les hypothèses requises dans le Théorème 3.12 sont satisfaites pour $\mathbf{y}$ et par conséquent $S_{\mathbf{y}}$ est aussi q-régulière. □

Nous conservons pour $\mathbf{x}$ et $\mathbf{y}$ toutes les hypothèses introduites dans le paragraphe 4.1. Dans ces conditions nous avons

4.4. Lemme. $\mathbf{y}$ *est un mot ultimement périodique si et seulement si* $\mathbf{x}$ *est ultimement périodique.*

Démonstration. Il est clair que $\mathbf{x}$ ultimement périodique entraîne $\mathbf{y}$ ultimement périodique.

Inversement supposons $\mathbf{y}$ ultimement périodique. Nous pouvons alors trouver deux mots $\overline{u} \in B^*$ et $\overline{v} \in B^*$ tels que

$$\mathbf{y} = \lim_{\overrightarrow{n}} \overline{v}\,\overline{u}^n.$$

De plus, nous pouvons supposer que $v \in A^*$ est exactement le préfixe de $\mathbf{x}$ qui est au-dessus de $\overline{v}$. Notons $u_1, \ldots, u_n$ les facteurs de $\mathbf{x}$ tels que $\pi(u_i) = \overline{u}$, $\forall i \in \{1, \ldots, n\}$ et tels que le mot $vu_1 \cdots u_n$ est exactement le préfixe de $\mathbf{x}$ qui est au-dessus de $\overline{vu}^n$. Les mots u_i vérifient $\overline{u_i} = \overline{u_j}$ $\forall i \neq j$, et ceci entraîne $\sigma(u_i) = \sigma(u_j)$ $\forall i, j \in \{1, \ldots, n\}$. Notons w le facteur de $\mathbf{x}$ tel que $w = \sigma(u_i)$, $i \in \{1, \ldots, n\}$. Comme $\mathbf{x} = \sigma(\mathbf{x})$, le mot $\sigma(v)w^n$ est un préfixe de $\mathbf{x}$ et l'on a $\mathbf{x} = \lim_{\overleftarrow{n}} vw^n$ d'où le lemme. $\square$

Dans tout ce qui va suivre nous supposons $\mathbf{y}$ non ultimement périodique et nous allons vérifier que la q-régularité de $S_\mathbf{y}$ entraîne celle de $S_\mathbf{x}$. Pour cela introduisons encore quelques notations.

4.5. Fixons K le délai de synchronisation de $\mathbf{x}$ conformément à 2.3.1, $C_\mathbf{y}$ une constante liée à la propriété de circularité de $\mathbf{y}$ conformément à 2.3.2 et C une constante vérifiant $C > \sup(2K + 2q, C_\mathbf{y})$.

Notons $\vartheta_\mathbf{x}$, $\vartheta_\mathbf{y}$, les applications qui à tout indice n associent respectivement le séparateur $\vartheta_\mathbf{x}(n)$ de $\mathbf{x}$ en n et le séparateur $\vartheta_\mathbf{y}(n)$ de $\mathbf{x}$ en n. Dégageons tout d'abord certaines propriétés de $S_\mathbf{x}$ et $S_\mathbf{y}$.

4.6. Proposition. *Pour tout entier* m *nous avons*

(1) $S_\mathbf{x}(m) \leqslant S_\mathbf{y}(m)$,

(2) $S_\mathbf{y}(m) > C \Rightarrow qS_\mathbf{y}(m) - q + 1 \leqslant S_\mathbf{x}(qm) \leqslant qS_\mathbf{y}(m)$.

Démonstration. Vérifions (1). Soit $j < m$ l'indice d'une occurrence de $\vartheta_\mathbf{x}(m)^\bullet$. Par application de π nous obtenons une occurrence de $\pi(\vartheta_\mathbf{x}(m)^\bullet)$ en j et en m; $\pi(\vartheta_\mathbf{x}(m)^\bullet)$ est un préfixe strict de $\vartheta_\mathbf{y}(m)$ et l'on a $S_\mathbf{x}(m) \leqslant S_\mathbf{y}(m)$.

Vérifions (2). Soit $m \in N$ un indice tel que $S_\mathbf{y}(m) > C$. Soit wa, $a \in A$, le facteur de $\mathbf{x}$ qui commence en m et qui vérifie $\pi(wa) = \vartheta_\mathbf{y}(m)$.

Soit $j < m$ l'indice d'une occurrence de $\vartheta_\mathbf{y}(m)^\bullet$ dans $\mathbf{y}$ et u le facteur de $\mathbf{x}$ qui commence en j et tel que $\pi(u) = \vartheta_\mathbf{y}(m)^\bullet$.

Nous avons $\pi(u) = \pi(w) \Rightarrow \sigma(u) = \sigma(w)$. Une occurrence de $\sigma(w)$ commence aux indices qj et qm, $qj < qm$. Nous avons donc $S_\mathbf{x}(qm) > q|w| = q(S_\mathbf{y}(m) - 1)$.

Par ailleurs nous avons:

$$S_{\mathbf{x}}(qm) \leqslant S_{\mathbf{y}}(qm)$$

$$qS_{\mathbf{y}}(m) - q + 1 \leqslant S_{\mathbf{y}}(qm) \leqslant qS_{\mathbf{y}}(m).$$

Nous en déduisons les inégalités

$$qS_{\mathbf{y}}(m) - q + 1 \leqslant S_{\mathbf{x}}(qm) \leqslant qS_{\mathbf{y}}(m). \qquad \square$$

4.7. Description de $\vartheta_{\mathbf{x}}$ et de $\vartheta_{\mathbf{y}}$. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $S_{\mathbf{y}}(m) > C$. Supposons que $\vartheta_{\mathbf{y}}(m)$ s'écrive sous la forme $\vartheta_{\mathbf{y}}(m) = \overline{wa}$ avec $a \in A$ et où wa est le facteur de $\mathbf{x}$ qui commence en m.

