JOURNAL OF ALGEBRA 103, 527–591 (1986)

Submersion et descente

GABRIEL PICAVET

Université de Clermont II, Département de mathématique pure,
B. P. 45 63170-Aubiere, France

Communicated by J. Dieudonné

Received May 27, 1985

INTRODUCTION: CONVENTIONS ET NOTATIONS

Introduction

Les morphismes submersifs sont utilisés en Géométrie Algébrique pour les problèmes de descente. En dehors de la définition donnée dans les E.G.A. de A. Grothendieck et J. Dieudonné [9], ces morphismes ne semblent avoir fait l'objet d'aucun travail. L'étude qui suit est faite dans le cadre de l'Algèbre Commutative. Rappelons qu'un morphisme $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ de schémas affines est dit submersif s'il est surjectif et si la topologie de $\mathrm{Spec}(A)$ est quotient de celle de $\mathrm{Spec}(A')$. Il apparait rapidement qu'en dehors de propriétés générales établies dans le début du cha-

0021-8693/86 $3.00

pitre I, rien de substantiel ne peut être dit sur ces morphismes. Cependant nous obtenons une classification des morphismes submersifs. Celle-ci permet de dégager une notion particulière de morphismes submersifs que l'on a désigné du nom de subtrusion, ou morphisme subtrusif. La classe des subtrusions contient toutes les submersions utilisées en pratique. Les morphismes subtrusifs ont des caractérisations et propriétés agréables. La caractérisation fondamentale des morphismes subtrusifs est la suivante: le morphisme $\mathrm{Spec}(A') \to \mathrm{Spec}(A)$ est subtrusif si et seulement si tout couple $P \subset Q$ d'idéaux premiers de A se relève en un couple $P' \subset Q'$ d'idéaux premiers de A'. Les morphismes descendant la nullité des modules ont des propriétés voisines de la submersivité. Dans le cas d'un anneau de base Noethérien, on obtient des propriétés agréables: tout morphisme descendant la nullité des modules est universellement subtrusif, de même que tout morphisme universellement submersif. Il n'en est pas de même dans le cas d'un anneau de base quelconque. Des techniques valuatives permettent de ramener l'étude des morphismes universellement subtrusifs à celle des morphismes purs. Ces derniers apparaissent donc comme un exemple fondamental de morphisme subtrusif.

On obtient alors le résultat principal du chapitre I caractérisant les morphismes universellement subtrusifs, en terme de la clôture intégrale d'un idéal. Différentes applications en sont tirées. Nous avons placé dans le chapitre II des résultats de nature plutôt technique: ils concernent les passages à la limite inductive, les changements de base et localisation des morphismes subtrusifs. Enfin, une dernière partie, généralisant des résultats connus sur les morphismes entiers injectifs, montre que les morphismes universellement subtrusifs descendent certaines propriétés algébriques, comme la platitude des modules, avec des conditions de finitude. Ont été ajoutés divers résultats de descente.

Je tiens à remercier ici D. Ferrand pour l'aide amicale apportée pendant la mise au point des résultats les plus importants.

Conventions et notations

Dans ce travail, les anneaux sont commutatifs et unitaires. Par conséquent, les morphismes d'anneaux sont unitaires, de même que les modules. De manière générale, on utilise les conventions et notations de N. Bourbaki et des E.G.A. de A. Grothendieck et J. Dieudonné. Cependant contrairement aux conventions des E.G.A et en accord avec N. Bourbaki, un corps sera considéré comme un anneau de valuation. Ceci permet d'éviter un alourdissement des textes des propositions. Le cas des corps, donnant lieu en général à des démonstrations triviales, sera laissé au lecteur.

La catégorie des espaces spectraux sera désignée par *Spectr*, pour sa définition et ses propriétés on consultera le travail de M. Höchster [12].

Une propriété topologique concernant un homomorphisme d'anneaux sera toujours une propriété de morphisme spectral associé. Si l'on veut spécifier une propriété de morphisme spectral associé à un homomorphisme d'anneaux f, on fera précéder le nom de la propriété par le préfixe a. Par exemple, on dira que le morphisme f est a-surjectif si le morphisme spectral ${}^af$ est surjectif. L'adhérence d'une partie réduite à un élément x d'un espace topologique sera notée $\bar{x}$. Plusieurs topologies pouvant intervenir sur le spectre d'un anneau, par exemple la topologie constructible, outre celle de Zariski, une propriété relative à une topologie sera indiquée par un préfixe précédant le nom de la propriété. Par exemple une partie fermée pour la topologie constructible sera dite C-fermée: l'adhérence constructible d'une partie X d'un spectre sera notée par $\bar{X}^C$. Nous désignons par $S(X)$ (resp. $G(X)$) le spécialisé (resp. le générisé) d'une partie X d'un espace topologique. Nous appelons S-topologie sur un spectre la topologie définie par l'opération d'adhérence qui est la spécialisation. La topologie opposée sur le spectre d'un anneau, définie par M. Höchster dans [12], est appelée 0-topologie. Les parties fermées pour cette topologie sont les parties quasi-compactes stables par générisation. Nous désignons l'adhérence d'une partie X d'un spectre d'anneau, pour la 0-topologie, par $\bar{X}^0$.

Soit A un anneau, un sous-module N d'un module M sur l'anneau A est dit pur si l'homomorphisme $N \otimes_A P \to M \otimes_A P$ est injectif, pour tout A-module P. Un homomorphisme d'anneaux $A \to A'$ est dit pur s'il est universellement injectif. Les homomorphismes purs sont étudiés par J. P. Olivier dans [16]. Nous dirons qu'un homomorphisme d'anneaux est de Nakayama s'il descend la nullité des modules: si $f: A \to A'$ est un tel homomorphisme, tout A-module M, tel que $M \otimes_A A' = 0$, est nul. Les morphismes de Nakayama sont étudiés par J. P. Olivier dans [16] sous le nom de morphismes fortement de Nakayama et par L. Gruson et M. Raynaud dans [23] sous le nom d'homomorphismes vérifiant la condition (0).

Enfin, rappelons la définition d'un anneau de Baer: un anneau A est dit de Baer si l'annulateur de tout idéal est un idéal principal engendré par un idempotent. Un tel anneau est réduit et son spectre est un espace topologique extrémal, i.e., l'adhérence de toute partie ouverte est une partie ouverte. Les composantes irréductibles d'un anneau de Baer sont disjointes et tout localisé en un idéal premier de cet anneau est un anneau intègre. Tout anneau réduit se plonge par un morphisme d'anneaux entier essentiel dans un anneau de Baer. Pour toutes ces propriétés, on pourra voir par exemple l'article de G. Picavet [19], ainsi que les articles cités dans les références de [19]. Si A est un anneau réduit, on désignera par $A \to B(A)$ l'homomorphisme d'anneaux de A dans son enveloppe de Baer $B(A)$.

Le morphisme $A \to B(A)$ est utilisé pour faire des changements de base. D'autres morphismes entiers sont utilisés pour faire des changements de base. Pour un anneau A, réduit, M. Höchster et d'autres, cf. [11], ont construit un morphisme clôture intégrale totale $A \to \Omega(A)$. Ce morphisme est entier essentiel, l'anneau $\Omega(A)$ est de Baer et possède la propriété de factorisation linéaire (propriété F.L.). Un anneau est dit avoir la propriété F.L. si tout polynôme unitaire à une variable sur cet anneau se factorise en facteurs linéaires. En fait l'anneau $\Omega(A)$ est totalement intégralement clos (T.I.C.), c'est à dire un objet injectif par rapport à la sous-catégorie des morphismes entiers injectifs.

Rappelons, au passage, un résultat de N. Bourbaki: un morphisme entier injectif entre anneaux intègres est essentiel.

A. Besserre a construit pout tout anneau A, un morphisme que nous avons désigné dans [19] par $A \to \mathrm{Bes}(A)$ (cf. [3]). Ce morphisme est entier fidèlement plat et l'anneau $\mathrm{Bes}(A)$ possède la propriété F.L. Les rapports entre $\mathrm{Bes}(A)$ et $\Omega(A)$ ont été étudiés dans [19]. D'autres résultats sur $\mathrm{Bes}(A)$ pourront paraître dans un article prochain.

Un morphisme d'anneaux est dit incomparable si tout couple d'idéaux premiers du but de ce morphisme, comparables et se contractant sur un même idéal premier, sont égaux. Ces morphismes sont étudiés intensivement par H. Uda dans [26].

Donnons, pour terminer, la formule dite des contenus: soit A un anneau, le contenu d'un polynôme $f(X)$ de $A[X]$ est l'idéal $c(f)$ de A engendré par ses coefficients: on a alors la formule, pour tout couple $(f(X), g(X))$ de polynômes, de contenus respectifs $c(f)$ et $c(g)$: il existe un entier $n \geqslant 0$ tel que $c(f)\, c(g)^{n+1} = c(fg)\, c(g)^n$.

I. Propriétés générales des morphismes submersifs

1. *Définition des morphismes submersifs et caractérisation topologique et algébrique*

La définition suivante provient des E.G.A. de A. Grothendieck et J. Dieudonné [9].

Définition 1. Soit $f: Z' \to Z$ une application continue, entre espaces topologiques. On dit que f est submersive si:

(a) L'application f est surjective.

(b) Toute partie X de Z, telle que $f^{-1}(X)$ soit ouverte (resp. fermée) est ouverte (resp. fermée).

Soit $f: Z' \to Z$ une application continue, surjective, et considérons la topologie quotient sur Z. Un fermé pour cette topologie est une partie X de Z telle que $f^{-1}(X)$ soit fermée dans Z'. L'adhérence d'une partie X de Z pour cette topologie est donc donnée par $\tilde{X} = \bigcap Y$, où l'intersection est prise sur l'ensemble des parties Y de Z, contenant X, et telles que $f^{-1}(Y)$ soit fermée.

Pour une partie X de Z, posons $\rho(X)=f(\overline{f^{-1}(X)})$. On remarque que l'on a $X\subset\rho(X)\subset\bar{X}$, et que $\rho(X)=X$ est équivalent à $f^{-1}(X)$ est une partie fermée. Soit W un ordinal, tel que $\mathrm{Card}(W)>\mathrm{Card}(\mathscr{P}(Z))$, où $\mathscr{P}(Z)$ est l'ensemble des parties de Z. On définit par récurrence transfinie la suite croissante de parties $(X_\alpha)_{\alpha\in W}$ de Z par $X_0=X$, $X_1=\rho(X)$; si $\alpha=\beta+1$, on pose $X_\alpha=\rho(X_\beta)$ et, si α est un élément limite, $X_\alpha=\bigcup_{\beta<\alpha}X_\beta$. Il existe un plus petit élément γ de W tel que $X_\gamma=X_{\gamma+1}$. Il est alors clair que $\tilde{X}$ est contenue dans X_γ. D'autre part, soient X et Y des parties de Z telles que $X\subset Y$ et $f^{-1}(Y)$ soit fermée. Puisqu'alors $Y=\rho(Y)$, on voit, par récurrence, que X_γ est contenu dans Y. Il en résulte que X_γ n'est autre que $\tilde{X}$.

On pourrait prendre une suite légèrement différente en définissant, lorsque α est limite, X_α par $\rho(\bigcup_{\beta<\alpha}X_\beta)$. On obtiendrait les mêmes résultats.

PROPOSITION 1. *Soit $f\colon Z'\to Z$ une application continue surjective, entre espaces topologiques. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(1) *f est une application submersive.*

(2) *Pour toute partie X de Z, les ensembles $\tilde{X}$ et $\bar{X}$ sont égaux.*

(3) *Pour toute partie X de Z telle que $f^{-1}(X)$ soit fermée, $f^{-1}(\bar{X})=\overline{f^{-1}(X)}$.*

(4) *Pour toute partie X de Z, l'ensemble $\tilde{X}$ est fermé.*

Preuve. Elle est à peu près évidente, compte tenu des remarques précédentes.

Il est bien connu qu'une application continue surjective qui est ouverte (ou fermée) est submersive.

Dans la suite, on considère uniquement des morphismes spectraux. Si $f\colon Z'\to Z$ est un tel morphisme et Z et Z' sont munis de la S-topologie, on désignera par $\hat{X}$ l'adhérence d'une partie X de Z dans la topologie quotient de la S-topologie.

PROPOSITION 2. *Soit $f\colon Z'\to Z$ un morphisme spectral surjectif.*

(1) *Le morphisme f est submersif si et seulement si pour toute partie X de Z qui soit proconstructible $\bar{X}=\tilde{X}$.*

(2) *Le morphisme f est submersif si et seulement si pour tout élément x de Z on a $\bar{x}=\tilde{x}$.*

(3) *Si le morphisme f est submersif pour la S-topologie, il est submersif.*

(4) *Le morphisme f est S-submersif si et seulement si pour tout élément x de Z, on a $\bar{x}=\hat{x}$.*

Preuve. La partie (1) se démontre en remarquant qu'une partie X de Z

telle que $f^{-1}(X)$ soit fermée est proconstructible. La partie (2) résulte de l'égalité $\bar{X} = S(X)$, satisfaite pour toute partie proconstructible X de Z et de ce que l'opération $\sim$ est une fermeture. Supposons le morphisme f submersif pour la S-topologie. Par conséquent, pour toute partie X de Z, on obtient les relations: $\hat{X} = S(X)$ et $\hat{X} \subset \tilde{X} \subset \bar{X}$; si de plus X est proconstructible, donc $\bar{X} = S(X)$, on voit que $\bar{X} = \tilde{X}$, ce qui démontre (3). Pour achever la preuve de la proposition, il suffit de démontrer que, sous l'hypothèse de (4), le morphisme f est S-submersif, compte tenu de la proposition 1. A cet effet, on remarque d'abord qu'étant données une partie X de Z et une partie Y' de Z' l'ensemble $f^{-1}(X) \cap Y'$ est vide si et seulement si $X \cap f(Y')$ l'est. Soit X une partie de Z telle que $f^{-1}(X)$ soit stable par générisation et soit Y une partie de Z, proconstructible, on va montrer par récurrence que $f^{-1}(X) \cap \overline{f^{-1}(Y)} = \varnothing$ entraîne $X \cap \hat{Y} = \varnothing$. Notons par (Y_α) la suite de parties associées à Y pour la S-topologie. De $\overline{f^{-1}(Y)} = S(f^{-1}(Y))$, on déduit $X \cap Y_1$ est vide. Supposons que pour un α on ait $X \cap Y_\alpha = \varnothing$, alors $f^{-1}(X) \cap f^{-1}(Y_\alpha)$ est aussi vide. Puisque la partie $f^{-1}(X)$ est stable par générisation, l'ensemble $f^{-1}(X) \cap S(f^{-1}(Y_\alpha))$ est vide, d'où l'on déduit que $X \cap Y_{\alpha+1} = \varnothing$. Si β est limite, supposant pour tout $\alpha < \beta$ que $X \cap Y_\alpha = \varnothing$, on obtient que $X \cap Y_\beta$ est vide, d'où le résultat. Supposant toujours que $f^{-1}(X)$ soit stable par générisation et que $X \cap \bar{x} \neq \varnothing$, l'hypothèse de (4) montre que $X \cap \hat{x} \neq \varnothing$, d'où $f^{-1}(X) \cap \overline{f^{-1}(x)} \neq \varnothing$. Puisque $f^{-1}(X)$ est une partie stable par générisation, x appartient à X. Ainsi X est une partie stable par générisation et f est submersif pour la S-topologie.

On déduit de la proposition précédente un résultat connu de [9]: un morphisme spectral surjectif générisant est submersif, puisqu'il est ouvert pour la S-topologie.

Remarque. Avec les notations précédentes $X \subset \bar{X}^C \subset \tilde{X} \subset \bar{X}$, puisque $\tilde{X}$ est une partie proconstructible.

2. *Morphismes subtrusifs, caractérisations topologiques*

Soit $f: Z' \to Z$ un morphisme spectral, s'il existe un ordinal α tel que $X_\alpha = \bar{X}$, pour toute partie X de Z, il paraît naturel de dire que f est submersif d'ordre α (en prenant, bien sûr, le plus petit α tel que la propriété soit satisfaite). Dans la suite, on se borne à étudier ceux d'ordre 1. Comme il se trouve que la totalité des morphismes submersifs utilisés et connus le sont au premier ordre, nous donnerons le nom de morphisme subtrusif, ou de subtrusion à ce type de morphisme; cette notion se révèlera assez importante par la suite pour justifier ce néologisme. Plus précisément:

DÉFINITION 2. Soit $f: Z' \to Z$ un morphisme spectral surjectif. On dit que f est subtrusif si $\rho(X) = \bar{X}$, pour toute partie X proconstructible de Z.

Il est clair qu'un tel morphisme est submersif.

Remarque. Si la propriété précédente est vraie pour toute partie X de Z, on dira que f est fortement subtrusif. Cependent cette notion servira peu par la suite. Elle a un sens pour des espaces topologiques quelconques.

PROPOSITION 3. *Soit $f: Z' \to Z$ un morphisme spectral surjectif. Si le morphisme f est subtrusif, il est fortement submersif du premier ordre pour la S-topologie.*

Preuve. Soit X une partie de Z et soit $S(X) = \bigcup_{x \in X} \bar{x}$. Puisque la partie réduite à x est proconstructible, l'hypothèse de la proposition montre que $\bar{x} = f(\overline{f^{-1}(x)})$ et d'autre part $\overline{f^{-1}(x)} = S(f^{-1}(x))$, il en résulte que $S(X) = f(S(f^{-1}(X)))$, d'où la preuve.

Le lemme suivant permet une caractérisation des morphismes subtrusifs par les parties constructibles.

LEMME 4. *Soient A un anneau et X une partie proconstructible de* Spec(A). *Il existe un ensemble I préordonné filtrant et une famille $(X_i)_{i \in I}$ de parties constructibles, filtrante décroissante telle que $X = \bigcap_{i \in I} X_i$.*

Pour toute décomposition de X en parties constructibles comme ci-dessus:

(a) $\bar{X} = S(X) = \bigcap_{i \in I} S(X_i) = \bigcap_{i \in I} \bar{X}_i$.

(b) *La partie X est fermée si et seulement si pour tout élément i de I, il existe un élément j de I tel que $\bar{X}_j \subset X_i$.*

(c) *Pour tout homomorphisme d'anneaux $f: A' \to A$ on a* ${}^af(\bigcap_{i \in I} X_i) = \bigcap_{i \in I} {}^af(X_i)$.

Preuve. La première assertion s'obtient en remarquant que l'on a un homomorphisme d'anneaux $f: A \to B$ tel que ${}^af(\mathrm{Spec}(B)) = X$. En effet B peut être pris comme une limite inductive filtrante de A-algèbres de présentation finie. Il suffit alors d'utiliser la proposition 3-4-10 de [9].

Supposons donc pour la suite X égal à l'intersection des éléments d'une famille de parties constructibles comme ci-dessus. Il est clair que $S(\bigcap X_i) \subset \bigcap S(X_i)$. Soit maintenant un élément x de l'intersection des $S(X_i)$, pour toute suite $i_1, \ldots, i_n$ finie d'éléments de I, la famille étant filtrante décroissante, $G(x) \cap X_{i_1} \cap \cdots \cap X_{i_n} \neq \varnothing$. La famille de parties proconstructibles $\{X_i \cap G(x)\}$ a donc la propriété d'intersection finie. Il en résulte que $\bigcap X_i \cap G(x) \neq \varnothing$, ce qui signifie que x appartient à $S(\bigcap X_i)$.

Supposons la partie X fermée, de $X = \bigcap \bar{X}_j \subset X_i$ et de la constructibilité de X_i on déduit que X_i contient l'intersection d'une famille finie de parties $\bar{X}_j$, par conséquent il existe un élément j de I tel que $\bar{X}_j \subset X_i$: en effet la famille (X_i) est filtrante décroissante.

La réciproque est évidente. Soit maintenant un homomorphisme d'anneaux f et montrons que $\bigcap {}^af(X_i) \subset {}^af(\bigcap X_i)$. Pour cela soit y un élément de l'intersection des parties ${}^af(X_i)$, ce qui donne ${}^af^{-1}(y) \cap X_i \neq \emptyset$, pour tout élément i de I. De même que ci-dessus, puisque ${}^af^{-1}(y)$ est une partie proconstructible, on en déduit que $\bigcap X_i \cap {}^af^{-1}(y) \neq \emptyset$, d'où y appartient à ${}^af(\bigcap X_i)$.

Soient A un anneau, I un idéal de A, de type fini, et a un élément de A, on désigne par $Z_{I,a}$ la partie constructible $V(I) \cap D(a)$ de $\operatorname{Spec}(A)$.

Un calcul élémentaire montre que $\bar{Z}_{I,a}$ n'est autre que $V(r(I): a)$.

PROPOSITION 5. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux, a-surjectif.*

(1) *Le morphisme ${}^af$ est subtrusif si et seulement si pour toute partie* $Z_{I,a}$ on a ${}^af(\overline{{}^af^{-1}(Z_{I,a})}) = \bar{Z}_{I,a}$.

(2) *Le morphisme ${}^af$ est subtrusif si et seulement si pour tout idéal I de type fini de A et tout élément a de A on a:*

$$ {}^af(V(r(I.A'): f(a))) = V(r(I): a). $$

Preuve. La partie (2) est la traduction de (1), compte tenu du calcul de $\bar{Z}_{I,a}$.

Montrons (1): pour cela on remarque, d'après le lemme 4, qu'une partie proconstructible X de $\operatorname{Spec}(A)$ est une intersection filtrante décroissante de parties constructibles, soit $X = \bigcap X_i$. On en déduit que $\rho(X) = \bigcap \rho(X_i)$: en effet

$$ \rho\left(\bigcap X_i\right) = {}^af\left(\overline{\bigcap {}^af^{-1}(X_i)}\right) = {}^af\left(\bigcap \overline{{}^af^{-1}(X_i)}\right) = \bigcap {}^af(\overline{{}^af^{-1}(X_i)}), $$

cette suite d'égalités étant obtenue par utilisation du lemme 4.

On en déduit que ${}^af$ est subtrusif si et seulement si pour toute partie constructible X de $\operatorname{Spec}(A)$ on a $\rho(X) = \bar{X}$: il suffit d'utiliser à nouveau le lemme 4 et la définition des morphismes subtrusifs.

De plus toute partie constructible X est réunion finie de parties $Z_{I,a}$, soit $X = \bigcup_{i=1}^n X_i$ une telle réunion. Puisque la relation $\rho(\bigcup_{i=1}^n X_i) = \bigcup_{i=1}^n \rho(X_i)$ est vraie sans hypothèse sur les parties X_i, on obtient finalement que le morphisme ${}^af$ est subtrusif si et seulement si $\rho(X) = \bar{X}$ pour toute partie $X = Z_{I,a}$ de $\operatorname{Spec}(A)$.

PROPOSITION 6. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux tel que pour tout idéal I' de A' on ait $I' = f^{-1}(I').A'$ et tel que ${}^af$ soit subtrusif, alors ${}^af$ est un homéomorphisme.*

Plus généralement une submersion a-injective est un homéomorphisme.

Preuve. Soit I un idéal de A, puisque $V(I)$ est une partie proconstructible, on obtient ${}^af(V(I.A')) = V(I)$, d'où l'on déduit que ${}^af$ est fermé, puisque tout idéal I' de A' est de la forme $f^{-1}(I').A'$. D'autre part il est clair que f est a-injective.

On retrouve en particulier le résultat suivant: si $f\colon A \to A'$ est un épimorphisme plat a-surjectif, alors ${}^af$ est un homéomorphisme (voir [13, p. 4 de l'exposé 4]).

PROPOSITION 7. *Soit $f\colon Z' \to Z$ un morphisme spectral surjectif, alors f est un morphisme subtrusif si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite:*

(1) *Pour tout élément x de Z, on a $\bar{x} \subset f(\overline{f^{-1}(x)})$.*

(2) *Pour tout couple (x, y) d'éléments de Z tels que $x \subset y$, il existe un couple (x', y') d'éléments de Z' tels que $x' \subset y'$ et $f(x') = x$, $f(y') = y$.*

Preuve. Si f est subtrusif, il est clair que (1) est satisfaite. Supposons (1) vérifiée, en remarquant que $\bar{x} = S(x)$ et $\overline{f^{-1}(x)} = S(f^{-1}(x))$ on obtient (2). Et réciproquement (2) entraîne (1). D'autre part (1) entraîne que pour tout élément x de Z on a $\bar{x} = f(\overline{f^{-1}(x)})$. Il suffit d'utiliser alors la relation $\bar{X} = S(X)$ vérifiée pour toute partie proconstructible X de Z, pour montrer que si (1) est satisfaite et X est proconstructible $\bar{X} = \rho(X)$.

Remarques et exemples. (1) Ainsi un morphisme est subtrusif si et seulement si tout couple $x \subset y$ d'éléments de Z se remonte en un couple $x' \subset y'$ d'éléments de Z'. L'hypothèse de surjectivité est en effet contenue dans cette formulation.

(2) Un morphisme spectral $f\colon Z' \to Z$, surjectif, est subtrusif dans les cas suivants:

(a) le morphisme f est ouvert: pour toute partie X de Z, $f^{-1}(\bar{X}) = \overline{f^{-1}(X)}$.

