JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 34, 363–369 (1979)

# Tout feuilletage à croissance polynomiale est hyperfini

MANUEL SAMUELIDES

*Laboratoire de Probabilités, Université Pierre et Marie Curie, 4 place Jussieu, Tours 45-46, Paris, France*

*Communicated by A. Connes*

Received March 1978

1. Dans [3], H. Dye démontre qu'un groupe à croissance polynomiale qui opère librement sur un espace mesuré $(X, \mu)$ en préservant une mesure finie $\mu$ définit une relation d'équivalence hyperfinie $\mathscr{R}$ dont les classes sont les orbites de l'action du groupe. Il donne d'abord une méthode permettant de construire des ensembles mesurables support d'une relation d'équivalence de type I fini. Sa démonstration utilise une technique—cocycles à valeurs dans les projecteurs de $L^\infty(X, \mu)$—spécifique de l'action libre. L'hypothèse de croissance permet ensuite de montrer que certaines des relations d'équivalence ainsi construites engendrent $\mathscr{R}$.

Pour appliquer cette méthode à la solution de la question analogue pour les feuilletages (posée dans [1]), il faut s'affranchir de l'hypothèse d'action libre d'un groupe. Nous constaterons d'abord directement (§3) que la construction de Dye fournit des ensembles support d'une relation d'équivalence de type I fini. L'estimation de la croissance simultanée de chaque orbite sera faite par un raffinement de la construction de Dye "subordonnant" celle-ci à la vitesse de croissance de chaque orbite (§6).

2. Dans [4], J. F. Plante définit le type de croissance du feuilletage d'une variété compacte: étant donnée une transversale $T$ au feuilletage constituée par la réunion disjointe des transversales $T_i$ à des ouverts feuilletants $U_i$ recouvrant la variété, l'holonomie est engendrée par les homéomorphismes partiels de cette transversale, $\gamma_{i,j}$ définis pour les couples $(i, j)$ tels que $U_i \cap U_j \neq \varnothing$. On pose alors:

$$\begin{aligned}
\hat{\gamma}_{i,j}(u) &= \gamma_{i,j}(u) && \text{pour} \quad u \in \mathrm{Dom.}(\gamma_{i,j}),\\
\hat{\gamma}_{i,j}(u) &= \gamma_{j,i}(u) && \text{pour} \quad u \in \mathrm{Im.}(\gamma_{i,j}),\\
\hat{\gamma}_{i,j}(u) &= u && \text{pour} \quad u \in {}^c(\mathrm{Dom.}\ \gamma_{i,j} U\ \mathrm{Im.}\ \gamma_{i,j}).
\end{aligned}$$

$\hat{\gamma}_{i,j}$ est une bijection bimesurable de $T$ (fig. 1). Soit $F$ l'ensemble des $\hat{\gamma}_{i,j}$.