Le séparateur de $\mathbf{y}$ en qm se factorise sous la forme

$$\vartheta_{\mathbf{y}}(qm) = \eta(\overline{w})\overline{z}, \text{ avec } 1 \leqslant |\overline{z}| \leqslant q \quad \text{et} \quad \overline{z} \text{ préfixe de } \eta(\overline{a}).$$

(Nous prendrons toujours pour représentant de $\overline{z}$ le préfixe z de $\sigma(a)$ tel que $\sigma(w)z$ commence en qm).

Des inégalités données dans la Proposition 4.6 nous déduisons l'existence d'un préfixe non vide z' de z tel que $\vartheta_{\mathbf{x}}(qm) = \sigma(w)z'$.

Utilisons les résultats obtenus dans le cas injectif et fixons k_0 un entier tel que:

(1) Pour tout entier $n \in [q^{k_0}, q^{k_0+1}]$ on ait:

(i) $S_{\mathbf{y}}(n) > C$,

(ii) quel que soit $k \in \mathbb{N}$, quel que soit $j < q^k n$, l'indice j est le début d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{y}}(q^k n)^\bullet$ si et seulement si j est de la forme $j = q^k i$ avec $i < n$ et où i est l'indice d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{y}}(n)^\bullet$.

(2) La suite $(n_k)_{k \geqslant k_0}$, où n_k est le nombre de sauts de $S_{\mathbf{y}}$ entre q^k et q^{k+1}, est une suite constante.

Soit $(S(m))$ une suite. Pour $n \in \mathbb{N}$ notons $H(n)$ l'ensemble

$$H(n) = \{m \in \mathbb{N},\ q^k n \leqslant m \leqslant q^k(n+1)\}.$$

Appelons toujours $S1$ et $S2$ les propriétés déjà utilisées dans la partie 3:

S1 $S(m+1) = S(m) - 1$, $\forall m \in [q^k n_0, q^k(n_0+1)[$, $\forall k \in \mathbb{N}$. (S est monotone dans tout intervalle $[q^k n_0, q^k(n_0+1)]$),

S2 S admet un unique saut entre $q^k n_0$ et $q^k(n_0+1)$, et ceci pour tout $k \in \mathbb{N}$.

La condition (2) imposée à k_0 implique ici que pour tout $n \in [q^{k_0}, q^{k_0+1}[$ la restriction de $S_{\mathbf{y}}$ à $H(n)$ vérifie toujours $S1$ ou $S2$.

Fixons $n_0 \in [q^{k_0}, q^{k_0+1}[$ et $H(n_0) = \{m \in \mathbb{N} / q^k n_0 \leqslant m \leqslant q^k(n_0+1),\ k \in \mathbb{N}\}$. Factorisons les séparateurs de $\mathbf{y}$ aux indices n_0 et n_0+1 sous la forme:

$$\vartheta_{\mathbf{y}}(n_0) = \overline{bva}, \quad a, b \in A, \quad \vartheta_{\mathbf{y}}(n_0+1) = \overline{vav'}, \quad v' \in A^*,$$

et où le facteur $bvav'$ commence à l'indice n_0 dans $\mathbf{x}$.

Associons à tout entier $m \in H(n_0)$ des ensembles d'indices décrivant les occurrences de $\vartheta_{\mathbf{y}}(m)^\bullet$ (comme ce qui a été fait dans la partie 3).

$$J = \{i \leqslant n_0 \text{ tel que } \bar{v} \text{ commence en } i\},$$

$$J(n_0) = \{i \in J \text{ tel que } \vartheta_{\mathbf{y}}(n_0)^\bullet \text{ commence en } i-1\},$$

$$J(n_0+1) = \{i \in J \text{ tel que tel que } \vartheta_{\mathbf{y}}(n_0+1)^\bullet \text{ commence en } i\}.$$

Et pour $m \in H(n_0)$, $m = q^k n_0 + m'$ et $m' \leqslant q^k$,

$$J(m) = \{i \in J \text{ tel que } \vartheta_{\mathbf{y}}(m)^\bullet \text{ commence en } q^k(i-1)+m'\}.$$

Remarques. Conformément aux résultats déjà établis nous avons

(1) Pour tout couple d'indices m_1 et m_2 de $H(n_0)$, tels que

$$q^k n_0 \leqslant m_1 < m_2 \leqslant q^k(n_0+1)$$

(i) si $S_{\mathbf{y}}$ est monotone dans l'intervalle $[m_1, m_2]$ alors $J(m_1) \subset J(m_2)$ et

(ii) s'il existe un saut entre m_1 et m_2 alors $J(m_1) \cap J(m_2) = \emptyset$.

Les conditions imposées à k_0 nous donnent:

(2) $\forall m \in H(n_0)$, $m = q^k n_0 + m'$ et $m' \leqslant q^k$, un indice $j < m$ est l'indice d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{y}}(m)^\bullet$ si et seulement si j est de la forme $j = q^k(i-1) + m'$ avec $i \in J(m)$.

(3) $\forall k \in \mathbb{N}$, $J(q^k n_0) = J(n_0)$ et $J(q^k(n_0+1)) = J(n_0+1)$.

