JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 12, 418-455 (1973)

Théorème de Fatou et frontière de Martin

HÉLÈNE AIRAULT

Institut Henri Poincaré, 11 rue Pierre et Marie Curie, 75—Paris 5°, France

Communicated by Paul Malliavin

Received August 8, 1972

INTRODUCTION

Dans la théorie classique du potentiel, Brelot, Naïm, Doob ont étudié le comportement à la frontière de Martin des fonctions surharmoniques, voir [4, 12, 13, et les théorèmes de Fatou correspondants].

Doob a introduit les h-processus [4]. Il se place sur un espace de Green. Si u et h sont surharmoniques, (u/h) a une limite finie le long de presque toute h-trajectoire partant d'un point où h est finie. Si h est harmonique minimale, il calcule la limite. Il obtient les théorèmes de Fatou à la frontière de Martin et à l'intérieur.

A l'origine de ce travail, on s'est proposé de caractériser les classes de fonctions excessives h pour lesquelles on peut calculer la limite de (u/h) sur les h-trajectoires.

Dans [19], Hunt fait une étude de la frontière de Martin et des valeurs frontières des fonctions excessives, il calcule la limite d'une fonction excessive h sur les trajectoires.

Dans [17], Neveu fait le calcul en établissant la formule donnant la loi de probabilité de $x_\infty = \lim_{n\to+\infty} x_n P$ p.s. conditionnelle en x_n pour le 1-processus.

On se demande pour quelle classe de fonctions excessives h on peut établir cette formule pour le h-processus.

On se placera dans le cas d'un processus à indice continu dans le cadre de la théorie de Dynkin [1, 2].

Dynkin a fait une construction de la frontière de Martin complètement probabiliste, via l'espace des sorties des h-processus [1, 2].

On considère un espace métrique localement compact séparable E et soit $\mathscr{E}$ son compactifié de Martin. Dans le chapitre II, on définit la prévision et l'accessibilité du temps de vie d'un h-processus.

Étant donné, en théorie newtonienne sur R^n $(n > 2)$, un potentiel $n(x)$ ayant une mesure spectrale absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue, le n-processus correspondant a un killing suivant une loi exponentielle le long des trajectoires; ce processus de killing est complètement imprévisible.

On étudie les fonctions excessives h pour lesquelles le h-processus a un temps de vie prévisible; c'est-à-dire: il existe une suite croissante (τ_n) de temps d'arrêt telle que $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \zeta P^h$ p.s. et $\tau_n < \zeta P^h$ p.s. puis les fonctions excessives h pour lesquelles le h-processus a un temps de vie accessible: c'est-à-dire l'espace de probabilité est réunion de parties sur lesquelles le temps de vie ζ est h-prévisible.

Lorsque le temps de vie ζ est prévisible ou accessible, les propriétés valables pour t passent à la limite; par exemple: si ζ est h_1-prévisible et h_2-prévisible par la même suite, et si $h_1 \leqslant h_2$, alors $h_1 \lll h_2$ avec l'ordre fort sur les fonctions excessives théorème 5, Section I, Chapitre II.

Réciproquement, si $h_1 \leqslant h_2$ entraîne $h_1 \lll h_2$, que peut-on dire du temps de vie ζ du h_1-processus ?

Dans le chapitre III, on établit le théorème de Fatou: Soit h' une fonction excessive et soit h une fonction excessive > 0, telle que ζ soit h-prévisible. En posant: $\mu^{h'} = L_{h'}\mu^h + \nu$ où ν est étrangère à μ^h, on a $\lim_{t\to\zeta}(h'/h)(X_t) = L_{h'}(Z.)$ p.s. P_x^h pour tout x tel que $h(x) < +\infty$.

Ce théorème est évidemment faux, si h est excessive et si on ne fait pas d'hypothèse de prévisibilité: par exemple, si on considère le potentiel $n(x)$ sur R^n $(n > 2)$ (envisagé plus haut) ayant une mesure spectrale absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue

$$n(x) = \int_K \frac{1}{\| x - y \|} k(y)\, dy,$$

le théorème s'écrirait le potentiel $n(x)$ est égal à la densité $k(x)$!

Les hypothèses à faire sur la fonction excessive h sont donc très restrictives.

Dans le chapitre IV, on étudie deux notions de coeffilement d'un ensemble $\mathscr{A}$ en un point z de l'espace des sorties obtenues avec la fonction excessive $F_{\mathscr{A}}kz$ introduite par Doob [4, Section 14] et appelée dans [23] réduite forte, et la réduite $P_{\mathscr{A}}kz$. On regarde sous quelles conditions ces notions coïncident. Puis on définit les filtres cofins et on en déduit les théorèmes de Fatou cofins.

Comme dans [4, 16], on passe de la convergence sur les trajectoires du processus à la convergence selon les filtres $\mathscr{G}z$ $(z \in \mathscr{U})$.

On obtient les théorèmes de convergence à la frontière et à l'intérieur.

Dans le chapitre V, on fait le lien entre le support fin des mesures spectrales et la prévision et l'accessibilité du temps de vie.

On caractérise complètement par les propriétés du support de leur mesure spectrale les fonctions excessives h pour lesquelles le temps de vie ζ est h-prévisible ou h-accessible. On établit le rapport entre les suites de temps d'arrêt et les ensembles de N-potentiel nul et de R-potentiel nul.

Un ensemble K est de N-potentiel nul (resp. de R-potentiel nul) s'il est de mesure nulle pour la mesure spectrale μ^u de tout potentiel naturel u (resp. de tout potentiel régulier u).

μ^h est portée par un ensemble de N-potentiel nul est équivalent à ζ est h-prévisible ($h > 0$) et μ^h est portée par un ensemble de R-potentiel nul est équivalent à ζ est h-accessible. Si les fonctions $z \to E[kz(X_\zeta)]$ sont presque-boréliennes, on peut remplacer dans l'énoncé précédent: de N-potentiel nul par polaire et de R-potentiel nul par semi-polaire.

Ceci donne des énoncés concrets des théorèmes de Fatou du chapitre III.

On établit la réciproque suivante: Soit h une fonction excessive > 0. Si pour toute fonction excessive h' on a:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ \mathscr{G}x}} (h'/h)(y) = L(x) \qquad \mu^h \text{ p. p. pour } x \text{ où } L = (d\mu^{h'}/d\mu^h),$$

alors le temps de vie ζ est h-prévisible.

Des caractérisations des propriétés d'un processus par les propriétés du temps de vie ont déjà été obtenues par Föllmer [14] dans le cas d'une surmartingale positive continue à droite et par Azéma [11] dans le cas d'une surmartingale Y de la classe (D): Azéma caractérise par les propriétés du temps de vie, le processus croissant prévisible qui engendre Y.

Notations

On suivra [1]. E est un espace métrique localement compact séparable, $\mathscr{B}$ est la σ-algèbre de ses ensembles universellement mesurables et m une mesure sur $\mathscr{B}$.

Soit $X = (X_t, \zeta, \mathscr{M}_t, P_x)$ un processus de Markov avec comme fonction de transition $p(t, x, \Gamma) = \int_\Gamma p(t, x, y)m(dy)$ et soit $(\Omega, \mathscr{M})$ l'espace des événements élémentaires. $\mathscr{N}$ désigne la σ-algèbre sur l'espace Ω engendrée par les ensembles $\{\omega \mid X_t(\omega) \in \Gamma\}$ $t \geqslant 0$ $\Gamma \in \mathscr{B}$. $\mathscr{N}_t$ est la σ-algèbre sur $\Omega_t = \{\zeta > t\}$ engendrée par les ensembles

$(X_s \in \Gamma)$ où $\Gamma \in \mathscr{B}$ et $s \in [0, t]$. On pose $A \in \mathscr{F}_t$ si $A \in \mathscr{M}$ et $A \cap \Omega_t \in \mathscr{N}_t$.

Soient $g_\alpha(x, \Gamma) = \int_0^{+\infty} e^{-\alpha t} p(t, x, \Gamma)\, dt = \int g_\alpha(x, y) m(dy)$ les noyaux de Green, où $g_\alpha(x, y)$ sont des fonctions positives $\mathscr{B}$-mesurables. Les opérateurs P_t et G_α correspondent aux noyaux $p(t, x, \Gamma)$ et $g_\alpha(x, \Gamma)$; ils envoient l'ensemble V des fonctions $\mathscr{B}$-mesurables positives dans lui-même. On dira qu'une variable aléatoire τ est un temps d'arrêt si $\tau \leqslant \zeta$ et $\forall t \geqslant 0$ $(\tau < t < \zeta) \in \mathscr{N}_t$. On suppose que: $\forall t \geqslant 0$ $(\tau < t < \zeta) \in \mathscr{N}_t$ équivaut à $\forall t \geqslant 0$ $(\tau \leqslant t < \zeta) \in \mathscr{N}_t$. Voir [3, lemme 3.3, p. 101], de sorte que si (τ_n) est une suite de temps d'arrêt, $\tau = \sup_n \tau_n$ est un temps d'arrêt.

Pour un temps d'arrêt τ, on définit sur $\Omega_t = \{\tau < \zeta\}$ la σ-algèbre $\mathscr{N}_\tau$:

$$A \in \mathscr{N}_\tau \quad \text{si} \quad A \in \mathscr{M}; \quad A \in \Omega_\tau \quad \text{et} \quad \forall t \geqslant 0; \quad (A; \tau < t < \zeta) \in \mathscr{N}_t.$$

$\mathscr{F}_\tau$ est la σ-algèbre sur Ω définie par:

$$A \in \mathscr{F}_\tau \qquad \text{si} \quad A \in \mathscr{M} \quad \text{et si} \quad \forall t \geqslant 0 (A; \tau < t < \zeta) \in \mathscr{N}_t.$$

$\mathscr{N}_\tau$ est la trace de $\mathscr{F}_\tau$ sur Ω_τ.

Une fonction f de V est excessive si $\forall t > 0$ $P_t f \leqslant f$ et $\lim_{t \to 0} P_t f = f$.

On suppose que X est un M-processus spécial [1] et standard [3] (donc continu à droite).

Soit γ la mesure de référence (mesure standard [1]) sur la σ-algèbre $\mathscr{B}$. En particulier γ possède la propriété: il existe des constantes $C_\varphi < +\infty$ telles que pour toute fonction excessive h, on ait: $(h, \varphi) \leqslant C_\varphi \gamma(h)$ pour $\varphi \in w$ où w est un système support: [2, p. 95]: les fonctions à support compact.

Toute fonction excessive h nulle γ p.p. est nulle m p.p.

On appelle ensembles de potentiel nul, les ensembles $\Gamma \in \mathscr{B}$ tels que $g(x, \Gamma) = 0$ $\forall x \in E$.

Les ensembles de m-mesure nulle sont de potentiel nul et en posant

$$D^0 = \{y \mid g(x, y) = 0 \quad m \text{ p. p. pour } x \in E\},$$

on peut supposer $m(D^0) = 0$ [2, lemme 5.1]; alors les ensembles de potentiel nul coïncident avec les ensembles de m-mesure nulle.

Puisque le processus est standard, la propriété suivante est vérifiée: (quasi-continuité à gauche)

$$\left\{\begin{array}{l}\text{pour toute suite croissante de temps d'arrêt } (\tau_n) \text{ pui tend vers } \tau, \\ \text{on a } P_x \text{ p. s.:} \\ \lim\limits_{n \to +\infty} X_{\tau_n} = X_\tau \qquad \text{sur} \quad (\tau < \zeta).\end{array}\right. \tag{A}$$

Soit h une fonction excessive $E_h = \{x \in E \mid 0 < h(x) < +\infty\}$.

$$P^h(t, x, \Gamma) = \begin{cases} \dfrac{1}{h(x)} \displaystyle\int_\Gamma p(t, x, dy)h(y) & \text{si} \quad x \in E_h \\ 1_\Gamma(x) & \text{si} \quad x \in E - E_h \end{cases}$$

définit une fonction de transition normale[1] dans $(E, \mathscr{B})$.

Soit $X^h = (X_t^h, \zeta^h, \mathscr{M}_t^h, P_x^h)$ le processus de Markov correspondant à la fonction de transition $p^h(t, x, \Gamma)$.

On peut choisir les processus X^h, correspondant à toutes les fonctions excessives h de façon à prendre le même espace d'évènements élémentaires et tel que $(X_t^h, \zeta^h, \mathscr{M}_t^h)$ ne dépende pas de h. On écrira $X^h = (X_t, \zeta, \mathscr{N}_t, P_x^h)$, [1]. On omet h dans la notation X^h ou P_x^h lorsque $h = 1$.