0022-1236/79/120363-07$02.00/0

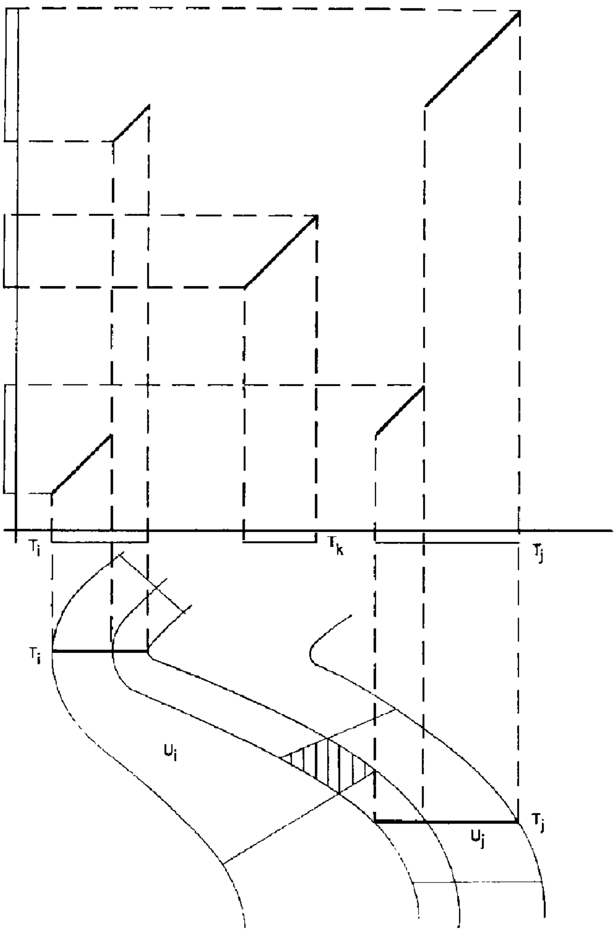


FIG. 1. Graphe de $\hat{\gamma}_{i,j}$.

L'action de $F$ sur la transversale engendre la relation d'équivalence des feuilles sur $T$. La croissance du feuilletage est alors définie par la fonction:

$$g_F(u, n) = \text{Card.}\, F^n u \qquad \text{pour} \quad (u, n) \in T \times \mathbb{N}.$$

Supposons que pour chaque point $u$ de $T$, la fonction $g_F(u, \cdot)$ soit majorée par un polynôme. Il existe alors sur la transversale $T$ une mesure $\mu$ invariante par holonomie (voir [4]). On se propose de montrer ici que la relation d'équivalence des feuilles sur l'espace mesuré $(T, \mu)$ est une relation d'équivalence hyperfinie. Cette propriété d'hyperfinitude d'un feuilletage ne dépend pas du choix du recouvrement $(U_i)$ de la variété (voir [1]).

La démonstration est faite pour des mesures sur $T$ relativement invariantes qui interviennent plus naturellement dans les feuilletages. On a donc modifié l'hypothèse de croissance pour prendre en compte le module de la mesure. On notera $\mathscr{R}$ le graphe de la relation d'équivalence des feuilles sur $T$.

**3.** Soit $\gamma$ une transformation mesurable de $T$ dont le graphe $\Gamma(\gamma)$ est un sous-ensemble analytique de $\mathscr{R}$. Le graphe de l'action de $\gamma$ sur $U$ est par définition $(U \times U) \cap \Gamma(\gamma)$ pour $U$ sous-ensemble analytique de $T$. Soit $K$ un sous-ensemble fini de telles transformations; on note $\Gamma(K) = \bigcup_{\gamma \in K} \Gamma(\gamma)$.

*On appelle relation d'équivalence engendrée par l'action de $K$ sur $U$* la relation d'équivalence analytique mesurable engendrée par le sous-ensemble analytique $\Gamma(K) \cap (U \times U)$ de $\mathscr{R}$.

On rappelle enfin que les transformations bijectives et bimesurables de $T$ dont le graphe est dans $\mathscr{R}$ forment la *groupe plein* de $\mathscr{R}$.

PROPOSITION. *Soit $K$ un sous-ensemble fini du groupe plein de $\mathscr{R}$, $S$ un sous-ensemble fini de transformations mesurables de $T$ dont le graphe est dans $\mathscr{R}$ et $V$ un sous-ensemble analytique de $T$. On pose*:

$$C = \bigcap_{\theta \in K} \theta^{-1} \circ S \qquad \textit{et} \qquad U = CV \cup {}^{c}(S - C)V.$$

*Alors, l'action de $K$ sur $U$ engendre une relation d'équivalence telle que le cardinal de ses classes d'équivalence soit majoré par le cardinal de $C$.*

*Démonstration.* Soit $u \in U$, il existe $\gamma \in C$ et $v \in V$ tels que $u = \gamma v$. On va montrer que l'orbite de $u$ par l'action de $K$ restreinte à $U$ est dans $Cv$. Si $w$ appartient à cette orbite, il existe:

$$(\theta_i)_{i=1,\ldots,n} \in K^n \qquad \text{avec} \quad \theta_i \theta_{i-1} \cdots \theta_1(u) \in U, \text{ pour } i$$

variant de 1 à $n$. La méthode de démonstration du lemme 4.1 de [3] établit de proche en proche que $\theta_i \theta_{i-1} \cdots \theta_1 \gamma \in C$.

