Discrete Mathematics 17 (1977) 187–189.

UNE METHODE DE RESOLUTION DES EQUATIONS POSTIENNES A PARTIR D'UNE SOLUTION PARTICULIERE

Michel SERFATI
62, Avenue du Chateau, 92340 Bourg La Reine France

Received 24 February 1976

La méthode de résolution présentée ici est indépendante de celle donnée en [4] qui fournissait une technique systématique de résolutions (méthode des éliminations successives). Elle généralise à une r-algèbre de Post quelconque des résultats obtenus par Carvallo [5]. Elle s'inspire de la méthode de Lowenheim, développée dans [1]. Les notations utilisées seront celles de [5]: Soit donc P une r-algèbre de Post; la borne supérieure (resp. inférieure) des deux éléments x et y de P sera notée $x \vee y$ (resp. $(x \cdot y)$; la chaine des éléments distingués sera notée:

$$\langle r \rangle = \{0 = e_0 < e_1 < \cdots < e_{r-1} = 1\}.$$

Les composantes postiennes d'un élément x de P seront notées x^i, de telle sorte que:

$$x = \bigvee_{i=0}^{r-1} (x^i \cdot e_i).$$

La négation d'un élément x (c'est-à-dire le plus grand élément de l'ensemble des solutions de $x \cdot u = 0$) sera noté x'; on définira aussi $x'' = (x')' = \overline{x'}$ (car x' est complémenté).

On utilisera aussi la notation dite exponentielle:

$$x = (x_1, \ldots, x_n) \in P^n$$

$$\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \langle r \rangle^n,$$

$$x^\alpha = (x_1)^{\alpha_1} \cdots (x_n)^{\alpha_n} = \prod_{1 \leq i \leq n} (x_i)^{\alpha_i},$$

avec, par définition:

$$U^{e_k} = U^k \qquad (U \in P).$$

Enfin un polynôme postien f à n variables est défini dans [5]. Il vérifie en particulier le théorème de la forme normale disjonctive:

$$(\forall x \in P^n) \qquad f(x) = \bigvee_{\alpha \in \langle r \rangle^n} x^\alpha \cdot f(\alpha).$$

On a montré dans [5] que tout système de p équations et q inéquations postiennes à n inconnues était équivalent à une seule équation du type $f(x) = 0$.

On se propose ici de générer toutes les solutions d'une telle équation à partir d'une solution particulière.

Soit donc une famille à r éléments de P^n, où P est une r-algèbre de Post. On notera:

$$x_i = ((x_i)_1, \ldots, (x_i)_j, \ldots, (x_i)_n) \qquad \text{pour } 0 \leq i \leq r-1 \quad \text{et } 1 \leq j \leq n.$$

Théorème 1. *Soit* $\lambda \in P$, $\lambda = \bigvee_{i=0}^{r-1} (\lambda^i \cdot e_i)$. *Alors*

$$(\forall \alpha \in \langle r \rangle^n) \qquad \left[\bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot x_i\right]^\alpha = \bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot (x_i)^\alpha.$$

En effet:

$$z = \left[\bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot x_i\right]^\alpha = \prod_{j=1}^{n} \left\{\left[\bigvee_{i=0}^{n-1} \lambda^i \cdot x_i\right]_j\right\}^{\alpha_j} = \prod_{j=1}^{n} \left[\bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot (x_i)_j\right]^{\alpha_j}.$$

Mais d'après la règle de transparence des formes disjonctives ([5], page 53), on a:

$$z = \prod_{j=1}^{n} \left[\bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot [(x_i)_j]^{\alpha_j}\right] = \bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot \prod_{j=1}^{n} [(x_i)_j]^{\alpha_j}$$

$$= \bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot [x_i]^\alpha.$$

On en déduit:

Corollaire. *Avec les hypothèses précédentes,*

$$f\left(\bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot x_i\right) = \bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot f(x_i).$$

Le théorème de la forme normale disjonctive fournit:

$$f\left(\bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot x_i\right) = \bigvee_{\alpha \in \langle r \rangle^n} f(\alpha) \cdot \left[\bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot x_i\right]^\alpha.$$

Donc:

$$f\left(\bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot x_i\right) = \bigvee_{\alpha \in \langle r \rangle^n} f(\alpha) \cdot \left[\bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot [x_i]^\alpha\right]$$

$$= \bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot \left[\bigvee_{\alpha \in \langle r \rangle^n} f(\alpha) \cdot [x_i]^\alpha\right] = \bigvee_{i=0}^{r-1} \lambda^i \cdot f(x_i).$$

Soit alors à résoudre d'équation algébrique $f(t) = 0$ où $t \in P^n$, et u une solution particulière de l'équation précédente.

Théorème 2. *L'ensemble des solutions de*

$$f(t) = 0 \tag{1}$$

s'écrit sous la forme paramétrique:

$$t = [f(p)]'' \cdot u \vee [f(p)]' \cdot p \tag{2}$$

où u est une solution particulière de (1), *et p un élément arbitraire de P^n.*

Pour retrouver le corollaire, on prend:

$$x_0 = u; \quad x_1 = \cdots = x_{r-2} = 0; \quad x_{r-1} = p$$

et

$$\lambda = [f(p)]'.$$

Alors

$$\lambda^0 = [f(p)]''; \quad \lambda^1 = \cdots = \lambda^{r-2} = 0, \quad \lambda^{r-1} = [f(p)]',$$

et donc

$$f\{[f(p)]'' \cdot u \vee [f(p)]' \cdot p\} = [f(p)]'' \cdot f(u) \vee [f(p)]' \cdot f(p).$$

Le premier terme est nul par hypothèse ($f(u) = 0$), le second par structure.

En sens inverse, si t est une solution de (1), on montre que t s'écrit sous la forme (2). Il suffit de choisir $p = t$. En effet:

$$[f(t)]'' \cdot u \vee [f(t)]' \cdot t = 0 \cdot u \vee 1 \cdot t = t.$$

Bibliographie

[1] M. Carvallo, Sur la résolution des équations de post à n valeurs, C. R. Acad. Sci. 267 (1968) 628–630.

[2] M. Carvallo, Logiques à trois valeurs, logiques à seuil (Gauthier-Villars, Paris, 1968).

[3] P.L. Hammer et S. Rudeanu, Boolean Methods in Operation Research and Related Areas (Springer-Verlag, Berlin, 1968).

[4] M. Serfati, Sur les polynômes postiens, C. R. Acad. Sci. 276 (1973) 677–679.

[5] M. Serfati, Introduction aux algèbres de Post et à leurs applications, Cahiers no. 21 du Bureau de Recherche Opérationnelle (Institut de Statistique des Universités de Paris, 1974).