Topology, Vol. 1, pp. 301–311. Pergamon Press, 1962. Printed in Great Britain.

SUR LES VARIÉTÉS À COURBURE STRICTEMENT POSITIVE

M. BERGER† and R. BOTT

(*Received* 20 *August* 1962)

1. INTRODUCTION

SOIT V^d une variété riemannienne de dimension d, simplement connexe, compacte et $c(V)$ l'ensemble de ses courbures sectionnelles. On ne connait actuellement, pour la topologie de V, aucune conséquence de la condition $c(V) \geqslant 0$ ou même de la condition $c(V) > 0$ (alors que, si $c(V) \leqslant 0$, nécessairement V est homéomorphe à l'espace euclidien R^d !). On peut songer à exiger moins: plus précisément, supposons que $c(V) \subset [\delta, \Delta]$ $(\delta > 0)$: existe-t-il une relation entre la topologie de V et le pincement $k = \delta/\Delta$ de V?

Rappelons d'abord que l'on sait ([5], theorem 2) que $k > \frac{1}{4}$ implique que V est homéomorphe à la sphère S^d; que $k = \frac{1}{4}$ et V non homéomorphe à S^d implique que V est isométrique à l'un des espaces projectifs: complexe $P^{d/2}(C)$, quaternionien $P^{d/4}(H)$ ou au plan projectif des octaves de Cayley $P^2(Ca)$. Signalons qu'on ne connait pas un $\varepsilon > 0$ tel que $k > \frac{1}{4} - \varepsilon$ entraîne que V soit homéomorphe à l'une des variétés: S^d, $P^{d/2}(C)$, $P^{d/4}(H)$, $P^2(Ca)$, bien que l'existence théorique d'un tel ε soit fortement probable. D'autre part ([1], p. 180), il existe V^7 et V^{13} telles que $c(V^7) = [k_1, 1]$ et $c(V^{13}) = [k_2, 1]$, avec $0 < k_1$, $k_2 < \frac{1}{4}$ et V^7, V^{13} non homéomorphes à S^7, S^{13}.

Dans ce travail, nous démontrons (théorème 6.2) une inégalité entre la somme, jusqu'à l'entier λ, des nombres de Betti pour un corps quelconque de l'espace des lacets $\Omega(V)$ de V et une exponentielle-polynôme en λ. Ce résultat est cependant très loin d'être le meilleur possible, puisque pour $k = \frac{1}{4}$ on ne retrouve pas le résultat de [5] rappelé ci-dessus. Nous donnons un exemple d'application du théorème 6.2 à la topologie de V elle-même: en utilisant la relation que fournit la fibration de Serre et la suite spectrale correspondante entre les nombres de Betti de $\Omega(V)$ et ceux de V, on obtient (théorème 7.3) le résultat suivant: si V est la somme topologique de h variétés dont le polynôme de Poincaré est $1 + t^\alpha + t^{2\alpha}$ $(\alpha \geqslant 2)$ et si $c(V) \subset [k\Delta, \Delta]$ $(k > 0,\ \Delta > 0)$, on doit avoir: $h \leqslant 1 + (2 + (\pi/2)) \exp (2(\alpha - 1)/\sqrt{k})$. Depuis ce travail, par une méthode différente, l'un de nous a obtenu [4] une majoration en k pour la caractéristique d'Euler–Poincaré d'un variété riemannienne k-pincée, compacte, de dimension paire.

La démonstration repose essentiellement sur l'introduction de l'intégrale suivante: si v désigne l'élément de volume de la variété riemannienne V et $g(n; \lambda)$ le nombre de géodésiques qui joignent un point fixe m de V au point n et qui sont d'index inférieur ou égal à λ, posons:

† L'auteur avait un contrat avec la National Science Foundation.