**4.** Dans [2], A. Connes introduit et utilise la notion de mesure transverse sur un groupoïde mesurable: $\mathscr{R}$ étant muni de la structure de groupoïde mesurable, si $\delta$ est un homomorphisme mesurable de $\mathscr{R}$ dans $\mathbb{R}^+$, une mesure $\mu$ sur $T$ est dite *relativement invariante de module* $\delta$ si $d\mu\{r(\gamma)\} = \delta(\gamma)\, d\mu\{s(\gamma)\}$.

DÉFINITION. Un ensemble mesurable $U$ de $T$ est dit *$K$-séparé* si $\forall \gamma \in K$, $\forall \eta \in K$, $\gamma U \cap \eta U = \{v \in Y$ tel que $\exists u \in U$ avec $\gamma u = \eta u = v\}$ où $K$ est un ensemble de transformations mesurables de $T$.

PROPOSITION. *Supposons $K$ fini et tel que $\Gamma(K) \subset \mathscr{R}$. Soit $\mu$ une mesure sur $T$ relativement invariante de module $\delta$. Alors*:

(a) on a $\mu(KU) \leqslant \int_U \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma(K) \cap s^{-1}(u)} \delta(y) \right\} d\mu(u)$

(b) *si $U$ est $K$-séparé, on a l'égalité dans* (a).

*Démonstration.* On a:

$$\sum_{\gamma \in r^{-1}(u)^1 \Gamma(K) \cap s^{-1}(U)} (y) \geqslant 1_{KU}(u)$$

avec l'égalité si $U$ est $K$-séparé. Or:

$$\left\{ \int_{\gamma \in r^{-1}(u)^1 \Gamma(K) \cap s^{-1}(U)} \sum (y) \right\} d\mu(u)$$

$$= \int 1_{\Gamma(K) \cap s^{-1}(U)}(y)\, \delta(y)\, d\mu\{s(y)\}$$

$$= \int_U \left\{ \sum_{\gamma \in \Gamma(K) \cap s^{-1}(u)} \delta(y) \right\} d\mu(u)$$

5. Proposition. *Soit $U$ un sous-ensemble mesurable de $T$, $\mu$ une mesure sur $T$ relativement invariante et $K$ un sous-ensemble fini du groupe plein de $\mathscr{R}$. Alors, il existe $V$ sous-ensemble mesurable de $U$, qui soit $K$-séparé et qui vérifie* $\mu\{U \cap {}^c(K^2V)\} = 0$.

*Démonstration.* Remarquons d'abord que dès que $U$ n'est pas négligeable, on peut trouver par extraction successive selon tous les couples d'éléments de $K$, un sous-ensemble mesurable de $U$ qui soit $K$-séparé et non négligeable. Alors, on conclut qu'un sous-ensemble mesurable de $U$, maximal parmi les $K$-séparés (à un ensemble $\mu$-négligeable près) vérifie la propriété $\mu\{U \cap {}^c(K^2V)\} = 0$.

6. Soit $\mu$ une mesure transverse sur $T$, relativement invariante de module $\delta$. On pose pour $u \in T$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$g_F(u, n) = \sum_{\gamma \in \Gamma(F^n) \cap s^{-1}(u)} \delta(y).$$

Définition. On dit que le feuilletage est à *$\delta$-croissance polynomiale en $u$ élément de $T$*, si l'application $n \in \mathbb{N} \to g_F(u, n)$ est majorée par un polynôme.