(b) le morphisme f est fermé: pour toute partie X de Z, $f(\overline{f^{-1}(X)}) = \overline{f(f^{-1}(X))} = \bar{X}$.

(c) le morphisme f est générisant: pour toute partie proconstructible X de Z, $f^{-1}(\bar{X}) = \overline{f^{-1}(X)}$, voir [9, proposition 7.3.3, p. 339].

(d) le morphisme f provient d'un homomorphisme d'anneaux pur (par exemple fidèlement plat): pour toute partie proconstructible X de Z, $\bar{X} = f(\overline{f^{-1}(X)})$: voir, par exemple, [16].

(e) le morphisme f est submersif fort du premier ordre pour la S-topologie: pour toute partie X de Z on a $f(S(f^{-1}(X))) = S(X)$, si de plus X est proconstructible, $\bar{X} = S(X)$; on obtient $\bar{X} = f(\overline{f^{-1}(X)})$.

(3) Soit $\mathcal{S}$ la classe des morphismes spectraux submersifs (resp. $\mathcal{S}_1$

celle des morphismes spectraux subtrusifs). Les deux classes sont stables par composition. D'autre part, si f et g sont des morphismes spectraux tels que $f \circ g$ soit dans $\mathscr{S}$ (resp. $\mathscr{S}_1$), alors f est dans $\mathscr{S}$ (resp. dans $\mathscr{S}_1$).

(4) Soient $f_1: A \to A_1$ et $f_2: A \to A_2$ deux homomorphismes d'anneaux tels que l'un des deux ait son morphisme spectral submersif (resp. subtrusif), l'homomorphisme canonique $f: A \to A_1 \times A_2$ est submersif (resp. subtrusif).

(5) Soit $f: Z' \to Z$, un morphisme spectral surjectif, il est évidemment croissant. Munissons Z de l'ordre quotient canonique défini par $x \leqslant y$ si et seulement si pout tout élément x' de Z' tel que $f(x') = x$, il existe un élément y' de Z' satisfaisant $x' \subset y'$ et $f(y') = y$. On sait que Z muni de l'ordre quotient est isomorphe à Z muni de l'ordre défini par l'inclusion si et seulement si les deux conditions suivantes sont satisfaites:

(1) f est subtrusif.

(2) les relations $x' \subset y'$ et $f(x') = f(x'_1)$ entraînent qu'il existe $y'_1 \in Z'$ tel que $x'_1 \subset y'_1$ et $f(y'_1) = f(y')$.

Voir par exemple Bourbaki, Théorie des ensembles, chapitre 3, exercices du paragraphe 1.

Supposons que f soit le morphisme spectral associé à l'homomorphisme d'anneaux $A \to A'$, la condition (2) se traduit par: soient $P' \subset Q'$ des idéaux premiers de A', se contractant en $P \subset Q$ dans A, si P'_1 est un idéal premier de A', se contractant sur P, il existe un idéal premier Q'_1 de A' se contractant sur Q et tel que $P'_1 \subset Q'_1$. Supposons que f soit subtrusif, la condition (2) est alors équivalente à: le morphisme $A \to A'$ est fermé.

Par conséquent, si f est subtrusif, Z muni de l'ordre défini par la topologie spectrale est isomorphe à Z muni de l'ordre quotient si et seulement si le morphisme f est fermé.

(6) Il est clair que si B est un anneau à spectre totalement ordonné, tout morphisme $A \to B$, a-surjectif, est subtrusif.

La caractérisation précédente des morphismes subtrusifs par la montée des couples ordonnés fait apparaître la notion suivante. Soit X un espace spectral, on sait que le produit cartésien X^2 est encore un espace spectral, pour la topologie produit et que la topologie constructible sur X^2 est la topologie produit des constructibles. On définit $T(X)$ comme étant la partie de X^2, constituée des éléments (x, y) tels que $y \in \bar{x}$, c'est à dire $x \subset y$.

PROPOSITION 8. *La correspondance X donne $T(X)$ définit un foncteur covariant de* Spectr *dans* Spectr.

Preuve. Montrons d'abord que $T(X)$ est une partie proconstructible, lorsque $X = \mathrm{Spec}(A)$, où A est un anneau. Il suffit de montrer que $T(X)$ est une partie fermée de X^2 pour la topologie constructible. Soit (u, v) un élément de l'adhérence constructible de $T(X)$ et soient $u \in V(I) \cap D(a)$ et $v \in V(J) \cap D(b)$, où I et J sont des idéaux de type fini de A et a et b des éléments de A.

Alors $T(X) \cap (V(I) \cap D(a) \times V(J) \cap D(b))$ n'est pas vide. Il existe donc un élément (x, y) de X^2 tel que $y \in \bar{x}$ et $x \in V(I) \cap D(a)$, $y \in V(J) \cap D(b)$. On en déduit que $V(J) \cap D(b) \cap \bar{x}$ n'est pas vide. Puisque $\bar{x}$ est contenu dans $V(I)$, de même $V(J) \cap V(I) \cap D(b)$ n'est pas vide. Il en résulte que la famille de parties proconstructibles $\{V(I) \cap V(J) \cap D(b)\}$, obtenue pour toutes les parties constructibles comme ci-dessus, a la propriété d'intersection finie. On en déduit que $S(v) \cap G(v) \cap S(u) = \{v\} \cap S(u)$ n'est pas vide, d'où $v \in \bar{u}$. Ainsi (u, v) appartient à $T(X)$, ce qui montre que $T(X)$ est proconstructible. Soit $f\colon X' \to X$ un morphisme spectral, si x' et y' sont des éléments de X' tels que $x' \subset y'$, il est clair que $f(x') \subset f(y')$. Il existe donc une application $T(f)\colon T(X') \to T(X)$, elle est évidemment spectrale.

Corollaire 9. *Soit $f\colon Z' \to Z$ un morphisme spectral, f est subtrusif si et seulement si l'une des conditions suivantes est satisfaite:*

(1) *Le morphisme $T(Z') \to T(Z)$ est surjectif.*

(2) *Pour tout élément x de Z, on a $G(x) = f(G(f^{-1}(x)))$.*

(3) *Le morphisme f est subtrusif pour la* 0*-topologie.*

Preuve. Les conditions (1) et (2) ne sont que des traductions des conditions de la proposition 7. D'autre part (3) entraîne (2), puisque, pour une partie X de Z, $\bar{X}^0$ n'est autre que le générisé quasi-compact de X, en particulier $\bar{x}^0 = G(x)$ et $G(f^{-1}(x)) = \overline{f^{-1}(x)}^0$, pour un élément x de Z. Pour la réciproque, la 0-topologie étant spectrale, pour une partie proconstructible X de Z, on a donc $\bar{X}^0 = G(X) = \bigcup_{x \in X} G(x)$. Ainsi (2) entraîne (3).

Soit $f\colon A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux. Pour un idéal premier P de A, on désigne par $I(P)$ le noyau de l'homomorphisme canonique $g\colon A' \to A' \otimes_A k(P)$. L'ensemble $I(P)$ n'est autre que celui des éléments a' de A' pour lesquels il existe un élément s de $A - P$ tel que $f(s)\, a' \in P.A'$. Il est clair que P est contenu dans $f^{-1}(I(P))$. On sait que la fibre de f en P n'est autre que ${}^af^{-1}(P)$, l'image par ${}^ag$ de $\mathrm{Spec}(A' \otimes_A k(P))$, d'où il résulte que $\overline{{}^af^{-1}(P)}$ est égal à ${}^ah(\mathrm{Spec}(A'/I(P)))$, $h\colon A' \to A'/I(P)$ étant l'homomorphisme canonique.

Si on suppose de plus que l'homomorphisme f est a-surjectif, de $f^{-1}(P.A') = P$ on déduit $f^{-1}(I(P)) = P$.

Proposition 10. *Soit $f\colon A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux. Pour que f soit subtrusif il faut et il suffit que pour tout idéal premier P de A, l'homomorphisme $A/P \to A'/I(P)$ soit a-surjectif.*

Preuve. L'homomorphisme f est subtrusif si et seulement si $\overline{{}^af^{-1}(P)} \cap {}^af^{-1}(Q)$ n'est pas vide, pour tout couple $P \subset Q$ d'idéaux premiers de A. Par suite f sera subtrusif si et seulement si le produit tensoriel $A'/I(P) \otimes_{A'} (A' \otimes_A k(Q))$ est non nul, pour tout couple $P \subset Q$ d'idéaux premiers de A. Soit l'homomorphisme $A/P \to k(Q)$, pour $P \subset Q$, l'homomorphisme $A/P \to A'/I(P)$ est a-surjectif si et seulement si le produit tensoriel $A'/I(P) \otimes_{A/P} k(Q)$ est différent de zéro, pour tout couple (P, Q) tel que $P \subset Q$. Mais $A'/I(P) \otimes_{A/P} k(Q) = A'/I(P) \otimes_{A'} (A' \otimes_A k(Q))$, d'où la preuve.

Conformément aux définitions des E.G.A. [9], on dit qu'une propriété d'homomorphisme d'anneaux est universelle si elle est stable par tout changement de base. On a ainsi la notion de morphisme universellement submersif (subtrusif). Voici quelques exemples de morphismes universellement subtrusifs.

(1) Les morphismes universellement ouverts, a-surjectifs.

(2) Les morphismes entiers, a-surjectifs.

(3) Les morphismes purs.

On a dit ausi qu'un homomorphisme $A \to B$, d'anneaux, descend la propriété $\mathscr{P}$, concernant les homomorphismes d'anneaux, si tout homomorphisme d'anneaux $A \to A'$, tel que $B \to B \otimes_A A'$ vérifie $\mathscr{P}$, vérifie $\mathscr{P}$. D'après [9, p. 256], un morphisme submersif (resp. universellement) descend les morphismes submersifs (resp. universellement submersifs).

Les propositions précédentes restent vraies en remplaçant submersif par subtrusif. En fait la réciproque est vraie: si $f\colon A \to B$ est un homomorphisme d'anneaux qui descend les morphismes submersifs (resp. universellement submersifs, resp. subtrusifs resp. universellement subtrusifs), alors f est submersif (resp. universellement submersif, resp. subtrusif, resp. universellement subtrusif): en effet l'homomorphisme $B \to B \otimes_A B$ est pur.

On peut observer, de même qu'un morphisme submersif descend les morphismes ouverts (resp. fermés), qu'un morphisme submersif pour la S-topologie descend les morphismes générisants. En particulier, un morphisme subtrusif descend les morphismes générisants, d'après la proposition 3.

On donne ici un résultat sur les carrés cocartésiens d'homomorphismes d'anneaux, de preuve aisée, qui ne semble pas connu.

LEMME 11. *Soit le diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux:*

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A' & \longrightarrow & A'' \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B' & \longrightarrow & B'' \end{array}$$

Si le rectangle est cocartésien et si l'homomorphisme $B \to B'$ est un épimorphisme, alors le carré de droite est cocartésien.

Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux et X une partie proconstructible de $\mathrm{Spec}(A)$. Il existe un homomorphisme d'anneaux $g: A \to B$, dont on peut supposer que c'est un épimorphisme à but plat, tel que ${}^a g(\mathrm{Spec}(B)) = X$. Ce résultat peut être déduit des constructions de J. P. Olivier [17].

Soit $B' = B \otimes_A A'$, on désigne par $g': A' \to B'$ et $f': B \to B'$ les projections canoniques. On en déduit un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux (D):

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "g_1"] \arrow[d, "f"'] & g(A) \arrow[r, "i_1"] \arrow[d, "f_1"'] \arrow[drr, "\gamma"] & B \arrow[drr, "f'"] & & \\ A' \arrow[r, "\alpha"'] & A' \otimes_A g(A) \arrow[rr, "\beta"'] & & g'(A') \arrow[r, "i_2"'] & B' \end{tikzcd}$$

Si on veut spécifier la partie proconstructible X, intervenant dans ce diagramme, on désignera par γ_X, α_X, etc., les différents homomorphismes figurant dans ce diagramme et le diagramme par (D_X). Puisque $A' \to g'(A')$ est un épimorphisme, le carré de droite est cocartésien, on le désignera par (D′) ou (D'_X), soit

$$\begin{tikzcd} g(A) \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ g'(A') \arrow[r] & B' \end{tikzcd} \qquad \text{(D')}$$

Les différents anneaux intervenant dans (D) ont des spectres vérifiant:

$${}^a g_1(\mathrm{Spec}(g(A))) = \bar{X}, \qquad {}^a g'(\mathrm{Spec}(B')) = {}^a f^{-1}(X)$$

$${}^a\alpha \circ {}^a\beta(\mathrm{Spec}(g'(A'))) = \overline{{}^a f^{-1}(X)}, \qquad {}^a\alpha(\mathrm{Spec}(A' \otimes_A g(A))) = {}^a f^{-1}(\bar{X})$$

$${}^a\gamma^{-1}(\mathrm{Im}\, {}^a i_1) = \mathrm{Im}\, {}^a i_2.$$

PROPOSITION 12. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux a-surjectif.*

(1) *Le morphisme f est submersif si et seulement si pour toute partie proconstructible X de* $\mathrm{Spec}(A)$ *telle que $i_{2,X}$ soit a-surjectif, $i_{1,X}$ est a-surjectif.*

(2) *Le morphisme f est submersif si et seulement si pour toute partie proconstructible X de* $\mathrm{Spec}(A)$ *telle que $i_{2,X}$ soit a-surjectif, β_X est a-surjectif.*

(3) *Le morphisme f est subtrusif si et seulement si pour toute partie proconstructible X de* $\mathrm{Spec}(A)$, *le morphisme γ_X est a-surjectif.*

(4) *Le morphisme* f *vérifie la relation* ${}^af^{-1}(\bar{X}) = \overline{{}^af^{-1}(X)}$ *pour toute partie proconstructible* X *de* Spec(A) *si et seulement si le morphisme* β_X *est a-surjectif pour toute partie proconstructible* X *de* Spec(A).

Dans ces conditions, il est subtrusif.

Preuve. Puisque $\beta \circ \alpha$ est un morphisme a-injectif, ${}^af^{-1}(X)$ est une partie fermée est équivalent à i_2 est a-surjective; de même X est une partie fermée de Spec(A) est équivalent à i_1 est a-surjective, ce qui démontre (1).

Pour montrer (2), supposons que i_2 est a-surjectif entraîne β est a-surjectif; puisque f_1 est a-surjectif, on obtient que i_1 est a-surjectif. Réciproquement, si i_2 est a-surjectif entraîne i_1 est a-surjectif, on remarque que $i_2 \circ \beta$ est déduit de i_1 par changement de base, donc est a-surjectif; d'où β est a-surjectif. Les assertions (3) et (4) se démontrent de manière analogue.

3. *Morphismes subtrusifs générisants*

On se propose de caractériser les morphismes subtrusifs vérifiant la condition (4) de la proposition ci-dessus: pour toute partie proconstructible X de Spec(A), ${}^af^{-1}(\bar{X}) = \overline{{}^af^{-1}(X)}$, condition que nous désignerons provisoirement par (C). Rappelons la définition donnée par G. Picavet dans [19]: on dit qu'un homomorphisme d'anneaux est minimalisant si le morphisme spectral associé transforme tout idéal premier minimal en idéal premier minimal.

On trouvera différentes caractérisations de ces homomorphismes dans [19].

PROPOSITION 13. *Soit* $f: A \to A'$ *un homomorphisme d'anneaux a-surjectif.*

(1) *Si l'homomorphisme* f *est universellement minimalisant, il vérifie universellement la condition* (C).

(2) *Si l'homomorphisme* f *vérifie la condition* (C), *il est minimalisant.*

(3) *L'homomorphisme* f *vérifie universellement la condition* (C) *si et seulement si il est universellement générisant.*

Preuve. Pour montrer (1), il suffit de montrer que l'hypothèse f est universellement minimalisant entraîne la condition (C). Soit P un idéal premier de A et soit l'homomorphisme $\bar{f}: A/P \to A'/P.A'$, l'hypothèse de (1) montre que $\bar{f}$ est minimalisant, de but non nul puisque f est a-surjectif. Soit P' un élément de Min($V(P.A')$), puisque $\bar{f}$ est minimalisant, on a ${}^af(P') = P$. Il en résulte la suite d'inclusions:

$$\bigcap_{P' \in {}^af^{-1}(P)} P' \subset \bigcap_{P' \in \mathrm{Min}(V(P.A'))} P' = r(P.A') \subset \bigcap_{P' \in {}^af^{-1}(P)} P',$$

d'où l'on déduit que $\overline{{}^af^{-1}(P)} = {}^af^{-1}(V(P))$. Puisque pour une partie proconstructible X de Spec(A), on a $\bar{X} = \bigcup_{P \in X} V(P)$, on obtient sans peine ${}^af^{-1}(\bar{X}) = \overline{{}^af^{-1}(X)}$. Supposons maintenant que f vérifie la condition (C). On peut supposer les anneaux A et A' réduits. Soit P' un élément de Min(A') et soit $P = {}^af(P')$, puisque P' est minimal, pour un élément a de P il existe un élément a' de $A' - P'$ tel que $a'f(a) = 0$. On en déduit que a' appartient à $0 : f(a)$. Mais par hypothèse ${}^af^{-1}(\overline{D(a)}) = \overline{D(f(a))}$. Puisque A et A' sont des anneaux réduits, $V((0:a).A') = V(0:f(a))$ ou encore $r((0:a).A') = r(0:f(a))$. Il en résulte qu'il existe un entier n tel que $a'^n = \sum_{i=1}^{p} f(a_i)\, a'_i$, où $a_1, \ldots, a_p$ sont des éléments de A tels que $aa_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, p$. Si pour tout $i = 1, \ldots, p$, a_i appartenait à P, a' serait un élément de P' ce qui est absurde. Il existe donc un élément a_i de $A - P$ tel que $a_i a = 0$. Ainsi P est un idéal premier minimal.

Pour démontrer la dernière assertion, compte tenu de (1) et (2) et du fait bien connu: un homomorphisme générisant est minimalisant, il suffit de montrer qu'un homomorphisme universellement minimalisant est générisant. Soit donc f un tel homomorphisme et soient $P \subset Q$ des idéaux premiers de A et soit Q' un idéal premier de A' au dessus de Q. Puisque l'homomorphisme $A/P \to A'/P.A'$ est minimalisant, un idéal premier P' appartenant à Min($V(P.A')$), contenu dans Q', est nécessairement au dessus de P.

Remarque. Un homomorphisme d'anneaux pur, ne vérifie pas forcément la condition (C). On aura ainsi un exemple de morphisme universellement subtrusif, non minimalisant. Soit l'homomorphisme d'anneaux $f: \mathbb{Z} \to A$, où A est le quotient de $\mathbb{Z}[X]$ par l'idéal I engendré par $(X-1)(X^2+1)$ et $(X-1)(X^2+3)$. L'anneau $\mathbb{Z}$ est intégralement clos, il est clair que f est un homomorphisme injectif, monogène en tant que $\mathbb{Z}$-algèbre et fini. D'après les résultats de H. Seydi [25], c'est un homomorphisme pur. Le spectre minimal de A contient, en dehors de $(X-1)/I$, les idéaux premiers minimaux P parmi ceux contenant $(X^2+1, X^2+3)/I$. Un tel idéal premier P vérifie ${}^af(P) = (2)$, d'où le résultat.

PROPOSITION 14. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux tel que ${}^a\gamma_X$ soit un morphisme submersif pour toute partie proconstructible de* Spec(A). *Soit Z une partie proconstructible de* Spec(A), *alors Z est une partie localement fermée de* Spec(A) *si et seulement si ${}^af^{-1}(Z)$ est une partie localement fermée de* Spec(A').

Les hypothèses de la proposition sont satisfaites si f est un homomorphisme pur ou si f est a-surjectif et vérifie la condition (C).

Preuve. Soit Z un partie proconstructible de Spec(A), telle que ${}^af^{-1}(Z)$ soit ouvert dans $\overline{{}^af^{-1}(Z)}$. Considérons le diagramme (D_Z), on observe que

${}^a\alpha \circ {}^a\beta \circ {}^a i_2(\mathrm{Spec}(B')) = {}^a g'(\mathrm{Spec}(B')) = 0' \cap {}^a\alpha \circ {}^a\beta(\mathrm{Spec}(g'(A')))$ où $0'$ est un ouvert de $\mathrm{Spec}(A')$. Le morphisme $\alpha \circ \beta$ étant a-injectif, on voit alors que ${}^a i_2(\mathrm{Spec}(B'))$ est un ouvert. Le diagramme (D'_Z) étant cocartésien et le morphisme γ_Z étant submersif, l'ensemble ${}^a i_1(\mathrm{Spec}(B))$ est un ouvert. Il en résulte que Z est ouvert dans $\bar{Z}$, ainsi la partie Z est localement fermée. Que les hypothèses de la proposition soient vérifiées pour un homomorphisme pur est démontré par J. P. Olivier dans [16], en effet si f est pur, γ est pur. Si f est un homomorphisme a-surjectif et vérifiant la condition (C), il est subtrusif. On verra un peu plus loin que cette propriété est stable par un changement de base surjectif. Par suite le morphisme f_1 est submersif. D'après la proposition 12, le morphisme β est a-surjectif donc un a-homéomorphisme. De la relation ${}^a f_1 \circ {}^a\beta = {}^a\gamma$, on déduit que le morphisme γ est submersif.

4. *Morphismes universellement submersifs et descente des morphismes d'image fermée*

Désignons par $\mathcal{TF}$ la classe des homomorphismes d'anneaux tels que l'image du morphisme spectral associé soit fermée. Cette classe est stable par changement de base.

PROPOSITION 15. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux a-surjectif. Alors le morphisme f est universellement submersif si et seulement si f descend universellement les morphismes de $\mathcal{TF}$.*

Preuve. Considérons le diagramme (D) relatif à une partie proconstructible X de $\mathrm{Spec}(A)$. Si f descend universellement les morphismes de $\mathcal{TF}$, il en est de même pour f_1. Si l'homomorphisme i_2 est a-surjectif, il est dans $\mathcal{TF}$, et puisque le morphisme β est surjectif, de même $i_2 \circ \beta$ est dans $\mathcal{TF}$. Or l'homomorphisme i_1 est injectif, donc dominant, puisque l'image de ${}^a i_1$ est fermée on voit que i_1 est a-surjectif. Par suite l'homomorphisme f est submersif, et en raison des hypothèses il l'est universellement. Réciproquement, supposons que f soit universellement submersif. Puisque le rectangle extérieur du diagramme (D) est cocartésien, on a la relation ${}^a g'({}^a f'^{-1}(\mathrm{Spec}(B))) = {}^a f^{-1}({}^a g(\mathrm{Spec}(B)))$. Si ${}^a g'(\mathrm{Spec}(B'))$ est fermé dans $\mathrm{Spec}(A')$, la relation précédente montre que ${}^a g(\mathrm{Spec}(B))$ est fermé dans $\mathrm{Spec}(A)$.

Remarques. (1) Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux, alors f est dans $\mathcal{TF}$ si et seulement si pour tout couple (P', Q) de $\mathrm{Spec}(A') \times \mathrm{Spec}(A)$ tel que ${}^a f(P')$ soit contenu dans Q, il existe un idéal premier Q' de A' tel que $Q = {}^a f(Q')$.

(2) On peut se demander, compte tenu du résultat précédent, si un homomorphisme d'anneaux qui descend les morphismes entiers est submersif. Je ne connais pas la réponse.

5. *Morphismes universellement subtrusifs: le cas d'un anneau de base de valuation*

PROPOSITION 16. *Soit V un anneau de valuation, d'idéal maximal M, et, soit un homomorphisme d'anneaux $V \to B$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Le morphisme $V \to B$ est subtrusif (resp. universellement).*

(2) *Le morphisme $V \to B$ est pur.*

(3) *Le couple $0 \subset M$ se remonte à B.*

(4) *Le morphisme $V \to B/T$ est fidèlement plat (T est l'idéal de torsion de $V \to B$).*

Preuve. Il suffit de transcrire la proposition 1.3.1 (2ème partie) de L. Gruson et M. Raynaud dans [23].

6. *Morphismes de Nakayama et submersivité, lien avec les parties quasi-admissibles*

Les morphismes d'anneaux, descendant la nullité des modules (dits de Nakayama) ont des propriétés de submersivité, qui s'expriment, dans le cas d'un anneau de base quelconque, à l'aide des parties quasi-admissibles d'un spectre. Si l'anneau de base est Noethérien, un morphisme de Nakayama est toujours universellement subtrusif.

Soit $f: A \to B$ un épimorphisme plat d'anneaux et X l'image de ${}^af$, une telle partie est dite admissible (voir le travail de M. Raynaud [21]). Une partie admissible est quasi-compacte et stable par générisation. Pour la suite, on a besoin d'une notion voisine:

DÉFINITION 17. Soit A un anneau et X une partie de $\mathrm{Spec}(A)$. On dit que X est une partie quasi-admissible s'il existe un homomorphisme d'anneaux $g: A \to B$ tel que ${}^ag(\mathrm{Spec(B)}) = X$ et tel que $g(A) \to B$ soit un épimorphisme plat.

D'après le corollaire 3.2 de D. Lazard [13], une partie admissible est quasi-admissible.