Définition. On définit sur la σ-algèbre $\mathscr{N}$ [1, 3–7] les mesures

$$P^h(A) = \int \gamma(dx)h(x)\, P_x^h(A). \tag{1}$$

Soit $\mathscr{E}$ le compactifié de Martin construit dans [1] et soit i l'application de E dans $\mathscr{E}$. On suppose à partir du Chapitre V que i est un homéomorphisme de E sur $i(E)$. On pose $Z_t = i(X_t)$.

Soit h une fonction excessive γ-intégrable, pour tout $x \in E_h$. La limite $Z_\zeta = \lim_{t \to \zeta} Z_t$ existe P_x^h p.s.

La mesure μ^h définie par

$$\mu^h(\Gamma) = P^h(Z_\zeta \in \Gamma) \tag{2}$$

est la mesure spectrale de h.

On a une représentation intégrale sur l'espace des sorties $\mathscr{U}$: [1]

$$h(x) = \int k_z(x)\, \mu^h(dz).$$

Pour tout x tel que $h(x) < +\infty$, on a:

$$h(x)\, E_x^h(f(Z_\zeta)) = \int_{\mathscr{U}} f(z)\, k_z(x)\, \mu^h(dz) \qquad \text{où} \quad f \in V(\mathscr{E}). \tag{3}$$

Pour tout $x \in E_h$, $\forall A \in \mathscr{N}_\tau$ où τ est un temps d'arrêt, on a:

$$h(x)\, P_x^h(A) = \int k_z(x)\, P_x^{k_z}(A)\, \mu^h(dz), \tag{4}$$

$$P^h(A) = \int P^{k_z}(A)\, \mu^h(dz) \quad \text{(on intègre (4) par rapport à } \gamma). \tag{5}$$

[1] $p^h(t, x, E) \to 1$ quand $t \to 0$ (normalité). En effet, $p^h(t, x, E) = (P_t h(x)/h(x) \to 1$ quand $t \to 0$ pour $x \in E_h$, et $p(t, x, \Gamma)$ est normale si X est un M-processus spécial.

Si h_1 et h_2 sont deux fonctions excessives γ-intégrables et si $h_1 \leqslant h_2$

$$P^{h_1}(A) \leqslant P^{h_2}(A). \tag{6}$$

Soit A un ensemble ouvert dans le compactifié $\mathscr{E}$ autre que $\mathscr{E}$ lui-même.

Une fonction excessive h est harmonique dans $A(2)$ si $P_{\tau_\Gamma} h = h$ pour tout fermé Γ de $\mathscr{E}$ contenu dans A. $\tau_\Gamma = \inf\{t > 0 \mid Z_t \notin \Gamma\}$ est le premier temps de sortie de Γ. h est harmonique dans A équivaut à $\mu^h(A) = 0$.

Soit D un ouvert de E. h est harmonique dans D si pour tout compact Γ de D, on a

$$P_{\tau_\Gamma} h = h.$$

Cela équivaut à: h est harmonique par rapport à la famille des fermés $\Gamma = i(A)$ où A est compact et $A \subset D$.

h est harmonique dans D équivaut à μ^h est portée par

$$\mathscr{U}_{\text{harm}}(D) = \{z \in \mathscr{U} \mid k_z \text{ est harmonique dans } D\}$$

h est harmonique entraîne: $P_x^h(\tau_k < \zeta) = 1$, $\forall x \in E_h$ et K compact de E.

Toute fonction excessive se décompose en la somme d'une fonction harmonique:

$$h' = \int_{\mathscr{U}_{\text{harm}}} k_z \mu^h(dz)$$

et d'une fonction excessive:

$$h'' = \int_{\mathscr{U}_{\text{pot}}} k_z \mu^h(dz) \qquad \text{où} \quad \mathscr{U}_{\text{pot}} = \mathscr{U} - \mathscr{U}_{\text{harm}}$$

et $\mathscr{U}_{\text{harm}} = \{z \in \mathscr{U} \mid k_z \text{ est harmonique}\}$.

On a: $\mathscr{U}_{\text{pot}} = E$ (on a supposé que i était un homéomorphisme).

Chapitre I. Propriétés des h-processus

Connaissant les propriétés du processus X, on va chercher quelles sont les propriétés du h-processus.

Les propriétés suivantes sont conservées: normalité, continuité à droite des trajectoires, quasi-continuité à gauche.

On ne considère que des fonctions excessives h γ-intégrables. On notera $H(t, \omega)$ une régularisation continue à droite de $h(X_t(\omega))$ voir [2].

(1) On a

$$\text{si} \quad A \in \mathcal{N}_t \qquad \text{et} \qquad x \in E_h\colon h(x)\, P_x^h(A) = E_x[1_A h(X_t)]. \tag{7}$$

On peut généraliser cette formule pour un temps d'arrêt.

Lemme 1. *Soit τ un temps d'arrêt. Si $A \in \mathcal{N}_\tau$ et $x \in E_h$, on a*

$$h(x)\, P_x^h(A) = E_x[1_A \cdot H(\tau)]. \tag{8}$$

Démonstration. On approche τ par une suite décroissante (τ_n) de temps d'arrêt étagés tels que

$$(\tau_h < t < \zeta) \in \mathcal{N}_t \qquad \forall t \geqslant 0.$$

Corollaire. *Soit τ un temps d'arrêt. On a*

$$h(x)\, P_x^h(\tau < \zeta) = E_x[H(\tau)] \qquad \text{pour tout } x \in E_h. \tag{9}$$

(2) La quasi-continuité à gauche est conservée pour le h-processus. On a Lemme 2.

Lemme 2. *Soit (τ_n) une suite croissante de temps d'arrêt et soit*

$$\tau = \lim_{n\to+\infty} \tau_n .$$

Si P_x p.s. $\lim_{n\to+\infty} X_{\tau_n} = X_\tau$ sur $(\tau < \zeta)$ $\forall x \in E$ alors, pour toute fonction excessive h:

$$P_x^h \text{ p. s. } \lim_{n\to+\infty} X_{\tau_n} = X_\tau \qquad \text{sur} \quad (\tau < \zeta)\ \forall x \in E_h .$$

Lemme 3. *Soient (τ_n) une suite croissante de temps d'arrêt et h une fonction excessive*

$$\zeta = \lim_{n\to+\infty} \tau_n\, Px \text{ p.s.} \qquad \text{entraîne} \quad \zeta = \lim_{n\to+\infty} \tau_n\, P_x^h \text{ p.s. } \forall x \in E_h .$$

De plus, si $H > 0$

$$\zeta = \lim_{n\to+\infty} \tau_n\, P^h \text{ p.s.} \qquad \text{équivaut à} \quad \zeta = \lim_{n\to+\infty} \tau_n\, P \text{ p.s.}$$

CHAPITRE II. PRÉVISION ET ACCESSIBILITÉ DU TEMPS DE VIE D'UN h-PROCESSUS

1. *Prévision et accessibilité*

DÉFINITION 1. Soit h une fonction excessive. On dit que le temps de vie ζ est h-prévisible (resp. fortement h-prévisible) s'il existe une suite croissante de temps d'arrêt (τ_n) tels que

(1) $\lim_n \tau_n = \zeta P^h$ p.s. (resp. P p.s.)
(2) $(\tau_n < \zeta)$ sur $\zeta > 0$ P^h p.s.

On dit que ζ est h-prévisible à l'aide de (τ_n) et que (τ_n) annonce ζ pour h.

Remarque. D'après le lemme 3, Chapitre I, si $h > 0$, ζ est h-prévisible équivaut à ζ est fortement h-prévisible.

THÉORÈME 1. *Soit (h_i) une famille dénombrable de fonctions excessives. Si ζ est fortement h_i-prévisible pour tout h_i, alors il existe une suite (τ_n) annonçant ζ qui est la même pour toute fonction h_i.*

Démonstration. Pour tout i soit $(\tau_n{}^i)_n$ la suite annonçant ζ pour h_i. On a

(1) $\zeta = \lim_{n\to+\infty} \tau_n{}^i P$ p.s.
(2) $(\tau_n{}^i < \zeta)$ sur $\zeta < 0$ P^{h_i} p.s.

On va construire une suite (τ_n) de temps d'arrêt qui vérifie

$$\forall i (\tau_n < \zeta) \qquad \text{sur} \quad \zeta > 0\, P^{h_i} \text{ p.s.}$$

et

$$\zeta = \lim \tau_n\, P \text{ p.s.}$$

Pour tout i et pour tout n, il existe $\alpha_{n,i}$ tel que

$$P\{\omega \mid d(\zeta(\omega); \tau^i_{\alpha_{n,i}}) > (1/2^n)\} \leqslant 2^{-(n+i)}.$$

Soit $\tau_n = \inf_i \tau^i_{\alpha_{n,i}}$

$$\forall i;\ \tau_n \leqslant \tau^i_{\alpha_{n,i}} < \zeta\, P^{h_i} \text{ p.s.}$$

et

$$\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \zeta\, P \text{ p.s.}$$

puisque

$$P\{\omega \mid d(\zeta(\omega), \tau_n(\omega)) > (1/2^n)\} \leqslant \sum_i P(d(\zeta, \tau^i_{\alpha_{n,i}}) > (1/2^n)) \leqslant (1/2^n).$$

Exemples de fonctions excessives h pour lesquelles ζ est fortement h-prévisible

(1) Les fonctions invariantes $(P_t h = h)$ $\zeta = +\infty\, P_x^h$ p.s. $\forall x \in E_h$.

(2) Les fonctions harmoniques dans E, la suite (τ_n) qui annonce ζ est la même pour toute fonction harmonique h.

(3) Les fonctions harmoniques dans $E - A$ où A est un fermé polaire de E, la suite (τ_n) est la même pour toute fonction h harmonique dans $E - A$.

En fait, on montrera le théorème suivant

Soit h une fonction excessive. μ^h est portée par un polaire équivaut à ζ est fortement h-prévisible.

Exemples de fonctions excessives pour lesquelles ζ n'est pas fortement h-prévisible

Soit $h(x) = E_x(\int_0^\zeta f(X_s)\, dA_s)$ où A_s est une fonctionnelle additive naturelle et f une fonction bornée. On a, pour toute suite de temps d'arrêt (τ_n) qui tend vers ζP p.s., $\lim_{n\to+\infty} P(h(X_{\tau_n})) = 0$. Donc ζ n'est prévisible à l'aide d'aucune suite de temps d'arrêt (τ_n).

A une suite croissante de temps d'arrêt (τ_n) telle que $\zeta = \lim_{n\to+\infty} \tau_n$, on associe l'ensemble

$$\Omega(\tau_n) = \{\tau = \zeta \text{ et } \forall n \tau_n < \zeta\}.$$

DÉFINITION 2. On dit que le temps de vie ζ est h-accessible s'il existe une famille dénombrable de suites $(\tau_k{}^n)_k$ de temps d'arrêt telles que, en posant

$$\tau^n = \lim_{k\to+\infty} \tau_k{}^n\, P^h \text{ p.s. } \Omega = \bigcup_n \Omega_n$$

où

$$\Omega_n = \{\tau^n = \zeta;\ \tau_k{}^n < \zeta\ \forall k\}.$$

On appellera Ω_n partie d'accession à ζ ou ensemble d'accessibilité à ζ.

Remarque. $\Omega = \bigcup_n \Omega_n P^h$ p.s. équivaut à $P^h[\bigcap_n (\Omega - \Omega_n)] = 0$.
On voit que ζ est h-prévisible entraîne ζ est h-accessible.

Soient τ_1 et τ_2 deux temps d'arrêt tels que $\tau_2 \leqslant \tau_1$. On note $\Omega(\tau_1, \tau_2)$ l'ensemble $\{\tau_1 = \zeta;\ \tau_2 < \zeta\}$. On appelle $\mathscr{S}$ la classe des ensembles de la forme $\Omega(\tau_1, \tau_2)$ où τ_1 et τ_2 parcourent l'ensemble des temps d'arrêt; et soit $\tilde{\mathscr{S}}$ la σ-algèbre engendrée par $\mathscr{S}$.