Lemme. *Soit $m \in H(n_0)$, $m = q^k n_0 + m'$, $0 \leqslant m' \leqslant q^k$ et $k \geqslant 1$. Si $j < m$ est l'indice d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m)^\bullet$ alors j est de la forme $j = q^k(i-1) + m'$ avec $i \in J$.*

Démonstration. Soit $i \in J(n_0)$. L'indice $i-1$ est l'indice d'une occurrence du facteur $\vartheta_{\mathbf{y}}(n_0)^\bullet = \overline{bv}$ dans $\mathbf{y}$. Notons $b_i u_i$, $b_i \in A$, le facteur de $\mathbf{x}$ qui commence en $i-1$ et dont l'image par π est $\pi(b_i u_i) = \overline{bv}$.

Pour tout entier $k \geqslant 1$ nous avons alors $\sigma^k(b)\sigma^k(v) = \sigma^k(b_i)\sigma^k(u_i)$ et une occurrence de $\sigma^k(b)\sigma^k(v)$ commence à l'indice $q^k(i-1) < q^k n_0$.

Soit $m \in H(n_0)$ tel que $m = q^k n_0 + m'$ avec $0 \leqslant m' \leqslant q^k$ et $k \geqslant 1$. Le facteur ${}^{\bullet(m')}\sigma^k(b)\sigma^k(v)$ est un préfixe strict de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m)$.

Soit $j < m$ l'indice d'une occurrence $\vartheta_{\mathbf{x}}(m)^\bullet$ dans $\mathbf{x}$. Par application de π nous trouvons une occurrence de ${}^{\bullet(m')}\eta^k(\overline{b})\eta^k(\overline{v})$ en j dans $\mathbf{y}$ et j est de la forme $j = q^k(i-1) + m'$ avec $i \in J$. $\square$

Démontrons maintenant la q-régularité de la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ aux ensembles $H(n_0)$.

4.8. Proposition. *Si la restriction de $S_{\mathbf{y}}$ à $H(n_0)$ vérifie $S1$ et si $J(n_0) = J(n_0+1)$ alors la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à $H(n_0)$ est q-régulière.*

Démonstration. Les hypothèses nous donnent:

$$\vartheta_{\mathbf{y}}(n_0) = \overline{bva}, \qquad \vartheta_{\mathbf{y}}(n_0+1) = \overline{va}, \quad \text{et} \quad J(n_0+1) = J(n_0) = J.$$

De plus, comme $S_{\mathbf{y}}$ est monotone dans l'intervalle $[q^k n_0, q^k(n_0+1)]$, nous avons pour tout $m \in [q^k n_0, q^k(n_0+1)]$,

$$J(q^k n_0) = J \subset J(m) \subset J(q^k(n_0+1)) = J(n_0+1) = J \quad \text{et} \quad J(m) = J.$$

(En d'autres termes, posons $m = q^k n_0 + m'$, $m' \leqslant q^k$, alors un indice $j < m$ est l'indice d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{y}}(m)^\bullet$ si et seulement si j est de la forme $j = q^k(i-1) + m'$, $i \in J$)

Utilisons à nouveau la description des séparateurs donnée dans le cas injectif. Notons

$w_k a_0^k$, $a_0^k \in A$, le facteur de $\mathbf{x}$ qui commence à l'indice $q^k n_0$ et dont l'image est $\vartheta_{\mathbf{y}}(q^k n_0) = \overline{w_k\, a_0^k}$.

a_i^k, $i \in J$, la lettre $a_i^k = \mathbf{x}[q^k(i-1) + S_{\mathbf{y}}(q^k n_0) - 1]$, en sorte que $\overline{a_i^k}$ est la lettre qui suit le facteur $\vartheta_{\mathbf{y}}(q^k n_0)^\bullet$ qui se trouve à l'indice $q^k(i-1)$.

z'_{k+1} et z_{k+1} les deux préfixes de $\sigma(a_0^k)$ tels que $1 \leqslant |z'_{k+1}| \leqslant |z_{k+1}| \leqslant q$,

$$\vartheta_{\mathbf{x}}(q^{k+1}n_0) = \sigma(w_k)z'_{k+1}, \quad \text{et} \quad \vartheta_{\mathbf{y}}(q^{k+1}n_0) = \eta(\overline{w_k})\overline{z_{k+1}}.$$

En particulier z_{k+1} vérifie ici $\overline{z_{k+1}{}^\bullet} = gpc(\eta(\overline{a_i^k}), \eta(\overline{a_0^k}))$, $\forall i \in J$.

Soit $m \in H(n_0)$, $m = q^{k+1}n_0 + m'$, $m' \leqslant q^{k+1}$. Nous avons

(i) $\vartheta_{\mathbf{x}}(m)$ est un préfixe du mot ${}^{\bullet(m')}\sigma(w_k)z_{k+1}$ qui est lui-même préfixe ${}^{\bullet(m')}\sigma(w_k)\sigma(a_0^k)$.

(ii) Un facteur ${}^{\bullet(m')}\sigma(w_k)\sigma(a_i^k)$ commence à l'indice $q^{k+1}(i-1) + m'$ et ceci pour tout $i \in J$. Ainsi, le mot ${}^{\bullet(m')}\sigma(w_k)gpc(\sigma(a_i^k), \sigma(a_0^k))$ est un préfixe strict de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m)$.

(iii) Les indices $j < m$ qui sont les débuts d'une occurrence de $\vartheta_{\mathbf{x}}(m)^\bullet$ sont toujours de la forme $q^{k+1}(i-1) + m'$ avec $i \in J$.