$J(\lambda) = \int_{n \in V} g(n; \lambda) \cdot v$. On obtient deux inégalités pour $J(\lambda)$: si b_i est le $i^{\text{ème}}$ nombre de Betti de $\Omega(V)$ pour le corps commutatif F et $\text{mes}(V) = \int_V v$ le volume total de V, la théorie de Morse implique directement: $J(\lambda) \geqslant \left(\sum_{i=0}^{\lambda} b_i\right) \cdot \text{mes}(V)$; ensuite on obtient une majoration pour $J(\lambda)$ à l'aide de la condition $c(V) \subset [k\Delta, \Delta]$ $(k > 0, \Delta > 0)$ en procédant comme suit: puisque $c(V) \geqslant \delta$, une géodésique de longueur supérieure ou égale à $\pi h/\sqrt{\delta}$ est nécessairement d'index supérieur ou égal à $(d-1)h$. Ce qui permet de se restreindre aux géodésiques de longueur bornée par un nombre $r(\lambda)$ ne dépendant que de λ. On introduit alors l'application exponentielle $\exp : T(V)_m \to V$, que l'on restreint à la boule $B^T_{r(\lambda)}$ de rayon $r(\lambda)$ de $T(V)_m$; si l'on extrait de $B^T_{r(\lambda)}$ et de V les lieux conjugués de m alors l'exponentielle devient un revêtement, dont le nombre de feuillets au-dessus d'un point n n'est autre que le nombre $f(n; r(\lambda))$ de toutes les géodésiques de longueur inférieure ou égale à $r(\lambda)$ qui joignent m à n; donc $g(n; \lambda) \leqslant f(n; r(\lambda))$. On introduit l'intégrale $I(s) = \int_{B_s V} f(n; s) \cdot v$ étendue à la boule B^V_s de V de centre m et de rayon s. Ainsi on aura $J(\lambda) \leqslant I(s)$ dès que s est assez grand par rapport à λ [précisément $s > ((\lambda/(d-1)+1)\pi)/\sqrt{\delta}$]. On a d'autre part: $I(s) = \int_{B_s T} |w|$, où $w = \exp^*(v)$ désigne la forme extérieure sur $T(V)_m$ image réciproque du volume v de V par exp. Il ne reste plus qu'à majorer $|w|$ sur B^T_s, ce qui résultera d'une majoration de la norme d'un champ de Jacobi (le long d'une géodésique quelconque de V) dont les conditions initiales sont données. Une telle majoration est obtenue en appliquant les théorèmes de Rauch [6] sur les champs de Jacobi de longueur inférieure ou égale à $\pi/2\sqrt{\Delta}$ des variétés riemanniennes telles que $c(V) \subset [\delta, \Delta]$ et une récurrence sur l'intervalle fondamental $\pi/2\sqrt{\Delta}$.

§ 2. NOTATIONS ET DÉFINITIONS

V est une variété indéfiniment différentiable orientée dont le fibré des vecteurs est noté $T(V) = \bigcup_{m \in V} T(V)_m$, la projection canonique étant $p : T(V) \to V$. On se donne une fois pour toutes sur V une structure riemannienne indéfiniment différentiable, notée $\langle\ ,\ \rangle$; et $\|\ \|$ désignera la norme associée. La variété V sera toujours *compacte*, a fortiori complète. Dans toute la suite on fixe définitivement un point $m \in V$. Si h est un réel positif ou nul, on pose: $S^T_h = \{x \in T(V)_m |\ \|x\| = h\}$ et $B^T_h = \{x \in T(V)_m \mid \|x\| \leqslant h\}$; on dénote par $\exp : T(V)_m \to V$ *l'application exponentielle* en m, ainsi classiquement définie: si $x \in T(V)_m$, alors $\exp(x)$ est l'extrémité de la géodésique de V qui a pour longueur $\|x\|$, pour origine m et est tangente en m à x. L'exponentielle est une application définie parce que V est complète et indéfiniment différentiable. Posons: $B^V_h = \exp(B^T_h)$, $S^V_h = \exp(S^T_h)$. *Le lieu conjugué de m dans* $T(V)_m$ est, par définition: $C^T = \{x \in T(V)_m |\ \exists\, y \neq 0,\ y \in T(T(V)_m)_x |\ (\mathrm{d}(\exp))(y) = 0\}$, c'est à dire les points x où la différentielle $\mathrm{d}(\exp)$ de exp n'est pas injective. *Le lieu conjugué de m dans V* est, par définition: $C^V = \exp(C^T)$.