THÉORÈME 2. *ζ est h-prévisible (resp. h-accessible) entraîne μ^h p.s. pour z, ζ est k_z-prévisible (resp. k_z-accessible).*

Démonstration. Soit (τ_n) une suite croissante telle que $\tau = \lim_{n\to+\infty} \tau_n$ et soit $\Omega_0 = \{\tau = \zeta; \forall n \tau_n < \zeta\}$. Pour tout x tel que $0 < h(x) < +\infty$, on a

$$h(x)\, P_x^h(\Omega_0) = h(x)\, P_x^h(\tau = \zeta, \forall n \tau_n < \zeta),$$

Comme Ω_0 appartient à la tribu $\tilde{\mathscr{S}}$ et que pour tout ensemble A appartenant à $\tilde{\mathscr{S}}$ on a

$$h(x)\, P_x^h(A) = \int k_z(x)\, P_x^{k_z}(A)\, \mu^h(dz);$$

on a

$$h(x)\, P_x^h(\Omega_0) = \int k_z(x)\, P_x^{k_z}(\Omega_0)\, \mu^h(dz).$$

De même, dans le cas accessible

$$h(x)\, P_x^h \Big(\Omega - \bigcup_n \Omega_n\Big) = \int k_z(x)\, P_x^{k_z} \Big(\Omega - \bigcup_n \Omega_n\Big)\, \mu^h(dz)$$

puis on intègre par rapport à γ.

On voit facilement que la réciproque du théorème 2 est fausse.

THÉORÈME 3. *Soient h_1 et h_2 deux fonctions excessives. On suppose que $\mu^{h_1} = f \cdot \mu^{h_2}$. Si ζ est accessible pour h_2, alors ζ est accessible pour h_1. De plus, les ensembles d'accession à ζ pour h_2 sont des ensembles d'accession à ζ pour h_1.*

COROLLAIRE. *Si ζ est h_2-prévisible, alors ζ est h_1-prévisible et la suite annoncant ζ pour h_2 annonce ζ pour h_1.*

On verra un résultat semblable concernant la prévision forte.

THÉORÈME 4. *Si ζ est h-accessible, les formules*

$$h(x)\, P_x^h(A) = \int k_z(x)\, P_x^{k_z}(A)\, \mu^h(dz) \tag{10}$$

et

$$P^h(A) = \int P^{k_z}(A)\, \mu^h(dz) \tag{11}$$

sont encore valables en prenant $A = (Z_\zeta \in S) \cap [X_\tau \in \Gamma]$ τ *étant un temps d'arrêt.*

Démonstration. Si τ_1 et τ_2 sont deux temps d'arrêt, on a

$$h(x)\, E_x^h(X_{\tau_1} \in \Gamma_1); (X_{\tau_2} \in \Gamma_2) = E_x[h(X_\tau); (X_{\tau_1} \in \Gamma_1); (X_{\tau_2} \in \Gamma_2)]$$

où $\tau = \sup(\tau_1, \tau_2)$.

$$E_x[h(X_\tau); (X_{\tau_1} \in \Gamma_1); (X_{\tau_2} \in \Gamma_2)] = \int E_x[k_z(X_\tau); X_{\tau_1} \in \Gamma_1 ; X_{\tau_2} \in \Gamma_2]\, \mu^h(dz)$$

et la formule (10) est vérifiée pour $B = (X_{\tau_1} \in \Gamma_1) \cap (X_{\tau_2} \in \Gamma_2)$.

Montrons que pour toute réunion finie $\bigcup_{i=1}^p \Omega_i$ on a

$$P^h\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} \Omega_i\right)\right] = \int P^{k_z}\left[A \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p} \Omega_i\right)\right] \mu^h(dz)$$

par récurrence,

sur Ω_1 ; ζ est prévisible, donc

$$P^h[A \cap \Omega_1] = \int P^{k_z}[A \cap \Omega_1]\, \mu^h(dz),$$

$$\bigcup_{i=1}^{p} \Omega_i = \Omega_p \cup \left[C\Omega_p \cap \left(\bigcup_{i=1}^{p-1} \Omega_i\right)\right]$$

sur Ω_p , ζ est h-prévisible, donc

$$P^h(A; \Omega_p) = \int P^{k_z}(A; \Omega_p)\, \mu^h(dz)$$

$$C\Omega_p = (\tau^p < \zeta) \cup \bigcup_k (\tau_k{}^p = \zeta)$$

or

$$P^h\left(A; \tau^p < \zeta; \bigcup_{i=1}^{p-1} \Omega_i\right) = \int P^{k_z}\left(A; \tau^p < \zeta; \bigcup_{i=1}^{p-1} \Omega_i\right) \mu^h(dz)$$

et

$$P^h\left(A; \tau_k{}^p = \zeta; \bigcup_{i=1}^{p-1} \Omega_i\right) = \int P^{k_z}\left(A; \tau_k{}^p = \zeta; \bigcup_{i=1}^{p-1} \Omega_i\right) \mu^h(dz).$$

On a donc le résultat.

THÉORÈME 5. *Si $h_1 \leqslant h_2$ et si ζ est h_1-prévisible et h_2-prévisible avec la même suite de prévision, alors*

$$P^{h_1}(Z_\zeta \in S) \leqslant P^{h_2}(Z_\zeta \in S). \qquad \text{En particulier} \quad \mu^{h_1} \leqslant \mu^{h_2}.$$

Démonstration. Soit (τ_n) la suite de h_1-(resp. h_2)-prévision. On a, pour toute fonction continue f

$$P^{h_1}(f(Z_\zeta)) = \lim_{n\to+\infty} P^{h_1}(f(X_{\tau_n})) \leqslant \lim_{n\to+\infty} P^{h_2}(f(X_{\tau_n})) = P^{h_2}(f(Z_\zeta))$$

On applique la formule (2).

Remarque. Le théorème 5 est faux avec l'hypothèse accessible seulement. On verra une réciproque du théorème 5 au Chapitre VI.

2. *Distribution conditionnelle de Z_ζ par rapport aux tribus $\mathcal{N}_t$; conséquences*

THÉORÈME 1. *Soit h une fonction excessive > 0. On suppose que ζ est h-accessible. Alors, $\forall S \in \mathscr{B}(\mathscr{E})$ et $x \in E_h$, on a, pour tout temps d'arrêt τ*

$$E_x^h(Z_\zeta \in S; \zeta > \tau/\mathcal{N}_\tau) = \int_S \frac{k_z}{h}(X_\tau)\, 1_{(\tau<\zeta)}\mu^h(dz) \text{ p.s. } P_x^h. \tag{12}$$

COROLLAIRE. *Si on intègre par rapport $\in P_x^h$, on obtient, en prenant $\tau = t$*

$$\forall x \in E_h, \qquad E_x^h[Z_\zeta \in S; \zeta > t] = \int_S P_t k_z(x)\, \mu^h(dz). \tag{13}$$

Démonstration du théorème 1. D'après le théorème 4, Section 1 et la formule (10), on a

$$h(x)\, P_x^h[Z_\zeta \in S; X_t \in \Gamma] = \int k_z(x)\, P_x^{k_z}[Z_\zeta \in S; X_t \in \Gamma]\, \mu^h(dz). \tag{14}$$

Or

$$k_z(x) \int 1_{(Z_\zeta \in S)} dP_x^{k_z} = k_z(x)\, 1_S(z). \tag{15}$$

En effet, en appliquant (3) et $\mu^{k_z} = \delta_z$, on a

$$k_{z_0}(x)\, P_x^{k_{z_0}}(Z_\zeta \in S) = \int 1_S(z)\, k_z(x)\, \delta_{z_0}(z) = 1_S(z_0)\, k_{z_0}(x)$$

donc $P_x^{k_z}$ p.s., on a

$$k_z(x)\, 1_S(Z_\zeta(\omega)) = k_z(x)\, 1_S(z) \tag{16}$$

(15) entraîne (16) car si $z \in S$ $P_x^{k_z}[k_z(x) - k_z(x)\, 1_S(Z_\zeta)] = 0$ car $k_z(x) = P_x^{k_z}(Z_\zeta \in S)\, k_z(x)$; Si $z \notin S$ $P_x^{k_z}(k_z(x)\, 1_S(Z_\zeta)) = 0$.

On remplace (16) dans (14), et on obtient

$$h(x)\, P_x{}^h(Z_\zeta \in S;\, X_t \in \Gamma) = \int_S k_z(x)\, P_x^{k_z}(X_t \in \Gamma)\, \mu^h(dz) \tag{17}$$

or

$$k_z(x)\, P_x^{k_z}(X_t \in \Gamma) = h(x)\, E_x{}^h\left[1_{[X_t \in \Gamma]}\, , \frac{k_z}{h}(X_t)\right]. \tag{18}$$

En remplaçant (18) dans le membre de droite de (17), et en simplifiant par $h(x)$, on a

$$P_x{}^h[Z_\zeta \in S;\, X_t \in \Gamma] = \int_S E_x{}^h[1_{[X_t \in \Gamma]}\, \frac{k_z}{h}(X_t)\, \mu^h(dz).$$

THÉORÈME 2. *Soient h_1 et h_2 deux fonctions excessives. Si $\mu^{h_1} = f \cdot \mu^{h_2}$ et si ζ est fortement prévisible pour h_2, alors ζ est fortement prévisible pour h_1 et la suite annonçant ζ pour h_2 annonce ζ pour h_1. On suppose $h_2 > 0$.*

$$\frac{h_1}{h_2}(X_{\tau_n}) = E_x^{h_2}[f(Z_\zeta) \mid \mathscr{N}_{\tau_n}] \qquad (x \in E_{h_2}) \quad (\tau_n < \zeta)\, P_x^{h_2} \text{ p.s.}$$

Démonstration. Soit (τ_n) une suite annonçant ζ pour h_2: P p.s. $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \zeta$ $P_x^{h_2}$ p.s. on a

$$\begin{aligned} h_2(x)\, P_x^{h_2}\left[\frac{h_1}{h_2}(X_{\tau_n})\right] &= h_2(x)\, P_x^{h_2}(f(Z_\zeta))\, \gamma \text{ p.p.} \\ &= P_x(h_1(X_{\tau_n})) = h_1(x) \end{aligned}$$

donc $(\tau_n < \zeta)$ P^{h_1} p.s.

LEMME 1. *On suppose $\zeta P_x{}^h$-prévisible. Soit (τ_n) la suite annonçant ζ, $P_x{}^h$ p.s. Alors pour toute variable aléatoire Z, $P_x{}^h$ intégrable et $\vee_n \mathscr{F}_{\tau_n}$-mesurable, on a*

$$\lim_{t\to\zeta} E_x{}^h[Z;\, t < \zeta \mid \mathscr{N}_t] = Z.$$

Démonstration. On rappelle que la tribu $\mathscr{F}_t$ est définie par $A \in \mathscr{F}_t$ si $A \in \mathscr{M}$ et $(A;\, t < \zeta) \in \mathscr{N}_t$.

On a $E_x{}^h[Z;\, t < \zeta \mid \mathscr{N}_t] = 1_{(t<\zeta)}.\, E_x{}^h[Z \mid \mathscr{F}_t]$ $E_x{}^h[Z \mid \mathscr{F}_t].\, 1_{(t<\zeta)}$ est une surmartingale. Donc $Z_\infty = \lim_{t\to\zeta} E_x{}^h[Z \mid \mathscr{F}_t].\, 1_{(t<\zeta)}$ existe. On pose $g_t(\omega) = E_x{}^h[Z \mid \mathscr{F}_t].\, 1_{(t<\zeta)}$. Soit τ un temps d'arrêt, alors $P_x{}^h$ p.s.

$$g_\tau(\omega) = E_x{}^h[Z \mid \mathscr{F}_\tau] \cdot 1_{(\tau<\zeta)}\, .$$

Comme ζ est P_x^h-prévisible à l'aide de τ_n

$$Z_\infty = \lim_{n\to+\infty} E_x^h[Z \mid \mathscr{F}_{\tau_n}]$$

Comme Z est P_x^h-intégrable et $\vee_n \mathscr{F}_{\tau_n}$-mesurable

$$Z = Z_\infty \qquad P_x^h \text{ p.s.}$$

CHAPITRE III. THÉORÈMES DE FATOU

THÉORÈME 1. *Soit h' une fonction excessive telle que $\mu^{h'}$ soit absolument continue par rapport à μ^h où h est une fonction excessive > 0, telle que ζ soit h-prévisible. En posant $\mu^{h'} = L_{h'} \cdot \mu^h$ on a*

$$\lim_{t\to\zeta} (h'/h)(X_t) = L_{h'}(Z_\zeta) \text{ p.s. } P_x^h \qquad \forall x \in E_h\,.$$

Démonstration. D'après le théorème 1, Section 2, Chapitre II, $\forall x \in E_h$ et P_x^h p.s. on a

$$E_x^h[L_{h'}(Z_\zeta)\colon \zeta > t \mid \mathscr{N}_t] = \int L_{h'}(z)\,\frac{k_z}{h}(X_t)\,\mu^h(dz) = \frac{h'}{h}(X_t)\cdot 1_{(t<\zeta)}$$

la limite existe P_x^h p.s. quand $t \to \zeta$ si $P_x^h(L_{h'}(Z_\zeta)) < +\infty$. La limite est alors égale à $L_{h'}(Z_\zeta)$ P_x^h p.s. (voir lemme 1, Section 2, Chapitre II) or $P^h(L_{h'}(Z_\zeta)) = \int L_{h'}(z)\,\mu^h(dz) < +\infty$ [$\mu h'$ est bornée car $\mu^{h'}(\mathscr{E}) = P^{h'}(Z_\zeta \in \mathscr{E})$] donc γ p.s. $P_x^h(L_{h'}(Z_\zeta)) < +\infty$; donc

$$\gamma \text{ p.s. } \lim_{t\to\zeta} (h'/h)(X_t) = L_{h'}(Z_\zeta), \qquad P_x^h \text{ p.s.}$$

Pour avoir la limite P_x^h p.s. $\forall x \in E_h$ on fait un raisonnement analogue à celui de [1, p. 45].