PROPOSITION 18. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux de Nakayama et soit X une partie quasi-admissible de* $\mathrm{Spec}(A)$. *Alors, si ${}^af^{-1}(X)$ est une partie fermée, X est une partie fermée.*

Preuve. Considérons le diagramme (D_X), dans lequel $i_1: g(A) \to B$ est un épimorphisme plat injectif. Le diagramme (D'_X) étant cocartésien, le morphisme $i_2: g'(A') \to B'$ est un épimorphisme plat. Si ${}^af^{-1}(X)$ est une partie fermée, le morphisme i_2 est a-surjectif, donc fidèlement plat et un épimorphisme. C'est donc un isomorphisme. Il en résulte que $i_2 \circ \beta$ est surjectif. Puisque la propriété pour un homomorphisme d'être de Nakayama est universelle et puisque le diagramme composé des homomorphismes $f' \circ i_1 = i_2 \circ \beta \circ f_1$ est cocartésien, on voit que i_1 est un homomorphisme surjectif, donc un isomorphisme. Il en résulte que X est une partie fermée.

COROLLAIRE 19. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux de Nakayama, où A est un anneau Noethérien, alors f est universellement subtrusif.*

Preuve. La partie réduite à un idéal premier P d'un anneau A est une partie quasi-admissible de Spec(A): il suffit de considérer l'homomorphisme $A \to k(P)$. Par suite, si P est un idéal premier de A tel que ${}^af^{-1}(P)$ soit fermée, alors P est un idéal maximal de A. Soit (P, Q) un couple d'éléments de $T(A)$, il existe un anneau de valuation discrète V de spectre $\{0, M\}$ et un homomorphisme d'anneaux $g: A \to V$ tel que $T(g)(0, M) = (P, Q)$. Puisque la propriété de Nakayama est universelle, on voit qu'on peut supposer l'anneau A de valuation discrète. Le morphisme f étant a-surjectif, ${}^af^{-1}(0)$ n'est pas vide. De plus cette partie de Spec(A') n'est pas fermée, sinon 0 serait un idéal maximal de A. On en déduit que $\overline{{}^af^{-1}(0)}$ n'est pas contenue dans ${}^af^{-1}(0)$. Puisque $\overline{{}^af^{-1}(0)}$ est la réunion des fermés $V(Q')$ tels que ${}^af(Q') = 0$, il existe un idéal premier M' de A' qui ne se contracte pas sur 0 et contenant un idéal premier Q' au-dessus de 0. On en déduit que ${}^af(M') = M$ et ensuite que $T(f)$ est surjective. Un changement de base $A \to B$ peut s'obtenir comme limite inductive de A-algèbres Noethériennes $A \to A_i$. Les morphismes $A_i \to A' \otimes_A A_i$ sont de Nakayama, donc subtrusifs.

Le proposition 3 du chapitre II montre que le morphisme $B \to B \otimes_A A'$ est subtrusif.

On aura plus loin des exemples de morphismes de Nakayama, non subtrusifs.

Remarque. Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme de Nakayama, tel que A' soit un anneau plat ou vérifie la condition minimale sur les idéaux, alors le morphisme f est submersif. Soit en effet le diagramme (D_X) où $g: A \to B$ est un épimorphisme d'anneaux tel que ${}^ag(\mathrm{Spec}(B)) = X$. Alors $g'(A') \to B'$ est un épimorphisme dont la source vérifie les conditions ci-dessus sur l'anneau A'; on sait que dans ce cas, il est surjectif, d'après les résultats de J. P. Olivier [17] et N. Roby [24]. Puisque $g(A) \to g(A) \otimes_A A'$ est un homomorphisme de Nakayama, on voit que $g(A) \to B$ est un isomorphisme. Il suffit alors d'appliquer la proposition 12.

Les propriétés suivantes des parties quasi-admissibles expliquent pourquoi la proposition 18 ne peut être utilisée pour une résolution de la question posée plus haut.

(1) Soit A un anneau, les parties $Z_{I,a}$ de Spec(A) où I est un idéal de type fini et a un élément de A sont quasi-admissibles. En effet $Z_{I,a}$ est l'image du morphisme canonique $A \to A/I \to (A/I)_a$.

(2) Les parties quasi-admissibles du spectre d'un anneau A sont les parties X de Spec(A) telles qu'il existe un morphisme immergeant $f: A \to A'$, pour lequel $X = {}^a f(\mathrm{Spec}(A'))$, comme les résultats de J. P. Olivier (cf. [18]) le montrent.

Rappelons la proposition de [18]:

PROPOSITION 20. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux. L'homomorphisme f est immergeant si et seulement si une des conditions suivantes est satisfaite:*

(a) *Le morphisme f se factorise en une surjection, suivie d'un épimorphisme plat injectif.*

(b) *Le morphisme f est universellement essentiel (l'injectivité n'intervient pas ici).*

(c) *Pour tout idéal premier P de A tel que ${}^a f^{-1}(P)$ ne soit pas vide, l'homomorphisme $A_P \to A'_P$ est surjectif.*

(3) Les parties quasi-admissibles d'un spectre sont stables par intersection. Pour cela, il suffit de montrer que si $\{A_i\}_{i=1,\ldots,n}$ est un ensemble fini de A-algèbres immergeantes, il en est de même pour $A_1 \otimes_A \otimes A_2 \otimes \cdots \otimes_A A_n$. Puis compte tenu du lemme 7.2.1.1, chap. I, des E.G.A. [9], qu'une limite inductive filtrante de A-algèbres immergeantes est une A-algèbre immergeante. Ce dernier point est évident, compte tenu de la proposition 20(c). Il reste donc à montrer, qu'étant donnés des homomorphismes immergeants $f: A \to B$ et $f': A \to B'$, l'homomorphisme $g: A \to B \otimes_A B'$ est immergeant. Or les morphismes $f(A) \to B$ et $f'(A) \to B'$ sont des épimorphismes plats injectifs. On en déduit que $f(A) \otimes_A f'(A) \to B \otimes_A B'$ est un épimorphisme plat. D'autre part, il existe une factorisation $f(A) \otimes_A f'(A) \to g(A) \to B \otimes_A B'$, d'où $g(A) \to B \otimes_A B'$ est un épimorphisme plat.

(4) Stabilité des parties quasi-admissibles pour la réunion.

Soient $f: A \to B$ et $f': A \to B'$ deux homomorphismes d'anneaux. Désignons par $\varphi: A \to B \times B'$ l'homomorphisme canonique, on sait que l'image de ${}^a\varphi$ est la réunion de ${}^a f(\mathrm{Spec}(B))$ avec ${}^a f'(\mathrm{Spec}(B'))$. D'autre part, il existe une factorisation $A \to \varphi(A) \to f(A) \times f'(A) \to B \times B'$. Soit l'homomorphisme $\Psi: \varphi(A) \to f(A) \times f'(A)$, dont on fait une étude. On remarque d'abord que le morphisme Ψ est fini, injectif: en effet, posant $\varepsilon = (1, 0)$ et $\varepsilon' = (0, 1)$, on voit que

$$(f(a), f'(a')) = \varepsilon(f(a), f'(a)) + \varepsilon'(f(a'), f'(a')).$$

On en déduit que le morphisme Ψ est a-surjectif. Supposons de plus que Ψ soit a-injectif: si P est un idéal premier de $\varphi(A)$, il se relève, de manière unique, en un idéal premier Q de $f(A)\times f'(A)$. Puisque le morphisme Ψ est entier, on obtient alors $f(A)\times f'(A)_P = f(A)\times f'(A)_Q$. Mais un anneau local a un spectre connexe, par conséquent l'homomorphisme, localisé en P, de $\varphi(A)\to f(A)\times f'(A)$, est surjectif. Nous en déduisons que l'homomorphisme Ψ est injectif et immergeant. C'est donc un épimorphisme plat et fidèlement plat, donc un isomorphisme. Ainsi l'hypothèse Ψ est a-injectif entraîne que Ψ est un isomorphisme.

Supposons maintenant que l'ensemble $\overline{{}^af(\mathrm{Spec}(B))}\cap\overline{{}^af'(\mathrm{Spec}(B'))}$ soit vide. Dans ce cas le morphisme Ψ est a-injectif. En effet un idéal premier de $f(A)\times f'(A)$ est du type $P\times f'(A)$ où P est un idéal premier de $f(A)$, ou du type $f(A)\times P'$ où P' est un idéal premier de $f'(A)$. D'autre part $\overline{{}^af(\mathrm{Spec}(B))}$ (resp. $\overline{{}^af'(\mathrm{Spec}(B'))}$) est homéomorphe à $\mathrm{Spec}(f(A))$ (resp. $\mathrm{Spec}(f'(A))$). On suppose maintenant que les homomorphismes f et f' sont immergeants et que $\overline{{}^af(\mathrm{Spec}(B))}\cap\overline{{}^af'(\mathrm{Spec}(B'))}$ est un ensemble vide. Dans ce cas Ψ est un isomorphisme. Pour montrer que φ est un morphisme immergeant, il suffit de montrer que $f(A)\times f'(A)\to B\times B'$ est un épimorphisme plat injectif, compte tenu de ce qui précède. Pour ce dernier point, on peut utiliser sans difficulté la caractérisation d'un épimorphisme plat injectif de N. Popescu et L. Spircu [20] théorème 2.7: soit $g\colon C\to D$ un homomorphisme d'anneaux, injectif, alors le morphisme g est un épimorphisme plat si et seulement si pour tout élément d de D, il existe un idéal I de C tel que $I.D=D$ et $dI\subset g(C)$. On a donc démontré la proposition suivante:

PROPOSITION 21. *Soit A un anneau, l'ensemble des parties quasi-admissibles de* $\mathrm{Spec}(A)$ *est stable par intersection. Si X et X' sont des parties quasi-admissibles de* $\mathrm{Spec}(A)$ *telles que $\bar{X}\cap\bar{X}'$ soit vide, alors $X\cup X'$ est une partie partie quasi-admissible. De plus toute partie réduite à un point et toute partie constructible $Z_{I,a}$ est une partie quasi-admissible.*

Si les parties quasi-admissibles étaient stables par réunion finie, tout morphisme de Nakayama serait submersif, puisque, les parties $Z_{I,a}$ formant une sous-base de fermés pour la topologie constructible, toute partie proconstructible serait quasi-admissible.

Or une partie quasi-admissible X vérifie la relation $X=\bar{X}\cap G(X)$, comme on le voit en utilisant la factorisation $A\to g(A)\to B$, où le dernier morphisme est un épimorphisme plat injectif. Soit A un anneau ayant deux idéaux premiers P et Q tels que $V(Q)\cap G(P)$ contienne un élément R, différent de P et Q. Alors $\{P, Q\}$ est différent de $\overline{\{P, Q\}}\cap G(\{P, Q\})$. On a ainsi un exemple de partie proconstructible, non quasi-admissible et réunion de deux parties quasi-admissibles.

On sait que toute partie proconstructible X du spectre d'un anneau A peut être obtenue comme image du morphisme spectral d'un épimorphisme à but plat, soit $f: A \to A'$ un tel épimorphisme. S'il est immergeant, le morphisme $i: f(A) \to A'$ est un épimorphisme plat injectif, de source un anneau réduit, à but plat. Dans ces conditions, le spectre minimal de $f(A)$ est ${}^a i(\operatorname{Spec}(A'))$, d'où l'on déduit que $X = \operatorname{Min}(\bar{X})$. On va démontrer la réciproque. Soit toujours une partie proconstructible X de $\operatorname{Spec}(A)$ et considérons l'anneau $A_X = \prod_{P \in X} k(P)$, on sait, d'après J. P. Olivier [17], que l'homomorphisme canonique $g: A \to A_X$ est tel que ${}^a g(\operatorname{Spec}(A_X)) = X$. Supposons de plus que $X = \operatorname{Min}(\bar{X})$, et soit I l'idéal de A, intersection des éléments de X, alors l'anneau $g(A) = A/I$ est réduit, à spectre minimal compact. Toujours d'après [17], l'épimorphisme plat injectif maximal $g(A) \to M(g(A))$ a un but plat. Or tout idéal premier de A_X se contracte sur un idéal premier minimal de $g(A)$ et, comme cet anneau est réduit, l'homomorphisme $g(A) \to A_X$ est plat. On en déduit que l'homomorphisme $A_X \to A_X \otimes_{g(A)} M(g(A))$, qui est un épimorphisme plat, est injectif. Puisque la source de cet épimorphisme est un anneau plat, c'est un isomorphisme. On obtient ainsi une factorisation $g(A) \to M(g(A)) \to A_X$ où le dernier morphisme est injectif. Puisque les anneaux A_X et $M(g(A))$ sont des anneaux plats, désignant par g' l'homomorphisme $A \to M(g(A))$, on voit que l'image de ${}^a g'$ est X (le morphisme $M(g(A)) \to A_X$ étant injectif, et $M(g(A))$ un anneau plat, tout idéal premier se remonte). Il est clair d'autre part que le morphisme $A \to M(g(A))$ est immergeant.

PROPOSITION 22. *Soit A un anneau et soit X une partie proconstructible de* $\operatorname{Spec}(A)$. *Alors X est l'image du spectre d'un anneau plat par un homomorphisme immergeant si et seulement si* $X = \operatorname{Min}(\bar{X})$. *Dans ce cas X est une partie quasi-admissible.*

Remarque. Il est vrai, sans hypothèse, que $\operatorname{Min}(\bar{X}) \subset X$, pour toute partie proconstructible X.

7. *Exemples de morphismes de Nakayama submersifs*

PROPOSITION 23. *Il existe des morphismes de Nakayama submersifs et non subtrusifs.*

Preuve. Soit A un anneau de valuation et soit P un idéal premier de A, le morphisme $f: A \to A/P \times A_P$ descend la platitude, comme le montre le lemme II.1.3.2 de [23]. Puisque f est injectif, il est de Nakayama. La proposition 2 du chapitre I assure que f est submersif si et seulement si pour tout idéal premier Q de A on a $V(Q) = \tilde{Q}$. Un calcul montre que pour toute partie X proconstructible de $\operatorname{Spec}(A)$, $\rho(X) = \overline{X \cap V(P)} \cup \overline{X \cap G(P)} \cap G(P)$. Soit Q un idéal premier de $\operatorname{Spec}(A)$; si $P \subset Q$, on obtient $\rho(Q) = V(Q)$; si

$Q < P$, on obtient $\rho_2(Q) = \rho_3(Q) = V(P) \cup (V(Q) \cap G(P)) = V(Q)$. Par conséquent f est une submersion (d'ordre 2) mais ce n'est pas en général une subtrusion: si l'anneau A est de valuation, non Noethérien, contenant trois idéaux premiers différents $Q \subset P \subset R$, alors $Q \subset R$ ne se remonte pas à $A/P \times A_P$.

Remarque. On sait que les morphismes universellement submersifs descendent les morphismes entiers. Les morphismes de Nakayama possèdent une propriété voisine. Soit un morphisme $A \to A'$, tel que A' soit la limite inductive d'un système inductif filtrant de A-algèbres de type fini, les morphismes de transition étant a-surjectifs. Soit $A \to B$ un morphisme de Nakayama et soit $B \to B'$ le morphisme déduit de $A \to A'$ par changement de base. Si le morphisme $B \to B'$ est entier, il en est de même pour le morphisme $A \to A'$. En effet, soit $A \to A'_\alpha$ une des A-algèbres de type fini du système, il suffit de montrer qu'elle est finie. On sait que le morphisme $A'_\alpha \to A'$ est a-surjectif, il en est donc de même pour le morphisme $B \otimes_A A'_\alpha \to B \otimes_A A'$. Par conséquent, le morphisme $B \to B \otimes_A A'$ étant universellement fermé, il en est de même pour le morphisme $B \to B \otimes_A A'_\alpha$, qui est donc entier. Puisque ce morphisme est de type fini, il est fini. Les morphismes de Nakayama descendant la finitude des modules, le morphisme $A \to A'_\alpha$ est fini.

La proposition suivante qui s'inspire d'une proposition de L. Gruson et M. Raynaud [23], donnera des exemples de morphismes de Nakayama submersifs et non subtrusifs.

PROPOSITION 24. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme de Nakayama, où A est un anneau de valuation. Soit (P, Q) un élément de $T(A)$, alors il existe un couple (P_1, Q_1) de $T(A)$ où P_1 et Q_1 sont des idéaux premiers successifs tels que $P \subset P_1 \subset Q_1 \subset Q$ et tel qu'il existe un couple (P', Q') de $T(A')$ au dessus de (P_1, Q_1).*

Preuve. Soient P et Q des idéaux premiers de A tels que $P \subset Q$, il existe des idéaux premiers successifs $P_1 \subset Q_1$, tels que $P \subset P_1 \subset Q_1 \subset Q$. Puisque la propriété de Nakayama est universelle, on peut supposer l'anneau A de valuation de hauteur 1. Soit K le corps des quotients de A et soit I le noyau de $A' \to A' \otimes_A K$. Le morphisme $I \otimes_A K \to A' \otimes_A K$ est injectif et d'image nulle, d'où il résulte que $I \otimes_A K/A = 0$. Par exactitude, on obtient $A'/I \otimes_A K/A \neq 0$, sinon, le morphisme $A \to A'$ étant de Nakayama, on aurait $A = K$.

Alors, il existe un élément a de A, non nul et non inversible dans A'/I. Le morphisme $A \to A'/I$ est plat et l'anneau A'/I est différent de 0, soit un idéal maximal Q'_1 de A'/I, tel que le contracté M dans A contienne a, alors $M \neq 0$ et par suite $M = Q_1$. Puisque le morphisme $A \to A'/I$ est plat et puisque $P_1 \subset Q_1$, il existe un idéal premier P'_1 de A'/I contenu dans Q'_1 et au-dessus de P_1. En prenant les contractés dans A' on obtient le résultat cherché.

COROLLAIRE 25. *Soit A un anneau de valuation de hauteur n, alors tout morphisme de Nakayama $A \to A'$ est submersif.*

Preuve. Soit V un anneau de valuation contenant A, contenu dans K. Or, il existe un élément a de A, non nul, tel que $K = A_a$. Il en résulte que V existe un élément P de X tel que $P \subset Q$. Soit la suite d'idéaux premiers successifs: $P \subset P_1 \subset \cdots \subset P_m = Q$, allant de P à Q. En vertu de la proposition précédente, il existe un couple $P' \subset P'_1$ d'idéaux premiers de A', au-dessus de $P \subset P_1$. Mais P' appartenant à ${}^af^{-1}(X)$, il en est de même pour P'_1 et donc P_1 appartient à X. Par récurrence, on voit que Q appartient a X, i.e., X est fermée.

COROLLAIRE 26. *Soit A un anneau local intègre, complètement intégralement clos de dimension* 1, *et soit $f: A \to A'$ un morphisme de Nakayama, alors f est un morphisme subtrusif.*

Preuve. D'après [5, chap. VI, p. 178, ex. 8], il existe un anneau de valuation de hauteur 1 dominant A: en effet il existe un anneau de valuation V, de valuation v, contenant A, de hauteur 1 et il existe un élément z de $K - A$, n'appartenant pas à V. Soit M l'idéal maximal de A et soit x un élément de M, non nul; si $v(x) = 0$, alors x est inversible dans V. Mais si V contient A et un tel élément x, on a $V = K$ ce qui est absurde. Par suite: M est au-dessous de l'idéal maximal de V. Il suffit alors d'appliquer la proposition précédente, après changement de base.

LEMME 27. *Soit A un G-anneau intègre* (*tel que* 0 *soit ouvert dans* $\operatorname{Spec}(A)$). *Il existe un idéal premier P de A, non nul, et un anneau de valuation V pour le corps des quotients K de A, de hauteur* 1, *d'idéal maximal au-dessus de P.*

Preuve. Soit V un anneau de valuation contenant A, contenu dans K. Or, il existe un élément a de A, non nul, tel que $K = A_a$. Il en résulte que V est un G-anneau, dans ce cas $0 \neq \bigcap_{Q \neq 0, Q \in \operatorname{Spec}(V)} Q$, montre qu'il existe un idéal premier de hauteur 1 dans V. Soit Q cet idéal premier, l'anneau de valuation V_Q est de hauteur 1 et le contracté de Q dans A fournit l'idéal premier P cherché.

PROPOSITION 28. *Soit A un anneau, dont tout idéal premier est un G-idéal* (*i.e., pour tout idéal premier P de A, l'anneau A/P est un G-anneau*). *Soit $f: A \to A'$ un morphisme de Nakayama, pour tout élément* (P, Q) *de*

$T(A)$, il existe un élément (P, Q_1) de $T(A)$ tel que $P < Q_1 \subset Q$ et tel qu'il existe un élément (P', Q'_1) de $T(A')$ au-dessus de (P, Q_1).

Preuve. Par passage à $(A/P)_Q$, on peut supposer que A est un G-anneau. Par changement de base, on peut supposer A de valuation de hauteur 1, auquel cas la proposition résulte de la proposition 24.

8. *Les morphismes universellement submersifs ne sont pas en général subtrusifs*

Dans la totalité des cas connus, les morphismes universellement submersifs sont subtrusifs. Il semble donc naturel de conjecturer qu'il en est toujours ainsi. Le théorème suivant montre qu'il en est ainsi dans le cas d'un anneau de base Noethérien; par contre, en général, la conjecture est fausse comme on va le voir.

THÉORÈME 29. *Soit A un anneau Noethérien et soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux, tel que f soit universellement submersif. Alors le morphisme f est universellement subtrusif.*

Preuve. Soient $P \subset Q$ des idéaux premiers de A, il existe un anneau de valuation discrète V de spectre $\{0, M\}$ et un morphisme d'anneaux $g: A \to V$ tel que $T(g)(0, M) = (P, Q)$. Par hypothèse, $f': V \to V \otimes_A A'$ est submersif.

Or f étant a-surjective, ${}^af'^{-1}(0)$ n'est pas vide. De plus ${}^af'^{-1}(0)$ n'est pas fermé, sinon par submersivité, $0 = M$. On en déduit que $\overline{{}^af'^{-1}(0)}$ n'est pas contenu dans ${}^af'^{-1}(0)$. Puisque $\overline{{}^af'^{-1}(0)}$ est la réunion des fermés $V(Q')$ tels que ${}^af'(Q') = 0$, il existe un idéal premier M' de $V \otimes_A A'$ qui ne se contracte pas sur 0 et contenant un idéal premier Q' au-dessus de 0. On en déduit que ${}^af'(M') = M$ et ensuite que $T(f)$ est surjective. Soit maintenant, un changement de base $A \to B$. La A-algèbre B est limite inductive de A-algèbres A_i de présentation finie, donc Noethériennes. Les morphismes $A_i \to A_i \otimes_A A'$ étant universellement submersifs, sont subtrusifs, d'après ce qui précède. Il résulte de la proposition 3 du chapitre II que le morphisme $B \to B \otimes_A A'$ est subtrusif.

Soit A un anneau et soient s et t des éléments de A. Supposons que l'on ait une factorisation $A \to A[X]/(s(1 - tX)) \to A'$ d'un homomorphisme d'anneaux $A \to A'$. On obtient alors un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A[X]/(s(1-tX)) & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} & & \\ A/As \times A_t & \longrightarrow & A/As[X] \times A_t & & \end{array}$$

Le lemme suivant montre que si l'on part d'un morphisme non subtrusif, universellement submersif, on obtient la situation précédente, où de plus $A \to A'$ est un morphisme universellement submersif et s et t sont des éléments non nuls ni inversibles de A, le morphisme h étant universellement subtrusif. Par suite, ou bien les morphismes du type $A \to A/As \times A_t$, où s et t sont des éléments non nuls ni inversibles de A, ne sont jamais submersifs universellement et, alors, tout morphisme universellement submersif est subtrusif, ou bien il existe un morphisme de ce type universellement submersif et l'on pourra chercher un exemple non subtrusif. Il est donc intéressant d'étudier la submersivité des morphismes $A \to A/As \times A_t$. Le lemme qui suit, en dehors de ce qui précède, est utilisé plus loin.

LEMME 30 (D. Ferrand). *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux. Si le morphisme f n'est pas subtrusif et est a-surjectif, il existe un morphisme $A \to V$, où V est un anneau de valuation, satisfaisant: il existe des éléments s et t de V, non nuls ni inversibles tels qu'il existe une factorisation $V \to V[X]/(s(1-tX)) \to V \otimes_A A'$. Si de plus f est universellement submersif, il en est de même pour le morphisme $V \to V/Vs \times V_t$.*

Preuve. Soit donc un morphisme f non subtrusif. Il existe alors un anneau de valuation V, un morphisme $A \to V$ tel que, si M est l'idéal maximal de V, le couple $0 \subset M$ ne se remonte pas à $V \otimes_A A'$. On peut donc supposer que l'anneau A est de valuation et que le couple $0 \subset M$ ne se remonte pas à A'. Soit K, le corps des quotients de A et soit I l'idéal de torsion du morphisme $A \to A'$ (i.e., le noyau du morphisme $A' \to A' \otimes_A K$). L'adhérence de la fibre générique est donc le fermé $V(I)$. Par hypothèse, on a $A' = M.A' + I$; par suite, dans l'anneau A' on déduit la relation:

$1 = \sum_{i=1}^{n} a_i a'_i + y'$, où $\{a_1, ..., a_n\}$ est contenu dans M et $\{a'_1, ..., a'_n\}$ dans A', y' appartenant à I. Soit t un élément de A engendrant l'idéal $(a_1, ..., a_n)$ et soit s un élément non nul de A tel que $sy' = 0$. Finalement, il existe un élément t de A, $t \in M$, un élément x' de A', un élément s non nul de A, tels que $s(1 - tx') = 0$. Il résulte de cette relation que les éléments s et t ne sont pas nuls, ni inversibles, puique le morphisme f est a-surjectif. On en déduit le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r] \arrow[d] & A[X]/(s(1-tX)) \arrow[r] \arrow[d, "h"] & A' \\
A/As \times A_t \arrow[r] & A/As[X] \times A_t &
\end{tikzcd}$$

où la ligne du haut est une factorisation de $A \to A'$. Le morphisme h est injectif et fini, donc universellement subtrusif. Si de plus le morphisme f est universellement submersif, il en est de même pour le morphisme $A \to A/As \times A_t$.