Théorème. *Soit $\mu$ une mesure sur $T$ relativement invariante de module $\delta$. Si pour $\mu$ presque tout $u$, le feuilletage est à $\delta$ croissance polynomiale en $u$, il est hyperfini (i.e., la relation d'équivalence $\mathscr{R}$ sur $(T, \mu)$ est hyperfinie).*

Lemme 1. *Si le feuilletage est à $\delta$ croissance polynomiale en $u$, on a:*

$$\varliminf_{n \to \infty} \frac{g_F(2nh, u) - g_F((2n-1)h, u)}{g_F(nh, u)} = 0 \qquad \text{quel que soit } h \in \mathbb{N}.$$

En effet, si l'égalité ci-dessus n'était pas vraie, on aurait: $\exists h \in \mathbb{N}$, $\exists \epsilon$, $\forall N \in \mathbb{N}$, $\exists n > N$, $g_F(4nh, u) \geqslant n \epsilon g_F(nh, u)$ ce qui est contradictoire avec la croissance polynomiale.

LEMME 2. *Avec les hypothèses du théorème, quels que soient h entier positif et $\epsilon$ réel positif, il existe U sous-ensemble mesurable de T tel que $\mu({}^cU) \leqslant \epsilon \| \mu \|$ et que l'action de $F^h$ sur U engendre une relation d'équivalence dont les orbites sont finies.*

*Démonstration du lemme* 2. On pose: $Q_n = \{u \in T$ tels que $g_F(2nh, u) - g_F((2n-1)h, u) \leqslant (\epsilon/2) g_F(nh, u)\}$ et on pose $P_n = Q_n \cap {}^cQ_{n-1} \cap \cdots \cap {}^cQ_1$, donc $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n$. D'après le lemme précédent, on a $\mu({}^c\bigcup_{n \in \mathbb{N}} P_n) = 0$. Donc il existe un entier positif $p$ tel que:

$$\mu\left({}^c \bigcup_{n=1}^{p} P_n\right) \leqslant \frac{\epsilon}{2} \| \mu \|.$$

Soit $S$ l'ensemble des transformations $\sigma$ de $T$ telles que:

$$\forall n \leqslant p,\ \exists \sigma_F \in F^{2nh} \text{ avec } \sigma_{\restriction P_n} = \sigma_{n \restriction P_n}$$

et

$$\sigma_{\restriction {}^c(\bigcup_{n=1}^{p} P_F)} = \mathrm{Id}_{\restriction {}^c(\bigcup_{n=1}^{p} P_F)}\ .$$

$S$ est un ensemble fini de transformations mesurables de $T$ dont le graphe est inclus dans $\mathscr{R}$. Plus précisément: si $n \leqslant p$ et si $u \in P_n$, on a $\Gamma(S) \cap s^{-1}(u) = \Gamma(F^{2nh} \cap s^{-1}(u))$. Donc $V_n \subset P_n \Rightarrow SV_n = F^{2nh} V_n$.

On veut maintenant construire une suite $V_{i_j}$ ($j$ entier variant de 1 à $q$, et $q < p$) (fig. 1) de sous-ensembles mesurables de $T$ telle que

(a) $V_{i_j} \subset P_{i_j}$,

(b) $V_{i_j}$ est $F^{i_j h}$-séparé,

(c) $F^{i_j h} V_{i_j} \cup F^{i_k h} V_{i_j} = \varnothing$,

(d) $\mu\left(\bigcup_{n=1}^{p} P_F \cup c\left(\bigcup_{j=1}^{q} F^{2 i_j h} V_{i_j}\right)\right) = 0.$

Pour ce faire, on pose d'abord $i_1 = p$ et on choisit un sous-ensemble de $P_p$ mesurable, $V_p$ qui soit $F_p^{ph}$-séparé et tel que $\mu(P_p \cap {}^c(F^{2ph} V_p)) = 0$. Soit $i_2$ le plus grand des indices $i$ tels que $\mu(P_i \cap {}^c(F^{2ph} V_p)) \neq 0$. On choisit alors un sous-ensemble de $P_i i \cap {}^c(F^{2ph} V_p)$, $V_{i_2}$ qui soit $F^{i_2 h}$-séparé et tel que $\mu(P_{i_2} \cap {}^c(F^{2 i_2 h} V_{i_2})) = 0$. On continue ce procédé de choix légitimé par la proposition 5