THÉORÈME 2. *Soit h une fonction excessive > 0. Si ζ est h-prévisible à l'aide de la suite (τ_n) et h' vérifie*

$$\lim_{n\to+\infty} P[h'(X_{\tau_n})] = 0$$

alors

$$\lim_{t\to\zeta} \frac{h'}{h}(X_t) = 0 \text{ p.s. } P^h.$$

Démonstration.

$$P^h[\lim_{t\to\zeta}(h'/h)(X_t)] = \underset{\substack{\downarrow \\ \text{car } (\tau_n<\zeta)\, P^h \text{ p.s.}}}{P^h[\lim_{n\to+\infty}(h'/h)(X_{\tau_n})]} \leqslant \lim_{n\to+\infty}\inf P^h[(h'/h)(X_n)]$$

Or

$$P^h[(h'/h)(X_{\tau_n})] = \int \gamma(dx)h(x)\, P_x{}^h[(h'/h)(X_{\tau_n})] = P[h'(X_{\tau_n})] \to 0.$$

DÉFINITION 1. Soit $\mathscr{C} = (\tau_n)$ une suite de temps d'arrêt et soit h une fonction excessive.

On dit que h est $\mathscr{C}$-harmonique si $(\tau_n < \zeta)$ P^h p.s. $\forall n$.

LEMME 1 [23]. *Soit $\mathscr{C} = (\tau_n)$ une suite de temps d'arrêt telle que* $\lim_{n\to+\infty}\tau_n = \zeta$ P p.s. *et soit h une fonction excessive. On pose*

$$\mathscr{U}(\mathscr{C}) = \{z \in \mathscr{U} \text{ tels que } \tau_n < \zeta\ P^{kz} \text{ p.s.}\}$$

$$\mathscr{V}(\mathscr{C}) = \mathscr{U} - \mathscr{U}(\mathscr{C})$$

On a $=$

(1) *ζ est h-prévisible à l'aide de (τ_n) équivaut à μ^h est concentrée sur $\mathscr{U}(\mathscr{C})$.*

(2) $\lim_{n\to+\infty} P[h(X_{\tau_n})] = 0$ *équivaut à μ^h concentrée sur $\mathscr{V}(\mathscr{C})$.*

DÉFINITION 2. Soit h une fonction excessive.

On dit que h est un $\mathscr{C}$-potentiel si μ^h est concentrée sur $\mathscr{V}(\mathscr{C})$.

LEMME 2. *Soit $\mathscr{C}$ une suite de temps d'arrêt (τ_n), alors on a une $\mathscr{C}$-décomposition de Riesz: toute fonction excessive h se décompose en la somme d'une fonction h' $\mathscr{C}$-harmonique et d'un $\mathscr{C}$-potentiel h''.*

Démonstration. $h' = \int_{\mathscr{U}_{\mathscr{C}}} k_z\, \mu^h(dz)$ et $h'' = \int_{\mathscr{V}_{\mathscr{C}}} k_z \mu^h(dz)$.

Remarque. Soit $\mathscr{C}$ une suite de temps d'arrêt (τ_n) telle que $\lim \tau_n = \zeta$ P p.s. Soient h_1 et h_2 deux fonctions excessives et soit leur $\mathscr{C}$-décomposition de Riesz, en une fonction $\mathscr{C}$-harmonique et un $\mathscr{C}$-potentiel.

$$\begin{aligned} h_1 &= h_1' + h_1'' \\ h_2 &= h_2' + h_2'' \end{aligned} \quad \text{où } h_1' \text{ et } h_2' \text{ sont } \mathscr{C}\text{-harmoniques.}$$

Si $h_1 \leqslant h_2$, alors $h_1' \leqslant h_2'$.

THÉORÈME 3. *Soit h' une fonction excessive, soit $\mathscr{C} = (\tau_n)$ une suite de temps d'arrêt telle que P* p.s. $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \zeta$ *et soit h une fonction $\mathscr{C}$-harmonique. Si $\mu^{h'}$ et μ^h sont étrangères, alors* $\lim_{t\to\zeta} h'/h(X_t) = 0$ p.s. P^h, $(h > 0)$.

Remarque. Si h_1 et h_2 sont excessives, alors les hypothèses sur le processus entraînent $k = \inf(h_1, h_2)$ est excessive.

Le théorème 3 résulte de ce que si h_1 et h_2 sont excessives avec μ^{h_1} et μ^{h_2} étrangères, et si $\lim_{t\to\zeta}(h_2/h)(X_t) > 0$, p.s. P^h, alors

$$\lim_{t\to\zeta} (h_1/h)(X_t) = 0 \; P^h \text{ p.s.}$$

En effet, $k = \inf(h_1, h_2)$ est excessive et soit $k = k_1 + k_2$ sa $\mathscr{C}$-décomposition de Riesz où k_1 est $\mathscr{C}$-harmonique. On a $k_1 \leqslant h_1$ et $k_1 \leqslant h_2$ donc $\mu^{k_1} \leqslant \mu^{h_1}$ et $\mu^{k_1} \leqslant \mu^{h_2}$ (voir théorème 5, Section 1, Chapitre II).

Comme μ^{h_1} et μ^{h_2} sont étrangères, on a $\mu^{k_1} = 0$ donc k est un $\mathscr{C}$-potentiel, et d'après le lemme 1 et le théorème 2,

$$\lim_{t\to\zeta} (k/h)(X_t) = 0 \text{ p.s. } P^h.$$

THÉORÈME 4. *Soit h' une fonction excessive et soit h une fonction excessive > 0, telle que ζ soit h-prévisible. Si on pose $= \mu^{h'} = u \cdot \mu^h + \nu^h$ avec $\nu^h \perp \mu^h$ et $u \in L^1(\mu^h)$, alors*

$$\lim_{t\to\zeta} (h'/h)(X_t) = u(Z_\zeta) \text{ p.s. } P_x^h \qquad \forall x \in E_h .$$

Démonstration.

$$h'(x) = \int k_z(x)\, \mu^{h'}(dz) = \int k_z(x) u(z)\, \mu^h(dz) + \int k_z(x)\, \nu^h(dz)$$

Pour $\int k_z(x)\, u(z)\, \mu^h(dz)$, on applique le théorème 1 et pour $\int k_z(x)\, \nu^h(dz)$ on applique le théorème 3, donc $\lim_{t\to\zeta} (h'/h)(X_t) = u(Z_\zeta)$ p.s. P^h. Cela est vrai γ p.s. P_x^h p.s.

On conclut P_x^h p.s. $\forall x \in E_h$ en faisant un raisonnement analogue à celui qui termine la démonstration du théorème 1.

On se demande si l'hypothèse ζ est h-prévisible est nécessaire dans le théorème 4. On verra une réciproque au chapitre 6.

Chapitre IV. Filtres Cofins-coéffilement—Théorème de Fatou Cofin

On va étudier le coeffilement en un point z de l'espace des sorties $\mathcal{U}$ et voir les conséquences.

1. *Coéffilement*

Soit A un ensemble presque borélien et w une fonction excessive. Soit $T_A = \inf\{t > 0 \text{ tel que } X_t \in A\}$. Il existe une fonction excessive unique $F_A w$ telle que: pour tout x vérifiant $w(x) < +\infty$, on a

$$F_A w(x) = w(x)\, E_x^{w}[R_A] \qquad \text{où} \quad R_A = \bigcap_{0 \leqslant t < \zeta} (T_A \circ \theta_t + t < \zeta)$$

$F_A w$ a les propriétés suivantes:

(1) $F_A w$ est une minorante avec l'ordre fort de w

$$w - F_A w = G_A w \qquad \text{où} \quad G_A w(x) = w(x)\, E_x^{w}(S_A)$$

pour tout x tel que $w(x) < +\infty$ où

$$S_A = \bigcup_{t \geqslant 0} (t < \zeta)(T_A \circ \theta_t + t = \zeta)$$

(2) $F_A w$ est une minorante avec l'ordre fort de $P_A w$ où $P_A w$ est la réduite habituelle définie par $P_A w(x) = E_x(w(X_{T_A}))$.

(3) Si A est un ensemble fermé, $F_A w$ est harmonique dans le complémentaire de A. Pour la démonstration voir [23]. On appellera la fonction $F_A w$ réduite forte de w sur A.

Définition 1. Soit z appartenant à l'espace des sorties $\mathcal{U}$. On dit qu'un ensemble presque borélien A de E est faiblement coeffilé en z si $F_A k_z \neq k_z$.

Lemme 1. *Soit z appartenant à $\mathcal{U}$, et soit A un ensemble presque-borélien—si $F_A k_z \neq k_z$, alors $F_A k_z = 0$.*

Démonstration. Comme k_z est extrémale, et que $F_A k_z$ est une minorante avec l'ordre fort de k_z, on a $= F_A k_z = a k_z$.

Or pour tout x tel que $k_z(x) < +\infty$, on a

$$F_A k_z(x) = k_z(x)\, E_x^{k_z}\left[\bigcap_{0 \leqslant t < \zeta} (T_A \circ \theta_t + t < \zeta)\right]$$

donc

$$\lim_{t\to\zeta} \frac{F_A k_z}{k_z}(X_t) = 1 \text{ sur les trajectoires qui reviennent une infinité de fois dans } A.$$
$$= 0 \text{ dans l'autre cas.}$$

$a = 0$ ou 1, si $F_A k_z \neq k_z$ alors $a = 0$.

LEMME 2. *Les deux propriétés suivantes sont équivalentes*

(1) *A est faiblement coeffilé en z.*

(2) *Il existe y appartenant à $E_{k_z} = \{0 < k_z < +\infty\}$ tel que*

$$E_y^{k_z}\left[\bigcap_{0\leqslant t<+\zeta} (T_A \circ \theta_t + t < \zeta)\right] = 0,$$

c'est-à-dire, à partir d'un certain moment, les k_z-trajectoires p.s. *sortent de A pour atteindre z.*

DÉFINITION 2. Soit z appartenant à $\mathscr{U}$. Un presque borélien A est coeffilé en z si $P_A k_z \neq k_z$.

LEMME 3. *Soit z appartenant à $\mathscr{U}$ et soit A un presque borélien de E. A est coeffilé en z équivaut à $P^{k_z}(T_A < \zeta) < 1$. C'est-à-dire, il existe un ensemble non négligeable de k_z-trajectoires qui atteignent z sans jamais passer par A.*

On va essayer de comparer ces différentes notions de coeffilement. On a: A est coeffilé en z entraîne A est faiblement coeffilé en z.

On montrera.

Si le point z est polaire, alors Γ est faiblement coeffilé en z est équivalent à Γ est coeffilé en z.

DÉFINITION 3 [23]. Soit $\mathscr{C}$ une famille de temps d'arrêt. Une famille dénombrable $(\tau_i)_{i\in I}$ de temps d'arrêt contenue dans $\mathscr{C}$ est dite "dominante" si, $\forall\tau \in \mathscr{C}$, il existe τ_i tel que $\tau \leqslant \tau_i$.

DÉFINITION 4 [23]. On dira que $\mathscr{C}$ est une famille fondamentale de temps d'arrêt si $\mathscr{C}$ vérifie la propriété suivante: Il existe dans $\mathscr{C}$

une suite croissante dominante telle que $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \zeta P_x$ p.s. pour tout $x \in E$.

Soit $\mathscr{C}' = (\tau_n)$.

h est $\mathscr{C}$ harmonique si h est $\mathscr{C}'$-harmonique (Définition 1, chapitre III) et h est un $\mathscr{C}$-potentiel si h est un $\mathscr{C}'$-potentiel (Définition 2, chapitre III).

LEMME 4 [23]. *Soit B un borélien. Soit $\mathscr{C}$ une famille fondamentale de temps d'arrêt. Si h est $\mathscr{C}$-harmonique, $F_B h$ est la plus grande minorante $\mathscr{C}$-harmonique de $P_B h$ avec l'ordre fort.*

Si A est un fermé polaire, la famille $\mathscr{C}$ des premiers temps de sortie des compacts de $E - A$ est fondamentale.

