JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 31, 245–254 (1979)

Sur l'unicité de la décomposition des contractions en somme directe

RADU I. TEODORESCU

Université de Braşov, Colina Universităţii, 2200 Braşov Roumanie

Communicated by the Editors

Received August 30, 1977

1

Soient $\mathscr{E}$, $\mathscr{E}_*$ deux espaces de Hilbert séparables, $\mathscr{L}(\mathscr{E}, \mathscr{E}_*)$ l'ensemble des opérateurs linéaires bornés de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}_*$ et $\Theta_n \in \mathscr{L}(\mathscr{E}, \mathscr{E}_*)$ pour $n = 0, 1,...$; supposons que pour tout $\lambda \in D = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| < 1\}$ la série

$$\Theta(\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \Theta_n$$

est convergente et de plus $\|\Theta(\lambda)\| \leqslant 1$; on dit alors que la fonction opératorielle $\{\mathscr{E}, \mathscr{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ est une fonction analytique contractive; elle est 'pure" si $\|\Theta(0)\, e\| < \|e\|$ pour tout $e \in \mathscr{E}$, $e \neq 0$.[1]

Pour une fonction analytique contractive pure $\{\mathscr{E}, \mathscr{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ envisageons l'opérateur T défini par

$$T^*(u \oplus v) = e^{-it}(u(e^{it}) - u(0)) \oplus e^{-it}v(t)$$

dans l'espace $H = \mathscr{K}_+ \ominus G$ où $\mathscr{K}_+ = H^2(\mathscr{E}_*) \oplus \overline{\Delta L^2(\mathscr{E})}$,

$$G = \{\Theta u \oplus \Delta u; u e H^2(\mathscr{E})\} \qquad \text{et} \qquad \Delta(t) = [I - \Theta^*(e^{it})\, \Theta(e^{it})]^{1/2}.$$

Rappelons que si T admet un sous-espace invariant $H_1 (\subset H)$ alors la fonction $\{\mathscr{E}, \mathscr{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ admet une factorisation régulière $\Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\, \Theta_1(\lambda)$ les facteurs $\{\mathscr{E}, \mathscr{F}, \Theta, (\lambda)\}$ et $\{\mathscr{F}, \mathscr{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ étant des fonctions analytiques contractives telles que le sous-espace H_1 et son complément orthogonal $H_2 = H \ominus H_1$ aient les représentations suivantes:

$$H_1 = \{\Theta_2 u \oplus Z^{-1}(\Delta_2 u_0 \oplus v); u \in H^2(\mathscr{F}), v \in \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})}, \Theta_1^* u + \Delta_1 v \perp H^2(\mathscr{E})\},$$

$$H_2 = \{u \oplus Z^{-1}(v \oplus 0); u \in H^2(\mathscr{E}_*), v \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathscr{F})}, \Theta_2^* u + \Delta_2 v \perp H^2(\mathscr{F})\}.$$

[1] Pour toutes les notions qui ne sont pas explicitement définies, ainsi que pour les notations utilisées nous renvoyons le lecteur à la monographie [H].

0022-1236/79/020245-10$02.00/0

Le problème de l'existence d'un complément direct du sous-espaces H_1, lui aussi invariant à T, a été résolu dans [2] sous la forme suivante:

THÉORÈME.[2] *Soit* $\{\mathscr{E}, \mathscr{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ *une fonction analytique contractive pure,* $\Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\,\Theta_1(\lambda)$ *une factorisation régulière et* H_1 *le sous-espace de* H *invariant à* T *correspondant à cette factorisation. Pour qu'il existe un sous-espace* $H' \subset H$, *invariant à* T *et tel que* $H = H_0 \dotplus H'$ (*somme directe*) *il faut et il suffit qu'il existe des fonctions analytiques bornées* $\{\mathscr{E}_*, \mathscr{F}, \Phi(\lambda)\}$ *et* $\{\mathscr{F}, \mathscr{E}, \Psi(\lambda)\}$ *telles que*

$$\Phi(\lambda)\,\Theta_2(\lambda) + \Theta_1(\lambda)\,\Psi(\lambda) = I_{\mathscr{F}}\,. \tag{I}$$

Le but de la note présente est de préciser les conditions dans lesquelles le complément direct H' est univoquement déterminé. Nous démontrerons le suivant