Par D on entendra la loi de dérivation canonique que définit la structure riemannienne de V dans les champs de vecteurs de V. Etant donné $p \in V$ et $X, Y \in T(V)_p$, désignons par $R(X, Y) = D_X D_Y - D_Y D_X - D_{[X,Y]}$ l'endomorphisme de $T(V)_p$ que définit le tenseur de courbure de la structure riemannienne de V. Si $\{X, Y\}$ est orthonormé, ***la courbure sectionnelle*** de V pour le plan tangent à V engendré par X et Y est le réel $c(X, Y) = -\langle R(X,Y)X, Y\rangle$. On note $c(V)$ l'ensemble des $c(X, Y)$ lorsque p parcourt V et $\{X, Y\}$ parcourt l'ensemble des couples orthonormés de $T(V)_p$. Soit $x, y \in T(V)_m$; on peut considérer que $y \in T(T(V)_m)_x$ grâce à l'identification canonique entre E et $T(E)_x$ pour tout espace euclidien E. On désire calculer $(\mathrm{d}(\exp))(y) \in T(V)_{\exp(x)}$. La solution est fournie par les champs de Jacobi: soit $\gamma : t \to \gamma(t) = \exp(tx/\|x\|)$ la géodésique (paramétrisée donc en sorte que $\|\gamma'(t)\| = 1$ quel que soit t) de V qui part de m tangente à x, et soit $\pi_t : T(V)_{\lambda(t)} \to T(V)_m$ le transport parallèle le long de γ de $\gamma(t)$ à $\gamma(0) = m$; soit $u : [0, \infty] \to T(V)_m$ la solution de l'équation différentielle

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} = \pi_t(R(\gamma'(t)), \pi_t^{-1}(u(t))\gamma'(t)) \tag{2.1}$$

qui satisfait le conditions initiales:

$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = y/\|x\|. \tag{2.2}$$

Alors on a les résultat classique suivant:

$$(\mathrm{d}(\exp))(y) = u(\|x\|). \tag{2.3}$$

Le volume de la variété riemannienne orientée V sera noté v; c'est une forme extérieure de degré d égal à la dimension de V, dont la valeur sur le d uple $\{X_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots, d)$ de $T(V)_p$ sera notée $v(X_1, \ldots, X_d)$. Par définition: $v(X_1, \ldots, X_d) = 1$ chaque fois que $\{X_i\}$ est un repère orthonormé direct de $T(V)_p$. On a banalement:

$$|v(X_1, \ldots, X_d)| \leqslant \|X_1\| \ldots \|X_d\| \qquad \text{quel que soit } \{X_i\}. \tag{2.4}$$

On posera

$$w = (\exp)^* v \tag{2.5}$$

c'est à dire que w est la forme extérieure de degré d sur $T(V)_m$ définie par:

$$w(y_1, \ldots, y_d) = v((\mathrm{d}(\exp))(y_1), \ldots, (\mathrm{d}(\exp))(y_d)) \tag{2.6}$$
$$\text{quels que soient } y_1, \ldots, y_d \in T(T(V)_m)_x, \text{ quel que soit } x \in T(V)_m.$$

§ 3. LA THÉORIE DE MORSE

Soit $\gamma : [0, s] \to V$ une géodésique de V, d'extrémités m, n et paramétrisée en sorte que $\|\gamma'(t)\| = 1$ quel que soit $t \in [0, s]$. Soit $\mathscr{L}$ l'ensemble des champs de vecteurs le long de γ qui sont orthogonaux à et nuls en m et η, c'est à dire que $\mathscr{L}$ est l'ensemble des applications différentiables $Y : [0, s] \to T(V)$ telles que $p \circ Y = \gamma$, $\langle \gamma'(t), Y(t)\rangle = 0$ quel que soit $t \in [0, s]$, $Y(0) = Y(s) = 0$. La variation seconde