De toutes ces remarques, nous déduisons que $z'_{k+1}{}^\bullet$ est nécessairement égal au plus long des facteurs $gpc(\sigma(a_i^k), \sigma(a_0^k))$, $i \in J$. Nous écrirons

$$z'_{k+1}{}^\bullet = \sup_{i \in J} gpc(\sigma(a_i^k), \sigma(a_0^k)).$$

Nous obtenons pour les restrictions de $S_{\mathbf{x}}$ et de $S_{\mathbf{y}}$ à $H(n_0)$ les valeurs suivantes:

$$S_{\mathbf{y}}(q^{k+1}n_0) = q(S_{\mathbf{y}}(q^k n_0) - 1) + |\overline{z_{k+1}}|$$

et

$$S_{\mathbf{x}}(q^{k+1}n_0) = q(S_{\mathbf{y}}(q^k n_0) - 1) + |z'_{k+1}|;$$

et plus généralement pour $m \in [q^{k+1}n_0, q^{k+1}(n_0+1)]$,

$$S_{\mathbf{x}}(m) = q(S_{\mathbf{y}}(q^k n_0) - 1) - (m - q^{k+1}n_0) + |z'_{k+1}|.$$

Notons $J = \{i_1, \ldots, i_h\}$ et pour $k \in N$, $d_k = (a_0^k, a_{i_1}^k, \ldots, a_{i_h}^k)$. D'après l'étude faite dans le cas injectif, nous savons que l'image par π de la suite (d_k) est une suite ultimement périodique.

Soient k' et k'' deux entiers tels que $\overline{d_{k'}} = \overline{d_{k''}}$. Nous avons

$$\begin{aligned}
&\overline{a_0^{k'}} = \overline{a_0^{k''}} \quad \text{et} \quad \overline{a_i^{k'}E} = \overline{a_i^{k''}}, \quad \forall i \in J \\
&\quad \Rightarrow \sigma(a_0^{k'}) = \sigma(a_0^{k''}) \text{ et } \sigma(a_i^{k'}) = \sigma(a_i^{k''}), \quad \forall i \in J \\
&\quad \Rightarrow gpc(\sigma(a_i^{k'}), \sigma(a_0^{k'})) = gpc(\sigma(a_i^{k''}) = \sigma(a_0^{k''})), \quad \forall i \in J \\
&\quad \Rightarrow {z'_{k'+1}}^{\bullet} = \sup_{i \in J} gpc(\sigma(a_i^{k'}), \sigma(a_0^{k'})) = {z'_{k''+1}}^{\bullet} = \sup_{i \in J} gpc(\sigma(a_i^{k''}), \sigma(a_0^{k''})), \\
&\quad \Rightarrow z'_{k'+1} = z'_{k''+1}.
\end{aligned}$$

Ainsi la suite (z'_k) est ultimement périodique. Fixons $k_1 \geqslant k_0$ un entier à partir duquel $(z_k)_{k \geqslant k_1}$ et $(z'_k)_{k \geqslant k_1}$ sont périodiques et soit $D > 0$ une période commune aux deux suites. Les restrictions de $S_{\mathbf{x}}$ et de $S_{\mathbf{y}}$ à $H(n_0)$ s'expriment par des formules de récurrence de la forme suivante:

$$S_{\mathbf{y}}(q^{k+1}n_0) = q(S_{\mathbf{y}}(q^k n_0) - 1) + |\overline{z_{(k+1-k_1) \bmod D}}|, \quad \forall k \geqslant k_1$$

et pour tout $m \in [q^{k+1}n_0 + m', q^{k+1}(n_0 + 1)]$, $k \geqslant k_1$,

$$S_{\mathbf{x}}(m) = q(S_{\mathbf{y}}(q^k n_0) - 1) - (m - q^{k+1}n_0) + |z'_{(k+1-k_1) \bmod D}|.$$

Nous pouvons alors conclure à la q-régularité de la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à $H(n_0)$. $\square$

Nous allons maintenant supposer $J(n_0) \neq J(n_0 + 1)$, $S_{\mathbf{y}}$ vérifiant $S1$ ou $S2$. Dans le cas où $S_{\mathbf{y}}$ vérifie $S2$ nous noterons m_k l'unique indice de $H(n_0)$ tel que $q^k n_0 \leqslant m_k < q^k(n_0 + 1)$ et tel qu'il existe un saut entre m_k et m_{k+1}.

Dans un premier temps associons à tout entier $k \in \mathbb{N}$ la suite des indices

$$m_0(k) = q^k n_0 \leqslant m_1(k) < \cdots < m_{r(k)}(k) < q^k(n_0 + 1) = m_{r(k)+1}(k)$$

tels que pour tout $l \in \{1, \ldots, r(k)\}$ on ait

(i) $J(m_l(k)) \neq J(m_l(k) + 1)$,

(ii) $J(m) = J(m_{l+1}(k))$, $\forall m \in [m_l(k) + 1, m_{l+1}(k)]$,

de plus telle que

(iii) si $m_1(k) \neq q^k n_0$ alors $J(m) = J(q^k n_0)$, $\forall m \in [q^k n_0, m_1(k)]$.

4.9. Proposition. *La suite $(r(k))$ définie ci-dessus est stationnaire.*

Démonstration. Vérifions tout d'abord que $(r(k))$ est une suite bornée. Si $H(n_0)$ vérifie $S1$, nous avons pour tout entier k,

$$J(q^k n_0) \subset J(m_1(k)) \subset \cdots \subset J(m_{r(k)}(k)) \subset J(q^k(n_0 + 1)) \subset J.$$

Si $H(n_0)$ vérifie $S2$, soit l l'indice tel que $m_l(k) = m_k$ et qui correspond au saut de l'intervalle $[q^k n_0, q^k(n_0 + 1)]$ en sorte que $S_{\mathbf{y}}$ est monotone dans les intervalles $[q^k n_0, m_k]$ et $[m_k + 1, q^k(n_0 + 1)]$. Nous avons pour tout entier $k \in \mathbb{N}$,

$$J(q^k n_0) \subset J(m_1(k)) \subset \cdots \subset J(m_l(k)),$$

$$J(m_l(k)+1) \subset J(m_{l+1}(k)) \subset \cdots \subset J(m_{r(k)}(k)) \subset J(q^k(n_0+1)),$$

$$J(m_l(k)) \cap J(q^k(n_0+1)) = \emptyset \quad \text{et} \quad J(m_l(k) \cup J(q^k(n_0+1)) \subset J.$$

L'entier $r(k)$ est toujours majoré par $\operatorname{Card} J$.