THÉORÈME 1. *Pour que le sous-espace* H_1 *correspondant à la factorisation régulière* $\Theta(\lambda) = \Theta_2(\lambda)\,\Theta_1(\lambda)$ *admette un seul complément direct invariant à* T, *il faut et il suffit que les conditions suivantes soient vérifiées*:

(i) *pour presque tout* $t \in [0, 2\pi]$ *on ait*

$$\Delta_1(t) = [I - \Theta_1^*(e^{it})\,\Theta_1(e^{it})]^{1/2} = 0 \quad \text{ou} \quad \Delta_{*2} = [I - \Theta_2(e^{it})\,\Theta_2^*(e^{it})]^{1/2} = 0;$$

(ii) *quels que soient les fonctions analytiques bornées* $\{\mathscr{E}_*, \mathscr{F}, \Omega_2(\lambda)\}$, $\{\mathscr{F}, \mathscr{E}, \Omega_1(\lambda)\}$ *vérifiant* $\Omega_2\Theta_2 = \Theta_1\Omega_1$ *il existe une fonction analytique bornée* $\{\mathscr{E}_*, \mathscr{E}, \mathscr{F}(\lambda)\}$ *telle que*

$$\Omega_2 = \Theta_1 F \qquad \textit{et} \qquad \Omega_1 = F\Theta_2\,. \tag{II}$$

Avant de passer à la démonstration, nous allons faire quelques remarques concernant les conditions (i) et (ii).

La condition (i) est naturelle, car elle implique directement les facteurs Θ_1 et Θ_2 de la factorisation de Θ correspondant au sous-espace H_1.

La condition (ii) suggère que les facteurs $\Theta_1(\lambda)$ et $\Theta_2(\lambda)$ sont premiers entre eux: elle est équivalente à la suivante condition:

(ii′) *quels que soient les couples de fonctions analytiques bornées* (Φ_1, Φ_1) *et* (Φ_2, Ψ_2) *vérifiant la relation* (I) *il existe une fonction analytique bornée* $\{\mathscr{E}_*, \mathscr{E}, F(\lambda)\}$ *telle que*

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Theta_1 F \qquad \textit{et} \qquad \Psi_2 = \Psi_1 - F\Theta_2\,. \tag{II′}$$

Pour démontrer cette équivalence notons tout d'abord que si (Φ_i, Ψ_i), $i = 1, 2$ vérifient (I) alors $(\Phi_2 - \Phi_1)\,\Theta_2 = \Theta_1(\Psi_1 - \Psi_2)$, donc en tenant compte de (ii) on obtient (II′).

[2] Dans la suite nous allons faire souvent appel à certains résultats intermédiaires de la démonstration de ce théorème. Pour ces résultats et leurs démonstrations cf. [2, 4].

Soit maintenant (Φ, Ψ) une paire de fonctions analytiques bornées vérifiant (I) et soient $\{\mathscr{E}_*, \mathscr{F}, \Omega_2(\lambda)\}$ et $\{\mathscr{F}, \mathscr{E}, \Omega_1(\lambda)\}$ telles que $\Omega_2\Theta_2 = \Theta_1\Omega_1$; alors $(\Phi + \Omega_2, \Psi - \Omega_1)$ vérifient aussi la relation (I), donc d'après (II') on a

$$\Omega_2 = \Theta_1 F \qquad \text{et} \qquad \Omega_1 = F\Theta_2 ,$$

c'est-à-dire (II).

Notons aussi que dans le cas où les fonctions analytiques contractives $\{\mathscr{E}, \mathscr{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ et $\{\mathscr{F}, \mathscr{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$ sont des fonctions scalaires, cette condition est vérifiée, car, d'après la relation (I), les facteurs Θ_1 et Θ_2 sont premiers entre eux, donc l'égalité $\Omega_2\Theta_2 = \Theta_1\Omega_1$ subsiste si et seulement si $\Omega_2 = \Theta_1 F$ et $\Omega_1 = \Theta_2 F$ où $F(\lambda)$ est une fonction scalaire analytique bornée.

Donc dans le cas où les fonctions analytiques contractives Θ_1 et Θ_2 sont des fonctions scalaires l'égalité (I) entraîne la condition (ii). Dans le cas général cette question reste ouverte.

L'auteur tient à remercier à C. Foiaş d'avoir suggéré cette forme du théorème 1, pour des discussions et conseils utils.

De même, l'auteur remercie à B. Sz.-Nagy dont les remarques et indications ont contribué hautement à la rédaction de cette note.