LEMME 31. *Soient s et t des éléments d'un anneau A, tels que $D(s) \subset D(t)$. Soit $f\colon A \to A/As \times A_t$ le morphisme canonique. Les assertions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Le morphisme f est submersif.*

(b) *Pour tout idéal premier P dans $D(s)$ on a la relation $V(P+(s)) = \overline{V(P+(s)) \cap D(t)}$.*

(c) *Pour tout couple $P \subset M$ d'idéaux premiers de A, tels que $P \in D(s)$ et $M \in V(t)$ on a $V(s) \cap D(t) \cap V(P) \cap G(M) \neq \varnothing$.*

Preuve. La condition $D(s) \subset D(t)$ assure que le morphisme f est a-surjectif. Soit X une partie proconstructible de Spec(A), il est facile de voir que $\rho(X)$, avec les notations du chapitre I, n'est autre que $\overline{X \cap V(s)} \cup \overline{X \cap D(t)} \cap D(t)$.

La proposition 2 assure que le morphisme f est submersif si et seulement si pour tout idéal premier P de A on a $V(P) = \tilde{P}$. Le calcul de $\rho(P)$ donne suivant les cas:

(a) si P appartient à $V(s)$, alors $\rho(P) = V(P)$.

(b) si P appartient à $D(s)$, alors $\rho(P) = V(P) \cap D(t)$, puisque $P \in D(t)$. On en déduit alors que $\rho_2(P) = V(P) \cap D(t) \cap \overline{V(P) \cap D(t) \cap V(s)}$ et, ensuite, que $\rho_3(P) = \rho_2(P)$, puisque pour une partie fermée Y, on a $Y = \rho(Y)$. Il en résulte que le morphisme f sera submersif si et seulement si pour tout idéal premier P dans $D(s)$ on a $V(P) \cap D(t) \cup \overline{V(P+(s)) \cap D(t)} = V(P)$.

En prenant l'intersection par les deux membres de $V(s)$, on obtient la condition équivalente: $V(P+(s)) = \overline{V(P+(s)) \cap D(t)}$, compte tenu de la relation $\mathrm{Spec}(A) = V(s) \cup D(t)$.

Par conséquent (a) est équivalente à (b). Supposons (b) satisfaite et soit P un idéal premier de A dans $D(s)$, contenu dans un idéal premier M dans $V(t)$. Puisque $V(t) \subset V(s)$, on a $P + (s) \subset M$, et par suite $V(s) \cap D(t) \cap V(P) \cap G(M)$ est non vide. Réciproquement, supposons la condition de (c) vérifiée et montrons que f est submersive. Soit X une partie de Spec(A), proconstructible, telle que $X \cap V(s) = F \cap V(s)$ et $X \cap D(t) = F' \cap D(t)$, où F et F' sont des fermés de Spec(A). Il s'agit de montrer que X est fermée, c'est à dire stable par spécialisation. Soit P un idéal premier dans X et soit Q un idéal premier tel que $P \subset Q$. Si P appartient à $V(s)$ ou si Q appartient à $D(t)$, il est clair que Q est dans X. Supposons que P soit dans $D(s)$ et Q dans $V(t)$, en vertu de la condition (c), il existe un idéal premier P' dans $V(s) \cap D(t)$ tel que $P \subset P' \subset Q$. Puisque P est dans $D(t)$, on voit que P' est dans X; de même, puisque P' est dans $V(s)$, on voit que Q est dans X. Par conséquent (c) entraîne (a).

Remarque. Les calculs précédents montrent que si le morphisme f est submersif il l'est au second ordre, puisqu'alors $\rho_2(P) = \rho_3(P)$, pour tout idéal premier P de A.

La condition du lemme peut être formulée par $V(P+(s)) = V(r(P+(s)): t)$.

PROPOSITION 32. *Soient s et t des éléments, non nuls ni inversibles, d'un anneau de valuation A. Le morphisme $f: A \to A/As \times A_t$ est universellement submersif si et seulement si $V(s) \cap D(t)$ est non vide.*

Preuve. Supposons f universellement submersif, alors, par a-surjectivité de f, on a $D(s) \subset D(t)$. Puisque $D(s)$ n'est pas vide, il existe un idéal premier P de A dans $D(s)$. En vertu du lemme 31, on a la relation $V(P+(s)) = \overline{V(P+(s)) \cap D(t)}$. Puisque s n'appartient pas à P, l'idéal P est contenu dans (s). La relation ci-dessus se formule alors en $V(s) = \overline{V(s) \cap D(t)}$. Soit Q un idéal premier de A tel que $V(s) = V(Q)$. Ainsi la relation devient $V(Q) = \overline{\{Q\} \cap D(t)}$, ce qui impose que Q soit dans $D(t)$, id est: $V(s) \cap D(t)$ est non vide.

Réciproquement, supposons que $V(s) \cap D(t)$ soit non vide, alors $D(s)$ est contenu dans $D(t)$. De plus si P est un idéal premier de A appartenant à $D(s)$, on la suite d'égalités:

$$V(P+(s)) = V(s) = V(Q) = \overline{\{Q\} \cap D(t)} = \overline{V(Q) \cap D(t)} = \overline{V(P+(s)) \cap D(t)}.$$

On en déduit que f est submersif. Pour montrer qu'il l'est universellement, il suffit de montrer que dans un changement de base $A \to V$ où V est un anneau de valuation, la condition: $V(s) \cap D(t)$ est non vide, est conservée dans V, ou que $D(s) = \varnothing$ ou $V(s) = \varnothing$ dans V. Un morphisme $A \to V$, où V est un anneau de valuation se factorise en $A \to A/I \to V$, I étant un idéal premier de A. Ou bien $D(s)$ est vide dans A/I, ou bien il existe un idéal premier P de A dans $D(s) \cap V(I)$. Dans le second cas, la condition dans A, soit: $V(s) \cap D(t)$ est non vide, peut s'écrire: $V(s) = \overline{V(s) \cap D(t)}$; puisque $V(P+(s)) \cap V(I) = V(s)$, on a encore $V(s) = \overline{V(s) \cap D(t)}$ dans A/I. D'autre part le morphisme $A/I \to V$ est injectif, entre anneaux de valuation, il est plat, donc générisant. Soit i le morphisme $A/I \to V$, si X est une partie proconstructible de A/I, on sait que ${}^a i^{-1}(\bar{X}) = \overline{{}^a i^{-1}(X)}$. Donc, ou bien $D(s) = \varnothing$ ou $V(s) = \varnothing$ dans V, ou bien $V(s) \cap D(t)$ est non vide dans V: le morphisme $V \to V \otimes_A B$ est submersif (B est l'anneau $A/As \times A_t$).

COROLLAIRE 33. *Soient A un anneau de valuation et s et t des éléments de A, non nuls, ni inversibles, tels que $V(s) \cap D(t)$ soit non vide (en particulier, la hauteur de A est au moins 2). Le morphisme $A \to A[X]/(s(1-tX))$ est universellement submersif, de présentation finie, à fibres géométriquement intègres, mais il n'est pas subtrusif.*

Preuve. Claire, compte tenu de la factorisation

$$A \to A[X]/(s(1-tX)) \to A/AsXA_t.$$

Remarque. Cet exemple montre que la condition: A est un anneau Noethérien ne peut être supprimée dans le théorème 29.

Le même corollaire, ci-dessus, montre que l'on n'a pas de théorème, style E.G.A. ch. IV, Par. 8, du type suivant: soit $A \to B$ un morphisme de présentation finie limite inductive de morphismes $A_i \to B_i$, où les anneaux A_i sont Noethériens, il existe un indice i tel que $A_i \to B_i$ soit universellement submersif, lorsque le morphisme $A \to B$ est universellement submersif.

PROPOSITION 34. *Soit A un anneau et soient s et t des éléments de l'anneau A, vérifiant $\overline{D(s)} \subset D(t)$ (ou $G(V(t)) \subset V(s)$), alors le morphisme $f: A \to A/AsXA_t$ est universellement subtrusif.*

Preuve. La condition $\overline{D(s)} \subset D(t)$ entraîne $D(s) \subset D(t)$, donc la a-surjectivité de f. D'autre part, la condition est universelle: si $g: A \to B$ est un morphisme d'anneaux, on a la suite d'inclusions ${}^a g^{-1}(\overline{D(s)}) = \overline{D(g(s))} \subset {}^a g^{-1}(\overline{D(s)}) \subset D(g(t))$. Il suffit de montrer que la condition entraîne que f est un morphisme subtrusif. La condition $\overline{D(s)} \subset D(t)$ s'exprime par $r(0): s + (t) = A$. Soient $P \subset Q$ des idéaux premiers de A. Ou bien s n'appartient pas à P et dans ce cas $r(0): s \subset P \subset Q$ entraîne P et Q sont dans $D(t)$, ou bien, s appartient à P, donc, à Q. Le deuxième cas donne lieu à une preuve analogue, compte tenu de la relation $G(V(t)) = \mathrm{Spec}(A_{1+(t)})$.

Remarque. Si l'anneau A est intègre, la proposition précédente a peu d'intérêt. On a un exemple en prenant un anneau B et un élément b de B, non nul et pour anneau A, l'anneau $B[X]/(bX-b)$ et $s = \bar{b}$, $t = \bar{X}$. Dans ce cas, le morphisme f est pur.

PROPOSITION 35. *Soit A un anneau et soient s et t des éléments de A. Le morphisme $A \to A/As \times A_t$ est universellement submersif si et seulement si $D(s) \subset D(t)$ et pour tout entier n il existe un entier m tel que $s^m \in (s, t^n)^{m+1}$.*

Preuve. La condition $D(s) \subset D(t)$ exprime la a-surjectivité du morphisme. Soit un entier n et supposons le morphisme universellement submersif. Considérons le changement de base $A \to B$, où $B = A[X]/(sX - t^n)$. Dans $\mathrm{Spec}(B)$ on a $D(s) = D(t)$, par conséquent $D(s)$ est fermé dans $\mathrm{Spec}(B)$. En vertu du lemme 36 suivant, il existe un entier m tel que $s^m = s^{m+1}b$, où b est un élément de B. Soit $b = a_0 + \cdots + a_d x^d$, on voit que $s^d b = \sum_{i=0}^d a_i s^{d-i} t^{ni}$ est dans $(s, t^n)^d$; multipliant l'égalité $s^m = s^{m+1}b$ par une puissance convenable pour que $m \geqslant d$, on obtient alors $s^m = s^{m+1-d} s^d b$

appartient à $(s, t^n)^{m+1}$, dans B, donc aussi dans A_s. Multipliant par une puissance convenable de s, on obtient alors la relation dans A.

Réciproquement, supposons que pour tout entier n, il existe un entier m tel que $s^m \in (s, t^n)^{m+1}$. Cette condition est universelle, il nous suffit donc de montrer que lorsque A est un anneau de valuation elle entraîne que le morphisme est universellement submersif. En vertu de la proposition 32, si $V(s) \cap D(t)$ est non vide, il n'y a rien à prouver; si $V(s) \cap D(t) = \varnothing$, alors il existe un entier n tel que $t^n = sa$, où $a \in A$. La condition implique dans ce cas que $s^m = s^{m+1}b$ où $b \in A$. Par conséquent $D(s)$ est un fermé d'un espace irréductible, donc est vide ou égal à Spec(A), c'est à dire $s = 0$ ou s inversible, donc aussi t. Il est trivial que dans ces deux cas le morphisme est universellement submersif.

LEMME 36. *Soit A un anneau et soit s un élément de A. Il y a équivalence entre:*

(1) *L'ouvert $D(s)$ est fermé.*

(2) *Il existe un entier m tel que $s^m \in s^{m+1}A$.*

(3) *Il existe un entier m tel que l'idéal s^mA soit idempotent.*

Preuve. Supposons $D(s)$ fermé, et soit I le noyau de $A \to A_s$. L'adhérence de $D(s)$ est $V(I)$, donc s est inversible dans A/I. Il existe donc un élément a de A tel que $sa - 1 \in I$, donc il existe un entier m tel que $s^m = s^m a$. Ainsi (1) entraîne (2). Si $s^m = s^m a$, on voit par récurrence que $s^m = s^{m+i}a^i$, donc que s^mA est idempotent. Donc (2) entraîne (3). Enfin supposons (3) vérifié, comme $D(s) = D(s^m)$, on peut supposer que l'idéal As est idempotent, donc est engendré par un idempotent. Il en résulte que $D(s)$ est fermé.

Remarque. Soit A un anneau et soient s et t des éléments de A, tels que $D(s) \subset D(t)$. On sait que $G(V(s)) = \mathrm{Spec}(A_{1+(s)})$ et $\overline{D(t)} = V(I)$, où I est le noyau du morphisme $A \to A_t$. Il existe une factorisation $A \to A_{1+(s)} \times A/I \to A/As \times A_t$, il est facile de voir que le premier morphisme est universellement subtrusif.

9. *Le théorème de structure des morphismes universellement subtrusifs*

Le théorème qui suit est fondamental pour ce paragraphe, il donne un critère valuatif de submersivité universelle et un critère valuatif de subtrusivité universelle. A l'aide de ce théorème, on va montrer que la définition, purement topologique, des morphismes universellement subtrusifs peut être remplacée par une définition algébrique, en complète analogie avec les morphismes universellement fermés, qui, on le sait, sont les morphismes entiers. Curieusement, d'ailleurs, la définition algébrique fait intervenir la notion d'élément entier.

THÉORÈME 37. *Soit $f\colon A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux.*

(a) *Le morphisme $A \to A'$ est universellement subtrusif si et seulement si pour tout changement de base $A \to V$, où V est un anneau de valuation, le morphisme $V \to A' \otimes_A V$ est pur.*

(b) *Le morphisme $A \to A'$ est universellement submersif si et seulement si pour tout changement de base $A \to V$, où V est un anneau de valuation, le morphisme $V \to V \otimes_A A'$ est submersif.*

Preuve. La partie (a) résulte de la proposition 16. Un partie de la preuve de (b) est claire. Réciproquement, supposons la condition de (b) vérifiée et soit un changement de base $A \to B$. En désignant par g le morphisme $B \to B \otimes_A A'$, si X est une partie proconstructible de Spec(B), telle que ${}^ag^{-1}(X)$ soit fermée, pour montrer que X est fermée, il suffit de voir que X est stable par spécialisation. Soient $P \subset Q$ des idéaux premiers de B, tels que P soit dans X. Il existe un morphisme d'anneaux $\varphi\colon B \to V$, où V est un anneau de valuation d'idéal maximal M au-dessus de Q et dont l'idéal 0 est au-dessus de P. Mais ${}^a\varphi^{-1}(X)$ est encore proconstructible, et si h est le morphisme $V \to V \otimes_A A'$, la partie ${}^ah^{-1}({}^a\varphi^{-1}(X))$ est fermée. Par hypothèse, ${}^a\varphi^{-1}(X)$ est fermée; puisque 0 est dans cette partie et puisque $0 \subset M$, on voit que M appartient à ${}^a\varphi^{-1}(X)$, bref Q appartient à X.

Avant de donner les deux résultats principaux du paragraphe, voici deux définitions:

DÉFINITION 38. Soit I un idéal d'un anneau A, on appelle fermeture intégrale de I dans A, l'ensemble des éléments b de A tels qu'il existe un polynôme $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \cdots + a_n$, où a_i est un élément de I^i, pour lequel $P(b) = 0$. L'ensemble des éléments b précédents est désigné par $\hat{I}$, c'est un idéal de A. On montre que $\hat{I}$ est l'ensemble des éléments b de A tels que bX soit entier sur l'anneau $A_I = A + IX + I^2X^2 + \cdots + I^nX^n + \cdots$. Si de plus l'anneau A est intègre, $\hat{I} = \bigcap_{\delta \in D} I.V_\delta \cap A$, où $\{V_\delta\}_{\delta \in D}$ est la famille des anneaux de valuation pour le corps des quotients de A.

LEMME 39. *Soit $f\colon A \to A'$ un morphisme entier injectif et soit I un idéal de A, pour un élément a de A, la relation $a \in \widehat{I.A'}$ entraîne $a \in \hat{I}$ et réciproquement.*

Preuve. Le morphisme $A_I \to A'_{I.A'}$ est entier injectif.

DÉFINITION 40. Soit A un anneau et soit $P(X)$ un polynôme de $A[X]$, on dit que $P(X)$ a des zéros valuatifs si pour tout morphisme $A \to V$, où V est un anneau de valuation, à corps des quotients algébriquement clos, le polynôme $P(X)$ a un zéro dans V. La condition est évidemment invariante, par changement de base.

THÉORÈME 41. *Soit A un anneau et soit $P(X)$ un polynôme de $A[X]$. Soit le morphisme $A \to A[X]/(P(X))$. Les conditions suivantes sont équivalentes:*

(a) *Le morphisme est universellement subtrusif.*

(b) *Le polynôme $P(X)$ a des zéros valuatifs.*

(c) *Si $P(X) = a_0 + \cdots + a_n X^n$, a_0 appartient à $\widehat{(a_1, ..., a_n)}$.*

La preuve en sera donnée un peu plus loin par une série de lemmes. Le théorème de structure des morphismes universellement subtrusifs s'en déduit immédiatement comme suit:

THÉORÈME 42. *Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux, ce morphisme est universellement subtrusif si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite:*

(a) *Le morphisme $A \to B$ vérifie universellement: tout polynôme $P(X) = a_0 + \cdots + a_n X^n$ de $A[X]$, ayant un zéro dans B, est tel que $a_0 \in \widehat{(a_1, ..., a_n)}$.*

(b) *Le morphisme $A \to B$ verifie universellement: tout polynôme $P(X)$ de $A[X]$, ayant un zéro dans B, a des zéros valuatifs.*

(c) *Le morphisme $A \to B$ vérifie universellement: tout polynôme $aX + b$ de $A[X]$, ayant un zéro dans B, a des zéros valuatifs.*

Preuve. Soit $P(X)$ un polynôme de $A[X]$ ayant un zéro dans B, il existe une factorisation $A \to A[X]/(P(X)) \to B$. Si le morphisme $A \to B$ est universellement subtrusif il en est de même pour $A \to A[X]/(P(X))$, donc $P(X)$, a des zéros valuatifs. Bien entendu, ceci est vrai universellement. La condition (b) entraîne trivialement la condition (c). Supposons (c) vraie et le morphisme $A \to B$ non universellement subtrusif. D'après un raisonnement déjà fait (lemme 30) il existerait un morphisme $A \to V$, où V est un anneau de valuation que l'on peut supposer à corps des quotients algébriquement clos, dans lequel il existe un élément s appartenant à $V - \{0\}$ et un élément t appartenant à l'idéal maximal de V, tels que le polynôme $s(1 - tX)$ ait un zéro dans $V \otimes_A B$. La condition (c) entraîne alors que $s(1 - tX)$ a un zéro dans V, soit $s(1 - tv) = 0$ ce qui est absurde, puisque s est non nul et t non inversible.

Voici la démonstration du théorème 41, par une série de résultats. Pour commencer on rappelle le lemme suivant bien connu:

LEMME 43. *Soit $f\colon A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux et soit x' un élément de A'. Pour que x' soit entier sur A, il faut et il suffit que pour tout idéal premier minimal M' de A', l'élément $\bar{x}'$ de A'/M' soit entier sur A.*

Remarque. Le lemme précédent montre: soit A un anneau, le morphisme $A \to \prod A/P$ *où P parcourt l'ensemble des idéaux premiers de A, descend les morphismes entiers. En fait, il est universellement subtrusif.*

LEMME 44. *Soit A un anneau et soient a et b des éléments de A. Le morphisme $A \to A[X]/(aX-b) = B$ est pur si et seulement si il existe un élément t de A tel que $b = at$.*

Preuve. Il est clair que, dans le cas où $b = at$, le morphisme $A \to B$ est pur. Supposons le morphisme pur, alors le changement de base $A \to A/(a)$ montre que $b = at$.

LEMME 45. *Soit A un anneau et soit $P(X)$ un polynôme de $A[X]$. Le morphisme $A \to A[X]/(P(X))$ est plat si et seulement si, désignant par I le contenu de $P(X)$, on a $I = I^2$. En particulier, si l'anneau A est intègre, le morphisme est plat si et seulement si $P(X) = 0$ ou $I = A$.*

Preuve. C'est une conséquence directe des résultats de J. Ohm et D. E. Rush [15]. On peut toutefois en donner une preuve directe et élémentaire, comme suit. Puisque $A[X]$ est plat sur A, si le morphisme est plat, on doit avoir pour tout idéal J de A la relation: $(P(X)) \cap J[X] = J(P(X))$. Prenons pour idéal J le contenu I de $P(X)$, il est clair que $(P(X)) \subset I[X]$; de $(P(X)) = I(P(X))$ on déduit facilement que $I = I^2$. Réciproquement, si $I = I^2$, le morphisme est plat. En effet, d'après un argument classique, $A[X]/(P(X))$ est plat lorsque pour tout polynôme $Q(X)$ multiple de $P(X)$ on a $Q(X) \in c(Q(X))(P(X))$, $c(Q(X))$ désignant le contenu de $Q(X)$, voir chapitre 0. Par localisation en un idéal premier P de A, on peut supposer A local et $I = 0$ ou $I = A$: en effet le contenu se localise bien et, d'autre part, I étant un idéal de type fini est engendré par un idempotent. Dans le cas où $I = 0$ le résultat est clair. Supposons $I = A$ et soit $Q(X) = Q_1(X)\, P(X)$ la formule des contenus (voir chapitre 0) montre que $c(Q_1(X)) = c(Q(X))$, donc $Q(X)$ appartient à $c(Q(X))(P(X))$.

Remarque. Le lemme précédent se généralise, par une preuve identique, au cas de n indéterminées: $A \to A[X_1, ..., X_n]/(f(X_1, ..., X_n))$ est plat si et seulement si le contenu de f est un idéal idempotent.

LEMME 46. *Soient $I_1, ..., I_n$ des idéaux d'un anneau A, le morphisme suivant: $A/I_1 \cdots I_n \to A/I_1 \times \cdots \times A/I_n$ est subtrusif.*

Preuve. Claire.

LEMME 47. *Soit A un anneau de valuation de corps des quotients K, et soit une famille finie de A-algèbres $\{A \to B_i\}_{i=1,...,n}$. Le morphisme $A \to \prod B_i$ est pur si et seulement si l'un des morphismes $A \to B_i$ est pur.*

Preuve. La factorisation $A \to \prod B_i \to B_i$ donne une partie de la preuve. Réciproquement, si le morphisme $A \to \prod B_i$ est pur, d'idéal de torsion I, le morphisme $A \to \prod B_i/I$ est fidèlement plat (proposition 16). Mais l'idéal de torsion I est le produit des idéaux de torsion I_i des morphismes $A \to B_i$. Le morphisme $A \to \prod B_i/I_i$ est donc fidèlement plat si et seulement si l'idéal maximal de A se remonte à l'un des anneaux B_i/I_i, i.e., $A \to B_i/I_i$ est fidèlement plat. Donc le morphisme $A \to B_i$ est pur.

LEMME 48. *Soit V un anneau de valuation et soit le polynôme $P(X) = (\alpha_1 X - \beta_1) \cdots (\alpha_n X - \beta_n)$ de $V[X]$. Le morphisme $V \to V[X]/(P(X)) = B$ est pur si et seulement si $P(X)$ a un zéro dans V.*

Preuve. Considérons le morphisme composé

$$V \to V[X]/(P(X)) \to \prod_{i=1}^{n} V[X]/(\alpha_i X - \beta_i).$$

Le deuxième morphisme est subtrusif (lemme 46). Le composé l'est donc aussi, lorsque $V \to B$ est pur. La proposition 16 montre encore que le morphisme composé est pur. D'après le lemme 47, le composé est pur si et seulement si un des morphismes $V \to V[X]/(\alpha_i X - \beta_i)$ est pur. D'après le lemme 44 le polynôme $P(X)$ a un zéro dans V.