$$L''(0)(Y) = \int_0^s (\|D_{\gamma'(t)} Y(t)\|^2 - c(\gamma'(t), Y(t))\|Y(t)\|^2)\, \mathrm{d}t$$

est une forme quadratique sur $\mathscr{L}$; on appelle *index* de γ la plus grande dimension d'un sous-espace vectoriel $\mathscr{H}$ de $\mathscr{L}$ sur lequel $L''(0)$ est strictement négative. Il est classique si $n \notin C^V$ et si $L''(0)$ est négative ou nulle sur $\mathscr{H}$, alors $L''(0)$ est nécessairement strictement négative sur $\mathscr{H}$.

Si x se déplace dans $T(V)_m$ sans rencontrer le lieu conjugué C^T, alors l'index de la géodésique $\exp([0, x])$ ne change pas.

Soit $i(n; \lambda)$ le nombre de géodésiques de V qui ont pour extrémités m et n et pour index λ. Notons $\Omega(V)$ l'espace des lacets de V d'origine et d'extrémité m et F un corps commutatif quelconque; soit $b_\lambda = \dim H_\lambda(\Omega(V); F)$ le $\lambda^{\text{ème}}$ nombre de Betti de $\Omega(V)$ pour le corps F. On a les:

Inégalités de Morse: quel que soit $n \notin C^V$, quel que soit λ:

$$i(n; \lambda) \geqslant b_\lambda. \tag{3.1}$$

Posons:

$$a_\lambda = \sum_{\mu=0}^{\lambda} b_\mu, \qquad g(n; \lambda) = \sum_{\mu=0}^{\lambda} i(n; \mu) \tag{3.2}$$

en sorte que $g(n; \lambda)$ ne sera autre que le nombre de géodésiques joignant m à n et qui sont d'index inférieur ou égal à λ. On aura:

$$g(n; \lambda) \geqslant a_\lambda \qquad \text{quel que soit } \lambda, \text{ quel que soit } n \notin C^V. \tag{3.3}$$

PROPOSITION (3.1). *Soit V une variété riemannienne de dimension d telle que $c(V) \geqslant \delta > 0$ et γ une géodésique de V, de longueur s et d'extrémité n telle que $\gamma(s) = n \notin C^V$. Alors, si $s \geqslant \pi h/\sqrt{\delta}$, l'index de γ est supérieur ou égal à $(d-1)h$.*

C'est une généralisation banale de la proposition 4 de [2]; il suffit de prouver qu'il existe un sous-espace $\mathscr{H}$ de dimension $(d-1)h$ de $\mathscr{L}$ sur lequel $L''(0)$ est négative ou nulle; en effet, $n \notin C^V$ entraînera alors que $L''(0)$ est strictement négative sur $\mathscr{H}$.

On construit $\mathscr{H}$ comme suit: quel que soit $y \in T(V)_m$ avec $\langle \gamma'(0), y \rangle = 0$, définissons $Z_y \in \mathscr{L}$ par $Z_y(t) = \pi_t^{-1}(y)$ (en sorte donc que $D_{\lambda'(t)} Z_y(t) = 0$ quel que soit t, quel que soit y. Et pour $i = 0, \ldots, h-1$, définissons des fonctions $f_i : [0, s] \to R$ par: $f_i(t) = 0$ quel que soit $t \in [0, \pi i/\sqrt{\delta}]$, $f_i(t) = \sin(\sqrt{(\delta)}t - \pi i)$ quel que soit $t \in [\pi i/\sqrt{\delta}, \pi(i+1)/\sqrt{\delta}]$, $f_i(t) = 0$ quel que soit $t \in [\pi(i+1)/\sqrt{\delta}, s]$. De $c(V) \geqslant \delta$, on déduit par un calcul direct de $L''(0)$ que, quel que soit $i = 0, \ldots, h-1$ et quel que soit y: $L''(0)(f_i Z_y) \leqslant 0$. L'ensemble des $f_i Z_y$ engendre un sous-espace vectoriel $\mathscr{H}$ de dimension $(d-1)h$ de $\mathscr{L}$, sur lequel $L''(0)$ est négative ou nulle parce que, si $i \neq i'$, quels que soient y, z on aura:

$$L''(0)(f_i Z_y + f_{i'} Z_z) = L''(0)(f_i Z_y) + L''(0)(f_{i'} Z_z) \leqslant 0.$$