2

Dans la démonstration du théorème à l'aide d'un couple de fonctions $(\Phi(\lambda), \Psi(\lambda))$ qui vérifient la relation (I) on a mis en évidence un complément direct sans savoir s'il est unique. La question que nous allons resoudre dans cet alinéa est de trouver les conditions dans lesquelles à un couple de fonctions $(\Phi(\lambda), \Psi(\lambda))$ il correspond un seul complément direct H' dans H invariant à T. Dans ce but soit H' un complément direct invariant à T et soit P la projection de H sur H' parallèle à H_1 ; H_1 et H' étant invariants à T on a $TP = PT$, donc par [1] l'opérateur P à la représentation

$$P = P_+ Y \mid H$$

où P_+ est la projection orthogonale de $\mathscr{K}_+$ sur H, Y est donné par

$$Y = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}$$

où $A(\cdot)\colon \mathscr{E}_* \to \mathscr{E}_*$ est une fonction opératorielle analytique bornée, $B(\cdot)\colon \mathscr{E}_* \to \overline{\Delta\mathscr{E}}$ et $C(\cdot)\colon \overline{\Delta\mathscr{E}} \to \overline{\Delta\mathscr{E}}$ sont des fonctions mesurables bornées telles que

$$A\Theta = \Theta A_0 , \qquad B\Theta + C\Delta = \Delta A_0$$

où $A_0(\cdot)\colon \mathscr{E} \to \mathscr{E}$ est analytique bornée.

En démontrant la nécessité de la relation (I) nous avons montré que

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= I - \Theta_2(\lambda)\,\Phi(\lambda), & & C \mid Z^{-1}(\{0\} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})}) = 0, \\ Bu &= Z^{-1}(-\Delta_2 \Phi u \oplus v'), & & u \in H^2(\mathscr{E}_*),\ v' \in \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})}, \qquad (*) \\ CZ^{-1}(v_2 \oplus v_1) &= Z^{-1}(v_2 \oplus v''), & & v_2 \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathscr{F})},\ v_1,\ v'' \in \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})}, \\ B\Theta_2 u + CZ^{-1}(\Delta_2 u \oplus 0) &= \Delta \Psi u, & & u \in H^2(\mathscr{F}). \end{aligned}$$

Nous désignons

$$v' = \varphi_1(v) \qquad \text{et} \qquad v'' = \varphi_2(v).$$

Les opérateurs $\varphi_1 : H^2(\mathscr{E}_*) \to \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})}$ et $\varphi_2 : \overline{\Delta_2 L^2(\mathscr{F})} \to \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})}$ sont linéaires, bornées, ils commutent avec la multiplication par e^{it} et, en vertu de la relation $(*)$ ils vérifient la condition

$$\varphi_1(\Theta_2 u) + \varphi_2(\Delta_2 u) = \Delta_1 \Psi u, \qquad u \in H^2(\mathscr{F}).$$

En posant

$$\begin{aligned} f(u) &= \varphi_1(u) - \Delta_1 \Psi \Theta_2^* u, & & u \in H^2(\mathscr{E}_*), \\ g(u) &= \varphi_2(u) - \Delta_1 \Psi \Delta_2 u, & & u \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathscr{F})}, \end{aligned}$$

nous obtenons des opérateurs linéaires bornés f et g qui commutent avec la multiplication par e^{it} et qui, de plus, vérifient la relation

$$f(\Theta_2 u) + g(\Delta_2 u) = 0, \qquad u \in H^2(\mathscr{F}). \tag{2}$$

Envisageons les fonctions opératorielles

$$\begin{aligned} A(\lambda) &= I - \Theta_2(\lambda)\,\Phi(\lambda), \\ Bu &= Z^{-1}[-\Delta_2 \Phi u \oplus (\Delta_1 \Psi \Theta_2^* u + f(u))], \qquad u \in H^2(\mathscr{E}_*), \\ CZ^{-1}(v_2 \oplus v_1) &= Z^{-1}[v_2 \oplus (\Delta_1 \Psi \Delta_2 v_2 + g(v_2))], \\ & \qquad\qquad v_2 \oplus v_1 \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathscr{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})} \end{aligned} \tag{4}$$

et l'opérateur P donné par $P = P_+ Y$ où

$$Y = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix}.$$

LEMME 1. *L'opérateur Y a les suivantes propriétés:*

(i) $YG \subset G$,

(ii) $P_+(Y - Y^2) = 0$,

(iii) $P_+ Y \mid H_1 = 0$ *et* $(I - P_+ Y)\,\mathscr{F}_+ \subset H_1 \oplus G$.