LEMME 49. *Soit V un anneau de valuation, soit $P(X)$ un élément de $V[X]$ et soit a un élément de V, non nul. Désignons par $P_1(X)$ le polynôme $aP(X)$. Le morphisme $V \to V[X]/(P(X)) = B$ est pur si et seulement si le morphisme $V \to V[X]/(P_1(X)) = B_1$ est pur.*

Preuve. Puisque l'idéal $(P_1(X))$ est contenu dans l'idéal $(P(X))$, il est clair que $V \to B$ est un morphisme pur entraîne $V \to B_1$ est un morphisme pur. Réciproquement, supposons que $V \to B_1$ soit un morphisme pur. Soit I_1 l'idéal de torsion de ce morphisme, le morphisme $V \to B_1/I_1$ est fidèlement plat. Soit aussi I l'idéal de torsion du morphisme $V \to B$. Les ideaux I et I_1 sont respectivement égaux à $J/(P(X))$ et $J_1/(P_1(X))$, où J et J_1 sont les saturés respectifs de $(P(X))$ et $(P_1(X))$, pour la partie multiplicative $V - \{0\}$. Mais il est clair que J est contenu dans J_1. Puisqu'on a alors une factorisation $V \to B/I \to B_1/I_1$, on voit que le morphisme $V \to B/I$ est a-surjectif, donc fidèlement plat.

LEMME 50. *Soit A un anneau et soit $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$ un élément de $A[X]$. Si le polynôme $P(X)$ a des zéros valuatifs, a_0 appartient à $\widetilde{(a_1, \ldots, a_n)}$.*

Preuve. Soit le changement de base $A \to \mathrm{Bes}(A)$, entier, fidèlement plat, à but F. L. (voir chap. 0). Si le polynôme $P(X)$ a des zéros valuatifs dans A, il en a dans tout anneau quotient intègre de $\mathrm{Bes}(A)$. Soit $A' = \mathrm{Bes}(A)$, soit P' un idéal premier de A' et soit K' le corps des quotients de A'/P'. L'anneau A'/P' est intégralement clos, à corps des quotients algébriquement clos. Il en est de même pour tout anneau de valuation V' pour K', contenant A'/P'. Par suite $P(X)$ a un zéro dans V'. Il existe donc un élément v de V' tel que $P(v) = 0$, d'où l'on déduit que $a_0 \in (a_1,..., a_n)\, V'$. Cette propriété, étant vraie pour tout anneau de valuation V', on voit que $a_0 \in \widehat{(a_1,..., a_n)}$ dans A'/P'. En vertu du lemme 39, il en est de même dans A/P, pourvu que P' soit un idéal premier de A' au-dessus de l'idéal premier P de A. Il résulte du lemme 43 que a_0 appartient à $\widehat{(a_1,..., a_n)}$ dans A: on a $\bar{a}_0 \in \widehat{(\bar{a}_1,..., \bar{a}_n)}$ dans tout anneau A/P où P est un idéal premier minimal de A; d'autre part, un idéal premier minimal de $A[X]$ est de la forme $P[X]$ où P est un idéal premier minimal de A, considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A_I & \longrightarrow & A[X] \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow \\ (A/P)_{\bar{I}} & \xrightarrow{h} & A/P[X] \end{array} \qquad \text{où} \qquad I = (a_1,..., a_n) \quad \text{et} \quad \bar{I} = (\bar{a}_1,..., \bar{a}_n)$$

le morphisme g est surjectif, l'élément $\bar{a}_0 X$ de $A/P[X]$ est entier sur $(A/P)_{\bar{I}}$ il est donc entier sur A_I; donc $a_0 X$ est entier sur A_I (lemme 43).

PROPOSITION 51. *Soit V un anneau de valuation et soit $P(X)$ un polynôme de $V[X]$, $P(X) = a_0 + \cdots + a_n X^n$. Le morphisme $V \to V[X]/(P(X))$ est pur si et seulement si a_0 appartient à $(a_1,..., a_n)$.*

Preuve. L'idéal engendré par les coefficients de $P(X)$ est monogène, si bien que $P(X) = aQ(X)$, où a est un élément de V et $Q(X)$ un polynôme ayant au moins un coefficient égal à 1. Le morphisme $V \to V[X]/(P(X))$ est pur si et seulement si le morphisme $V \to V[X]/(Q(X))$ est pur, en vertu d'un résultat ci-dessus. D'après le lemme 45, on sait déjà que le morphisme $V \to V[X]/(Q(X))$ est plat. Il sera donc pur si et seulement si l'idéal maximal M de V se remonte à $V[X]/(Q(X))$. Désignons par B ce dernier anneau et soit $Q(X) = b_0 + \cdots + b_n X^n$, la condition s'exprime par $M.B \neq B$. Cette dernière condition est équivalente à $(b_1,..., b_n) \subset M$ entraîne $b_0 \in M$: il suffit de considérer $K[X]/(\bar{Q}(X))$, où K est V/M et $\bar{Q}(X)$ est l'image de $Q(X)$ dans $K[X]$. Puisque le contenu de $Q(X)$ est égal à V, finalement on voit que le morphisme est pur si et seulement si b_0 appartient à $(b_1,..., b_n)$. Si cette condition est réalisée, il est clair que a_0 appartient à $(a_1,..., a_n)$. Réciproquement, si a_0 appartient à $(a_1,..., a_n)$; ou bien $a = 0$ et dans ce cas $P(X)=0$, le morphisme est pur; ou bien $a \neq 0$ et dans ce cas b_0 appartient à $(b_1, \ldots, b_n)$, le morphisme est pur.

On est maintenant en mesure de donner la preuve du théorème:

Preuve. Si le morphisme est universellement subtrusif, pour tout changement de base $A \to V$, où V est un anneau de valuation à corps algébriquement clos, le morphisme $V \to V[X]/(P(X))$ est pur. Supposons $P(X)$, de coefficient dominant a_n non nul, et considérons le polynôme $a_n^{n-1}P(X)=P_1(X)$. D'après le lemme 49, le morphisme $V \to V[X]/(P(X))$ est pur si et seulement si le morphisme $V \to V[X]/(P_1(X))$ est pur. Le polynôme $P_1(X)$ se factorise dans V en $(a_nX-\alpha_1)\cdots(a_nX-\alpha_n)$: l'anneau V possède la propriété F. L., il suffit alors de factoriser le polynôme

$$Q(Y)=Y^n+a_{n-1}Y^{n-1}+a_{n-2}a_nY^{n-2}+\cdots+a_0a_n^{n-1}$$

et de constater que $a_n^{n-1}P(X)=Q(a_nX)$. D'après le lemme 48, le polynôme $P_1(X)$ a un zéro dans V, donc aussi le polynôme $P(X)$.

Supposons que le polynôme $P(X)$ ait des zéros valuatifs, d'après le lemme 50, a_0 appartient à $\widehat{(a_1, \ldots, a_n)}$. Supposons que cette condition soit réalisée et considérons un changement de base $A \to V$, où V est un anneau de valuation. La condition $a_0 \in \widehat{(a_1, \ldots, a_n)}$ se transmet à V. Compte tenu de la définition 38, on voit que a_0 appartient à $(a_1, \ldots, a_n)$; la proposition 51, montre alors que le morphisme, après changement de base $A \to V$, est pur: le morphisme est universellement subtrusif.

Remarques. (1) Un morphisme universellement subtrusif, étant limite inductive de morphismes de présentation finie, est donc limite inductive de morphismes de présentation finie universellement subtrusifs: en effet, si $A \to A'$ est un morphisme universellement subtrusif, où A' est limite inductive du système $\{A_i\}$, inductif filtrant, de A-algèbres de présentations finies, la factorisation $A \to A_i \to A'$ montre que les morphismes $A \to A_i$ sont universellement subtrusifs.

Il serait intéressant de connaître un critère semblable à celui du théorème 41, c) déterminant quand un morphisme $A \to A[X_1, \ldots, X_n]/(F_1, \ldots, F_p)$ est universellement subtrusif. Une première observation dans cet ordre d'idées est la suivante: soit $F(X_1, \ldots, X_n)$ un polynôme de $A[X_1, \ldots, X_n]$, le morphisme $A \to A[X_1, \ldots, X_n]/(F(X_1, \ldots, X_n))$ est universellement subtrusif si et seulement si le coefficient constant de F appartient à la fermeture intégrale $\hat{I}$ dans A de l'idéal engendré par les autres coefficients de F. La preuve peut se faire pour la partie directe en montrant l'analogue de la proposition 51. Pour la réciproque on utilise un morphisme de Kronecker convenable

$$k\colon \quad A[X_1, \ldots, X_n] \to A[X]$$

défini par $k(P(X_1,..., X_n)) = P(X^d, X^{d^2}, X^{d^n})$, où d est un entier suffisamment grand pour que les coefficients de $k(F)$ soient les mêmes que ceux de F. Le morphisme composé $A \to A[X_1,..., X_n]/(F) \to A[X]/(k(F))$ étant universellement subtrusif lorsque le coefficient constant de F appartient à $\hat{I}$, il en est de même pour le morphisme $A \to A[X_1,..., X_n]/(F)$.

Un morphisme de Kronecker convenable permet de ramener l'étude du morphisme $A \to A[X_1,..., X_n]/(F_1,..., F_p)$ à un morphisme du type $A \to A[X]/(f_1(X),..., f_p(X))$ les coefficients des polynômes F_i étant les mêmes que ceux des polynômes f_i.

(2) La proposition 51 peut s'étendre de la manière suivante: soit V un anneau de valuation et soit $I = (f_1,..., f_p)$ un idéal de $V[X]$. Le morphisme $V \to V[X]/I$ est pur si et seulement si I est contenu dans un idéal principal (f) de $V[X]$ tel que a_0 appartient à $(a_1,..., a_q)$, si $f(x) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_q X^q$.

Le morphisme $V \to V[X]/I \to V[X]/(f)$ et la proposition 51 donnent une partie de la preuve. Supposons $V \to V[X]/I$ pur, alors le morphisme $V \to V[X]/\mathrm{Sat}(I)$ est fidèlement plat (proposition 16). Il résulte de [15], lemme 2.1 et remarque 2.2, que l'idéal $\mathrm{Sat}(I)$ est principal, donc de la forme (f), où $f = a_0 + \cdots + a_q X^q$; une application de la proposition 51 donne alors que a_0 appartient à $(a_1,..., a_q)$.

Cette généralisation ne se prête pas à l'obtention d'un critère agréable de subtrusivité universelle pour les morphismes du type $A \to A[X]/(f_1,..., f_n)$.

(3) Soit le morphisme $A \to \bigotimes_{i=1}^n A[X]/(f_i(X)) = A[X_1,..., X_n]/(f_1(X_1),..., f_n(X_n))$, puisque $(f_i(X_i))$ est contenu dans $(f_1(X_1),..., f_n(X_n))$, il est clair que ce morphisme est universellement subtrusif si et seulement si pour tout indice i le polynôme f_i vérifie la condition: $f_i(0)$ appartient à la fermeture intégrale de l'idéal engendré par les coefficients non constants de f_i.

10. *Morphismes universellement subtrusifs particuliers*

Nous examinons dans ce paragraphe deux types particuliers de morphismes universellement subtrusifs:

(i) les morphismes $A \to B$ injectifs, entre anneaux intègres ayant même corps des quotients; on en tire une application aux morphismes birationnels.

(ii) les morphismes quasi-finis.

PROPOSITION 52. *Soit A un anneau intègre, de corps des quotients K. Soit une factorisation $A \to B \to K$, où B est un sous-anneau de K.*

(1) *Si $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont les clôtures intégrales des anneaux A et B, le morphisme $A \to B$ est submersif (resp. subtrusif) lorsque le morphisme $\bar{A} \to \bar{B}$ est submersif (resp. subtrusif).*

(2) *Le morphisme $A \to B$ est universellement subtrusif si et seulement si il est entier.*

Preuve. Etant donné le diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & B \\ \downarrow & & \downarrow \\ \bar{A} & \longrightarrow & \bar{B}, \end{array}$$

la partie (1) est évidente. Pour montrer que le morphisme $A \to B$ est entier, il suffit de montrer que $\bar{A} = \bar{B}$. Supposons d'abord le morphisme $A \to B$ entier, alors il est clair que ce morphisme est universellement subtrusif. Réciproquement, supposons $A \to B$ universellement subtrusif et montrons que $\bar{A} = \bar{B}$. Soit V un anneau de valuation, contenant A et contenu dans K, il suffit de montrer que B est contenu dans V. D'après la proposition 16, le morphisme $V \to V'$, déduit de $A \to B$, par changement de base, est pur. Soit I l'idéal de torsion de $V \to V'$, on sait que le morphisme $V \to V'/I$ est fidèlement plat. D'autre part, I est le noyau du morphisme $B \otimes_A V \to B \otimes_A K = K$, donc V'/I est un sous-anneau C de K. Soit M l'idéal maximal de V, il se remonte en un idéal maximal N de C. Il existe donc un morphisme $V \to C_N$, où C_N est un sous-anneau local de K, dominant V. Par maximalité pour la relation de domination, les anneaux V et C_N sont égaux. Soit b un élément de B, son image b dans C_N appartient à V, c'est à dire: b appartient à V.

On pourrait donner une preuve plus rapide mais moins directe de la proposition en utilisant le théorème 42: le morphisme $A \to B$ est universellement subtrusif si et seulement si pour tout élément as^{-1} de B, a appartient à $\widehat{(s)}$.

Remarque. On ne peut remplacer dans la proposition précédente universellement subtrusif par universellement submersif. En effet, soit $k \to K$ une extension de corps, soient $A' = K[X]$, $A = k + XA' \subset A'$. Le conducteur de $A \to A'$ est l'idéal $I = XA'$. Puisque $A/I = k$ et $A'/I = K$, il résulte du lemme suivant que $A \to A'$ est universellement submersive; l'anneau A' est contenu dans le corps des fractions de A, mais le morphisme $A \to A'$ n'est pas entier si l'extension $k \to K$ n'est pas algébrique.

LEMME 53 (D. Ferrand). *Soit $A \to A'$ un morphisme d'anneaux injectif de conducteur I; pour que le morphisme $A \to A'$ soit universellement submersif il faut et il suffit que $A/I \to A'/I$ le soit.*

Preuve. Cela provient du fait que $A \to A' \times A/I$ est toujours universellement submersif. (cf. [3]).

L'exemple précédent donne un morphisme universellement submersif et non subtrusif.

Soit k un corps et soit $K = k(X)$, considérons le morphisme $A \to A'$, où $A' = K[[Y]]$ et $A = k + YK[[Y]]$. L'anneau A est intègre de spectre constitué par 0, $YK[[Y]]$. Le morphisme $A \to A'$ est clairement subtrusif et A' est contenu dans le corps des quotients de A. Le morphisme $A \to A'$ n'est pas entier, puisque $k \to K$ n'est pas algébrique. Par suite, le morphisme $A \to A'$ est subtrusif, mais il ne l'est pas universellement.

Corollaire 54. *Soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux universellement subtrusif et tel que $A_{\mathrm{red}} \to B_{\mathrm{red}}$ soit birationnel.*

(a) *Si l'anneau A est unibranche, le morphisme $A \to B$ est entier.*

(b) *Si l'anneau A est géométriquement unibranche, le morphisme $A \to B$ est entier radiciel et l'anneau B est géométriquement unibranche.*

Preuve. Un morphisme $A \to B$ est universellement subtrusif si et seulement si il en est de même pour $A_{\mathrm{red}} \to B_{\mathrm{red}}$. On sait que A est unibranche (resp. géométriquement unibranche) si et seulement si pour tout idéal premier P de A l'hensélisé (resp. hensélisé strict) de A_P a un seul idéal premier minimal. En vertu de [10, IV, lemme 6.15.4.1], on peut supposer A et B intègres et que l'on a une factorisation $A \to B \to K$, où K est le corps des quotients de A, auquel cas la preuve de (a) est évidente.

Dans le cas (b) même preuve, les résultats supplémentaires résultant directement de la proposition 6.15.5 de [10], déjà cité.

Corollaire 55. *Soit A un anneau réduit à spectre minimal compact et soit $A \to B$ un morphisme universellement générisant, tel que $A_{\mathrm{red}} \to B_{\mathrm{red}}$ soit birationnel et a-surjectif. Le morphisme $A \to B$ est alors entier, radiciel.*

Preuve. Soit le changement de base $A \to \Omega(A)$, entier essentiel et où $\Omega(A)$ est la clôture intégrale totale de A, cf. Chapitre 0. L'anneau $\Omega(A)$ est géométriquement unibranche. Le morphisme $A \to \Omega(A)$ est minimalisant; cf. [19]. Il suffit alors de montrer que le morphisme $\Omega(A)_{\mathrm{red}} = \Omega(A) \to (B \otimes_A \Omega(A))_{\mathrm{red}}$ est birationnel ce qui se fait en plagiant la preuve du lemme 6.15.4.1 de [10], cité ci-dessus.

Proposition 56. *Soit A un anneau localement Bezoutien, intègre, de corps des quotients K et, soit une factorisation $A \to B \to K$, où B est un sous-anneau de K. Le morphisme $A \to B$ est submersif (resp. universellement, resp. fidèlement plat) si et seulement si il est a-surjectif.*

Preuve. Soit P un idéal premier de A, le morphisme $A_P \to B_P$ est a-surjectif, l'anneau A_P est Bezoutien, le morphisme $A_P \to B_P$ étant sans torsion, est fidèlement plat.

PROPOSITION 57. *Un morphisme $f: A \to A'$, universellement incomparable, vérifiant universellement la propriété: pour tout idéal premier P' de A', au-dessus de l'idéal premier P de A, le morphisme $A/P \to A'/P'$ est universellement subtrusif, est un morphisme entier (et réciproquement).*

Preuve. Supposons que le morphisme f vérifie les conditions. Il existe un morphisme $A \to \mathrm{Bes}(A)$ entier et fidèlement plat, où l'anneau $\mathrm{Bes}(A)$ vérifie la condition F.L. (voir le Chap. 0). Par changement de base, on peut donc supposer que l'anneau A vérifie la condition F.L. Soit P' un idéal premier de A', audessus de P, le corps $k(P)$ est algébriquement clos et, il résulte de [26], que le morphisme $k(P) \to k(P')$ est algébrique, donc un isomorphisme. La proposition 52 montre alors que le morphisme $A/P \to A'/P'$ est entier. Pour conclure il suffit d'utiliser le lemme 43.

On examine maintenant dans quel cas un morphisme quasi-fini est universellement subtrusif.

PROPOSITION 58. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme quasi-fini, a-surjectif. Le morphisme f est universellement subtrusif si et seulement si l'une des conditions équivalentes suivantes est satisfaite:*

(1) *Pour tout idéal premier P de A, il existe un diagramme commutatif, que l'on peut supposer cocartésien:*

$$\begin{tikzcd} A/P \arrow[r] \arrow[d] & A'/P.A' \arrow[d] \\ C \arrow[r] & C' \end{tikzcd}$$

où le morphisme $A/P \to C$ est entier injectif et le morphisme $C \to C'$ est pur.

(2) *Pour tout idéal premier P de A, il existe un diagramme commutatif*

$$\begin{tikzcd} A/P \arrow[r] \arrow[d] & A'/P.A' \arrow[r] & B \arrow[d] \\ C \arrow[rr] & & C' \end{tikzcd}$$

où le morphisme $A/P \to C$ est entier injectif et le morphisme $C \to C'$ est fidèlement plat.

(3) *Pour tout idéal premier P de A, il existe un diagramme commutatif, comme dans* (2), *où le morphisme $A/P \to C$ est entier injectif et le morphisme $C \to C'$ est a-surjectif et universellement ouvert.*

De plus, si pour tout idéal premier P de A, le morphisme $A/P \to A'/P.A'$ est radiciel, alors le morphisme f est universellement subtrusif si et seulement si il est fini.

Preuve. Une partie des preuves est claire, puisqu'un morphisme est universellement subtrusif si et seulement si pour tout idéal premier P de A, il en est de même pour le morphisme $A/P \to A'/P.A'$ (proposition 13 du chap. II).

Supposons donc le morphisme quasi-fini et universellement subtrusif. Supposons de plus que l'anneau A vérifie la condition F.L. Soit Q un idéal premier de A, il existe un nombre fini d'idéaux premiers Q'_i, $i = 1,..., n$ de A', au-dessus de Q. Soit un morphisme $A/Q \to A'/Q'_i$, il est quasi-fini. Par le Main Theorem de Zariski, ce morphisme se factorise en $A/Q \to D \to A'/Q'_i$, le premier morphisme étant entier injectif et le deuxième une immersion ouverte, injective. Puisque l'anneau A/Q est totalement intégralement clos, et le morphisme $A/Q \to D$ est entier essentiel, ce dernier est un isomorphisme. Voir le chapitre 0.

Par suite le morphisme $A/Q \to A'/Q'_i$ est un épimorphisme plat injectif de présentation finie. Puisque le morphisme $A \to A'$ est subtrusif, le morphisme $A/Q \to \prod_{i=1}^{n} A'/Q'_i$ est a-surjectif et comme il est plat, il est fidèlement plat. De la factorisation $A/Q \to A'/Q.A' \to \prod A'/Q'_i$ on déduit que le morphisme $A/Q \to A'/Q.A'$ est pur. De plus, en vertu du lemme suivant, puisque les morphismes $A/Q \to A'/Q'_i$ sont des immersions ouvertes, le morphisme $A/Q \to \prod A'/Q'_i$ est universellement ouvert.

Pour montrer (1) il suffit de remarquer que si P est un idéal premier de A, se remontant en Q dans l'anneau $\mathrm{Bes}(A) = B$, on a un diagramme commutatif cocartésien

$$\begin{array}{ccc} A/P & \longrightarrow & A'/P.A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/Q & \longrightarrow & B'/Q.B' \end{array}$$

où $B' = B \otimes_A A'$.

Pour montrer (2) et (3), il suffit de remarquer que si b' est le morphisme $A' \to B'$ et g le morphisme $B \to B'$ on a ${}^a b'({}^a g^{-1}(Q)) = {}^a f^{-1}(P)$.

Enfin, si l'on suppose que pour tout idéal premier P de A, le morphisme $A/P \to A'/P.A'$ est radiciel, si de plus le morphisme $A \to A'$ est universellement subtrusif, on voit que ces morphismes sont des homéomorphismes universels, donc universellement fermés. Soit M' un idéal premier minimal de A', se contractant en P dans A, alors le morphisme $A \to A'/M'$ est entier. D'après le lemme 43, le morphisme $A \to A'$ est entier; comme il est de type fini, il est fini.

LEMME 59. *Soit* $\{A \to A_i\}_{i=1,...,n}$ *une famille finie de morphismes ouverts* (*ou fermés*) (*resp. universellement*) *alors le morphisme* $A \to \prod_{i=1}^{n} A_i$ *est ouvert* (*ou fermé*) (*resp. universellement*).

Preuve. Soit p_i la projection du produit dans A_i, alors pour toute partie X de $\mathrm{Spec}(\prod_{i=1}^n A_i)$ on ${}^af(X) = \bigcup_{i=1}^n {}^af_i({}^ap_i^{-1}(X))$, où $f_i: A \to A_i$ et f est le morphisme canonique de A dans le produit.

Remarque. Comme exemples classiques de morphismes quasi-finis, universellement subtrusifs on a les suivants: les morphismes finis injectifs, les morphismes étales a-surjectifs. On peut aussi rappeler la proposition des E.G.A. [10, chap, IV, p. 106, 17. 16.2]: soit $A \to A'$ un morphisme fidèlement plat de présentation finie, il existe un morphisme $A' \to A''$, tel que le morphisme $A \to A''$ soit fidèlement plat et quasi-fini. Les exemples précédents montrent qu'on ne peut espérer améliorer la proposition précédente: il existe des morphismes injectifs finis non purs ni universellement ouverts. D'autre part un morphisme étale a-surjectif n'est pas forcément entier.

PROPOSITION 60. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme universellement subtrusif, alors* $\mathrm{Dim}(A) \leqslant \mathrm{Dim}(A')$. *Si de plus f est incomparable (par exemple quasi-fini ou à fibres entières), alors* $\mathrm{Dim}(A) = \mathrm{Dim}(A')$.

Preuve. Soit $P_0 < P_1 < \cdots < P_n$ une chaîne d'idéaux premiers de A, il existe un anneau de valuation V et un morphisme $A \to V$ tel qu'il existe une chaîne d'idéaux premiers de V, soit $0 < Q_1 < \cdots < Q_n$ au-dessus de la chaîne des idéaux P_i et telle que Q_n soit l'idéal maximal de V. Le morphisme $V \to V \otimes_A A' = V'$ est pur. Donc le morphisme $V \to V'/I'$ est fidèlement plat, I' désignant l'idéal de torsion de $V \to V'$. Puisque ce morphisme est générisant, la chaîne des Q_i se remonte à V'/I'; en effet Q_n se remonte à V'/I'. La chaîne des Q_i se remontant à V', celle des P_i se remonte à A'.

Supposons f incomparable, une chaîne $P'_0 < P'_1 < \cdots < P'_n$ d'idéaux premiers de A' se contracte en une chaîne d'idéaux premiers distincts de A, puisque le morphisme f est incomparable.

PROPOSITION 61. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme quasi-fini. Le morphisme f est universellement subtrusif si et seulement si il est subtrusif, universellement pour les changements de base fidèlement plats.*

Preuve. Soit le changement de base $A \to \mathrm{Bes}(A)$, fidèlement plat, dont le but est un anneau F.L. (voir le chap. 0). Le morphisme déduit de f par changement de base est quasi-fini si f l'est. Le chapitre II, proposition 4 dit qu'un morphisme subtrusif et quasi-fini de source un anneau vérifiant la propriété F.L. est universellement subtrusif. Par descente fidèlement plate par $A \to \mathrm{Bes}(A)$, le morphisme f est alors universellement subtrusif.