§4. LES INTÉGRALES $I(s)$ ET $J(\lambda)$

Rappelons que dans une variété riemannienne V on sait définir les notions d'ensemble mesurable U et de mesure, notée mes (U), d'un tel ensemble. En particulier mes(V) n'est autre que le volume total de V. Rappelons aussi que chaque droite de $T(V)_m$ rencontre C^T en des points isolés; donc C^T est de mesure nulle dans $T(V)_m$ et, puisque $\dim T(V)_m = \dim V$, l'image $C^V = \exp(C^T)$ est de mesure nulle dans V.

Fixons maintenant un $s > 0$ et posons: $Q_s^V = B_s^V \cap (\complement S_s^V) \cap (\complement(\exp(C^T \cap B_s^T)))$ (où par $\complement A$ on entend le complémentaire de l'ensemble A) et $Q_s^T = \exp^{-1}((Q_s^V) \cap B_s^T.)$ Puisque $B_s^V = \exp(B_s^T)$, on a $\exp(Q_s^T) = Q_s^V$; on peut donc poser: $\exp_s : Q_s^T \to Q_s^V$.

PROPOSITION (4.1). *L'ensemble Q_s^T (resp. Q_s^V) est ouvert dans $T(V)_m$ (resp. dans V) et on a* $\text{mes}(Q_s^V) = \text{mes}(B_s^V)$.

Les ensembles S_s^T et $C^T \cap B_s^T$ sont des compacts de mesure nulle de $T(V)_m$ donc leurs images $S_s^V = \exp(S_s^T)$ et $\exp(C^T \cap B_s^T)$ sont des fermés de mesure nulle de V, ce qui prouve que $\text{mes}(Q_s^V) = \text{mes}(B_s^V)$ et que Q_s^V est un ouvert de V.

Soit $n \in Q_s^V$ et $x \in \exp_s^{-1}(n) = \exp^{-1}(n) \cap B_s^T$; on a $x \notin C^T$ et $x \notin S_s^T$ par définition de Q_s^V. Soit U un voisinage de n dans V tel que $U \subset Q_s^V$; puisque exp est une application différentiable, l'image inverse $\exp^{-1}(U)$ est un ouvert de $T(V)_m$ qui contient x. Mais $x \notin C^T$, donc la différentielle d(exp) de exp est injective en x; on sait qu'il existe alors un voisinage U' de x dans $T(V)_m$ tel que la restriction de exp à U' soit un difféomorphisme entre U' et $\exp(U')$; en particulier $\exp(U')$ est un ouvert de V qui contient n. On peut de plus supposer que $U' \subset B_s^T \cap (\complement S_s^T)$ puisque $x \notin S_s^T$. Soit $U'' = \exp(U') \cap U$; c'est un ouvert de n dans Q_s^V et exp est un difféormorphisme entre $U''' = \exp^{-1}(U'') \cap U'$ et U'' Mais $U''' \subset Q_s^T$ parce que $U''' \subset B_s^T$ et $U''' \subset \exp^{-1}(U'')$. Ceci montre que Q_s^T est un ouvert de $T(V)_m$ et que $\exp_s$ est une application différentiable de la sous-variété ouverte Q_s^T de $T(V)_m$ sur la sous-variété ouverte Q_s^V de V; de plus $\exp_s$ est localement un difféomorphisme.

PROPOSITION (4.2). *L'application $\exp_s : Q_s^T \to Q_s^V$ est un revêtement ayant partout un nombre fini de feuillets.*

Par définition des revêtements, nous devons montrer que, quel que soit $n \in Q_s^V$, il existe un ouvert U de Q_s^V contenant n et tel que l'image inverse $\exp_s^{-1}(U)$ soit une partition en ouverts de Q_s^T ayant la propriété que la restriction de $\exp_s$ à l'un quelconque d'entre eux soit un difféomorphisme entre cet ouvert et U.