LEMME 5. *Soit $\mathscr{C}$ une famille fondamentale de temps d'arrêt. Soit $z \in \mathscr{U}$. On suppose que k_z est $\mathscr{C}$-harmonique. Soit Γ un ensemble finement ouvert. On a: Γ est coeffilé en z équivaut à $P_{T_\Gamma} k_z$ est un $\mathscr{C}$-potentiel.*

Remarque. Cette caractérisation d'un ensemble coeffilé en z est aussi bien valable pour z appartenant à l'intérieur que pour z appartenant à la frontière.

Démonstration. Si k_z est $\mathscr{C}$-harmonique et si $P_{T_\Gamma} k_z$ est un $\mathscr{C}$-potentiel, on a évidemment $k_z \neq P_{T_\Gamma} k_z$, donc Γ est coeffilé en z. Réciproquement, on a, d'après le lemme 4:

$$P_\Gamma k_z = F_\Gamma k_z + p \qquad \text{où } p \text{ est un } \mathscr{C}\text{-potentiel,}$$

$$F_\Gamma k_z = a k_z \qquad \text{où} \quad a = 0 \text{ ou } 1,$$

et Γ est coeffilé en z entraîne $a = 0$, sinon

$$P_\Gamma k_z \geqslant k_z\,; \qquad T_\Gamma \circ \theta_{T_\Gamma} + T_\Gamma = T_\Gamma$$

donc $P_\Gamma k_z$ est un $\mathscr{C}$-potentiel.

THÉORÈME 1. *Soit $\mathscr{C}$ une famille fondamentale de temps d'arrêt. Si k_z est $\mathscr{C}$-harmonique, on a: un ensemble finement ouvert Γ est coeffilé en z équivaut à Γ est faiblement coeffilé en z.*

Démonstration. Si Γ est coeffilé en z, d'après le lemme 4 et le lemme 5, $F_\Gamma k_z = 0$.

Réciproquement, si $F_\Gamma k_z = 0$, d'après le lemme 4, $P_\Gamma k_z$ est un $\mathscr{C}$-potentiel donc Γ est coeffilé en z (Définition 2).

Remarque. L'hypothèse: z est polaire n'est pas nécessaire pour que les deux notions

Γ est coeffilé en z,
Γ est faiblement coeffilé en z,

coïncident (voir l'exemple de la translation uniforme sur R).

2. *Filtres Cofins*

THÉORÈME 1. *Pour tout z appartenant à $\mathcal{U}$ $\mathcal{G}_z = \{\Gamma \subset E$, presque borélien tels que $E - \Gamma$ est faiblement coeffilé en $z\}$ forme un filtre.*

Démonstration. Si $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ et si Γ_1 est coeffilé en z, alors Γ_2 est coeffilé en z.

(1) si $\Gamma \in \mathcal{G}_z$, pour tout $\Gamma_1 \supset \Gamma$, Γ_1 appartient à $\mathcal{G}_z$,

(2) soient Γ_1 et Γ_2 appartenant à $\mathcal{G}_z$, alors $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ appartient à $\mathcal{G}_z$. En effet, la réunion de deux ensembles faiblement coeffilés en z est faiblement coeffilée en z: $R_{A_1 \cup A_2} = R_{A_1} \cup R_{A_2}$ donc

$$F_{A_1 \cup A_2} k_z \leqslant F_{A_1} k_z + F_{A_2} k_z$$

si $F_{A_1} k_z = 0$ et $F_{A_2} k_z = 0$, alors $F_{A_1 \cup A_2} k_z = 0$.

(3) E n'est pas faiblement coeffilé en z.

COROLLAIRE. *Pour tout z appartenant à $\mathcal{U}$; si le point z appartient à un ensemble polaire*

$$\mathcal{F}_z = \{\Gamma \subset E/\Gamma \text{ est finement fermé et } E - \Gamma \text{ coeffilé en } z\}$$

forme un filtre. (*On applique le théorème* 1, *Section* 1.)

3. *Théorèmes de Fatou Cofin* [4, 16]

On va voir comment on passe de la convergence sur les trajectoires du processus à la convergence selon les filtres $\mathcal{G}_z (z \in \mathcal{U})$.

THÉORÈME 1. *Soient z appartenant à $\mathcal{U}$ et v une fonction borélienne sur $\mathcal{E}$. Soit $\lambda \in (-\infty, +\infty)$, on a* $\lim_{t \to \zeta} v(X_t) = \lambda P^k z$ p.s. *entraîne λ est limite de v en z suivant le filtre $\mathcal{G}_z$.*

Démonstration. Soit $A_n = \{z \in E \mid v(z) \in]\lambda - (1/n), \lambda + (1/n)[\}$. On montre que A_n appartient à $\mathcal{G}_z$.

$$\lambda = \lim_{t \to \zeta} v(X_t)\, P^{k_z} \text{ p.s.}$$

entraîne pour tout n, P^{k_z} p.s., il existe t_n tel que $\forall t \geqslant t_n \; X_t \in A_n$, donc $T_{E-A_n} \circ \theta_t + t = \zeta$ et $F_{E-A_n} k_z = 0$.

Théorèmes de convergence

THÉORÈME 2. *Soit h une fonction excessive > 0 telle que ζ soit h-prévisible et soit h' une fonction excessive*

$$\mu^{h'} = u\mu^h + \nu^h \qquad \text{avec} \quad \nu^h \perp \mu^h \quad \text{et} \quad u \in L^1(\mu^h)$$

alors $= \lim_{y\to x}(h'/h)(y) = u(x)$ μ^h p.s. *pour x appartenant à $\mathscr{E}$ suivant le filtre $\mathscr{G}_x$.*

Démonstration. D'après le théorème 4, Chapitre III, on a, sauf pour ω appartenant à un ensemble B qui est P^h-négligeable:

$$\lim_{t\to\zeta} (h'/h)(X_t(\omega)) = u(Z_\zeta(\omega)).$$

Soit (τ_n) une suite annonçant ζ pour h.

$$B = \{\omega \mid \lim_{n\to+\infty} (h'/h)(X_{\tau n}(\omega)) \neq u(Z_\zeta(\omega))\}$$

$$P^h(B) = \int P^{k_z}(B)\, \mu^h(dz).$$

Donc μ^h p.s. $P^{k_z}(B) = 0$. Comme $Z_\zeta = z$ P^{k_z} p.s., $\lim_{t\to\zeta}(h'/h)(X_t) = u(z)$ P^{k_z} p.s., on conclut en appliquant le théorème 1.

On en déduit les théorèmes de convergence à la frontière et à l'intérieur [4].

THÉORÈME 3. *Soit h une fonction > 0 harmonique dans E et soit h' une fonction excessive.*

$$\mu^{h'} = u \cdot \mu^h + \nu^h \qquad \text{avec} \quad \nu^h \perp \mu^h \quad \text{et} \quad u \in L^1(\mu^h)$$

alors $\lim_{y\to x}(h'/h)(y) = u(x)$ μ^h p.s. *pour x appartenant à $\mathscr{E}$ $y \to x$ suivant le filtre $\mathscr{F}_x$.*

Théorème de convergence à l'intérieur

THÉORÈME 4. *Soit z appartenant $\in E$. On suppose que $k_z > 0$ et que $\{z\}$ est polaire. Soit h' une fonction excessive. Alors* $\lim_{y\to z}(h'/k_z)(y)$ *existe et est finie (suivant le filtre $\mathscr{F}_z$).*

THÉORÈME 5. *Soient u et v deux fonctions excessives. Alors $\lim_{y \to x}(u/v)(y)$ existe (suivant le filtre $\mathscr{F}_x$) et est finie pour μ^v presque tout x appartenant à A où A est un ensemble polaire.*

Démonstration. Il suffit de montrer le théorème lorsque A est un ensemble fermé polaire.

Soit la $\mathscr{C}$-décomposition de Riesz relative au polaire A. $\mathscr{C}$ est la famille des temps de sortie des compacts de $\mathscr{E} - A$.

$v = v' + p$ où v' est $\mathscr{C}$-harmonique et p est un $\mathscr{C}$-potentiel, et en faisant une démonstration analogue à celle du théorème 3, $\lim_{y \to x}(u/v')$ existe et est finie, $\mu^{v'}$ p.p. (suivant le filtre $\mathscr{F}_x$). Or

$$\lim_{y \to x}(u/v) = \lim_{y \to x}(u/v') \cdot \frac{1}{1 + (p/v')} \qquad \text{et} \qquad \lim_{y \to x}(p/v') = 0 \text{ p.p.}$$

d'après le théorème 2 du chapitre III, donc $\lim_{y \to x}(u/v) = \lim_{y \to x}(u/v')$ existe et est finie $\mu^{v'}$ p.p. or $\mu^{v'} = 1_A \cdot \mu^v$.

CHAPITRE V. CARACTÉRISATION DES FONCTIONS EXCESSIVES h POUR LESQUELLES ζ EST h-PRÉVISIBLE OU h-ACCESSIBLE

Soit A un presque borélien. On note $T_A(\omega) = \inf\{t > 0 \mid X_t(\omega) \in A\}$ le premier temps d'entrée dans A.

DÉFINITION 1. On dit que A est polaire si $P(T_A < \zeta) = 0$.

DÉFINITION 2. Un ensemble presque borélien A est semi-polaire s'il est rencontré par presque toutes les trajectoires suivant un ensemble au plus dénombrable c'est-à-dire P p.s.

$$A(\omega) = \{t \mid X_t(\omega) \in A\} \quad \text{est au plus dénombrable.}$$

On suppose dans tout ce qui suit que la fonction 1 *est harmonique dans E, donc μ^1 est portée par la frontière.*

DÉFINITION 3. On dira qu'une fonction excessive u est un potentiel naturel si, pour tout x tel que $u(x) < +\infty$, pour toute suite (τ_n) croissante de temps d'arrêt tels que $\lim_{n \to +\infty} \tau_n = \zeta P_x$ p.s., on a $\lim_{n \to +\infty} P_x(u(X_{\tau_n})) = 0$.

Remarque. Si u est un potentiel naturel

(1) La mesure spectrale μ^u est portée par E. En effet, $u = u_1 + u_2$

où u_1 est harmonique dans E, (μ^{u_1} est portée par la frontière) et u_2 a sa mesure spectrale μ^{u_2} portée par E. On prend (τ_n) la suite des temps de sortie d'une suite d'ouverts relativement compacts U_n tels que $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$ et $E = \bigcup_n U_n$.

On a $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \zeta\ P_x$ p.s. pour tout $x \in E$ puisque 1 est harmonique dans E et

$$\lim_{n\to+\infty} P_x(u(X_{\tau_n})) = \lim_{n\to+\infty} P_x(u_2(X_{\tau_n})) + u_1(x) = 0$$

$\forall x$ tel que $u(x) < +\infty$ et $u_1(x) > 0$ donc $u_1(x) = 0$ partout.

(2) Comme μ^1 est portée par la frontière de Martin,

$$\lim_{t\to\zeta} u(X_t) = 0\ P_x \text{ p.s.}$$

puisque μ^u est étrangère à μ^1. Voir théorème de Fatou Chapitre III, théorème 3.

1. *On se donne un potentiel naturel u*

Pour tout x tel que $u(x) < +\infty$, on considère la surmartingale

$$(u(X_t)\, 1_{(t<\zeta)}\ ;\ \mathscr{F}_t\ ;\ P_x)$$

On peut lui associer un processus croissant intégrable $A_t^{(x)}$ tel que

$$v_t = 1_{(t<\zeta)} u(X_t) = E_x(A_\infty^{(x)} \mid \mathscr{F}_t) - A_t^{(x)}\ P_x \text{ p.s.}$$

Voir Meyer [6, théorème 28, p. 156].

LEMME 1. *Le processus $A_t^{(x)}$ possède les deux propriétés suivantes*

(1) $A_t^{(x)} = A_\zeta^{(x)}$ *pour* $t \geqslant \zeta$.

(2) $\lim_{t\to\zeta,\, t<\zeta} A_t^{(x)} = A_\zeta^{(x)}$.

Démonstration. (1) Pour $t \geqslant \zeta$ la surmartingale

$$v_t = u(X_t)\, 1_{(t<\zeta)} = 0.$$

On approche $A_t^{(x)}$ par des processus croissante $A_t^{h,(x)}$ définis par

$$A_t^{h,(x)} = \int_0^t \frac{v_s - P_h v_s}{h}\, ds.$$

$P_h v_s$ désignant une modification continue à droite de la surmartingale

$E_x[v_{s+h} \mid \mathscr{F}_s]$ [6, p. 156] pour $t \geqslant \zeta$, $A_t^{h,(x)} = A_\zeta^{h,(x)}$. On passe à la limite quand h tend vers 0.