Pour vérifier la croissance de la suite $(r(k))$ à partir d'un certain rang, nous allons montrer que l'on a pour tout entier $m \in H(n_0)$ qui est suffisamment grand:

$$J(m) \neq J(m+1) \Rightarrow J(qm) \neq J(qm+q).$$

Nous avons déjà ce résultat, lorsque S_y vérifie $S2$, pour les entiers $m = m_k$. En effet, dans ce cas nous avons $m_{k+1} \in [qm_k, qm_k + q[$ et $J(qm_k) \cap J(qm_k + q) = \emptyset$.

Lemme 1. *Soit $m \in [q^k n_0, q^k(n_0+1)[$. Supposons S_y monotone dans l'intervalle $[m, q^k(n_0+1)]$. Nous avons*

(i) $J(qm) = J(m)$

et

(ii) $J(m) \neq J(m+1) \Rightarrow J(qm) \neq J(qm+q)$.

Démonstration. Posons $m = q^k n_0 + m'$ avec $m' < q^k$ et appliquons les résultats de la Proposition 3.6. Nous avons d'une part

$$J(qm) \subset J(m),$$

d'autre part, sous l'hypothèse que S_y vérifie $S1$ ou $S2$ nous avons

$$S_y \text{ monotone dans } [m, q^k(n_0+1)] \Rightarrow S_y \text{ monotone dans } [qm, q^{k+1}(n_0+1)].$$

Nous obtenons

$$J(m) \subset J(q^k(n_0+1)) = J(n_0+1)$$

et

$$J(qm) \subset J(q^{k+1}(n_0+1)) = J(n_0+1).$$

Utilisons les factorisations des séparateurs en n_0 et n_0+1 introduites précédemment:

$$\vartheta_y(n_0) = \overline{bva}, \quad a, b \in A, \quad \text{et} \quad \vartheta_y(n_0+1) = \overline{vav'}, \quad v' \in A^*,$$

le mot $bvav'$ commençant à l'indice n_0 dans $\mathbf{x}$.

Aux indices $q^k(n_0+1)$ et $q^{k+1}(n_0+1)$ les séparateurs de $\mathbf{y}$ se factorisent sous la forme

$$\vartheta_y(q^k(n_0+1)) = \eta^k(\overline{v})\overline{Z_k} \text{ avec } \overline{Z_k} \text{ un préfixe non vide de } \eta^k(\overline{av'})$$

et

$$\vartheta_y(q^{k+1}(n_0+1)) = \eta^{k+1}(\overline{v})\overline{Z_{k+1}} \text{ avec } \overline{Z_{k+1}} \text{ un préfixe non vide de } \eta^{k+1}(\overline{av'}).$$

La monotonie de S_y dans l'intervalle $[m, q^k(n_0+1)]$ donne

$$\vartheta_y(m)) = {}^{\bullet(m')}\eta^k(\bar{b})\eta^k(\bar{v})\overline{Z_k} = {}^{\bullet(m')}\eta^k(\bar{b})\vartheta_y(q^k(n_0+1))$$

et

$$\vartheta_y(qm) = {}^{\bullet(qm')}\eta^{k+1}(\bar{b})\vartheta_y(q^{k+1}(n_0+1))).$$

Montrons que $J(m) \subset J(qm)$. Soit $i \in J(m)$. Le facteur ${}^{\bullet(m')}\eta^k(\bar{b})\eta^k(\bar{v})$ commence à l'indice $q^k(i-1)+m'$.

Par application de η nous obtenons une occurrence de $\eta({}^{\bullet(m')}\eta^k(\bar{b}))\eta^{k+1}(\bar{v})$ à l'indice $q^{k+1}(i-1)+qm'$, et donc une occurrence de ${}^{\bullet(qm')}\eta^{k+1}(\bar{b}))\eta^{k+1}(\bar{v})$.

Nous avons $i \in J(q^k(n_0+1)) = J(q^{k+1}(n_0+1))$. Nous trouvons à l'indice $q^{k+1}i$. Le facteur $\vartheta_y(q^{k+1}(n_0+1))^\bullet = \eta^{k+1}(\bar{b}))\eta^{k+1}(\bar{v})\overline{Z_{k+1}}^\bullet$.

Nous déduisons une occurence de $\vartheta_y(qm)^\bullet = \eta({}^{\bullet(m')}\eta^k(\bar{b}))\eta^{k+1}(\bar{v})\overline{Z_k}^\bullet$ à l'indice $q^{k+1}(i-1)+qm'$ et $i \in J(qm)$. D'où $J(m) \subset J(qm)$ et par conséquent $J(m) = J(qm)$. De même nous avons à l'indice $m+1$, $J(m+1) = J(qm+q)$. D'où

$$J(m) \neq J(m+1) \Rightarrow J(qm) \neq J(qm+q). \qquad \Box$$

De façon tout à fait analogue nous pouvons démontrer le Lemme 2 suivant:

Lemme 2. *Supposons que S_y vérifie S2 et notons toujours m_k l'indice tel que $q^k n_0 \leqslant m_k < q^k(n_0+1)$ et tel qu'il existe un saut entre m_k et m_k+1. Alors il existe un entier k_1 tel que l'on ait*
(i) $J(qm) = J(m)$
et
(ii) $J(m) \neq J(m+1) \Rightarrow J(qm) \neq J(qm+q)$
pour tout $m \in [q^k n_0, m_k]$, $k \geqslant k_1$.