Soit $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ un système inductif filtrant d'anneaux de limite A; soient pour $\alpha \in I$ les morphismes $\varphi_\alpha: A_\alpha \to A$ et pour $\alpha \leqslant \beta$, α, $\beta \in I$, les morphismes de transition $\varphi_{\beta,\alpha}: A_\alpha \to A_\beta$. Soit P un idéal premier de A, on désigne $\varphi_\alpha^{-1}(P)$ par P_α.

Le lemme suivant est de démonstration élémentaire:

LEMME 62. *Soit* $P_1 < P_2 < P_3 < \cdots < P_n$ *une chaîne d'idéaux premiers de* A, *il existe* $\alpha \in I$ *tel que pour* $\beta \geqslant \alpha$ *on ait* $P_{1\beta} < P_{2\beta} < \cdots < P_{n\beta}$.

Soit la fonction $f: I \to \bar{\mathbb{R}}$ définie par $f(\alpha) = \mathrm{Dim}(A_\alpha)$. Soit F le filtre sur I dont une base est constituée par les ensembles $[\alpha, \to[$. La limite inférieure de la fonction f suivant le filtre F existe et c'est la plus petite des valeurs d'adhérence de f suivant F, désignons la par $\mathrm{Lim.Inf}\, f$. Une valeur d'adhérence de f ne peut être, clairement, qu'un entier positif ou nul, ou $+\infty$. Une valeur d'adhérence a appartenant à $\mathbb{N}$ est caractérisée par la propriété: $\forall \beta \in I$, il existe $\alpha \geqslant \beta$ tel que $f(\alpha) = \mathrm{Dim}(A_\alpha) = a$.

PROPOSITION 63. *Soit* $\{A_\alpha\}_{\alpha \in I}$ *un système inductif filtrant d'anneaux, de limite* A.
Alors

(1) $\mathrm{Dim}(A) \leqslant \mathrm{Lim.\,Inf}\, f$.

(2) *Si les morphismes de transition du système inductif sont subtrusifs (resp. universellement) il en est de même pour les morphismes* $A_\alpha \to A$, *pour* $\alpha \in I$. *De plus, lorsque les morphismes de transition sont universellement subtrusifs, on a* $\mathrm{Dim}(A) = \mathrm{Lim\ Inf}\, f$.

Preuve. Pour montrer (1) il suffit de montrer que pour toute valeur d'adhérence a de f on a $\mathrm{Dim}(A) \leqslant a$. Si a est $+\infty$ ou $\mathrm{Dim}(A) = +\infty$, c'est clair. Si $a \in \mathbb{N}$ et $\mathrm{Dim}(A) = b \in \mathbb{N}$, soit $P_0 < \cdots < P_b$ une chaîne d'idéaux premiers de A. En vertu du lemme précédent, il existe $\alpha \in I$ tel que pour $\beta \geqslant \alpha$, on ait $P_{0\beta} < \cdots < P_{b\beta}$. Donc il existe $\alpha \in I$ tel que pour $\beta \geqslant \alpha$ on ait $\mathrm{Dim}(A) \leqslant \mathrm{Dim}(A_\beta)$; en vertu de la définition d'une valeur d'adhérence, il existe $\gamma \geqslant \alpha$ tel que $f(\gamma) = a$, d'où le résultat. La première partie de (2) se démontre en remarquant que A est la limite inductive du système inductif de A_α-Algèbres $\{A_\beta\}_{\beta \geqslant \alpha}$ et en utilisant la propriété démontrée au chapitre II: une limite inductive filtrante de morphismes subtrusifs (resp. universellement) est un morphisme subtrusif (resp. universellement). On en déduit (cf. Proposition 60) que pour tout $\alpha \in I$ on a $\mathrm{Dim}(A_\alpha) \leqslant \mathrm{Dim}(A)$ d'où $\mathrm{Dim}(A) = \mathrm{Lim\ Inf}\, f$.

Soit $A \to A'$ un morphisme injectif d'anneaux. Puisque la notion de morphisme subtrusif (resp. universellement) est stable par division à gauche et par passage à la limite inductive, il est clair que $A \to A'$ est subtrusif (resp. universellement) s'il en est de même pour tout morphisme $A \to A[a'_1, ..., a'_n]$, où $a'_1, ..., a'_n$ sont des éléments de A'. On peut se demander si ce qui précède est encore vrai en se limitant à des algèbres monogènes $A \to A[a']$. Voici ce qui a pu être obtenu dans ce sens.

(1) Soit V un anneau de valuation et soit $V \to V'$ un morphisme injec-

tif. Ce morphisme est subtrusif si et seulement si tout morphisme $V \to V[x]$, où $x \in V'$ est subtrusif. En effet $V \to V'$ n'est pas subtrusif si et seulement si il existe un élément $s \neq 0$ de A, un élément t de l'idéal maximal de V et un élément x de V' tels que $s(1 - tx) = 0$, comme le montre le lemme 30.

(2) Soit $A \to A'$ un morphisme d'anneaux injectif et soit F la famille des anneaux B tels que B soit sur-anneau de A et sous-anneau de A', et tels que $A \to B$ soit subtrusive (resp. universellement). Cet ensemble F, muni de l'inclusion est non vide et inductif, vu les propriétés de passage à la limite inductive des algèbres subtrusives. Soit B un élément maximal de cette famille, donc tel que $A \to B \to A'$, où $A \to B$ est subtrusive (resp. universellement) maximalement. Il est clair que B est intégralement fermé dans A' et contient la fermeture intégrale $\bar{A}$ de A dans A'. D'autre part le morphisme $B \to A'$ est essentiel. Soit en effet un idéal I' de A' tel que $I' \cap B = 0$. Alors le morphisme $B \to B + I'$ est pur car il a une rétraction. Par conséquent I' est contenu dans B, donc est nul.

On déduit de ce qui précède qu'un morphisme $A \to A'$ injectif est subtrusif (resp. universellement) si et seulement si pour tout morphisme subtrusif (resp. universellement) $A \to B$, où B est un sous-anneau de A', et pour tout élément x de A', le morphisme $A \to B[x]$ est subtrusif (resp. universellement).

II. Stabilité des morphismes submersifs par changement de base et passage à la limite inductive

Le fait suivant est bien connu: soient $A \to A'$ et $A \to B$ des homomorphismes d'anneaux et soit $B \to B'$ le morphisme déduit de $A \to A'$ par le changement de base $A \to B$, le morphisme $\mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(A') \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B)$ est surjectif, d'où l'on déduit qu'un morphisme a-surjectif l'est universellement.

Il est naturel de se poser la question suivante: peut-on remplacer le foncteur Spec par le foncteur T dans le résultat précédent? Si c'est le cas, on en déduira qu'un morphisme subtrusif l'est universellement. La réponse est positive dans certains cas, comme le montrera la suite, et, un contre-exemple montre qu'elle est négative en général. Les paragraphes suivants étudient ces questions, ainsi que le problème de passage à la limite inductive pour les morphismes subtrusifs et submersifs.

1. *La propriété P pour un carré cocartésien, pour un morphisme d'anneaux*

Donnons quelques notations. Si A est un anneau, pour simplifier, nous désignons $T(\mathrm{Spec}(A))$ par $T(A)$. D'autre part, si $A \to A'$ et $A \to B$ sont des homomorphismes d'anneaux et $B' = B \otimes_A A'$, on dira que $P(\begin{smallmatrix} A & A' \\ B & B' \end{smallmatrix})$ est vraie si l'application canonique $T(B') \to T(A') \times_{T(A)} T(B)$ est surjective. Soit $f: C \to C'$ un homomorphisme d'anneaux et soit (P', Q') un élément de $T(C')$, si $(P, Q) = T(f)(P', Q')$, on dira que (P', Q') est au-dessus de (P, Q). La propriété $P(\begin{smallmatrix} A & A' \\ B & B' \end{smallmatrix})$ est donc vraie si et seulement si pour tout élément (P'_1, P'_2) de $T(A')$ et tout élément (Q_1, Q_2) de $T(B)$, au-dessus de l'élément (P_1, P_2) de $T(A)$, il existe un élément (Q'_1, Q'_2) de $T(B')$ au-dessus de (P'_1, P'_2) et de (Q_1, Q_2). Soit $A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux, on dira que $P(A\ A')$ est vraie si $P(\begin{smallmatrix} A & A' \\ B & B' \end{smallmatrix})$ est vraie pour tout homomorphisme d'anneaux $A \to B$.

Notons, dès maintenant, qu'une variante de la propriété P est vraie pour tout homomorphisme d'anneaux $A \to A'$. Soit un homomorphisme d'anneaux $A \to B$ et soit $B' = B \otimes_A A'$, si Q est un idéal premier de B au-dessus d'un idéal premier P de A, tels que l'on ait un élément (P'_1, P'_2) de $T(A')$ au-dessus de (P, P), alors il existe un élément (Q'_1, Q'_2) de $T(B')$ au-dessus de (Q, Q) et de (P'_1, P'_2). En effet, le morphisme canonique entre les fibres de P et Q, soit $A' \otimes_A k(P) \to B' \otimes_B k(Q)$, est fidèlement plat, donc subtrusif.

Nous allons montrer que la propriété P est vraie, pour certains morphismes, par une série de lemmes. Les preuves faciles ne seront pas données.

LEMME 1. *Si les propriétés $P(\begin{smallmatrix} A & A' \\ B & B' \end{smallmatrix})$ et $P(\begin{smallmatrix} B & B' \\ C & C' \end{smallmatrix})$ sont vraies, alors la propriété $P(\begin{smallmatrix} A & A' \\ C & C' \end{smallmatrix})$ est vraie.*

LEMME 2. *Soit A un anneau.*

(a) *Pour tout idéal I de A la propriété $P(A\ A/I)$ est vraie.*

(b) *Pour tout homomorphisme d'anneaux $A \to B$, a-injectif, universellement générisant, la propriété $P(A\ B)$ est vraie.*

En particulier la propriété $P(A\ B)$ est vraie lorsque l'homomorphisme $A \to B$ est un épimorphisme plat ou un homomorphisme étale radiciel (i.e., une immersion ouverte).

Preuve. L'assertion (a) est claire. Montrons (b): en utilisant les notations du début du paragraphe, puisque P'_2 et Q_2 sont au-dessus de P_2, il existe un idéal premier Q'_2 de B' au-dessus de P'_2 et Q_2. Puisque l'homomorphisme $A' \to B'$ est générisant, il existe un idéal premier Q'_1 contenu dans Q'_2 et au-dessus de P'_1. Puisque l'homomorphisme $A \to B$ est a-injectif on voit que Q'_1 est au-dessus de Q_1.

LEMME 3. *Soit $A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux. Pour démontrer que la propriété $P(\begin{smallmatrix} A & A' \\ A[X] & A'[X] \end{smallmatrix})$ est vraie, on peut supposer que A et A' sont des anneaux locaux intègres, que $A \to A'$ est un homomorphisme local injectif, les* *idéaux premiers P_1 et P'_1 étant nuls et les idéaux premiers P_2 et P'_2 étant les idéaux maximaux respectifs de A et A'.*

Preuve. Soit

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & C' \end{tikzcd}$$

un diagramme commutatif d'homomorphismes d'anneaux, qui n'est pas forcément cocartésien. Soient les éléments (P'_1, P'_2) de $T(A')$ et (Q_1, Q_2) de $T(A\,[X])$ au-dessus de l'élément (P_1, P_2) de $T(A)$. Supposons que (P'_1, P'_2) soit au-dessous d'un élément $(\bar{P}'_1, \bar{P}'_2)$ de $T(C')$. Alors $(\bar{P}'_1, \bar{P}'_2)$ est au-dessus d'un élément $(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ de $T(C)$ et il est clair que $(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$

$$\begin{tikzcd}
 & \bar{P}_1 \subset \bar{P}_2\, C \arrow[rr] \arrow[dd] & & C[X]\ \bar{Q}_1 \subset \bar{Q}_2 \arrow[dd] \\
P_1 \subset P_2\, A \arrow[ur] \arrow[rr] \arrow[dd] & & \overset{Q_1 \subset Q_2}{A[X]} \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
 & C' \arrow[rr] & & C'[X] \\
P'_1 \subset P'_2\, A' \arrow[ur] \arrow[rr] & & A'[X] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

est au-dessus de (P_1, P_2). S'il existe un élément $(\bar{Q}_1, \bar{Q}_2)$ de $T(C[X])$ au-dessus de (Q_1, Q_2) et $(\bar{P}_1, \bar{P}_2)$ et si la propriété $P({}_{C[X]}^{\;C}\ {}_{C'[X]}^{\;C'})$ est vraie, il existe alors un élément (Q'_1, Q'_2) de $T(A'[X])$ au-dessus de (Q_1, Q_2) et (P'_1, P'_2), comme on le voit aisément. On obtient alors les conclusions du lemme 3, en prenant successivement les homomorphismes $C = A/P_1 \to C' = A'/P'_1$ et $C = A_{P_2} \to A'_{P'_2} = C'$ et en utilisant le lemme 2 qui assure que dans chacun des cas la propriété $P({}_{A[X]}^{\;A}\ {}_{C[X]}^{\;C})$ est vraie.

Remarque. Il existe un homomorphisme d'anneaux, entier et injectif, entre anneaux intègres, soit $A \to A'$, tel que la propriété $P({}_{A[X]}^{\;A}\ {}_{A'[X]}^{\;A'})$ ne soit pas vraie.

L'exemple qui suit est tiré d'un article de I. S. Cohen et A. Seidenberg [7]. Soit K un corps de caractéristique nulle et soit I l'idéal de l'anneau de polynômes $A_0 = K[X, Y]$, engendré par le polynôme $Y^2 - X^2 - X^3$. L'idéal

I est premier et l'anneau A_0/I n'est pas intégralement clos: l'élément $t = yx^{-1}$ du corps des quotients de $A = A_0/I$ est entier sur A mais n'appartient pas à A.

Soit une nouvelle indéterminée Z et soit l'anneau $A[Z]$, isomorphe à $K[X, Y, Z]/(Y^2 - X^2 - X^3)$. Désignons ce dernier anneau par B et considérons les anneaux $A[t]$ et $B[t]$. Ils sont isomorphes respectivement à $K[X, T]/(T^2 - 1 - X)$ et $K[X, Z, T]/(T^2 - 1 - X)$. Soit le carré commutatif d'homomorphismes d'anneaux.

$$\begin{tikzcd} K[X, Y]/(Y^2 - X^2 - X^3) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d] & K[X, T]/(T^2 - 1 - X) \arrow[d] \\ K[X, Y, Z]/(Y^2 - X^2 - X^3) \arrow[r, "\beta"] & K[X, Z, T]/(T^2 - 1 - X) \end{tikzcd}$$

où les homomorphismes verticaux sont les canoniques et les homomorphismes α et β sont définis par $\alpha(P(x, y)) = P(x, tx)$ et $\beta(P(x, y, z)) = P(x, tx, z)$, avec des notations claires, les lettres minuscules désignant les classes des indéterminées dans les anneaux quotients. Les homomorphismes α et β sont entiers et injectifs entre anneaux intègres. Le diagramme est cocartésien car il s'identifie au diagramme:

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A[t] \arrow[d] \\ A[Z] \arrow[r] & A[t][Z] \end{tikzcd}$$

Soient dans l'anneau $K[X, Y, Z]/(Y^2 - X^2 - X^3)$ les idéaux premiers suivants: $P = (xz - y, z^2 - 1 - x)$ et $Q = (x, y, z - 1)$, l'idéal Q est maximal et P est contenu dans Q. Soit Q' l'idéal maximal de $K[X, Z, T]/(T^2 - 1 - X)$ égal à $(x, t + 1, z - 1)$, alors Q' est au-dessus de Q. D'autre part l'idéal P se contracte en l'idéal 0 de $K[X, Y]/(Y^2 - X^2 - X^3)$ et l'idéal Q se contracte en l'idéal maximal (x, y) du même anneau. De plus, Q' se contracte dans l'anneau $K[X, T]/(T^2 - 1 - X)$ en l'idéal maximal $(x, t + 1)$. Evidemment $(x, t + 1)$ se contracte en (x, y) dans l'anneau $K[X, Y]/(Y^2 - X^2 - X^3)$. D'après l'article cité, il ne peut exister d'idéal premier P' de l'anneau $K[X, Z, T]/(T^2 - 1 - X)$ contenu dans Q' et au-dessus de P. Nous avons donc la situation suivante: les couples $(0, (x, t + 1))$ et (P, Q) sont au-dessus du couple $(0, (x, y))$. Posons $A' = A[t]$, si la propriété $P(\begin{smallmatrix} A & A' \\ A[Z] & A'[Z] \end{smallmatrix})$ était vraie, il existerait un couple (P', Q'') au-dessus de (P, Q) et $(0, (x, t + 1))$. Mais un idéal premier Q'' au-dessus de Q et $(x, t + 1)$ contient nécessairement $x, z - 1$ et $t + 1$, c'est donc Q', ce qui est absurde: en effet Q' contiendrait un idéal premier P' se contractant sur P.

2. *La propriété P est vraie pour les morphismes entiers ou quasi-finis de source un anneau ayant la propriété* F.L.

LEMME 4. *Soit A un anneau ayant la propriété* F.L. (*c'est à dire que tout polynôme unitaire de $A[X]$ admet un zéro dans A, cf. le chapitre* (0) *et soit $A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux entier, alors la propriété* $P\left(\begin{smallmatrix}A & A'\\ A[X_1,\dots,X_n] & A'[X_1,\dots,X_n]\end{smallmatrix}\right)$ *est vraie, pour tout ensemble fini d'indéterminées* $X_1,\dots, X_n$.

Preuve. La conclusion du lemme 3 est encore vraie si l'on remplace l'indéterminée X par un nombre fini d'indéterminées $X_1,\dots, X_n$. On peut donc supposer que l'anneau A est intègre, que l'homomorphisme $A \to A'$ est entier injectif et que l'anneau A' est intègre, avec la situation suivante: l'élément $(0, P_2)$ de $T(A)$ est au-dessous des éléments $(0, P_2')$ de $T(A')$ et (Q_1, Q_2) de $T(A[X_1,\dots, X_n])$. Mais, voir le chapitre 0, l'anneau A est alors intégralement clos, à corps des quotients algébriquement clos, par conséquent l'anneau $A[X_1,\dots, X_n]$ est intégralement clos et l'homomorphisme $A[X_1,\dots, X_n] \to A'[X_1,\dots, X_n]$ est entier, injectif, entre anneaux intègres. Cet homomorphisme est donc générisant, en vertu du théorème de Going-Down. Soit Q_2' un idéal premier de l'anneau $A'[X_1,\dots, X_n]$ au-dessus des idéaux Q_2 et P_2', il existe un idéal premier Q_1' de $A'[X_1,\dots, X_n]$ contenu dans Q_2' et au dessus de Q_1. Puisque Q_1' se contracte en 0 dans A et puisque l'homomorphisme $A \to A'$ est essentiel (cf. chap. 0) Q_1' se contracte en 0 dans A', d'où la preuve.

La remarque précédente montre que dans le cas d'un anneau intègre l'hypothèse intégralement clos pour l'anneau est necéssaire.

LEMME 5. *Soit $A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux: la propriété $P(A\ A')$ est vraie si et seulement si la propriété* $P\left(\begin{smallmatrix}A & A'\\ A[X_1,\dots,X_n] & A'[X_1,\dots,X_n]\end{smallmatrix}\right)$ *est vraie pour tout ensemble d'indéterminées* $X_1,\dots, X_n$.

Preuve. Une partie est évidente. Supposons que la propriété soit vraie pour tout ensemble fini d'indéterminées $X_1,\dots, X_n$ et montrons que $P(A\ A')$ est vraie. Il reste à montrer que la propriété $P\left(\begin{smallmatrix}A & A'\\ A[X_i] & A'[X_i]\end{smallmatrix}\right)$ est vraie pour tout ensemble d'indéterminées $\{X_i\}_{i\in I}$. En effet, un homomorphisme $A \to B$ quelconque peut s'écrire $A \to A[X_i]/J$, où J est un idéal de $A[X_i]$; il suffit alors d'utiliser les lemmes 1 et 2. Pour démontrer que la propriété est vraie, pour un ensemble quelconque d'indéterminées, on considèrera que $A[X_i]$ est limite inductive filtrante de ses sous-A-algèbres de type fini. Pour cela on utilisera le lemme 6, plus général, dont la preuve sera faite un peu plus loin.

PROPOSITION 1. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme entier ou quasi-fini,* *de source un anneau ayant la propriété* F.L. *alors la propriété* $P(A\ A')$ *est vraie.*

Preuve. En vertu des lemmes 4 et 5, il reste à montrer l'assertion concernant les morphismes quasi-finis. On sait que tout homomorphisme quasi-fini $A \to A'$ admet une factorisation $A \to B \to A'$, où $A \to B$ est un morphisme entier et $B \to C$ une immersion ouverte, d'après le Main Theorem de Zariski (voir par exemple [22]). Les lemmes 1 et 2 donnent alors la conclusion.

Remarques. Soient $f: A \to A'$ et $g: A \to B$ des homomorphismes d'anneaux et soit (P'_1, P'_2) un élément de $T(A')$ au-dessus de l'élément (P_1, P_2) de $T(A)$ et soit Q_1 un idéal premier de B au-dessus de P_1. L'ensemble Z des idéaux premiers Q_2 de B appartenant à ${}^ag^{-1}(P_2) \cap V(Q_1)$ et tels qu'il existe un élément (Q'_1, Q'_2) de $T(B \otimes_A A')$ au dessus de (Q_1, Q_2) et (P_1, P_2) est proconstructible. Si de plus l'homomorphisme $A \to A'$ est entier, l'ensemble Z est stable pour les spécialisations de ses éléments appartenant à ${}^ag^{-1}(P_2) \cap V(Q_1)$; Z est donc fermé dans ${}^ag^{-1}(P_2) \cap V(Q_1)$. En effet, soient $f': B \to B \otimes_A A'$ et $g': A' \to B \otimes_A A'$ les homomorphismes canoniques et soient les projections ρ_1 et ρ_2 de $T(B)$ dans Spec(B), alors l'ensemble Z n'est autre que

$$\rho_2(T(f')[(T(g')^{-1}(P'_1, P'_2)] \cap \rho_1^{-1}(Q_1)) \cap {}^ag^{-1}(P_2) \cap V(Q_1).$$

Or, toutes les applications figurant dans l'expression de Z sont continues pour la topologie constructible. D'autre part, si l'homomorphisme $A \to A'$ est entier, le morphisme entre les fibres de P'_2 et P_2, soit $B \otimes_A k(P_2) \to (B \otimes_A A') \otimes_{A'} k(P'_2)$ est entier donc spécialisant. On en déduit immédiatement la dernière assertion.

3. *Passage à la limite inductive pour la propriété P, application à la limite inductive de morphismes subtrusifs*

LEMME 6. *Soit $A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux et soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un système inductif filtrant de A-algèbres, de limite inductive B. Si pour tout $i \in I$, la propriété $P\left(\begin{smallmatrix} A & A' \\ A_i & A' \otimes_A A_i \end{smallmatrix}\right)$ est vraie, alors la propriété $P\left(\begin{smallmatrix} A & A' \\ B & B \otimes_A A' \end{smallmatrix}\right)$ est vraie.*

Preuve. Elle sera conséquence d'un lemme faisant intervenir une correspondance K: *Spectr* $\to$ *Comp* où *Comp* désigne la catégorie des espaces topologiques compacts.

On considère le diagramme commutatif suivant dans *Spectr:*

$$\begin{tikzcd} Y' \arrow[r, "u"] \arrow[d, "\rho'"'] & Y \arrow[d, "\rho"] \\ X' \arrow[r, "v"'] & X \end{tikzcd}$$

Soient Z_1 et Z_2 des parties proconstructibles de X (resp. Z'_1, Z'_2 de X') telles que $v(Z'_\alpha)$ soit contenu dans Z_α pour $\alpha = 1, 2$.

On pose $K(Y) = T(Y) \cap \rho^{-1}(Z_1) \times \rho^{-1}(Z_2)$. C'est un espace topologique compact pour la topologie constructible. On remarque que $T(u)(K(Y'))$ est contenu dans $K(Y)$; par restriction on obtient un morphisme continu pour la topologie constructible $K(u)$: $K(Y') \to K(Y)$. Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux, soit $\{A_i\}_{i \in I}$ (resp. $\{A'_i\}_{i \in I}$) un système inductif filtrant de A-algèbres (resp. de A'-algèbres), de limite inductive B (resp. B'). Supposons que pour tout $i \in I$ on ait un diagramme commutatif

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ A_i & \longrightarrow & A'_i \end{array}$$

et que l'on ait un système inductif d'homomorphismes d'anneaux $\{A_i \to A'_i\}_{i \in I}$.