On peut prouver ces égalités en répétant la démonstration donnée dans [2].

En posant $H' = P_+Y(H)$ on montre facilement, en utilisant (i), (ii) et (iii), que H' est un sous-espace fermé, invariant à T tel que

$$H = H_1 \dot{+} H'.$$

Remarque 1. Pour le couple $(\Phi(\lambda), \Psi(\lambda))$ des fonctions données, le sous-espace H' ne dépend que du choix des opérateurs f et g.

Remarque 2. Il existe toujours tel couple d'opérateurs f et g, à savoir $f = 0$, $g = 0$.

PROPOSITION 1. *A un couple de fonctions* $(\Phi(\lambda), \Psi(\lambda))$ *qui vérifient la relation* (I) *il correspond un seul complément direct invariant à* T *si et seulement si pour presque tout* $t \in [0, 2\pi]$

$$\Delta_1(t) = 0 \qquad ou \qquad \Delta_{*2}(t) = 0.$$

Démonstration. Remarquons tout d'abord que l'unicité du complément H' est équivalente à l'unicité de la projection P.

Soient $f: H^2(\mathscr{E}_*) \to \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})}$, $g: \overline{\Delta_2 L^2(\mathscr{F})} \to \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})}$ des opérateurs linéaires bornés qui commutent avec la multiplication par e^{it} et qui vérifient (3).

Montrons tout d'abord que $g = 0$ et f doit être une fonction opératorielle analytique bornée. Dans ce but envisageons les opérateurs Y et Y_1 définis par

$$Y = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B & C \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y_1 = \begin{bmatrix} A & 0 \\ B_1 & C_1 \end{bmatrix}$$

où

$$A(\lambda) = I - \Theta_2(\lambda)\,\Phi(\lambda),$$

$$Bu = Z^{-1}(-\Delta_2\Phi u \oplus \Delta_1\Psi\Theta_2^* u), \qquad u \in H^2(\mathscr{E}_*)$$

$$B_1 u = Z^{-1}[-\Delta_2\Phi u \oplus (\Delta_1\Psi\Theta_2^* u + f(u))], \qquad u \in H^2(\mathscr{E}_*)$$

$$CZ^{-1}(v_2 \oplus v_1) = Z^{-1}(v_2 \oplus \Delta_1\Psi\Delta_2 v_2),$$
$$v_2 \oplus v_1 \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathscr{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})}$$

$$C_1 Z^{-1}(v_2 \oplus v_1) = Z^{-1}[v_2 \oplus (\Delta_1\Psi\Delta_2 v_2 + g(v_2))],$$
$$v_2 \oplus v_1 \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathscr{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})}.$$

En tenant comple de l'unicité de la projection P on trouve que $P_+Y = P_+Y_1$ et donc $Y - Y_1 : \mathscr{K}_1 \to G$; mais alors cf. [1, th. 2] on a

$$Y_1 - Y = \begin{bmatrix} \Theta F & 0 \\ \Delta F & 0 \end{bmatrix}$$

où $F(\cdot): H^2(\mathscr{E}_*) \to H^2(\mathscr{E})$ est une fonction opératorielle analytique bornée. On a donc

$$\Theta F = 0, \qquad \Delta F = B_1 - B \qquad \text{et} \qquad C_1 - C = 0.$$

De la dernière relation on trouve $g = 0$ et des deux premières on déduit $\Theta_2\Theta_1 F = 0$, $\Delta_2\Theta_1 F = 0$, $\Delta_1 F = f$; de ces dernières relations on trouve $\Theta_1 F = 0$ donc $\Delta_1 F = F$ d'où $f = F$, donc f est une fonction opératorielle analytique bornée.

Pour tout opérateur linéaire borné $Q: L^2(\mathscr{E}_*) \to L^2(\mathscr{E})$ qui commute avec multiplication par e^{it} soit

$$f = \Delta_1 Q \Delta_{*2} \qquad \text{et} \qquad g = -\Delta_1 Q \Theta_2 .$$

Les opérateurs f et g ainsi considérés sont linéaires, bornés, commutent avec la multiplication par e^{it} et de plus

$$\Delta_1 Q \Delta_{*2} \Theta_2 u = \Delta_1 Q \Theta_2 \Delta_2 u, \qquad u \in H^2(\mathscr{F}),$$

donc ils vérifient la relation (3).