Démonstration. Supposons les hypothèses du lemme et soit $m \in [q^k n_0, m_k]$. En particulier S_y est monotone dans les intervalles $[m, m_k]$ et $[qm, m_{k+1}]$. Nous avons alors les inclusions

$$J(m) \subset J(m_k) \quad \text{et} \quad J(qm) \subset J(qm_k) \subset J(m_{k+1}).$$

Conformément à la Proposition 3.6 nous avons l'inclusion $J(qm) \subset J(m)$. Vérifions l'inclusion inverse.

La suite $(J(m_k))$ est stationnaire. Fixons un entier k_1 tel que l'on ait $J(m_k)$ $J(m_{k+1})$, $\forall k \geqslant k_1$. Soit $m = q^k n_0 + m'$ avec $m' \leqslant q^k - 1$ et $k \geqslant k_1$. Factorisons les séparateurs aux indices m, m_k, qm et m_{k+1}. Nous avons

$$\vartheta_y(m) = {}^{\bullet(m')}\eta^k(\bar{b})\eta^k(\bar{v})\overline{Z_k} \text{ avec } \overline{Z_k} \text{ un préfixe non vide de } \eta^k(\overline{av'}),$$

$$\vartheta_y(m_k) = {}^{\bullet(m_k - q^k n_0)}\eta^k(\bar{b})\eta^k(\bar{v})\overline{Z_k} = {}^{\bullet(m_k - m)}\vartheta_y(m),$$

$$\vartheta_y(qm) = {}^{\bullet(qm')}\eta^{k+1}(\bar{b})\eta^{k+1}(\bar{v})\overline{Z_{k+1}} \text{ avec } \overline{Z_{k+1}} \text{ un préfixe non vide de } \eta^{k+1}(\overline{av'}),$$

$$\vartheta_y(qm_k) = \eta({}^{\bullet(m')}\eta^k(\bar{b}))\eta^{k+1}(\bar{v})\overline{Z_{k+1}} = {}^{\bullet(qm_k - qm)}\vartheta_y(qm)$$

et

$$\begin{aligned}\vartheta_{\mathrm{y}}(m_{k+1}) &= {}^{\bullet(q^{k+1}n_0-)}\eta^{k+1}(\bar{b})\eta^{k+1}(\bar{v})\overline{Z_{k+1}} = {}^{\bullet(m_{k+1}-qm)}\vartheta_{\mathrm{y}}(qm)\\ &= {}^{\bullet(m_{k+1}-qm_k)}\vartheta_{\mathrm{y}}(qm_k).\end{aligned}$$

Soit $i \in J(m)$. A l'indice $q^k(i-1)+m'$ nous avons une occurrence du facteur ${}^{\bullet(m')}\eta^k(\bar{b})\eta^k(\bar{v})$.

Par application de η nous obtenons une une occurrence de $\eta({}^{\bullet(m')}\eta^k(\bar{b}))\eta^{k+1}(\bar{v})$ à l'indice $q^{k+1}(i-1)+qm'$, c'est-à-dire une occurrence de ${}^{\bullet(qm')}\eta^{k+1}(\bar{b}))\eta^{k+1}(\bar{v})$.

Nous avons $i \in J(m_k)$ et $J(m_k) = J(m_{k+1})$. A l'indice $q^{k+1}i$ se trouve le facteur $\vartheta_{\mathrm{y}}(m_{k+1})^{\bullet}$, c'est-à-dire une occurrence de ${}^{\bullet(q^{k+1}n_0-m_{k+1})}\eta^{k+1}(\bar{v})\eta^{k+1}(\bar{v})\overline{Z_{k+1}}^{\bullet}$.

Nous déduisons un facteur de $\eta({}^{\bullet(qm')}\eta^k(\bar{b}))\,\eta^{k+1}(\bar{v})\overline{Z_k}^{\bullet}$, c'est-à-dire une occurrence de $\vartheta_{\mathrm{y}}(qm)^{\bullet}$ à l'indice $q^{k+1}(i-1)+qm'$ et $i \in J(qm)$. D'où l'inclusion $J(m) \subset J(qm)$ et finalement l'égalité $J(m) = J(qm)$.

La vérification du lemme est alors immédiate. Soit $J(m) \neq J(m+1)$. Nous avons $J(m) = J(qm)$ et $J(m+1) = J(qm+q)$ d'où $J(m+1) \neq J(qm+q)$. □

Nous pouvons maintenant montrer que la suite $(r(k))$ est stationnaire. Nous savons qu'à partir d'un certain rang k_1 pour tout $m \geqslant q^{k_1}n_0$ nous avons:

$$J(m) \neq J(m+1) \;\Rightarrow\; J(qm) \neq J(qm+q).$$

La suite $(r(k))_{k \geqslant k_1}$ est croissante, la valeur $r(k)$ est toujours majorée par $\operatorname{Card} J$ et $(r(k))_{k \in \mathbb{N}}$ est stationnaire. □

4.10. Proposition. *Supposons que dans chaque intervalle* $[q^k n_0, q^k(n_0+1)]$ *il existe un unique indice* l_k *tel que l'on ait*

$$\begin{aligned}&J(m) = J(l_k) = J(n_0) \quad \forall m \in [q^k n_0, l_k],\\ &J(m) = J(l_k+1) = J(q^k(n_0+1)) \quad \forall m \in [l_k+1, q^k(n_0+1)]\end{aligned}$$

et

$$J(l_k) \neq J(q^k(n_0+1)).$$

Sous ces conditions la restriction de S_{x} *à* $H(n_0)$ *est q-régulière.*

Démonstration. Utilisons les résultats de la Proposition 4.9. Nous pouvons alors décrire S_{x} et S_{y} dans les intervalles $[q^k n_0, l_k]$ et $[l_k+1, q^k(n_0+1)]$ de la façon suivante:
il existe