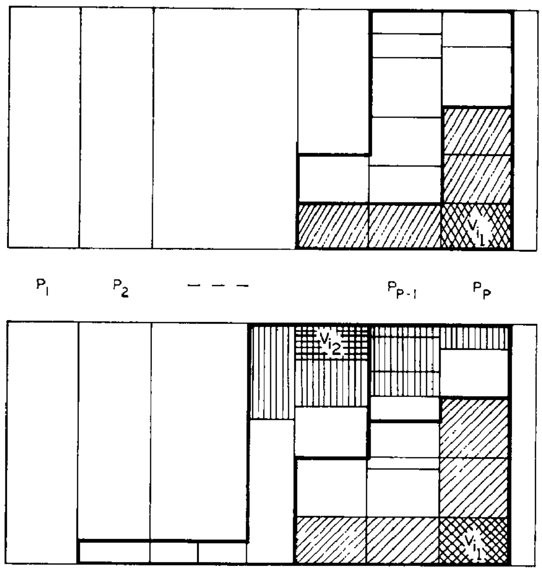


FIG. 2. La vitesse de croissance de $G_F(nh)$ détermine le découpage des $P_n$.
→ Les $F^{2i}V_i$ remplissent (entourés d'un trait gras).
→ Les $F^iV_i$ sont disjoint (hachurés).

tant que tous les $P_i$ ne sont pas remplis par les saturés par l'action de $F^{2i_jh}$ des $V_{i_j}$ précédemment choisis.

On pose alors $V = \bigcup_{j=1}^{q} V_{i_j}$, $C = \bigcap_{\theta \in F_h} \theta^{-1}S$ et $U = CV \cap {}^c(S - C)V$, comme dans la proposition 3. Il reste $\mu({}^cU)$. On a:

$$\mu({}^cU) \leqslant \mu\{(S - C)V\} + \mu\{{}^c(SV)\}, \text{ or}$$

$$\mu\{(S - C)V\} \leqslant \sum_{j=1}^{q} \mu\{(F^{2i_jh} - F^{(2i_j-1)h})\, V_{i_j}\},$$

$$\mu\{(S - C)V\} \leqslant \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=1}^{q} \int_{V_{i_j}} g_F(i_jh, u)\, d\mu(u),$$

$$\mu\{(S - C)V\} \leqslant \frac{\epsilon}{2} \sum_{j=1}^{q} \mu(F^{i_jh}V_{i_j}) \leqslant \frac{\epsilon}{2} \| \mu \|,$$

$$\mu\{{}^c(SV)\} \leqslant \mu\left({}^c\bigcup_{n=1}^{p} P_n\right) \leqslant \frac{\epsilon}{2} \| \mu \|.$$

*Démonstration du théorème.* Pour $h$ entier et $\epsilon = 1/2^h$, soit $U_h$ un ensemble fourni par le lemme précédent. On pose $W_n = \bigcap_{h \leqslant n} U_h$ ; l'action de $F^n$ sur $W_n$ engendre une relation d'équivalence finie. La réunion monotone de ces relations d'équivalence est la trace sur $W_n$ de la trace relation d'équivalence $\mathscr{R}$. Or, d'après le lemme de Borel–Cantelli, $\mu({}^c(\bigcup W_n)\} = 0$.

7. *Remarque*. La démonstration précédente s'applique sans changement aux relations d'équivalence "à transversale" (définies dans [2]) finement engendrées et de croissance polynomiale relativement à leur générateur.

## Références

1. R. Bowen, Anosov foliations are hyperfinite.
2. A. Connes, Sur la théorie non commutative de l'intégration, preprint, Inst. Hautes Études Sci.
3. H. A. Dye, On groups of measure preserving transformations, II, *Amer. J. Math.* **85** (1963), 551–576.
4. J. F. Plante, Foliations with measure preserving holonomy, *Annals of Math.* **102** (1975), 327–361.