Mais alors $g = 0$ et f est analytique bornée pour tout Q. En choisissant Q, $e^{-it}Q, \ldots$ nous obtenons $\Delta_1 Q \Delta_{*2} = 0$ pour tout Q d'où il résulte que $\Delta_1(t) = 0$ ou $\Delta_{*2}(t) = 0$ pour presque tout $t \in [0, 2\pi]$.

Ceci achève la démonstration de la nécessité de la condition de la propriété 1.

Nous allons démonstrer, dans la suite, la suffisance en utilisant la géométrie de la dilatation isométrique minimale.

Pour cela soient T_1 et T_2 des contractions ayant comme fonctions caractéristiques les parties pures des fonctions $\{\mathscr{E}, \mathscr{F}, \Theta_1(\lambda)\}$ resp. $\{\mathscr{F}, \mathscr{E}_*, \Theta_2(\lambda)\}$; de même soient U_1 et U_2 les dilatations unitaires minimales, $\mathscr{K}_1$ et $\mathscr{K}_2$ les espaces des dilatations unitaires minimales, R_1 et R_{*2} les sous-espaces résiduel et $*$ résiduel de T_1 resp. T_2.

A l'aide de f et g définissons l'opérateur $\Omega_+ : \mathscr{K}_{+2} = H^2(\mathscr{E}_*) \oplus \overline{\Delta^2 L^2(\mathscr{F})} \to 0 \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})}$ donné par

$$\Omega_+(u \oplus v) = 0 \oplus (f(u) + g(v))$$

opérateur qui a la propriété $\Omega_+ U_{2+} = U_{1+}\Omega_+$ et qui peut être prolongé de manière unique à $\mathscr{K}_2$, prolongement noté par Ω. La suffisance du théorème résultera de la proposition suivante qui présente un intérêt en soi-même:

PROPOSITION 2. *Pour que le seul couple d'opérateurs linéaires bornés qui commutent à la multiplication par e^{it} et qui vérifient la condition* (3) *soit le couple $f = 0$, $g = 0$, il faut et il suffit que $\Delta_1(t) = 0$ ou $\Delta_{*2}(t) = 0$* p.p. *pour $t \in [0, 2\pi]$.*

En effet, soit Ω l'opérateur induit par f et g, opérateur défini sur $\mathscr{K}_2$ à valeurs dans R_1. De la condition (3) on déduit $\Omega \mid M_+(\mathscr{L}_2) = 0$ ce qui équivaut à $\Omega \mid M(\mathscr{L}_2) = 0$, Donc la condition de l'énoncé est équivalente à la propriété: le seul opérateur $\Omega: \mathcal{K}_2 \to R_1$ linéaire, borné, tel que $\Omega U_2 = U_1 \Omega$ et $\Omega \mid M(\mathcal{L}_2) = 0$ est l'opérateur nul. Mais puisque $\mathcal{K}_2 = M(\mathcal{L}_2) \oplus R_{*2}$ il résulte qu'il n'existe pas d'opérateurs non nuls $\Omega: R_{*2} \to R_1$ avec la propriété $\Omega U_2 = U_1 \Omega$ et donc à l'exception éventuelle d'un ensemble de mesure nulle pour tout $t \in [0, 2\pi]$ on a

$$\Delta_1(t) = 0 \qquad \text{ou} \qquad \Delta_{*2}(t) = 0. \qquad \text{C.Q.F.D.}$$

En vertu de la propriété précédente et de la remarque 2 la suffisance est évidente et la démonstration de la proposition 1 est achevée.

3

Dans cet alinéa on se propose de compléter la démonstration du théorème 1.