Soit $n \in Q_s^V$; montrons d'abord que $\exp_s^{-1}(n)$ est un ensemble fini. Par contradiction: soit $\{x_t\} \subset Q_s^T$ une suite infinie de points tous distincts de Q_s^T tels que $\exp(x_t) = n$ quel que soit t. Puisque $Q_s^T \subset B_s^T$ on peut extraire de $\{x_t\}$ une sous-suite $\{x_{t'}\}$ de points ayant une limite x dans le compact B_s^T; on aura $\exp(x) = n$. Mais le fait que $\{x_{t'}\}$ converge vers x avec $\exp(x_{t'}) = \exp(x)$ pour tout t' implique que, quel que soit l'ouvert W contenant x de $T(V)_m$, la restriction de $\exp_s$ à W n'est pas injective, donc que $x \in C^T$, d'où la contradiction $n = \exp(x) \in \exp(C^T \cap B_s^T)$.

Posons $\exp_s^{-1}(n) = \{x_i\}$ $(i = 1, 2, \dots, h)$. Comme Q_s^T est ouvert dans $T(V)_m$ et que, quel que soit i, on a $x_i \notin C^T$, il existe quel que soit i un voisinage U_i de x_i dans Q_s^T tel que la restriction de $\exp_s : \exp_s = U_i \to \exp(U_i)$ soit un difféomorphisme. Il est banal, puisque les x_i sont en nombre fini, de choisir de plus les U_i deux à deux sans point commun. Posons alors; $U' = \bigcap_i \exp(U_i)$; c'est un voisinage de n dans Q_s^V. Il suffit de montrer qu'il existe un voisinage U de n dans Q_s^V tel que $U \subset U'$ et tel que $\exp_s^{-1}(U) \subset \cup U_i$. Par contradiction:

soit $\{U_z\}$ la suite décroissante des boules de V de centre n et de rayon $1/z$ (où z est un entier positif). Supposons que, quel que soit z, il existe $y_z \in \exp_s^{-1}(U_z)$ avec $y_z \notin \bigcup_i U_i$. La suite $\{y_z\}$ est incluse dans le compact B_s^T, donc on peut en extraire une sous-suite $\{y_{z'}\}$ ayant une limite $y \in B_s^T$. Puisque $\exp(y_z) \in U_z$, on aura $\exp(y) = n$; d'où $y \in \exp^{-1}(n) \cap B_s^T$. Donc il existe un i tel que $y = x_i$, et comme la suite $\{y_{z'}\}$ a pour limite y, que U_i est un ouvert qui contient x_i, on est sûr que, pour z' assez grand, $y_{z'} \in U_i$; c'est la contradiction cherchée.

Nous pouvons maintenant définir l'intégrale $I(s)$. Comme Q_s^V est un ouvert de V, il est mesurable, ainsi que chacune de ses composantes connexes. Sur chacune de ces composantes connexes U_β (soit $Q_s^V = \bigcup_\beta U_\beta$ la partition de Q_s^V en ses composantes connexes) le nombre de feuillets du revêtement $\exp_s : Q_s^T \to Q_s^V$ est constant et fini: notons-le $f(n; s)$. L'intégrale $I(s) = \int_{Q_s^V} f(n; s)\cdot v$ existe donc. Puisque Q_s^T est un ouvert de $T(V)_m$ il est mesurable et l'intégrale $\int_{Q_s^T} |w|$ a un sens (rappelons que w est définie par la formule (2.5)).

PROPOSITION (4.3). $I(s) = \int_{Q_s^T} |w|$.