On obtient un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B' \end{array}$$

Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$, $Y_i = \mathrm{Spec}(A_i)$, $Y'_i = \mathrm{Spec}(A'_i)$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $Y' = \mathrm{Spec}(B')$. Soient les morphismes spectraux $\rho: Y \to X$, $\rho': Y' \to X'$, $\rho_i: Y_i \to X$, $\rho'_i: Y'_i \to X'$ et $v: X' \to X$. Si Z_1 et Z_2 (resp. Z'_1, Z'_2) sont des parties proconstructibles de X (resp. X') telles que $v(Z'_\alpha)$ soit contenu dans Z_α, pour $\alpha = 1, 2$, on peut définir des applications $K(Y'_i) \to K(Y_i)$ et $K(Y') \to K(Y)$.

LEMME 7. *Si pour tout $i \in I$ l'application $K(Y'_i) \to K(Y_i)$ est surjective, alors l'application $K(Y') \to K(Y)$ est surjective.*

Preuve. Soient les morphismes spectraux u_j: $Y'_j \to Y_j$ pour $j \in I$. On obtient un système projectif d'applications continues pour la topologie constructible, de limite projective u: $Y' \to Y$. Désignons par $f_{i,j}$ les morphismes de transition $Y_j \to Y_i$ du système projectif $\{Y_i\}_{i \in I}$. Le système projectif, de morphismes de transition $g_{i,j} = f_{i,j} \times f_{i,j}$, pour $i \leqslant j$, vérifie $g_{i,j}(K(Y_j)) \subset K(Y_i)$. Ainsi $\{K(Y_i)\}_{i \in I}$ est un système projectif de parties.

Soit φ l'homéomorphisme canonique pour la topologie constructible de $Y \times Y$ sur $\varprojlim Y_j \times Y_j$, par restriction, on obtient un homéomorphisme φ: $K(Y) \to \varprojlim K(Y_j)$ pour la topologie constructible. La preuve est technique et sans difficulté. De plus, les morphismes $\{u_j\}_{j \in I}$ donnent naissance à un système projectif d'applications continues $K(u_j)$: $K(Y'_j) \to K(Y_j)$ pour $j \in I$. On obtient par passage à la limite projective un diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc} K(Y') & \xrightarrow{K(u)} & K(Y) \\ {\scriptstyle \varphi'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ \varprojlim K(Y'_j) & \longrightarrow & \varprojlim K(Y_j) \end{array}$$

Si pour tout $j \in I$ le morphisme $K(u_j)$ est surjectif, il en est de même pour $K(u)$: on a, en effet, un système projectif d'applications continues surjectives entre espaces compacts, pour la topologie constructible.

Montrons maintenant le lemme 6: soit un carré cocartésien d'homomorphismes d'anneaux

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A' \\ \downarrow & & \downarrow \\ B & \longrightarrow & B' \end{array}$$

et soit (P'_1, P'_2) un élément de $T(A')$ au-dessus d'un élément (P_1, P_2) de $T(A)$. Posons $X = \mathrm{Spec}(A)$, $X' = \mathrm{Spec}(A')$, $Y' = \mathrm{Spec}(B')$, $Y = \mathrm{Spec}(B)$, $Z_i = \{P_i\}$, $Z'_i = \{P'_i\}$, pour $i = 1, 2$. Alors l'application $K(Y') \to K(Y)$ est surjective pour tout les quadruplets (P_1, P_2, P'_1, P'_2) comme ci-dessus si et seulement si la propriété $P(\begin{smallmatrix} A & A' \\ B & B' \end{smallmatrix})$ est vraie. Si l'on suppose que B est la limite d'un système inductif filtrant de A-algèbres $\{A_i\}_{i \in I}$, il est clair que $B' = \varinjlim A' \otimes_A A_i$, d'où la preuve du lemme 6.

PROPOSITION 2. *Soient $A \to A'$ et $A \to B$ des homomorphismes d'anneaux, et soit $B' = B \otimes_A A'$. Si la propriété $P(\begin{smallmatrix} A & A' \\ B & B' \end{smallmatrix})$ est vraie, l'application canonique* $\mathrm{Spec}(B') \to \mathrm{Spec}(A') \times_{\mathrm{Spec}(A)} \mathrm{Spec}(B)$ *est subtrusive.*

Preuve. Désignons par H le sous-espace de $\mathrm{Spec}(A') \times \mathrm{Spec}(B)$ constitué par le produit fibré ci-dessus, il est proconstructible. Soit ρ: $\mathrm{Spec}(B') \to H$ l'application canonique, dont on sait qu'elle est surjective, continue. Pour terminer la preuve, il suffit de montrer que si (P'_1, Q_1) est un élément de H on a $V(P'_1) \times V(Q_1) \cap H$ contenu dans $\rho(\overline{\rho^{-1}(P'_1, Q_1)})$. Cette inclusion n'est autre qu'une traduction de: la propriété $P(\begin{smallmatrix} A & A' \\ B & B' \end{smallmatrix})$ est vraie.

PROPOSITION 3. *Un système inductif filtrant d'homomorphismes d'anneaux, subtrusifs (resp. universellement), a pour limite un homomorphisme subtrusif (resp. universellement).*

Preuve. On prend la situation suivante du lemme 7:

$$X = X' = \mathrm{Spec}(\mathbb{Z}) = Z_1 = Z_2 = Z_1' = Z_2'$$

et on constate que dans ce cas $K(Y) = T(Y)$ et $K(Y') = T(Y')$.

PROPOSITION 4. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux vérifiant $P(A\ A')$, subtrusif. Alors l'homomorphisme f est universellement subtrusif.*

En particulier, un morphisme quasi fini, subtrusif est universellement subtrusif, si sa source vérifie la propriété F.L.

Preuve. Evidente.

On n'a su démontrer ou infirmer la proposition suivante: $P(A\ A')$ est vraie pour tout homomorphisme d'anneaux $A \to A'$, lorsque A vérifie F.L. Remarquons, toutefois, que si $A \to A'$ est un morphisme a-surjectif, de présentation finie, il existe un homomorphisme $A' \to B$ tel que $A \to B$ soit quasi-fini, de présentation finie et a-surjectif (voir E.G.A. [10, chap. IV, 1967, p. 108, corollaire 17.16.5]).

Remarques. (1) Un système inductif filtrant d'homomorphismes d'anneaux, a-surjectifs, a pour limite un homomorphisme a-surjectif. En particulier un système inductif filtrant de A-algèbres dont les morphismes structuraux sont a-surjectifs a pour limite une A-algèbre dont le morphisme structural est a-surjectif. Il suffit de considérer le système projectif des morphismes spectraux associés et de munir les spectres de la topologie constructible qui est compacte. Cette remarque, qui valait la peine d'être mise à part, complète la démonstration de la proposition 3.

(2) On n'a pu démontrer pour les morphismes submersifs des résultats analogues aux précédents. Les propositions suivantes apportent quelques précisions à ce sujet.

4. *Limites inductives de morphismes submersifs*

Si A est un anneau, on désignera par $O(A)$ (resp. $F(A)$) l'ensemble des ouverts (resp. fermés) de $\mathrm{Spec}(A)$.

PROPOSITION 5. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux a-surjectif, alors le morphisme f est submersif si et seulement si*

$$O(A) \to O(A') \rightrightarrows O(A' \otimes_A A')$$

est une suite exacte d'ensembles. (*De même avec F à la place de* O).

La preuve en est bien connue.

PROPOSITION 6. *Soit* $\{A_i \to B_i\}_{i\in I}$ *un système inductif filtrant d'homomorphismes d'anneaux, tels que pour tout* $i \in I$ *l'homomorphisme* $A_i \to B_i$ *soit submersif. L'homomorphisme* $f\colon A \to B$ *obtenu par passage à la limite est a-surjectif. De plus, si* X *est une partie de* $\operatorname{Spec}(A)$ *telle que* ${}^af^{-1}(X)$ *soit un ouvert quasi-compact, alors* X *est un ouvert quasi-compact. En particulier, si les anneaux* A *et* B *ont des spectres Noethériens, l'homomorphisme* f *est submersif.*

Preuve. Il est clair qu'un système inductif filtrant de suites exactes d'ensembles $\{E_i \to F_i \rightrightarrows G_i\}_{i\in I}$ a pour limite une suite exacte d'ensembles. D'autre part, d'après [10, chap. IV, No. 28, 1966, p. 16, théorème 8.3.11], si $\{A_i\}_{i\in I}$ est un système inductif filtrant d'anneaux, de morphismes de transition $f_{j,i}$ pour $i \leqslant j$, on obtient un système inductif filtrant d'ensembles $(\mathscr{P}(\operatorname{Spec}(A_i)), {}^af_{j,i}^{-1})$ où $\mathscr{P}(\operatorname{Spec}(A_i))$ est l'ensemble des parties de $\operatorname{Spec}(A_i)$. On peut restreindre ce système à $\operatorname{OC}(\operatorname{Spec}(A_i))$, où $\operatorname{OC}(\operatorname{Spec}(A_i))$ est l'ensemble des ouverts constructibles de $\operatorname{Spec}(A_i)$ (i.e., ouverts quasi-compacts). Dans ces conditions $\varinjlim \operatorname{OC}(\operatorname{Spec}(A_i)) = \operatorname{OC}(\operatorname{Spec}(\varinjlim A_i))$. Puisque les homomorphismes $A_i \to B_i$ sont submersifs, on a des suites exactes pour tout $i \in I$:

$$\operatorname{OC}(\operatorname{Spec}(A_i)) \to \operatorname{OC}(\operatorname{Spec}(B_i)) \rightrightarrows \operatorname{OC}(\operatorname{Spec}(B_i \otimes_{A_i} B_i)$$

qui donnent par passage à la limite inductive une suite exacte:

$$\operatorname{OC}(\operatorname{Spec}(A)) \to \operatorname{OC}(\operatorname{Spec}(B)) \rightrightarrows \operatorname{OC}(\operatorname{Spec}(B \otimes_A B).$$

On dira qu'une propriété $\mathbb{P}$ d'homomorphisme d'anneaux est stable par division à gauche si, étant donnés des homomorphismes d'anneaux f et g tels que $g \circ f$ vérifie $\mathbb{P}$, alors f vérifie $\mathbb{P}$.

PROPOSITION 7. *Soit* $\{A_i\}_{i\in I}$ *un système inductif filtrant de* A*-algèbres, il existe un* A*-homomorphisme surjectif* $\bigotimes_{i\in I} A_i \to \varinjlim A_i$. *Les images dans* $\operatorname{Spec}(A)$ *des spectres de* $\bigotimes_{i\in I} A_i$ *et* $\varinjlim A_i$ *sont les mêmes. Si les morphismes* $A \to A_i$ *vérifient, pour tout* $i \in I$, *une propriété universelle qui est soit stable par division à gauche, soit stable par composition, alors les morphismes de transition du système inductif définissant* $\bigotimes_{i\in I} A_i$ *vérifient cette propriété.*

Preuve. Les morphismes de transition du système inductif définissant $\bigotimes_{i\in I} A_i$ sont donnés par les homomorphismes canoniques $\bigotimes_{i\in K_1} A_i \to \bigotimes_{i\in K_2} A_i$, où K_1et K_2 sont des parties finies de I telles que K_1 soit contenue dans K_2. L'homomorphisme composé $A \to A_i \to \varinjlim A_i$ est indépendant de $i \in I$. On en déduit l'existence d'un homomorphisme h: $\bigotimes_{i\in I} A_i \to \varinjlim A_i$. D'autre part il est clair que l'homomorphisme h est surjectif, puisque l'on a une factorisation $A_i \to \bigotimes_{i \in I} A_i \to \varinjlim A_i$ et puisque tout élément de $\varinjlim A_i$ provient d'un anneau A_i au moins. L'assertion concernant l'image des spectres dans $\operatorname{Spec}(A)$ est une conséquence immédiate de la proposition 3.4.10 Chapitre I de [9].

Si pour tout $i \in I$, l'homomorphisme $A \to A_i$ vérifie une propriété universelle $\mathbb{P}$ stable par division à gauche, l'homomorphisme $A \to \bigotimes_{i \in K} A_i$ vérifie $\mathbb{P}$ pour toute partie finie K de I: en effet il existe un élément j de I tel que pour tout $i \in K$ on ait $i \leqslant j$, d'où l'existence d'un homomorphisme composé: $A \to \bigotimes_{i \in K} A_i \to A_j$. Si les homomorphismes $A \to A_i$ vérifient une propriété $\mathbb{P}$ universelle, stable par composition, on voit que l'homomorphisme $A \to \bigotimes_{i \in K} A_i$ vérifie encore la propriété $\mathbb{P}$. Dans les deux cas, puisque la propriété est universelle, si K_1 et K_2 sont des parties finies de I telles que $K_1 \subset K_2$, l'homomorphisme $\bigotimes_{i \in K_1} A_i \to \bigotimes_{i \in K_2} A_i$ vérifie la propriété $\mathbb{P}$.

Remarque. La propriété $\mathbb{P}$ pourra être la a-surjectivité, la submersivité universelle, la pureté, Nakayama, ou encore être universellement ouvert (fermé).

PROPOSITION 8. *Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un ensemble de A-algèbres dont les morphismes structuraux sont a-surjectifs et universellement ouverts, alors l'homomorphisme $A \to \bigotimes_{i \in I} A_i$ est a-surjectif et universellement ouvert.*

Preuve. D'après [10, No. 28, chap. IV, p. 14, proposition 8.3.8], les morphismes de transition du système inductif définissant $\bigotimes_{i \in I} A_i$ étant universellement ouverts et a-surjectifs, il en est de même pour les morphismes $\bigotimes_{i \in K} A_i \to \bigotimes_{i \in I} A_i$, où K est une partie finie de I. Puisqu'il en est de même pour les morphismes $A \to \bigotimes_{i \in K} A_i$, la preuve de la proposition est faite.

PROPOSITION 9. *Soit $\{A_i\}_{i \in I}$ un système inductif filtrant de A-algèbres, tel que les morphismes structuraux des A-algèbres A_i soient submersifs, ainsi que les morphismes de transition du système inductif. Soit $f: A \to B$ le morphisme structural de la A-algèbre $B = \varinjlim A_i$, alors pour toute partie X constructible de* $\operatorname{Spec}(A)$ *telle que ${}^af^{-1}(X)$ soit une partie fermée, la partie X est fermée. De plus le morphisme f est a-surjectif.*

Preuve. On voit déjà que les homomorphismes $A_i \to B$, pour $i \in I$, sont a-surjectifs, en vertu de la proposition citée dans la preuve de la proposition précédente. Il suffit donc de montrer que pour un élément i de I, le morphisme $f_i: A_i \to B$ vérifie la propriété. Soient $f_{j,i}: A_i \to A_j$, pour $i \leqslant j$, les morphismes de transition du système. Si X_i est une partie constructible de $\operatorname{Spec}(A_i)$, telle que ${}^af_i^{-1}(X_i)$ soit fermé dans $\operatorname{Spec}(B)$, posons $Z = {}^af_i^{-1}(X_i)$ et $X_j = {}^af_{j,i}^{-1}(X_i)$, pour $i \leqslant j$. Il est clair que les parties X_j sont constructibles, pour $j \geqslant i$. Considérons B comme limite inductive du système $\{A_j\}_{j \in J}$, où J est la partie cofinale de I constituée des éléments j de I tels que $j \geqslant i$. Il est clair que $Z = {}^af_j^{-1}(X_j)$ pour $j \geqslant i$. En vertu du corollaire 8.3.12, p. 16, chap. IV, No. 28, de [10], il existe un élément k de J tel que X_k soit fermé dans $\operatorname{Spec}(A_k)$. Puisque le morphisme $f_{k,i}$ est submersif, la partie X_i est fermée.

On va maintenant donner quelques propositions concernant la localisation des morphismes submersifs.

5. *Localisation et passage au quotient des morphismes submersifs (subtrusifs).*

PROPOSITION 10. *Soit $f\colon A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux et soit un recouvrement de* $\operatorname{Spec}(A)$ *par des ouverts affines:* $\operatorname{Spec}(A) = \bigcup_{i \in I} D(a_i)$, *où $\{a_i\}_{i \in I}$ est une famille d'éléments de A. On suppose en outre que pour tout $i \in I$, il existe un ouvert $D(a_i')$ de* $\operatorname{Spec}(A')$ *tel que ${}^af(D(a_i'))$ soit contenu dans $D(a_i)$. Si pour tout $i \in I$ l'homomorphisme $A_{a_i} \to A'_{a_i'}$ est submersif (resp. subtrusif), alors l'homomorphisme $A \to A'$ est submersif (resp. subtrusif).*

Preuve. Les inclusions ${}^af(D(a_i')) \subset D(a_i)$ entraînent l'existence de diagrammes commutatifs

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & A' \arrow[d] \\ A_{a_i} \arrow[r] & A'_{a_i'} \end{tikzcd}$$

Les assertions sont alors évidentes, compte tenu du fait suivant: une partie X d'un espace topologique est ouverte si et seulement si l'intersection de X avec toute partie d'un recouvrement ouvert de l'espace est un ouvert de cette partie.

COROLLAIRE 11. *Soit $f\colon A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux. L'homomorphisme f est subtrusif si et seulement si pour tout élément a de A l'homomorphisme $A_a \to A'_a$ est subtrusif.*

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[d] \\ A' \arrow[r] & B' \end{tikzcd}$$

Soit un diagramme commutatif cocartésien d'homomorphismes d'anneaux où l'homomorphisme $A \to B$ est a-surjectif. Soit P' un idéal premier de A' au-dessus d'un idéal premier P de A. Il est bien connu que le diagramme (1) suivant est cocartésien. On peut démontrer de même que le diagramme (2) est cocartésien.

$$\begin{array}{ccc} A_P & \longrightarrow & B_P \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'_{P'} & \longrightarrow & B'_{P'} \end{array} \tag{1}$$

$$\begin{array}{ccc} A/P & \longrightarrow & B/P.B \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'/P' & \longrightarrow & B'/P'.B' \end{array} \tag{2}$$

L'hypothèse de a-surjectivité de $A \to B$ assure que les anneaux du diagramme ne sont pas nuls si A' n'est pas nul.

PROPOSITION 12. *Soit $f: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux a-surjectif.*

(1) *L'homomorphisme f est subtrusif (resp. universellement) si et seulement si pour tout idéal premier P de A, l'homomorphisme $A_P \to B_P$ est subtrusif (resp. universellement). Dans l'énoncé précédent, on peut remplacer premier par maximal.*

(2) *Si, de plus, l'homomorphisme f est de présentation finie, pour que l'homomorphisme f soit submersif (resp. universellement) il suffit (resp. il faut et il suffit) que pour tout idéal premier P de A l'homomorphisme $A_P \to B_P$ soit submersif (resp. universellement).*

Preuve. La première partie est évidente, le diagramme (1) servant à montrer l'assertion relative aux morphismes universellement subtrusifs. Montrons (2). Soit X une partie de Spec(A) telle que ${}^af^{-1}(X)$ soit une partie ouverte et supposons que pour tout idéal premier P de A l'homomorphisme $A_P \to B_P$ soit submersif. Puisque l'homomorphisme f est de présentation finie, la partie X est indconstructible. D'autre part, pour tout idéal premier P de A la partie $X \cap G(P)$ est stable par générisation. Pour la S-topologie, les parties $G(P)$ où P parcourt l'ensemble des idéaux premiers de A forment un recouvrement ouvert. Donc X est stable par générisation et, étant indconstructible, elle est ouverte. On termine en utilisant le diagramme (1).

PROPOSITION 13. *Soit $f: A \to B$ un homomorphisme d'anneaux a-surjectif.*

(1) *L'homorphisme $A \to B$ est générisant (resp. universellement) si et seulement si pour tout idéal premier P de A l'homomorphisme $A/P \to B/P.B$ est générisant (resp. universellement).*

(2) *L'homomorphisme $A \to B$ est subtrusif (resp. universellement) si et seulement si pour tout idéal premier P de A l'homomorphisme $A/P \to B/P.B$ est subtrusif (resp. universellement).*

(3) *Si l'ensemble des composantes irréductibles de* Spec(A) *est localement fini et si pour tout idéal premier P de A l'homomorphisme $A/P \to B/P.B$ est submersif, alors l'homomorphisme $A \to B$ est submersif.*

Preuve. Evidente, compte tenu du diagramme (2).

Rappelons, le résultat bien connu.

PROPOSITION 14. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux. L'homomorphisme f est générisant (resp. universellement) si et seulement si pour tout idéal premier P de A l'homomorphisme $A_P \to A'_P$ est générisant (resp. universellement).*

Donnons, pour terminer, un critère de subtrusivité universelle:

PROPOSITION 15. *Soit $A \to A'$ un morphisme d'anneaux. Ce morphisme est universellement subtrusif si et seulement si*

$$A[X_1, ..., X_n] \to A'[X_1, ..., X_n]$$

est subtrusif, pour tout ensemble fini d'indéterminées $\{X_1, ..., X_n\}$.

Preuve. Une partie est claire. Réciproquement, supposons que pour tout ensemble fini d'indéterminées le morphisme

$$A[X_1, ..., X_n] \to A'[X_1, ..., X_n]$$

soit subtrusif. La factorisation

$$A \to A' \to A'[X_1, ..., X_n]$$

montre que $A \to A'$ est subtrusif. Soit $A \to B$ un changement de base, où $B = A[X_i]_{i \in I}/K$, K étant un idéal. Par passage à la limite inductive, le morphisme $A[X_i] \to B[X_i]$ est subtrusif. Que le morphisme $B \to B \otimes_A A'$ soit subtrusif, résulte alors du lemme 2.

6. *Descente de propriétés algébriques par les morphismes submersifs ou subtrusifs*

On se propose dans cette partie de donner des exemples de propriétés algébriques descendues par les morphismes submersifs ou subtrusifs. Il est clair qu'une propriété algébrique, traductible en termes de topologie spectrale, fournira de tels exemples. D'autre part, la critère valuatif de subtrusivité universelle du chapitre I permet dans de nombreux cas de se ramener à la descente de propriétés par les morphismes purs. Il n'est donc pas étonnant que les exemples suivants concernent la descente de la nullité, de la platitude, moyennant certaines hypothèses de finitude, ou autres. Ont été ajoutés des exemples de morphismes descendant la platitude des modules de type fini ou d'autres propriétés.

PROPOSITION 16. *Soit A un anneau réduit et soit $f: A \to A'$ un morphisme submersif, alors le morphisme f descend la projectivité des modules de type fini.*

Preuve. Le résultat suivant est bien connu: soit A un anneau et soit M un A-module de type fini, pour tout entier $n \geqslant 0$ désignons par U_n l'ensemble des idéaux premiers P de A tels que $\dim_{k(P)} M \otimes_k k(P) = n$, si M est projectif, U_n est un ouvert; réciproquement si l'anneau A est réduit et si pour tout entier $n \geqslant 0$ l'ensemble U_n est ouvert le module M est projectif.

Soit donc M un A-module de type fini sur l'anneau réduit A et supposons $M \otimes_A A'$ projectif sur A'. Les ensembles U'_n correspondants au A'-module $M \otimes_A A'$ sont ouverts. Mais il est facile de voir que $U'_n = {}^a f^{-1}(U_n)$. Par submersivité, U_n est ouvert; ainsi le module M est projectif.

DÉFINITION 17. Nous dirons qu'un A-module M est presque plat s'il existe un morphisme d'anneaux $A \to B$ tel que M soit un B-module plat et tel que la structure de A-module obtenue par restriction des scalaires soit la structure de A-module initiale.

PROPOSITION 18. *Soit A un anneau réduit et soit $f: A \to A'$ un morphisme d'anneaux, universellement subtrusif. Le morphisme f descend la nullité des modules presque plats.*

Preuve. On montre d'abord le résultat suivant: si M est un A-module presque plat, il existe un morphisme $A \to V$, où V est un anneau de valuation, tel que $M \otimes_A V$ soit non nul si M est non nul. On peut supposer le module M plat; en effet si le résultat est vrai pour les modules plats, soit M un A-module presque plat non nul, muni du morphisme $A \to B$ tel que M soit un B-module plat, il existe un morphisme $B \to V$ où V est un anneau de valuation tel que $M \otimes_B V$ soit non nul; mais le morphisme $M \otimes_A V \to M \otimes_B V$ est surjectif, donc $M \otimes_A V$ est non nul. Par le changement de base $A \to B(A)$, où $B(A)$ est l'enveloppe de Baer de A (cf. l'introduction) on peut supposer que A est un anneau de Baer. Tout localisé en un idéal premier d'un anneau de Baer étant intègre, on peut supposer A local intègre, en localisant par rapport à un idéal premier du support de M. Un anneau de valuation V dominant A fournit alors le résultat cherché.

Soit maintenant un A-module presque plat M tel que $M \otimes_A A'$ soit nul et soit $A \to V$ un morphisme d'anneaux où V est de valuation. Le morphisme $V \to V \otimes_A A'$ est pur d'où l'on déduit que $M \otimes_A V$ est nul. En vertu de ce qui précède M est nul.

Remarque. Un morphisme universellement subtrusif, de source un anneau réduit, descend donc la nullité des algèbres, de même qu'un morphisme de Nakayama.

On dispose pour les morphismes entiers injectifs de deux théorèmes de descente de la platitude, avec des hypothèses de finitude. Nous allons les généraliser aux morphismes universellement subtrusifs.