- un entier k_1,
- deux entiers $D > 0$ et $D' > 0$,
- des lettres $a_0, \ldots, a_{D-1}$ et $c_0, \ldots, c_{D'-1}$,
- des préfixes non vides z_i des $\sigma(a_i)$, u_i des $\sigma(c_i)$,

• des préfixes non vides z'_i des z_i , u'_i des u_i
tels que l'on ait pour tout $k \geqslant k_1$, (nous conservons les conventions déjà introduites et nous posons pour tout $j \in \{0,\dots,D-1\}$, $z'_j = z'_{k_1+j}$ des $z_j = z_{k_1+j}$, $u'_j = u'_{k_1+j}$ et $u_j = u_{k_1+j}$),

$$S_{\mathbf{y}}(q^{k+1}n_0) = q(S_{\mathbf{y}}(q^k n_0) - 1) + |\overline{z_{(k+1) \bmod D}}|$$

et

$$S_{\mathbf{x}}(q^{k+1}n_0) = S_{\mathbf{x}}(q^{k+1}n_0) = q(S_{\mathbf{y}}(q^k n_0) - 1) + |z'_{(k+1) \bmod D}|.$$

$$S_{\mathbf{y}}(q^{k+1}(n_0+1)) = q(S_{\mathbf{y}}(q^k(n_0+1) - 1) + |\overline{u_{(k+1) \bmod D'}}|$$

et

$$S_{\mathbf{x}}(q^{k+1}(n_0+1)) = q(S_{\mathbf{y}}(q^k(n_0+1) - 1) + |u'_{(k+1) \bmod D'}|.$$

Plus généralement nous obtenons:

$$\begin{aligned} S_{\mathbf{x}}(m) &= q(S_{\mathbf{y}}(q^k n_0) - 1) + |z'_{(k+1) \bmod D}| - m + q^{k+1}n_0, \ \forall m \in [q^{k+1}n_0, l_k], \\ &= q(S_{\mathbf{y}}(q^k(n_0+1) - 1) + |u'_{(k+1) \bmod D'}| - q^{k+1}(n_0+1) + m, \\ &\quad \forall m \in [l_{k+1}+1, q^{k+1}(n_0+1)]. \end{aligned}$$

En particulier nous obtenons: la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à $H(n_0)$ est q-régulière si et seulement si l'ensemble $\{l_k,\ k \in N\}$ est q-reconnaissable.

Démontrons ce dernier point. Nous savons que c'est le cas lorsque $S_{\mathbf{y}}$ vérifie $S2$ et que l'unique saut existant dans l'intervalle $[q^k n_0, q^k(n_0+1)]$ est entre l_k et l_k+1.

Supposons que $S_{\mathbf{y}}$ vérifie $S1$. Reprenons les notations déjà introduites. Nous avons dans le cas présent:

$$\vartheta_{\mathbf{y}}(n_0) = \overline{bva}, \qquad \vartheta_{\mathbf{y}}(n_0+1) = \overline{va} \quad \text{et} \quad J(n_0) \subset J(n_0+1) = J.$$

Notons

$$I = J(n_0+1) \backslash J(n_0) = \{i_1,\dots,i_h\},$$

$b_0 = \mathbf{x}[n_0]$, et pour tout $i \in I$ $b_i = \mathbf{x}[i-1]$,

pour $i \in I$ et $k \in N, w(k,i) = gcs(\sigma^k(b_i), \sigma^k(b_0))$ le plus long

suffixe commun aux mots $\sigma^k(b_i)$ et $\sigma^k(b_0)$,

$$l_k = q^k n_0 + l'_k \text{ avec } l'_k < q^k.$$

Nous avons pour tout entier $m \in [l_k+1, q^k(n_0+1)]$, $m = q^k n_0 + m'$ avec $m' \leqslant q^k$:

$$\vartheta_{\mathbf{y}}(q^k(n_0+1)) = {}^{\bullet(q^k(n_0+1)-m)}\vartheta_{\mathbf{y}}(m)$$

et

$$\vartheta_{\mathbf{y}}(m) = {}^{\bullet(m')}\eta^k(\overline{b})\,\vartheta_{\mathbf{y}}(q^k(n_0+1)).$$

Comme $J(l_k) \neq J(l_k+1)$, nous avons pour tout $i \in I$ et pour tout $k \in \mathbb{N}$, $w(k,i) = \bullet^{(l'_k)}\eta^k(\overline{b})$.

Définissons la suite (p_k) à valeurs dans B^{h+1} en posant:

$$p_k = (\overline{b_0^k}, \overline{b_1^k}, \ldots, \overline{b_h^k}),$$

$\overline{b_0^k} = \mathbf{y}[l_k]$ est la lettre qui précède le facteur $\vartheta_{\mathbf{y}}(l_k+1)$ qui commence en $l_k + 1$,

$\overline{b_j^k} = \mathbf{y}[q^k(i_j-1)+l'_k]$ est la lettre qui précède le facteur $\vartheta_{\mathbf{y}}(l_k+1)^\bullet$ qui commence en $q^k(i_j-1)+l'_k+1$.