Pour démontrer la nécessité il reste à montrer que la condition (ii′) est vérifiée. Pour cela soient $(\Phi_i(\lambda), \Psi_i(\lambda))$ $(i = 1, 2)$ deux couples de fonctions analytiques bornées telles que

$$\Phi_i(\lambda)\, \Theta_2(\lambda) + \Theta_1(\lambda)\, \Psi_i(\lambda) = I_{\mathcal{F}} \qquad (i = 1, 2)$$

et soient P_i les opérateurs définis par

$$P_i = P_+ Y_i\,, \qquad Y_i = \begin{bmatrix} A_i & 0 \\ B_i & C_i \end{bmatrix}$$

où

$$A_i(\lambda) = I - \Theta_2(\lambda)\, \Phi_i(\lambda),$$

$$B_i u = Z^{-1}(-\Delta_2 \Phi_i u \oplus \Delta_1 \Psi_i \Theta_2^* u), \quad u \in H^2(\mathcal{E}_*),$$

$$C_i Z^{-1}(v_2 \oplus v_1) = Z^{-1}(v_2 \oplus \Delta_1 \Psi_i \Delta_2 v_2), \qquad v_2 \oplus v_1 \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathcal{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathcal{E})}$$

$(i = 1, 2)$. On peut montrer que les opérateurs $P_+ Y_i$ ont les propriétés

(i) $P_+ Y_i P_+ = P_+ Y_i\,, \qquad P_+(Y_i - Y_i^2) = 0,$

(ii) $P_+ Y_i(H_1 \oplus G) = \{0\}, \qquad (I - P_+ Y_i) \mid H_1 = I_{H_1}\,.$

De ces propriétés on déduit que $H' = P_+ Y_i(\mathcal{K}_+)$, $i = 1, 2$, donc $P_+ Y_1 = P_+ Y_2$ d'où $(Y_1 - Y_2)\, \mathcal{K}_+ \subset G$.

Mais alors, par [1, th. 2], il existe $\{\mathcal{E}_*, \mathcal{E}, F(\lambda)\}$ analytique bornée telle que

$$Y_1 - Y_2 = \begin{bmatrix} \Theta F & 0 \\ \Delta F & 0 \end{bmatrix}$$

d'où on trouve facilement le système suivant:

$$\Theta_2(\Phi_2 - \Phi_1) = \Theta F,$$
$$\Delta_2(\Phi_2 - \Phi_1) = \Delta_2\Theta_1 F,$$
$$\Delta_1(\Psi_1 - \Psi_2)\,\Theta_2^* = \Delta_1 F,$$
$$\Delta_1(\Psi_1 - \Psi_2)\,\Delta_2 = 0.$$

Les deux premières relations conduisent à l'égalité

$$\Phi_2 - \Phi_1 = \Theta_1 F$$

c'est-à-dire la première relation (II').

Ensuite, de la dernière relation on trouve

$$\Delta_1(\Psi_1 - \Psi_2)\,\Delta_2{}^2 = 0$$

ou

$$\Delta_1(\Psi_1 - \Psi_2) = \Delta_1(\Psi_1 - \Psi_2)\,\Theta_2^*\Theta_2\,.$$

et en tenant compte de la troisième relation on obtient

$$\Delta_1(\Psi_1 - \Psi_2) = \Delta_1 F\Theta_2\,. \tag{5'}$$

Remarquons qu'à partir de la première relation (II') démontrée auparavant, on trouve

$$\Theta_1(\Psi_1 - \Psi_2) = \Theta_1 F\Theta_2\,. \tag{5''}$$

En effet $\Phi_2\Theta_2 + \Theta_1\Psi_2 = I$ donc $(\Phi_1 + \Theta_1 F)\ \Theta_2 + \Theta_1\Psi_2 = I$ d'où $I - \Theta_1\Psi_1 + \Theta_1 F\Theta_2 + \Theta_1\Psi_2 = I$ et (5'').

Les relations (5') et (5'') impliquent la dernière relation (II') et la nécessité est démontrée.

Pour montrer la suffisance de nos conditions, soient H' et H'' deux compléments directs du sous-espace H_1 : il leur correspond par le théorème [2] deux couples de fonctions $(\Phi_i(\lambda), \Psi_i(\lambda))$ $(i = 1, 2)$ vérifiant la condition (I). Mais alors en tenant compte de la seconde condition, il existe une fonction $\{\mathscr{E}_*, \mathscr{E}, F(\lambda)\}$ analytique bornée telle que

$$\Phi_2 = \Phi_1 + \Theta_1 F \qquad \text{et} \qquad \Psi_2 = \Psi_1 - F\Theta_2\,.$$