(2) $\lim_{t\to\zeta, t<\zeta} u(X_t) = 0$ entraîne

$$\lim_{t\to\zeta, t<\zeta} A_t^{(x)} = \lim_{t\to\zeta, t<\zeta} E_x[A_\zeta^{(x)} \mid \mathscr{F}_t].$$

Comme 1 est harmonique dans E, ζ est (P_x p.s.) prévisible. Soit (τ_n) une suite annonçant ζ pour P_x, on a

$$\lim_{n\to+\infty} E_x[A_\zeta^{(x)} \mid \mathscr{F}_{\tau_n}] = \lim_{t\to\zeta, t<\zeta} E_x[A_\zeta^{(x)} \mid \mathscr{F}_t] = A_\zeta^{(x)}$$

puisque $A_\zeta^{(x)}$ est $\vee_n \mathscr{F}_{\tau_n}$-mesurable.

Lemme 2. *Pour toute fonction f, bornée, universellement mesurable, on a*

$$E_x\left(\int_0^\zeta f(X_s)\, dA_s^{(x)}\right) = \int k_z(x) f(z)\, \mu^u(dz).$$

Démonstration. Il suffit de montrer la formule pour toute fonction continue f. D'après la formule (3) (notations), on a

$$u(x)\, E_x{}^u[f(Z_\zeta)] = \int f(z)\, k_z(x)\, \mu^u(dz).$$

Or

$$E_x\left[\int_0^\zeta f(X_s)\, dA_s^{(x)}\right] = \lim_{h\to 0} E_x\left[\frac{1}{h}\int_0^\zeta f(X_s)[u(X_s) - u(X_{s+h})]\, ds\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^\infty E_x[f(X_s)[u(X_s) - u(X_{s+h})]]\, ds$$

(voir [15, théorème 54, Chapitre IV]);

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h}\int_0^\infty u(x)\, E_x{}^u[f(X_s)[1_{(s<\zeta)} - 1_{(s+h<\zeta)}]]\, ds$$

puisque $f(X_s).\ 1_{(s<\zeta)}$ est $\mathscr{N}_s$-mesurable et $f(X_s).\ 1_{(s+h<\zeta)}$ est $\mathscr{N}_{s+h}$-mesurable;

$$= u(x) \lim_{h\to 0} E_x{}^u\left[\frac{1}{h}\int_{\zeta-h}^\zeta f(X_s)\, ds\right]$$

or

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_{\zeta-h}^{\zeta} f(X_s)\, ds = f(Z_\zeta)$$

puisque f est continue et

$$Z_\zeta = \lim_{t\to\zeta} X_t$$

d'où

$$E_x\left[\int_0^\zeta f(X_s)\, dA_s^{(x)}\right] = u(x)\, E_x{}^u[f(Z_\zeta)].$$

2. *Ensembles de N-potentiel nul et ensembles polaires*

Soit $\overline{\mathscr{B}(\mathscr{E})}$ la tribu des ensembles universellement mesurables de $\mathscr{E}$.

DÉFINITION 1. Un ensemble $K \in \overline{\mathscr{B}(\mathscr{E})}$ est dit de N-potentiel si, pour tout potentiel naturel fini u, on a $\mu^u(K) = 0$.

Remarque. La frontière est un ensemble de N-potentiel nul puisque, pour un potentiel naturel u, μ^u est portée par E.

On va montrer qu'il y a identité entre les ensembles presque boréliens de N-potentiel nul et les ensembles polaires.

THÉORÈME 1. *Soit K un ensemble presque borélien. On a K est de N-potentiel nul entraîne K est polaire entraîne $\mu^u(K) = 0$ pour tout potentiel naturel u.*

En particulier $\mu^u(K) = 0$ pour tout potentiel naturel équivaut à $\mu^u(K) = 0$ pour tout potentiel naturel fini.

Démonstration. (1) Supposons K non polaire. Il existe un compact $K_1 \subset K$ qui n'est pas polaire. Soit $h_1(x) = E_x(T_{K_1} < \zeta)$. *$h_1$ est un potentiel naturel fini.*

Soit (τ_n) une suite de temps d'arrêt tels que $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \zeta P_x$ p.s., on a

$$\lim_{n\to+\infty} P_x[h_1(X_{\tau_n})] = \lim_{n\to+\infty} E_x[T_{K_1} \circ \theta_{\tau_n} + \tau_n < \zeta] = 0$$

puisque $Z_\zeta = \lim_{t\to\zeta, t<\zeta} X_t$ appartient à la frontière P_x p.s. μ^{h_1} est portée par K_1 car h_1 est harmonique dans $E - K_1$. Comme $h_1 \neq 0$, on a $\mu^{h_1}(K_1) > 0$ donc $\mu^{h_1}(K) > 0$.

(2) Supposons K polaire. Pour tout potentiel naturel u, $\forall x$ tel que $u(x) < +\infty$, on a

$$E_x\left[\int_0^\zeta 1_K(X_t)\, dA_t^{(x)}\right] = 0$$

où $A_t^{(x)}$ est la fonctionnelle associée à $(u(X_t).\ 1_{(t<\zeta)}, \mathscr{F}_t, P_x)$. Donc $\int k_z(x)\, 1_K(z)\, \mu^u(dz) = 0$ (lemme 2, Section 1).

On intègre par rapport à γ: $\gamma(k_z) = 1$ donc $\mu^u(K) = 0$.

3. *Ensemble de R-potentiel nul et ensembles semi-polaires*

DÉFINITION 1. Une fonction excessive u est un potentiel régulier si, pour tout x tel que $u(x) < +\infty$, on a, pour toute suite croissante de temps d'arrêt (T_n) qui tend vers T:

$$\lim_{n\to+\infty} E_x(u(X_{T_n})) = E_x(u(X_T)).$$

Remarques. (1) Un potentiel régulier est un potentiel naturel. On prend $T = \zeta$.

(2) Si u est un potentiel régulier, pour tout x tel que $u(x) < +\infty$, le processus croissant intégrable $A_t^{(x)}$ qui engendre la surmartingale $[1_{(t<\zeta)}u(X_t), \mathscr{F}_t, P_x]$ est continu.

DÉFINITION 2. Un ensemble $K \in \overline{\mathscr{B}(\mathscr{E})}$ est dit de R-potentiel nul si, pour tout potentiel régulier fini u, on a $\mu^u(K) = 0$.

Il y a identité entre les ensembles presque boréliens de R-potentiel nul et les ensembles semi-polaires.

THÉORÈME 1. *Soit K un ensemble presque borélien. On a K est de R-potentiel nul entraîne K est semi-polaire entraîne $\mu^u(K) = 0$ pour tout potentiel régulier u.*

En particulier, $\mu^u(K) = 0$ pour tout potentiel régulier u équivaut à $\mu^u(K) = 0$ pour tout potentiel régulier fini.

Démonstration. (1) Supposons K semi-polaire. Pour tout potentiel régulier u, pour tout x tel que $u(x) < +\infty$, on a

$$E_x\left[\int_0^\zeta 1_K(X_t)\, dA_t^{(x)}\right] = 0$$

où $A_t^{(x)}$ est la fonctionnelle associée à $(u(X_t).\ 1_{(t<\zeta)}, \mathscr{F}_t, P_x)$. Comme u est un potentiel régulier, la fonctionnelle est continue. Donc

$$\int k_z(x)\, 1_K(z)\, \mu^u(dz) = 0$$

On intègre par rapport à γ: $\gamma(k_z) = 1$ donc $\mu^u(K) = 0$.

(2) Supposons K non semi-polaire. Il existe un compact K_1 contenu dans K qui n'est pas semi-polaire [15, T9, Chapitre 7]. Il existe donc un ensemble borélien finement parfait P contenu dans K [15, Chapitre 7, T12].

On sait, [10] que P est le support fin d'une fonctionnelle additive continue adaptée de potentiel borné.

Soit A_t cette fonctionnelle et soit $h(x) = E_x(\int_0^\zeta 1_P(X_t)\, 1_{(t<\zeta)}\, dA_t)$ h est un potentiel régulier, on lui applique le lemme 2, Section 1. μ^h est donc portée par P. Donc F n'est pas de R-potentiel nul.

4. *Lien entre les suites croissantes de temps d'arrêt et les ensembles de N-potentiel nul et de R-potentiel nul*

On va voir comment on peut associer à une suite croissante de temps d'arrêt des ensembles de N-potentiel nul et de R-potentiel nul, donc des ensembles polaires et semi-polaires si on fait les hypothèses restrictives de mesurabilité (Sections 2 et 3).

PROPOSITION 1. *Soit $x \in E$ et soit (τ_n) une suite croissante de temps d'arrêt. On pose $\tau = \lim_{n\to+\infty} \tau_n$.*

(1) *L'ensemble*

$$K_x = \{z \in E \text{ tels que } \lim_{n\to+\infty} E_x(k_z(X_{\tau_n})) > E_x(k_z(X_\tau))\}$$

est de R-potentiel nul,

(2) *De plus, si $\tau = \zeta P_x$ p.s., alors K_x est de N-potentiel nul.*

Démonstration. (1) Montrons que K_x est de R-potentiel nul, c'est-à-dire $\mu^u(K_x) = 0$ pour tout potentiel régulier fini u.

Or, pour toute fonction continue f, et pour tout x appartenant à E, on a

$$\int E_x(k_z(X_{\tau_n}))f(z)\, \mu^u(dz) = E_x\left[\int_{\tau_n}^{\zeta} f(X_t)\, dA_t^{(x)}\right].$$

Comme $A_t^{(x)}$ est continue, (puisque u est un potentiel régulier)

$$\lim_{n\to+\infty} E_x\left[\int_{\tau_n}^{\zeta} f(X_t)\, dA_t^{(x)}\right] = E_x\left[\int_{\tau}^{\zeta} f(X_t)\, dA_t^{(x)}\right]$$

$$= \int E_x(k_z(X_\tau))f(z)\,\mu^u(dz)$$

donc

$$\int \left[\lim_{n\to+\infty} E_x[k_z(X_{\tau_n})] - E_x(k_z(X_\tau))\right] \mu^u(dz) = 0.$$

On en déduit: μ^u p.p. pour z:

$$\lim_{n\to+\infty} E_x(k_z(X_{\tau_n})) = E_x[k_z(X_\tau)]$$

et $\mu^u(K_x) = 0$.

(2) Si $\tau = \zeta P_x$ p.s., $E_x(k_z(X_\tau)) = 0$. Montrons que l'ensemble $K_x = \{z \in E$ tels que $\lim_{n\to+\infty} E_x(k_z(X_{\tau_n})) > 0\}$ *est de N-potentiel nul,* c'est-à-dire $\mu^u(K_x) = 0$ pour tout potentiel naturel fini u. Le raisonnement est analogue à celui utilisé dans (1) pour le cas des potentiels réguliers:

Pour toute fonction continue f et pour tout x appartenant à E, on a

$$\int E_x(k_z(X_{\tau_n}))f(z)\,\mu^u(dz) = E_x\left[\int_{\tau_n}^{\zeta} f(X_t)\, dA_t^{(x)}\right] \to 0 \qquad \text{quand} \quad n \to +\infty$$

(voir lemme 1, Section 1).
Donc

$$\lim_{n\to+\infty} E_x(k_z(X_{\tau_n}))f(z)\,\mu^u(dz) = 0$$

on a donc

$$\lim_{n\to+\infty} E_x(k_z(X_{\tau_n})) = 0$$

sauf pour z appartenant à l'ensemble K_x qui est μ^u-négligeable.

PROPOSITION 2. *Soit* (τ_n) *une suite croissante de temps d'arrêt. On pose* $\tau = \lim_{n\to+\infty} \tau_n$.