Notons $\overline{u_k}$ le plus grand suffixe commun $\overline{u_k} = gsc(\eta(\overline{b_j^{k-1}}), \eta(\overline{b_0^{k-1}}))$ pour l'un quelconque des $j \in \{1,\ldots,h\}$. Nous avons pour tout $j \in \{1,\ldots,h\}$ et pour tout k

$$w(k+1,i_j) = gsc(\eta(\overline{b_j^k}), \eta(\overline{b_0^k}))\eta(w(k+1,i_j)).$$

Il n'est pas difficile de vérifier que la suite (p_k) est ultimement périodique. La démonstration est identique à celle faite dans la Proposition 3.11.

Il existe un entier $k_2 \geqslant k_1$, il existe un entier $D > 0$ tels que pour tout $i \in I$, pour tout $k \geqslant k_2$ nous avons

$w(k+1,i) = u_{k+1}\eta(w(k,i)) = u_{(k+1-k_2) \bmod D}\ \eta(w(k,i))$, ce qui implique

$$|w(k+1,i)| = |u_{(k+1-k_2) \bmod D}| + q|w(k,i)|.$$

$$m_k + 1 = q^k(n_0+1) - |w(k,i)| \quad \text{et} \quad m_{k+1} + 1 = q^{k+1}(n_0+1) - |w(k+1,i)|.$$

Finalement nous obtenons $m_{k+1} = qm_k + q - 1 - |u_{(k+1-k_2) \bmod D}|$ et l'ensemble $\{m_k, k \in \mathbb{N}\}$ est q-reconnaissable. Ce qui achève la démonstration de la proposition. □

Nous pouvons alors conclure

Théorème 1. *Soit* $\mathbf{x}$ *un mot infini qui est point fixe d'un morphisme q-uniforme* σ *et qui est circulaire. L'application* $S_{\mathbf{x}}$ *qui lui est associée est q-régulière.*

Démonstration. La preuve est une conséquence de tout ce qui précède. Quitte à changer q en q^s avec s convenable on se ramène au cas injectif. On considère le mot infini $\mathbf{y}$ image de $\mathbf{x}$ par π comme en 4.1. L'application $S_{\mathbf{y}}$ est q-régulière.

On choisit ensuite un entier k_0 satisfaisant $\forall n_0 \in [q^{k_0}, q^{k_0+1}[$, la restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à l'ensemble $H(n_0) = \{q^k n_0 \leqslant m < q^k(n_0+1)\}$ est q-régulière (ceci étant donné par les Propositions 4.8 et 4.10).

Nous obtenons une partition finie de $\mathbb{N}$ constituée de

l'ensemble fini $H' = \{m \in \mathbb{N},\ m < q^{k_0}\}$

et des ensembles $H(n_0)$ pour $n_0 \in [q^{k_0}, q^{k_0+1}[$.

La restriction de $S_{\mathbf{x}}$ à chacune de ces parties est q-régulière et nous concluons à la q-régularité de $S_{\mathbf{x}}$ sur $\mathbb{N}$ tout entier. □

Remerciements

Je remercie tout particulièrement Jean Berstel qui m'a guidée vers l'étude de ce problème et qui m'a soutenue au cours de ce travail.

J'ai très soignement tenu compte de toutes les remarques et suggestions que les référés ont eu la gentillesse et la patience de me faire. Qu'ils en soient aussi remerciés.

References

[1] J.-P. Allouche, Automates finis en théorie des nombres, *Expo. Math.* **5** (1987) 239–266.
[2] J.-P. Allouche and J.O. Shallit, The ring of k-regular sequences, *Theoret. Comput. Sci.* **98** (1992) 163–197.
[3] J. Berstel and C. Reutenauer, *Les Séries Rationnelles et Leurs Langages* (Masson, Paris, 1984).
[4] G. Christol, T. Kamae, M. Mendès France and G. Rauzy, Suites algébriques, automates et substitutions, *Bull. Soc. Math. France* **108** (1980) 401–419.
[5] A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Systems Theory* **6** (1972) 164–192.
[6] C. Davis and D.E. Knuth, Number representations and dragon curves, *J. Recreational Math.* **3** (1982) 2; (April 1970) 66–81; (July 1970) 133–149.
[7] M. Dekking, M. Mendés-France and A. van der Poorten, FOLDS, *Math. Intelligencer* **4** (1982) 130–138; **4** (1982) 190–195, Errata in *Math. Intelligencer* **5** (5) 1983.
[8] S. Eilenberg, *Automata, Languages and Machines, Vol. A* (Academic Press, New York, 1974) p.5.
[9] M. Mendès France, Courbes du dragon par pliage, *Math. Intelligencer* **4** (1983) 815–866.
[10] M. Mendès France and J.O. Shallit, Wire Bending, *J. Combin. Theory* Sér. *A* **50** (1989) 1–23.
[11] M. Mendès France and G. Tenenbaum, Dimension des courbes planes, papiers pliés et suites de Rudin-Shapiro, *Bull. SMF* **109** (1981) 143–268.
[12] F. Mignosi and P. Séébold, If a D0L language is k-power free then it is circular, Publications de l'université d'Amiens, 1993.
[13] B. Mossé, Puissances de mots et reconnaissabilité des points fixes d'une substitution, *Theoret. Comput. Sci.* **99** (1992) 327–334.
[14] B. Mossé, Notions de reconnaissabilité pour les points fixes substitutions et complexité des suites automatiques, Publications du LMD, Luminy, Marseille.
[15] A. Salomaa and M. Soittola, *Automata-Theoretic Aspects of Formal Power Series*, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1294 (Springer, Berlin, 1987).
[16] P. Séébold, Morphismes itérés, mot de Morse et mot de Fibonacci, *C. R. Acad. Sci. Paris* **295** (1982) 439–441.
[17] T. Tapsoba, Complexité des suites automatiques, Thèse, Université Aix-Marseille II, 1987.