Soient $P_1 = P_+Y_1$ et $P_2 = P_+Y_2$ les projections de H sur H', resp. H'', parallèles à H_1 . Alors,

$$Y_1 = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ B_1 & C_1 \end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad Y_2 = \begin{bmatrix} A_2 & 0 \\ B_2 & C_2 \end{bmatrix}$$

où A_i , B_i , C_i $(i = 1, 2)$ sont donnés par les formules (4). Mais, avec la proposition 2, de la condition (i) il resulte $f = 0$, $g = 0$ dans les formules (4) donc A_i, B_i et C_i ont la suivante forme

$$A_i(\lambda) = I - \Theta_2(\lambda)\, \Phi_i(\lambda),$$
$$B_i u = Z^{-1}(-\Delta_2 \Phi_i u \oplus \Delta_1 \Psi_i \Theta_2^* u), \quad u \in H^2(\mathscr{E}_*),$$
$$C_i Z^{-1}(v_2 \oplus v_1) = Z^{-1}(v_2 \oplus \Delta_1 \Psi_i \Delta_2 v_2), \qquad v_2 \oplus v_1 \in \overline{\Delta_2 L^2(\mathscr{F})} \oplus \overline{\Delta_1 L^2(\mathscr{E})}$$

$(i = 1, 2)$. Par la suite un calcul simple nous donne

$$A_1 - A_2 = \Theta F, \qquad B_1 - B_2 = \Delta F, \qquad C_1 - C_2 = 0$$

donc $P_+ Y_1 = P_+ Y_2$ d'où $H' = H''$.

Ainsi la preuve du théorème 1 est achevée.

4

Dans cet alinéa nous allons présenter un exemple et en appliquant les résultats précedents, on va donner des précisions supplémentaires sur le théorème de décomposition des contractions de classe C_{11}. Pour ceci soit $\{\mathscr{E}, \mathscr{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique contractive extérieure qui admet le multiple scalaire $\delta(\lambda)$, donc il existe une fonction $\{\mathscr{E}_*, \mathscr{E}, \Omega(\lambda)\}$ analytique bornée telle que

$$\Omega(\lambda)\, \Theta(\lambda) = \delta(\lambda)\, I_{\mathscr{E}} \qquad \text{et} \qquad \Theta(\lambda)\, \Omega(\lambda) = \delta(\lambda)\, I_{\mathscr{E}_*}$$

où $\delta(\lambda) \not\equiv 0$ est une fonction scalaire analytique bornée.

Dans la monographie [H] on a démontré que si $\alpha \subset C = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| = 1\}$ est un ensemble borelien du cercle unité, il existe une factorisation régulière $\Theta(\lambda) = \Theta_{2\alpha}(\lambda)\, \Theta_{1\alpha}(\lambda)$ qui a les suivantes propriétés:

(a) $\Theta_{1\alpha}^*(e^{it})\, \Theta_{1\alpha}(e^{it}) = \begin{cases} \Theta^*(e^{it})\, \Theta(e^{it}), & \text{p.p. } t \in (\alpha), \\ I, & \text{p.p. } t \in \alpha' = C \backslash \alpha, \end{cases}$

(b) $\Theta_{2\alpha}(e^{it})\, \Theta_{2\alpha}(e^{it}) = I$ p.p. $t \in (\alpha)$

(c) les facteurs $\{\mathscr{E}, \mathscr{F}, \Theta_{1\alpha}(\lambda)\}$ et $\{\mathscr{F}, \mathscr{E}_*, \Theta_{2\alpha}(\lambda)\}$ admettent de même les multiples scalaires $\delta_{1\alpha}(\lambda)$ et $\delta_{2\alpha}(\lambda)$, c'est-à-dire qu'il existe des fonctions $\{\mathscr{F}, \mathscr{E}, \Omega_{1\alpha}(\lambda)\}$ et $\{\mathscr{E}_*, \mathscr{F}, \Omega_{2\alpha}(\lambda)\}$ analytiques bornées telles que

$$\Theta_{1\alpha}\Omega_{1\alpha} = \delta_{1\alpha} I_{\mathscr{F}}, \qquad \Omega_{1\alpha}(\lambda)\, \Theta_{1\alpha}(\lambda) = \delta_1(\lambda)\, I_{\mathscr{E}},$$
$$\Theta_{2\alpha}(\lambda)\, \Omega_{2\alpha}(\lambda) = \delta_{2\alpha}(\lambda)\, I_{\mathscr{E}_*}, \qquad \Omega_{2\alpha}(\lambda)\, \Theta_{2\alpha}(\lambda) = \delta_{2\alpha}(\lambda)\, I_{\mathscr{F}},$$