PROPOSITION 19. (1) [10, No. 28, 11.5.5]. *Soit $A \to B$ un morphisme de présentation finie et soit M un B-module de présentation finie. Soit $A \to A'$ un morphisme entier injectif, si $M \otimes_A A'$ est plat sur A', alors M est plat sur A.*

(2) [6], *Un morphisme entier injectif descend la platitude des modules de type fini.*

Nous avons besoin des deux critères valuatifs suivants:

PROPOSITION 20. *Soit A un anneau réduit, alors*

(1) *Soit $A \to B$ un morphisme de présentation finie et soit M un B-module de présentation finie. Si pour tout morphisme $A \to V$ où V est un anneau de valuation, le V-module $M \otimes_A V$ est plat, le module M est plat sur A.*

(2) *Soit M un A-module de type fini. Si pour tout morphisme $A \to V$, où V est un anneau de valuation, $M \otimes_A V$ est plat sur V, alors le module M est plat.*

Preuve. Dans chacun des cas on fait le changement de base $A \to B(A)$, qui étant entier injectif descendra la platitude, en vertu de la proposition 19. De plus les hypothèses sont conservées dans le changement de base.

Dans le cas (1), la proposition résulte de [10, No. 28, Théorème 11.8.1], puisque les localisés en un ideal premier d'un anneau de Baer sont intègres.

Dans le cas (2), on peut supposer A local intègre, par localisation. Soit donc A un anneau local intègre et M un A-module de type fini, tel que pour tout morphisme $A \to V$, où V est un anneau de valuation, le V-module $M \otimes_A V$ soit plat donc libre de rang fini. Soit K le corps des quotients de A et soit k le corps résiduel de A. Choisissons un anneau de valuation V, dominant A et contenu dans K. On en déduit la suite d'égalités

$$\dim_K M \otimes_A K = \dim_V M \otimes_A V = \dim_k M \otimes_A k.$$

La proposition 7 du Chap. II, par. 3, No. 2, de [5], montre alors que M est libre.

PROPOSITION 21. *Soit A un anneau réduit et soit $A \to A'$ un morphisme universellement subtrusif, alors $A \to A'$ descend la platitude des A-modules M*

tels que ou bien M est un A-module de type fini ou bien M est un B-module de présentation finie et il existe un morphisme de présentation finie $A \to B$, donnant par restriction la structure de A-module de M.

Preuve. Dans chacun des cas on utilise la remarque suivante: pour tout morphisme $A \to V$, où V est un anneau de valuation, le morphisme $V \to V \otimes_A A'$ est pur. Si l'on suppose $M \otimes_A A'$ plat, il en résulte que pour tout morphisme $A \to V$, où V est un anneau de valuation le V-module $M \otimes_A V$ est plat sur V, puisque les morphismes purs descendent la platitude. Il suffit alors d'utiliser les critères valuatifs de la proposition 20.

Remarque. On voit donc en général qu'une propriété universelle admettant un critère valuatif (par changement de base) et descendue par la pureté sera descendue par les morphismes universellement subtrusifs.

De manière plus particulière, soit $\mathbb{P}$ une propriété universelle de module (ou de morphisme de modules) descendue par la pureté, se localisant et globalisant bien, et telle que sur un anneau de base local $(A, m(A))$ la propriété $\mathbb{P}$ soit descendue par le morphisme $A \to A/m(A)$, alors la propriété $\mathbb{P}$ est descendue par les morphismes universellement subtrusifs.

Prenons par exemple, un morphisme universellement subtrusif $A \to A'$ et soit $M \to N$ un morphisme de A-modules et supposons que le morphisme $M \otimes_A A' \to N \otimes_A A'$ vérifie $\mathbb{P}$. Soit $A \to V$ un morphisme d'anneaux où V est un anneau de valuation, puisque le morphisme $V \to V \otimes_A A'$ est pur, le morphisme $M \otimes_A V \to N \otimes_A V$ vérifie $\mathbb{P}$. Prenons maintenant un idéal premier Q de A et soit V un anneau de valuation contenu dans $k(Q)$, tel qu'il existe un morphisme $A \to V$, on en déduit que $M_Q \otimes_{A_Q} k(Q) \to N_Q \otimes_{A_Q} k(Q)$ vérifie $\mathbb{P}$, donc aussi $M_Q \to N_Q$. Par conséquent $M \to N$ vérifie $\mathbb{P}$.

PROPOSITION 22. *Soit f: $A \to A'$ un morphisme universellement subtrusif. Le morphisme f descend la pureté des morphismes de A-modules de source projective et de but plat.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la proposition I-3.1.6 de [23].

PROPOSITION 23. *Soit A un anneau réduit et soit $A \to B$ un morphisme de présentation finie d'algèbres. Soit f: $A \to A'$ un morphisme d'anneaux universellement subtrusif, le morphisme f descend la surjectivité des morphismes de B-modules de conoyau de présentation finie.*

Preuve. Soit u: $M \to N$ un morphisme de B-modules tels que $N/u(M)$ soit de B-présentation finie. Supposons que $M \otimes_A A' \to N \otimes_A A'$ soit surjectif. De $N/u(M) \otimes_A A' = 0$ on déduit que $N/u(M)$ est plat par la proposition 21 et ensuite qu'il est nul par la proposition 18.

PROPOSITION 24. *Un morphisme universellement submersif descend la surjectivité des morphismes d'anneaux de type fini.*

Preuve. Soit $A \to A'$ un morphisme universellement submersif et soit $g: A \to B$ un morphisme de type fini. Si le morphisme $g': A' \to B \otimes_A A' = B'$ est surjectif le morphisme g est entier donc fini, puisqu'il est de type fini. Soit P un idéal premier de A se remontant en un idéal premier P' de A'. Puisque le morphisme g' est surjectif, la fibre en P' pour g' est soit vide soit isomorphe à $k(P')$. Or la fibre en P' se déduit de la fibre en P pour g par le changement de base fidèlement plat $k(P) \to k(P')$. On en déduit que la fibre en P pour g est soit vide soit isomorphe à $k(P)$. Dans chacun des cas, le lemme de Nakayama montre que le morphisme $A_P \to B_P$ est surjectif, d'où le résultat.

7. *Exemples de morphismes descendant la platitude*

PROPOSITION 25. *Soit A un anneau réduit, à spectre minimal compact. Soit M un A-module de type fini, si pour tout idéal premier minimal P de A le module $M/P.M$ est plat sur A/P, alors le A-module M est plat.*

Il en résulte que l'homomorphisme d'anneaux $A \to \prod_{P \in \mathrm{Min}(A)} A/P$ descend la platitude des modules de type fini.

Preuve. Soit $A \to B(A)$ l'homomorphisme canonique de l'anneau A dans son enveloppe de Baer (voir l'introduction). C'est un homomorphisme entier essentiel, de source un anneau à spectre minimal compact et réduit. D'après la proposition 24 de [19], il est minimalisant. Considérons le $B(A)$-module $N = M \otimes_A B(A)$; pour tout idéal premier minimal Q de $B(A)$, le module $N/Q.N$ est plat sur $B(A)/Q$ si l'on suppose que pour tout idéal premier P minimal de A le module $M/P.M$ est plat sur A/P. Puisque les homomorphismes entiers injectifs descendent la platitude des modules de type fini, pour démontrer la proposition, on peut supposer que l'anneau A est de Baer. Soit R un idéal maximal de A, l'anneau A_R est intègre et local, on peut donc supposer l'anneau A intègre et local. Mais d'après le théorème (C) de [2], le module M sur un anneau A local intègre est plat s'il existe un idéal premier P de A tel que $M/P.M$ soit plat sur A/P et M_P soit plat sur A_P, dans le cas présent, il suffit de prendre $P = 0$.

Remarque. Le théorème (C) de [2] montre que si A est un anneau local intègre l'homomorphisme $A \to A/P \times A_P$ descend la platitude des modules de type fini, pour tout idéal premier P de A. Le lemme 1.3.2 de [23] montre que lorsque A est un anneau de valuation, pour tout idéal premier P de A, l'homomorphisme $A \to A/P \times A_P$ descend la platitude.

PROPOSITION 26. *Soit $f: A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux fidèlement plat. Soit X' une partie de* Spec(A') *telle que ${}^af(X') =$* Spec(A) *et soit B l'anneau produit des anneaux $A'_{P'}$, où $P' \in X'$. Alors l'homomorphisme $A \to B$*

descend la platitude et est injectif, il est donc un homomorphisme de Nakayama.

Preuve. Soit M un A-module et supposons que le module $M \otimes_A B$ soit plat sur B. Pour tout idéal premier P' de A', appartenant à X', au-dessus d'un idéal premier P de A, le module $M \otimes_A A_P \otimes_{A_P} A'_{P'}$ est plat sur $A'_{P'}$. On en déduit que M_P est plat sur A_P, pour tout idéal premier P de A, d'où un résultat. Soit un élément a de A, d'image nulle dans B. Si a est différent de zéro, l'annulateur $0\colon a$ est différent de A. Par platitude de l'homomorphisme $A \to A'$, on a $(0\colon a).A' = 0\colon aA'$. Soit P un idéal premier de A, contenant $0\colon a$, il existe un élément P' de X' au-dessus de P. Soit, pour tout élément P' de X', un élément s' de $A' - P'$ tel que $s'f(a) = 0$ et soit I' l'idéal engendré par les éléments s', alors I' est contenu dans $0\colon aA' = (0\colon a).A'$, donc dans P', une contradiction.

Remarque. Soit $f\colon A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux descendant la platitude et soit $\{A_i\}_{i \in I}$ une famille de A-algèbres telle que $\bigoplus_{i \in I} A_i$ soit un A-module fidèlement plat, alors l'homomorphisme $A \to A' \to \prod_{i \in I} A' \otimes_A A_i$ descend la platitude. En effet, soit l'anneau $B_i = A' \otimes_A A_i$ et soit M un A-module tel que $M \otimes_A \prod B_i$ soit plat sur l'anneau $\prod B_i$. Alors, le module $M \otimes_A B_i$ est plat sur B_i, donc aussi $M \otimes_A A' \otimes_{A'} B_i$. D'après l'exercice 9 du Chapitre I de [5], page 67, 68, on voit que $M \otimes_A A'$ est plat sur A'. Il en résulte que le module M est plat sur A.

Voici une propriété de descente apparentée à celle des homomorphismes de Nakayama.

PROPOSITION 27. *Soit $f\colon A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux a-surjectif et soit M un A-module. On suppose que pour tout idéal premier P de A, le module M_P est de type fini sur A_P. Si le module $M \otimes_A A'$ est de type fini sur A', le module M est de type fini sur A.*

Preuve. Considérons M comme limite inductive filtrante de ses sous-modules de type fini M_i. Puisque le module $M \otimes_A A'$ est de type fini sur A', il existe une surjection $M_i \otimes_A A' \to M \otimes_A A'$, d'où l'on déduit que le module $M/M_i \otimes_A A'$ est nul. Il en est de même pour les modules $(M/M_i)_P \otimes_{A_P} A'_P$, pour tout idéal premier P de A. Mais l'homomorphisme $A_P \to A'_P$ est a-surjectif et le module $(M/M_i)_P$ est de type fini sur A_P, en vertu des résultats de [16, Chap. II], on voit que $(M/M_i)_P$ est nul, pour tout idéal premier P de A. Ainsi $M = M_i$ est de type fini sur A.

PROPOSITION 28. *Soit $f\colon A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux a-surjectif. L'homomorphisme f est de Nakayama dans les cas suivants:*

(1) *Il existe une A'-algèbre A'' de Nakayama (ou un module de Nakayama N' sur A') telle que A'' (ou N') soit plate sur A.*

(2) *Il existe un module N' de type fini sur A', plat sur A, de support* $\operatorname{Spec}(A')$.

Dans les deux cas l'homomorphisme f est générisant, donc subtrusif.

Preuve. Le deuxième cas est la proposition 2.5.4.1, chapitre IV, No. 24 de [10, p. 23]. Dans le premier cas, il suffit de montrer que l'homomorphisme f descend la surjectivité des homomorphismes de modules. Soit $Q_1 \to Q_2$ un homomorphisme de A-modules, tel que l'homomorphisme $Q_1 \otimes_A A' \to Q_2 \otimes_A A'$ soit surjectif. Il en est de même pour

$$Q_1 \otimes_A A' \otimes_{A'} N' \to Q_2 \otimes_A A' \otimes_{A'} N'.$$

Soit P' un idéal premier de A' au-dessus d'un idéal premier P de A, on obtient: l'homomorphisme $Q_{1P} \otimes_{A_P} N'_{P'} \to Q_{2P} \otimes_{A_P} N'_{P'}$ est surjectif. Mais $N'_{P'}$ est différent de 0 et est un module plat sur A_P. D'autre part, $P'N'_{P'}$ est différent de $N'_{P'}$, puisque $N'_{P'}$ est un $A'_{P'}$-module de Nakayama. Donc, a fortiori $PN'_{P'}$ est différent de $N'_{P'}$. On en déduit que le A_P-module $N'_{P'}$ est fidèlement plat. Donc l'homomorphisme $Q_{1P} \to Q_{2P}$ est surjectif, pour tout idéal premier P de A, donc aussi $Q_1 \to Q_2$. On voit alors que l'homomorphisme f est générisant dans les deux cas: le A_P-module $N'_{P'}$ est fidèlement plat, il suffit d'utiliser alors le corollaire 4 du Chapitre II, p. 93 de [5].

PROPOSITION 29. *Soit $f\colon A \to A'$ un homomorphisme d'anneaux de Nakayama, tel que pour tout A-module M de type fini et tout A-module N, l'homomorphisme canonique $A' \otimes_A \operatorname{Hom}_A(M, N) \to \operatorname{Hom}_A(M, N \otimes_A A')$ soit injectif.*

(1) *Un idéal pur I de A, tel que $I.A'$ soit un idéal facteur direct de l'anneau A', est un facteur direct de l'anneau A.*

(2) *Si l'anneau A' est réduit, soit F un fermé de* $\operatorname{Spec}(A)$ *stable par générisation tel que ${}^af^{-1}(F)$ soit ouvert dans* $\operatorname{Spec}(A')$, *alors F est un ouvert de* $\operatorname{Spec}(A)$.

(3) *Si l'anneau A' est réduit et si tout A'-module plat de type fini est projectif, tout A-module plat de type fini est projectif.*

Preuve. L'idéal I de A est facteur direct si et seulement si l'application $\operatorname{Hom}_A(A, I) \to \operatorname{Hom}_A(I, I)$ est surjective. D'autre part, dans les hypothèses de (1), l'idéal I étant pur, on a $I \otimes_A A' = I.A'$. Considérons le diagramme commutatif:

$$\begin{array}{ccc}
A' \otimes_A \operatorname{Hom}_A(A, I) & \xrightarrow{\beta} & A' \otimes_A \operatorname{Hom}_A(I, I) \\
{\scriptstyle\alpha}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\delta} \\
\operatorname{Hom}_{A'}(A' \otimes_A A, A' \otimes_A I) & \xrightarrow[\gamma]{} & \operatorname{Hom}_{A'}(A' \otimes_A I, A' \otimes_A I)
\end{array}$$

Il est clair que l'homomorphisme α est bijectif. Supposons que $I.A'$ soit facteur direct de A', alors l'homomorphisme γ est surjectif et $I.A'$ est un A'-module de type fini. Puisque l'homomorphisme f est de Nakayama, l'idéal I est de type fini, puisque $I \otimes_A A'$ l'est sur A'. D'après l'hypothèse faite sur l'homomorphisme f, l'homomorphisme δ est injectif. Il en résulte que l'homomorphisme β est surjectif, c'est-à-dire I est un facteur direct de A. Considérons les hypothèses de (2), soit $F = V(I)$ où I est un idéal de A, alors ${}^af^{-1}(V(I)) = V(I.A')$. L'anneau A' étant réduit, l'idéal $I.A'$ de A' est un facteur direct de A', puisque $V(I.A')$ est un ouvert et fermé. Mais le fermé F étant stable par générisation, on peut supposer que l'idéal I est pur, d'après la proposition 3.1 de [4]. Il en résulte que I est un facteur direct de A. L'assertion (3) s'obtient en utilisant le théorème 5.7 de [14].

8. *Quelques remarques sur les modules complètement fidèles*

Terminons par quelques remarques sur les modules complètement fidèles de W. Anderson et K. Fuller [1].

DÉFINITION 30. Soient M et M' des modules sur un anneau A. On désigne par $\mathrm{Ann}_M(M')$ l'ensemble des éléments x de M tels que $x \otimes x' = 0$, pour tout élément x' de M'. Le A-module M' est dit complètement fidèle si pour tout A-module M on a $\mathrm{Ann}_M(M') = 0$.

On montre que le module M' est complètement fidèle si et seulement si tout homomorphisme f de A-modules, tel que $M' \otimes f$ soit nul, est nul (ou, ce qui est équivalent, tel que $M' \otimes f$ soit injectif, est injectif).

PROPOSITION 31. *Soit M' un A-module complètement fidèle, l'homomorphisme $A \to \mathrm{End}_A(M')$ est pur.*

Preuve. Soit l'homomorphisme:

$$\omega\colon\quad M \to \mathrm{End}(M') \otimes_A M \to \mathrm{Hom}(M', M' \otimes_A M)$$

défini par: si x est un élément de M, alors $\omega(x)$ est l'homomorphisme de M' dans $M' \otimes_A M$ défini par $\omega(x)(x') = x' \otimes x$. Le noyau de ω n'est autre que $\mathrm{Ann}_M(M')$.

On peut définir la notion de module complètement fidèle sur un anneau non commutatif (cf. [1, p. 233]). Soit M' un A-module sur un anneau commutatif A, on sait que M' est un $\mathrm{End}(M')$-module à gauche. Dire que le module M' est complètement fidèle sur $\mathrm{End}(M')$ semble une condition assez forte.

PROPOSITION 32. *Soit E un A-module complètement fidèle sur* $\mathrm{End}(E)$, *alors tout endomorphisme surjectif de E, dans le centre de* $\mathrm{End}(E)$, *est bijectif.*

Preuve. Soit le produit tensoriel $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{End}(E), E) \otimes_{\mathrm{End}(E)} E$, ce qui a un sens puisque $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{End}(E), E)$ est muni d'une structure de $\mathrm{End}(E)$-module à droite de la manière suivante: si u est un élément de $\mathrm{End}(E)$ et α est un élément de $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{End}(E), E)$, on définit $u.\alpha$ par $(u.\alpha)(v) = \alpha(u \circ v)$ si v appartient à $\mathrm{End}(E)$. A tout élément x de E, on associe l'élément α_x du module $\mathrm{Hom}_A(\mathrm{End}(E), E)$ par $\alpha_x(v) = v(x)$ si v appartient à $\mathrm{End}(E)$. Considérons un endomorphisme surjectif u de E, dans le centre des endomorphismes de E et soit x un élément du noyau de u. Calculons $\alpha_x \otimes y$, pour tout élément y de E; puisque l'homomorphisme u est surjectif, il existe un élément z de E tel que $y = u(z)$. On obtient alors la suite d'égalités:

$$\alpha_x \otimes y = \alpha_x \otimes u.z = u.\alpha_x \otimes z.$$

Or

$$(u.\alpha_x)(v) = \alpha_x(u \circ v) = u(v(x)) = v(u(x)) = 0.$$

Puisque le $\mathrm{End}(E)$-module E est complètement fidèle, on voit que α_x est nul, mais alors $x = \alpha_x(\mathrm{Id}_E) = 0$.

LEMME 33. *Soit E un A-module tel qu'il existe un entier n et un élément f de $(E^n)^*$ qui soit surjectif, alors le module E est complètement fidèle.*

Preuve. On remarque que le module E est complètement fidèle si et seulement si le module $\bigoplus_{i \in I} E$ est complètement fidèle, pour tout ensemble d'indices I. En effet, d'après [1, p. 233], $\mathrm{Ann}_M(\bigoplus_{i \in I} E) = \mathrm{Ann}_M(E)$. Soit un homomorphisme $f: E^n \to A$ de A-module qui soit surjectif, on obtient pour tout A-module M, un homomorphisme $M \otimes_A E^n \to M$. Soit, pour un A-module M, un élément x de M tel que $x \otimes y = 0$ pour tout élément y de E^n, alors $x = 0$. Donc le module E^n est complètement fidèle.

COROLLAIRE 34. *Un A-module P de type fini et projectif est complètement fidèle sur l'anneau* $\mathrm{End}(P)$.

Preuve. Il existe des éléments $f_1, ..., f_n$ de P^* et des éléments $x_1, ..., x_n$ de P, tels que pour tout élément x de P on ait: $x = \sum_{i=1}^n f_i(x)\, x_i$. A tout élément f de P^* on associe une application $\mathrm{End}(P)$-linéaire $\hat{f}: P \to \mathrm{End}(P)$ définie par: soit z un élément de P, alors $\hat{f}_z: P \to P$ est définie par $\hat{f}_z(y) = f(y)\, z$, où y est un élément de P. On en déduit que $\mathrm{Id}_P = \sum_{i=1}^n \hat{f}_{i,x_i}$. Par conséquent, l'application $\rho: P^n \to \mathrm{End}(P)$ définie par $\rho(z_1, ..., z_n) = \sum_{i=1}^n \hat{f}_{i,z_i}$ est un $\mathrm{End}(P)$-homomorphisme surjectif. Pour achever la preuve, il suffit alors d'utiliser le lemme précédent.

BIBLIOGRAPHIE

1. E. W. ANDERSON AND K. R. FULLER, Rings and categories of modules. Springer-Verlag, New York/Heidelberg/Berlin, 1973.

2. M. AUSLANDER AND D. A. BUCHSBAUM, Invariant factors and two criteria for projectivity of modules, *Trans. Amer. Math. Soc.* **104** (1962), 516–522.
3. A. BESSERRE, "Thèse de la Faculté des Sciences de Clermont-Fd." Série E, 67, Gauthier-Villars, Paris, 1968.
4. R. BKOUCHE, Parties agréables d'un spectre d'anneau, Géométrie Pure et mollesse, Preprint de la Faculté des Sciences de Lille.
5. N. BOURBAKI, "Algèbre Commutative," Hermann, Paris.
6. J. W. BREWER AND E. A. RUTTER, Descent for flatness, *J. Algebra* **22** (1972), 88–96.
7. I. S. COHEN AND A. SEIDENBERG, Prime ideals and integral dependance, *Bull. Amer. Math. Soc.* **52** (1946), 252–261.
8. D. FERRAND, Conducteur, descente et pincement, Preprint.
9. A. GROTHENDIECK AND J. DIEUDONNÉ, Eléments de Géométrie Algébrique I," Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften 166, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.
10. A. GROTHENDIECK AND J. DIEUDONNÉ, Eléments de Géométrie I, II, III, IV, Paris, Presses Universitaires de France (Institut des Hautes Etudes Scientifiques, Publications Mathématiques, No. 4, 8, 11, 17, 20, 24, 28, 32, 1960, 1967.
11. M. HÖCHSTER, Totally integrally closed rings and extremal spaces, *Pacific J. Math.* **32** (1970), 767–779.
12. M. HÖCHSTER, Prime ideal structure in commutative rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **142** (1969), 43–60.
13. D. LAZARD, Epimorphismes plats, *in* "Séminaire P. Samuel 4," Secrétariat Mathématique, Paris, 1967, 1968.
14. D. LAZARD, Disconnexités des spectres d'anneaux et de préschémas, *Bull. Soc. Math. France* **95** (1967), 95–108.
15. J. OHM AND D. E. RUSH, The finiteness of I when $R[X]/I$ is flat, *Trans. Amer. Math. Soc.* **171** (1972), 377–408.
16. J. P. OLIVIER, "Descente de quelques propriétés élémentaires par morphismes purs," Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Pub. No. 112, pp. 47–85, Montpellier, 1970, 1971.
17. J. P. OLIVIER, Anneaux absolutement plats universels et épimorphismes à buts réduits, *in* "Séminaire P. Samuel 6," Secrétariat Mathématique, Paris, 1967, 1968.
18. J. P. OLIVIER, Morphismes immergeants de Ann. Université des Sciences et Techniques du Languedoc, Pub. No. 106, Montpellier, 1971.
19. G. PICAVET, Ultrafiltres sur un espace spectral, anneaux de Baer, anneaux à spectre minimal compact, *Math. Scand.* **46** (1980), 23–53.
20. N. POPESCU AND L. SPIRCU, Quelques observations sur les épimorphismes plats à gauche, *J. Algebra* **16** (1970), 40–59.
21. M. RAYNAUD, Un critère d'effectivité de descente, *in* "Séminaire P. Samuel 5, Secrétariat Mathématique, Paris, 1967, 1968.
22. M. RAYNAUD, "Anneaux locaux henséliens," Lecture Notes in Math, No. 169, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
23. M. RAYNAUD AND L. GRUSON, Critères de platitude et projectivité, *Invent. Math.* **13** (1971), 1–89.
24. N. ROBY, Diverses caractérisations des épimorphismes, *in* "Séminaire P. Samuel 3," Secrétariat Mathématique, Paris, 1967, 1968.
25. H. SEYDI, Un théorème de descente effective et une application, *C. R. Acad. Sci. Paris Ser. A* **270** (1970), 801–803.
26. H. UDA, Incomparability in rings extensions, *Hiroshima Math. J.* **9** (1979), 451–463.