(1) $K = \{z \in E$ *tels que* $\lim_{n\to+\infty} E(k_z(X_{\tau_n})) > E(k_z(X_\zeta))\}$ *est de R-potentiel nul.*

(2) *Si* $\tau = \zeta P$ p.s., *alors* K *est de N-potentiel nul.*

Démonstration. Pour tout $x \in E$ et pour tout potentiel régulier fini u, on a (proposition 1)

$$\int \left(\lim_{n\to+\infty} E_x(k_z(X_{\tau_n})) - E_x(k_z(X_\tau))\right) \mu^u(dz) = 0.$$

On intègre par rapport à γ

$$\int \left[\lim_{n\to+\infty} E[k_z(X_{\tau_n})] - E(k_z(X_\tau))\right] \mu^u(dz) = 0.$$

PROPOSITION 3. *Soit une famille dénombrable de suites croissantes* $(\tau_k{}^n)_k$. *Pour tout entier* n, *on pose*

$$\tau^n = \lim_{k\to+\infty} \tau_k{}^n \qquad \text{et} \qquad \Omega_n = \{\tau^n = \zeta;\, \tau_k{}^n < \zeta\ \forall k\}.$$

Alors, l'ensemble

$$K = \left\{ z \in E \text{ tels que } P^{k_z}\left(\bigcup_n \Omega_n\right) > 0 \right\}$$

est de R*-potentiel nul.*

Démonstration. Soit $K_n = \{z \in E$ tels que $P^{k_z}[\Omega_n] > 0$. On a

$$P^{k_z}(\Omega_n) = \lim_{k\to+\infty} E[k_z(X_{\tau_k}n)] - E[k_z(X_{\tau}\cdot)].$$

D'après la proposition 2, K_n est de R-potentiel nul. Comme $K = \bigcup_n K_n$, K est de R-potentiel nul.

5. *Lien entre les propriétés de la mesure μ^h d'une fonction excessive h, et les propriétés du temps de vie ζ du h-processus*

THÉORÈME 1. *Soit h une fonction excessive. μ^h ne charge pas les ensembles de N-potentiel nul* (*resp. les ensembles de R-potentiel nul*) *équivaut à h est un potentiel naturel* (*resp. régulier*).

Démonstration. (1) Cas des ensembles de N-potentiel nul. Pour tout x tel que $h(x) < +\infty$ et pour toute suite croissante (τ_n) de temps d'arrêt telle que $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \zeta P_x$ p.s., on a

$$h(x) \geqslant E_x[h(X_{\tau_n})] = \int E_x[k_z(X_{\tau_n})]\, \mu^h(dz)$$

$$\lim_{n\to+\infty} E_x[h(X_{\tau_n})] = \lim_{n\to+\infty} \int E_x[k_z(X_{\tau_n})]\, \mu^h(dz).$$

Or, l'ensemble $\{z \text{ tels que } \lim_{n\to+\infty} E_x(k_z(X_{\tau_n})) > 0\}$ est de N-potentiel nul. Si μ^h ne charge pas les ensembles de N-potentiel nul, on a $\lim_{n\to+\infty} E_x(h(X_{\tau_n})) = 0$.

Réciproquement, soit h un potentiel naturel et soit P un ensemble de N-potentiel nul. $\mu^h(P) = 0$.

(2) Cas des ensembles de R-potentiel nul. De même, pour tout x tel que $h(x) < +\infty$ et pour toute suite croissante (τ_n) de temps d'arrêt, on a

$$h(x) \geqslant E_x[h(X_{\tau_n})] = \int E_x[k_z(X_{\tau_n})]\, \mu^h(dz)$$

$$\lim_{n\to+\infty} E_x[h(X_{\tau_n})] = \lim_{n\to+\infty} E_x[k_z(X_{\tau_n})]^h(dz).$$

L'ensemble

$$\{z \in E \mid \lim_{n\to+\infty} E_x[k_z(X_{\tau_n})] > E_x[k_z(X_\tau)]\}$$

est de R-potentiel nul.

Si μ^h ne charge pas les ensembles de R-potentiel nul, on a

$$\lim_{n\to+\infty} E_x(h(X_{\tau_n})) = \int E_x(k_z(X_\tau))\, \mu^h(dz) = E_x[h(X_\tau)]$$

donc h est un potentiel régulier.

Réciproquement, soit h un potentiel régulier et soit P un ensemble de R-potentiel nul: $\mu^h(P) = 0$.

DÉFINITION 1. ζ est complètement h-imprévisible si, pour toute suite croissante (τ_n) de temps d'arrêt telle que $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \zeta$, P_x p.s. on a

$$P_x^h \text{ p.s. } \lim_{n\to+\infty} 1_{(\tau_n<\zeta)} = 0$$

pour tout x tel que $0 < h(x) < +\infty$.

DÉFINITION 2. ζ est complètement h-inaccessible si, pour toute suite croissante (τ_n) de temps d'arrêt telle que $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \tau$, on a sur $(\tau = \zeta)$:

$$\lim_{n\to+\infty} 1_{(\tau_n<\zeta)} = 0 \qquad P_x^h \text{ p.s.}$$

pour tout x tel que $0 < h(x) < +\infty$.

THÉORÈME 2. *ζ est complétement h-imprévisible équivaut à μ^h ne charge pas les ensembles de N-potentiel nul.*

Démonstration. μ^h ne charge pas les ensembles de N-potentiel nul équivaut à h est un potentiel naturel. On montre: ζ complètement h-imprévisible équivaut à h est un potentiel naturel.

Supposons que h soit un potentiel naturel et soit (τ_n) une suite croissante de temps d'arrêt telle que $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \zeta P_x$ p.s. $\forall x$ tel que $0 < h(x) < +\infty$, on a $\lim_{n\to+\infty} P_x(h(X_{\tau_n})) = 0$ donc

$$\lim_{n\to+\infty} 1_{(\tau_n<\zeta)} = 0 \qquad P_x^h \text{ p.s.}$$

pour tout x tel que $0 < h(x) < +\infty$. Réciproquement, si ζ est complètement h-imprévisible, $\lim_{n\to+\infty} h(x)\, P_x^h(1_{(\tau_n<\zeta)}) = 0$ pour tout x tel que $h(x) < +\infty$. h est donc un potentiel naturel.

THÉORÈME 3. *ζ est complétement h-inaccessible équivaut à μ^h ne charge pas les ensembles de R-potentiel nul.*

Démonstration. Il suffit de montrer ζ est complétement h-inaccessible équivaut à h est un potentiel régulier. Si h est un potentiel régulier, $\forall x$ tel que $h(x) < +\infty$, on a

$$E_x[h(X_{\tau_n})] \to E_x(h(X_\tau)).$$

Pour tout x tel que $0 < h(x) < +\infty$

$$\lim_{n\to+\infty} h(x)\, E_x^h(\tau_n < \zeta) = h(x)\, E_x^h(\tau < \zeta).$$

Comme $\tau_n \leqslant \tau$,

$$E_x^h[\tau_n < \zeta; \tau = \zeta] = E_x^h(\tau_n < \zeta) - E_x^h(\tau < \zeta).$$

Comme $h(x) \neq 0$, on a

$$\lim_{n\to+\infty} E_x^h[\tau_n < \zeta; \tau = \zeta] = 0.$$

c'est-à-dire, sur $\tau = \zeta$

$$\lim_{n\to+\infty} 1_{(\tau_n<\zeta)} = 0 \qquad P_x^h \text{ p.s.}$$

Réciproquement, si $h(x) = 0$: évident. Si $0 < h(x) < +\infty$, on refait la démonstration précédente à l'envers.

THÉORÈME 4. *Soit h une fonction excessive. ζ est h-fortement prévisible équivaut à μ^h est portée par un ensemble de N-potentiel nul.*

Démonstration. Si ζ est h-fortement prévisible, il existe une suite (τ_n) de temps d'arrêt tels que $\lim_{n\to+\infty} \tau_n = \zeta P$ p.s. et $(\tau_n < \zeta)$ P^h p.s. pour tout n. Donc μ^h p.s. pour z, on a

$$E(k_z(X_{\tau_n})) = 1.$$

$K = \{z \in E$ tels que $\lim_{n\to+\infty} E(k_z(X_{\tau_n})) > 0\}$ est de N-potentiel nul et μ^h est portée par K.

Réciproquement, soit A un ensemble de N-potentiel nul. Tout compact contenu dans A est de N-potentiel nul, donc polaire (théorème 1, Section II) et on voit facilement que si μ^h est portée par un compact polaire, alors ζ est h-fortement prévisible.

En fait, pour tout compact K contenu dans A, il existe une suite $(T_n{}^K)_n$ de temps d'arrêt tels que

$$\lim_{n\to+\infty} T_n{}^K = \zeta \qquad P_x \text{ p.s.} \quad \text{pour tout} \quad x \in E$$

où h_k est la fonction excessive de mesure spectrale $\mu^{h_k} = 1_K \cdot \mu^h$. A est réunion d'une suite croissante d'ensembles compacts (K_n) et d'un ensemble μ^h-négligeable.

Pour tout x, $h_n(x) = \int k_z(x)\, 1_{K_n}(z)\, \mu^h(dz)$ tend vers $\int k_z(x)\, 1_A \mu^h(dz)$.

Pour tout entier $p > 0$, soit $(T_n{}^p)_n$ la suite annonçant ζ pour h_p. On a

$$\zeta = \lim_{n\to+\infty} T_n{}^p\, P \text{ p.s.} \qquad \text{et} \qquad (T_n{}^p < \zeta)\, P^{h_p} \text{ p.s. } \forall n$$

D'après le théorème 1, Section 1, Chapitre II, il existe une suite (T_n) qui vérifie $\forall p$

$$(T_n < \zeta)\, P^{h_p} \text{ p.s.} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to+\infty} T_n = \zeta P \text{ p.s.}$$

Comme $h(x) = \lim_{p\to+\infty} h_p(x)$, on tire

$$\lim_{p\to+\infty} P^{h_p}(T_n < \zeta) = \lim_{p\to+\infty} P[h_p(X_{T_n})] = P[h(X_{T_n})]$$

Donc, P^h p.s., on a $T_n < \zeta$.

THÉORÈME 5. *Soit h une fonction excessive. ζ est h-accessible équivaut à μ^h est portée par un ensemble de R-potentiel nul.*

Démonstration. ζ est h-accessible entraîne

$$\mu^h \text{ p.s.} \quad \text{pour } z, \text{ on a} \quad P^{k_z}\Big[\bigcap_n (\Omega - \Omega_n)\Big] = 0$$

Ω_n désignant les parties d'accession à ζ (voir définition 2, Chapitre II, Section 1).

Donc μ^h est portée par l'ensemble

$$A = \left\{ z \text{ tels que } P^{k_z}\left[\bigcup_n \Omega_n\right] > 0 \right\}$$

qui est de R-potentiel nul (Proposition 3, Section 4, Chapitre V).

Réciproque. Si μ^h est portée par un ensemble de R-potentiel nul, alors ζ est h-accessible.

On utilise le lemme suivant.

LEMME. *Soit h une fonction excessive. On suppose μ^h est portée par A et $A = \bigcup_n F_n \mu^h$ p.s. (à un ensemble μ^h-négligeable près). Si ζ est h_{F_n}-accessible pour tout n où h_{F_n} est la fonction excessive de mesure spectrale $1_{F_n} \cdot \mu^h$, alors ζ est h-accessible.*

Démonstration. A chaque F_n on associe une suite d'ensembles $(K_p^{F_n})$ d'accessibilité. On a [23] pour tout n: $P^{h_{F_n}}[\bigcap_p (\Omega - K_p^{F_n})] = \int_{F_n} P^{k_z}[\bigcap_p (\Omega - K_p^{F_n})]\, \mu^h(dz) = 0$ donc

$$\int_{F_n} P^{k_z}\left[\bigcap_p \bigcap_i (\Omega - K_p^{F_i})\right] \mu^h(dz) = 0.$$

On passe à la limite quand $n \to +\infty$, donc

$$\int P^{k_z}\left[\bigcap_p \bigcap_i (\Omega - K_p^{F_i})\right] \mu^h(dz) = 0$$

et ζ est h-accessible.

On en déduit, si μ^h est portée par A et si pour tout compact F contenu dans A, ζ est h_F-accessible où h_F est la fonction excessive de mesure spectrale $1_F \cdot \mu^h$, alors ζ est h-accessible.

Il suffit de montrer que ζ est h-accessible si μ^h est portée par un compact de R-potentiel nul, c'est-à-dire semi-polaire (théorème 1, Section 3, Chapitre V).

On utilise: Un finement fermé semi-polaire F est réunion dénombrable disjointe d'ensembles totalement effilés et d'un ensemble polaire [15].

On définit la suite des dérivés de F: $F = \bigcup_{i<k}(F_i - F_{i+1}) \cup P$ (où P est polaire), $F_{i+1} = \operatorname{reg} F_i$.

$F_i - F_{i+1}$ est réunion disjointe d'ensembles totalement effilés

$F - \operatorname{reg} F = F \cap \{e_F^p < 1\}$; soit $B_n = \{1 - 1/n \leqslant e_F^p < 1 - 1/n + 1\}$

Il suffit donc de montrer μ^h est portée par un compact totalement effilé entraîne ζ est h-accessible.