pour tout $\lambda \in D = \{\lambda \in \mathbb{C};\ |\lambda| < 1\}$. Les fonctions $\delta_{1\alpha}(\lambda)$ et $\delta_{2\alpha}(\lambda)$ sont données par les formules

$$\delta_{1\alpha}(\lambda) = \chi \exp\left[\frac{1}{2\pi} \int_{(\alpha)} \frac{e^{it} + \lambda}{e^{it} - \lambda} \ln |\delta(e^{it})|\, dt\right] \qquad (|\lambda| < 1),$$

$$\delta_{2\alpha}(\lambda) = \chi \exp\left[\frac{1}{2\pi}\int_{(\alpha')} \frac{e^{it}+\lambda}{e^{it}-\lambda} \ln|\delta(e^{it})|\, dt\right] \qquad (|\lambda| < 1).$$

Si l'on note par H_α le sous-espace invariant correspondant à la factorisation régulière $\Theta(\lambda) = \Theta_{2\alpha}(\lambda)\,\Theta_{1\alpha}(\lambda)$ on a démontré dans [2] qu'il existe un ensemble $\sigma \subset C = \{\lambda \in \mathbb{C}; |\lambda| = 1\}$ de mesure nulle tel que pour tout arc $\alpha = \widehat{AB} \subset C$ pour lequel $A, B \notin \sigma$, on a:

$$H = H_\alpha \dotplus H_{\alpha'} \qquad (\alpha' = C \backslash \alpha).$$

Soit donc $\{\mathscr{E}, \mathscr{E}_*, \Theta(\lambda)\}$ une fonction analytique contractive pure extérieure qui admet le multiple scalaire $\delta(\lambda)$ et soit $\alpha = \widehat{AB} \subset C$ un arc tel que $A, B \notin \sigma$. On a la suivante

Proposition 3. *Le sous-espace $H_{\alpha'}$ est l'unique complément de H_α invariant à T.*

En effet, notons que dans la démonstration de la relation $H = H_\alpha \dotplus H_{\alpha'}$ nous avons montré qu'il existe des fonctions $u_1(\lambda)$, $u_2(\lambda)$ *à* H_∞ telles que

$$u_1(\lambda)\,\delta_{1\alpha}(\lambda) + u_2(\lambda)\,\delta_{2\alpha}(\lambda) = 1.$$

Pour vérifier (ii) soient $\{\mathscr{E}_*, \mathscr{F}, \Lambda_2(\lambda)\}$, $\{\mathscr{F}, \mathscr{E}, \Lambda_1(\lambda)\}$ des fonctions analytiques bornées telles que $\Theta_1\Lambda_1 = \Lambda_2\Theta_2$; on peut montrer facilement les égalités

$$\Lambda_1 = (u_1\Omega_{1\alpha}\Lambda_2 + u_2\Lambda_1\Omega_{2\alpha})\,\Theta_{2\alpha},$$
$$\Lambda_2 = \Theta_{1\alpha}(u_1\Omega_{1\alpha}\Lambda_2 + u_2\Lambda_1\Omega_{2\alpha}),$$

d'où (ii).

De même $\Delta_{1\alpha}(t) = 0$ pour p.p. $t \in (\alpha')$ et $\Delta_{2\alpha}(t) = 0$ pour p.p. $t \in (\alpha)$, mais en tenant compte du fait que $\Theta_{2\alpha}(\lambda)$ admet un multiple scalaire on a (en appliquant le théorème 6.5 de [H, ch. V]) $\Delta_{*2\alpha}(t) = 0$ pour $t \in (\alpha)$. Donc $\Delta_1(t) = 0$ ou $\Delta_{*2}(t) = 0$ pour p. tout $t \in [0, 2\pi]$, d'où (i).

Bibliographie

H. B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, "Harmonic Analysis of Operators on Hilbert Space," North Holland–Akadémiai Kiado, Amsterdam/Budapest, 1970.

1. B. Sz.-Nagy and C. Foiaş, On the structure of intertwining operators, *Acta Sci. Math. (Szeged)* **35** (1973), 225–254.
2. R. I. Teodorescu, Sur les décompositions directes des contractions de l'espace de Hilbert, *J. Functional Analysis* **18** (1975), 414–428.
3. R. I. Teodorescu, Sur la décomposition C_0–C_{11} directe des contractions, II, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.* **7** (1974), 945–947.
4. J. Wu, "Condition for Completely Non-Unitary Contractions to Be Spectral," Thesis, Indiana University, 1975.