Les trajectoires rencontrent K suivant un ensemble au plus dénombrable et discret. Soit $(T_n(\omega)$ la suite des temps d'arrêt tels que)

$$(T_n(\omega)) = \{t \mid X_t(\omega) \in K\}.$$

On peut supposer la suite croissante et $\lim_{n\to+\infty} T_n(\omega) = \zeta(\omega)$. Soit U_n une suite d'ouverts relativement compacts dans $E - K$ tels que $\bar{U}_n \subset U_{n+1}$. $K = \operatorname{supp} \mu^h$ entraîne P^h p.s. $Z_\zeta(\omega) = \lim_{t\to\zeta} X_t(\omega) \in K$. On pose

$$\forall n \; \Omega_{n+1} = \{T_n < \zeta = T_{n+1}\},$$
$$\Omega_0 = \{T_0 = \zeta\},$$
$$\tilde{\Omega}_\infty = \{T_n < \zeta \; \forall n\}.$$

Soit $S_n^{T_i}$ le premier temps d'entrée dans U_n après T_i. La suite $S_n^{T_i}$ est décroissante et

$$(T_i < \zeta) = \bigcup_n (S_n^{T_i} < \zeta)$$

sur $(S_n^{T_i} < \zeta)$, on prend la suite $(\tau_k{}^i)_{k\geqslant n}$ des premiers temps de sortie de U_k après $S_n^{T_i}$.

On prend toutes les suites $(\tau_k{}^i)_{k\geqslant n}$, sur $T_{i+1} = \zeta \; P$ p.s.

$$\zeta = \lim_{k\to+\infty} \tau_k{}^i \qquad \text{et} \qquad \tau_k{}^i < \zeta \; P^h \text{ p.s. } \forall k \geqslant n \qquad \text{sur} \quad (S_n^{T_i} < \zeta).$$

On a donc une famille dénombrable de suites telles que

$$\Omega = \bigcup_n \Omega_n \qquad P^h \text{ p.s.}$$

Remarque. Si on fait les hypothèses de mesurabilité restrictives nécessaires sur les fonctions $z \to E[kz(X.)]$ (voir Section 4), on obtient les résultats suivants: soit h une fonction excessive.

ζ est h-fortement prévisible équivaut à μ^h est portée par un polaire.

ζ est h-accessible équivaut à μ^h est portée par un semi-polaire.

Chapitre VI. Réciproques

Soit h_1 une fonction excessive. Si pour toute fonction excessive h_2, on a $h_1 \leqslant h_2$ entraîne $\mu^{h_1} \leqslant \mu^{h_2}$, est-ce que μ^{h_1} est portée par un polaire ?

Il suffirait de montrer: si p est une fonction excessive telle que μ^p ne charge pas les polaires, alors il existe $h_3 \geqslant p$ tel que $\mu^{h_3} \not\geqslant \mu^p$.

Si μ^p ne charge pas les polaires, il existe un entier $n > 0$ tel que $A_n = \{x \mid p(x) < n\}$ vérifie $\mu^p(A_n) > 0$.

En effet: pour tout entier n, soit $A_n = \{x \mid p(x) < n\}$; $\{x \mid p(x) = +\infty\}$ est polaire donc μ^p-négligeable, donc μ^p p.p. on a $= E = \bigcup_n A_n$.

Lemme 1. *Si μ^p ne charge pas les semi-polaires, il existe $h_3 \geqslant p$ telle que $\mu^{h_3} \not\geqslant \mu^p$.*

Démonstration. Soit n tel que $\mu^p(A_n) > 0$ et soit h_3 la fonction excessive de mesure spectrale

$$\mu^{h_3} = 1_{A_n^c}\mu^p + n\mu^1$$

où $A_n{}^c = \{x \mid p(x) \geqslant n\}$.

On suppose 1 harmonique dans E, donc μ^1 est portée par la frontière. Évidemment $\mu^{h_3} \not\geqslant \mu^p$ Montrons que $h_3 \geqslant p$

$$p(x) = \int k_z(x)\, 1_{A_n}(z)\, \mu^p(dz) + \int_{A_n^c} k_z(x)\, \mu^p(dz).$$

Il suffit de montrer que

$$h'(x) = \int_{A_n} k(x)\, \mu^p(dz) \leqslant n$$

où $P_{A_n} h' = h'$ [9].

Comme $P_{A_n} h'(x) = E_x[h'(X_{T_n})] \leqslant E_x[p(X_{T_n})] \leqslant n$ où

$$T_n = \inf\{t > 0 \mid X_t \in A_n\}; \qquad \text{on a} \quad h'(x) \leqslant n.$$

Il suffirait donc de montrer si μ^p est portée par un totalement effilé et ne charge pas les polaires, il existe $h_3 \geqslant p$ tel que $\mu^{h_3} \not\geqslant \mu^p$. Ceci est vérifié dans le cas de la translation uniforme sur R.

Théorème 1. *Soit h une fonction excessive > 0 μ^h portée par un polaire équivaut à . Pour toute fonction excessive h', on a:*

$$\lim_{\substack{y \to x \\ \mathscr{G}_x}} (h'/h)(y) = L(x)\, \mu^h \text{ p.p.} \qquad \text{pour} \quad x \text{ où } L = (d\mu^{h'}/d\mu^{h'}).$$

Si μ^h est portée par un polaire, ζ est h-prévisible et on applique le théorème 2, Section 3, Chapitre IV.

Réciproquement, supposons que pour toute fonction excessive h', on a:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ \mathscr{G}_x}} (h'/h)(y) = L(x)\, \mu^h \text{ p.p.} \qquad \text{pour} \quad x \text{ où } L = (d\mu^{h'}/d\mu^h).$$

Si μ^h n'est pas portée par un polaire, alors $\mu^h = \mu^{h_1} + \mu^{h_2}$ où μ^{h_1} ne charge pas les polaires et μ^{h_2} est portée par un polaire [15].

μ^{h_1} ne charge pas les polaires entraîne il existe une fonction excessive p telle que μ^{h_1} soit équivalente à μ^p et p est bornée [9, p. 144]. (On se place dans les hypothèses plus restrictives de Kunita-Watanabe) [21].

Supposons $p \leqslant c$ où c est une constante > 0. Soit $h' = 1$. On a:

$$\lim_{\substack{y \to x \\ \mathscr{G}_x}} 1/p \geqslant 1/c > 0 \qquad \text{et existe} \quad \mu^p \text{ p.p}$$

donc

$$\lim_{\substack{y \to x \\ \mathscr{G}_x}} (1/h) = \lim_{\substack{y \to x \\ \mathscr{G}_x}} (1/p) \times \lim_{\substack{y \to x \\ \mathscr{G}_x}} (p/h) \geqslant (1/c) \lim_{\substack{y \to x \\ \mathscr{G}_x}} (p/h)$$

Les limites existant μ^p p.p.

$$\mu^p = f\mu^{h_1} \qquad \text{avec} \quad f > 0 \quad \mu^p \text{ p.p.}$$
$$\mu^{h_1} = \alpha\mu^h \qquad \text{avec} \quad \alpha > 0 \quad \mu^{h_1} \text{ p.p.} \quad \text{donc} \quad \mu^p \text{ p.p.}$$
$$\mu^p = \alpha f \cdot \mu^h \qquad \text{avec} \quad \alpha f > 0 \quad \mu^p \text{ p.p.}$$

donc

$$\lim_{\substack{y \to x \\ \mathscr{G}_x}} (1/h) > 0 \quad \mu^p \text{ p.p.}$$

Montrons que si $\mu^1 = \alpha\mu^h + \nu$ avec $\nu \perp \mu^h$ alors $\alpha = 0\, \mu^p$ p.p. D'après l'hypothèse on aurait

$$\lim_{\substack{y \to x \\ \mathscr{G}_x}} (1/h) = 0 \quad \mu^p \text{ p.p.}$$

d'où une contradiction.

$$\mu^1 = \alpha\mu^h + \nu = \alpha\mu^{h_1} + \alpha\mu^{h_2} + \nu$$

si $\alpha > 0$ sur un ensemble non μ^{h_1} négligeable, on aurait μ^1 non portée par un polaire, ce qui est faux.

Remarque. Soit h une fonction excessive non nécessairement > 0. Soit x tel que $0 < h(x) < +\infty$ — le h-processus partant de x reste dans l'ensemble $\{x \mid h(x) > 0\}$.

Si B est polaire pour le 1-processus, alors B est polaire pour le h-processus. Réciproquement si B est polaire pour le h-processus et si B est contenu dans l'ensemble $\{h > 0\}$ alors B est polaire pour le 1-processus.

Si pour toute fonction excessive h' telle que $\mu^{h'}$ soit absolument continue par rapport à μ^h, on a:

$$\lim_{t \to \zeta} (h'/h)(X_t) = L_{h'}(Z_\zeta)\, ps - P_x{}^h \qquad \forall x \in E_h ,$$

où $\mu^{h'} = L_{h'}\mu^h$, on peut se demander si le temps de vie ζ du h-processus est h-pré-visible.

En effet si h n'est pas strictement positive, ζ est h-prévisible n'entraîne pas μ^h est portée par un polaire pour le 1-processus.

Par exemple dans le cas de la translation uniforme sur R de vitesse 1, si on prend k_z la fonction excessive de mesure spectrale $\epsilon_{\{z\}}$ (masse de Dirac au point z), le temps de vie ζ du k_z-processus est k_z-prévisible, mais $\{z\}$ n'est pas polaire pour le 1-processus. Cependant $\{z\}$ est polaire pour le k_z-processus.

References

1. E. B. Dynkin, Excessive functions and space of exits of a Markov process, *Teor. Probability Appl.* **14** (1969), 37–54.
2. E. B. Dynkin, The space of exits of a Markov process, *Russian Math. Surveys* (4) **24** (1969).
3. E. B. Dynkin, "Markov Processes," Springer Verlag, Berlin/Heidelberg, 1965.
4. J. L. Doob, Conditional Brownian motion and the boundary limits of harmonic functions, *Bull. Soc. Math. France* **85** (1957), 431–458.
5. R. S. Martin, Minimal positive harmonic functions, *Trans. Amer. Math. Soc.* **49** (1941), 137–172.
6. P. A. Meyer, "Probabilités et Potentiel," Publications de l'Institut de Mathématiques de l'Université de Strasbourg, Hermann, 1966.
7. P. A. Meyer, "Lectures Notes in Mathematics. Processus de Markov," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1967.
8. P. A. Meyer, "Lectures Notes in Mathematics. Processus de Markov, La Frontière de Martin," Vol. 2, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1968.
9. P. A. Meyer, "Séminaire de Probabilités III, Strasbourg," p. 147, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1969.
10. J. Azema, Une remarque sur les temps de retour, *in* "Séminaire de probabilités de Strasbourg VI" (P. A. Meyer, Ed.), Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1970.

11. J. AZEMA, Quelques applications de la théorie générale des processus, *in* "Séminaire de probabilités de Strasbourg VII" (P. A. Meyer, Ed.), Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1973.
12. M. BRELOT, Axiomatique et frontière de Martin, *J. Math. Pures Appl.* **35** (1956), 297–335.
13. L. NAIM, Sur le rôle de la frontière de R. S. Martin dans la théorie du potential, *Ann. Inst. Fourier* **7** (1957), 183–185.
14. H. FÖLLMER, The exit measure of a supermartingale, *Z. Wahrscheinlichkeitstheorie verw. Geb.* **21** (1972), 154–166.
15. C. DELLACHERIE, Thèse, Université de Strasbourg, 1970; "Contributions à la théorie générale des processus: Capacités et processus stochastiques" Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg, 1972.
16. H. FOLLMER, Feine Topologie am Martinrand eines Standard prozesses, *Z. Wahrscheinlichkeitztheorie verw. Geb.* **12** (1969), 127–144.
17. J. NEVEU, Chaînes de Markov et théorie du potential, *Ann. Fac. Sci. Clermont.* 1964.
18. M. BRELOT, On topologies and boundaries in potential theory, *in* "Lectures Notes in Mathematics" p. 175, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York,
19. G. A. HUNT, Markov chains and potentials, *Illinois J. Math.* **4** (1960), 313–340.
20. H. KUNITA AND T. WATANABE, Markov processes and Martin boundaries, *Bull. Amer. Math. Soc.* **69** (1963), 386–391.
21. H. KUNITA AND T. WATABABE, Markov processes and Martin boundaries, *Illinois J. Math.* **9** (1965), 485–526.
22. *Comptes Rendus A* **273** (1971), 620, 857; *Comptes Rendus A* **274** (1972), 202; *Comptes Rendus A* **274** (1972), 1362.
23. H. AIRAULT, Minorantes harmoniques et potentiels, à paraître.