Chaque composante connexe U_β de Q_s^V étant mesurable, le nombre de feuillets $q(\beta)$ au-dessus de U_β étant constant et égal à $f(n; s)$ quel que soit $n \in U_\beta$, on aura:

$$\int_{U_\beta} f(n; s)\cdot v = q(\beta)\cdot \mathrm{mes}(U_\beta) \quad \text{et} \quad \int_{Q_s^V} f(n; s)\cdot v = \sum_\beta q(\beta)\cdot \mathrm{mes}(U_\beta).$$

D'autre part $Q_s^T \cup \exp_s^{-1}(U_\beta)$ définit une partition de Q_s^T par des ouverts (mesurables); puisque $\exp_s$, restreint à une composante connexe U_β et à $\exp_s^{-1}(U_\beta)$ est un revêtement à $q(\beta)$ feuillets et comme $w = \exp^* v$, on aura donc:

$$\int_{\exp_s^{-1}(U_\beta)} |w| = q(\beta) \int_{U_\beta} v = q(\beta)\cdot \mathrm{mes}(U_\beta)$$

d'où:

$$\int_{Q_s^T} |w| = \sum_\beta \int_{\exp_s^{-1}(U_\beta)} |w| = \sum_\beta q(\beta)\cdot \mathrm{mes}(U_\beta) = \int_{Q_s^V} f(n; s)\cdot v = I(s).$$

PROPOSITION (4.4). *Soit V une variété riemannienne, de dimension d, vérifiant $c(V) \geqslant \delta$. Pour tout entier $\lambda \geqslant 0$, soit a_λ défini par* (3.2) *et soit $\xi(\lambda)$ la partie entière de* $(\lambda + 1)/(d-1)$. *Soit $s = \xi(\lambda)\pi\sqrt{\delta}$. Alors*:

$$a_\lambda \leqslant (\mathrm{mes}(V))^{-1} \int_{B_s^T} |w|.$$

D'après la proposition 3.1, toute géodésique de longueur supérieure ou égale à $s = \xi(\lambda)\pi/\sqrt{\delta}$ est d'index supérieur ou égal à $\lambda + 1 > \lambda$; donc toute géodésique d'index inférieur ou égal à λ est de longueur strictement inférieure à s. Donc, si $g(n; \lambda)$ désigne le nombre de géodésiques joignant m à n et d'index inférieur ou égal à λ, on aura:

$$g(n; \lambda) \leqslant f(n; s) \qquad \text{quel que soit } n \in Q_s^V. \tag{4.1}$$

D'autre part, on a rappelé au §3 que $g(n;\lambda)$ est constant sur chaque composante connexe U_β de Q_s^V; *donc l'intégrale* $J(\lambda) = \int_{Q_s V} g(n;\lambda)\cdot v$ existe. D'après (3.3): $J(\lambda) \geqslant a_\lambda \operatorname{mes}(Q_s^V)$. D'après la proposition 4.1: $J(\lambda) \geqslant a_\lambda \operatorname{mes}(B_s^V)$.

Introduisons le lieu résiduel ou cut-locus $CL(m)$ de m (voir par exemple: [2], pp. 91–92); puisque chaque géodésique partant de m rencontre $CL(m)$ en un point isolé: $\operatorname{mes}(CL(m)) = 0$. D'autre part tout point de $V - CL(m)$ est joint à m par une géodésique d'index zéro; on aura donc: $\operatorname{mes}(V) \geqslant \operatorname{mes}(Q_s^V) \geqslant \operatorname{mes}(V - CL(m)) = \operatorname{mes}(V)$. Donc finalement: $J(\lambda) \geqslant a_\gamma \operatorname{mes}(V)$.

Par ailleurs (4.1) implique $I(s) \geqslant J(\lambda)$ et la proposition 4.3 affirme que: $I(s) = \int_{Q_s T} |w|$. D'où, puisque $Q_s^T \subset B_s^T$: $a_\lambda \operatorname{mes}(V) \leqslant \int_{B_s T} |w|$, ce qu'il fallait démontrer.

§ 5. MAJORATION DES CHAMPS DE JACOBI

Rappelons le:

THÉORÈME (5.1). (H. E. Rauch: [6], théorème 4). *Soit V une variété riemannienne complète telle que $c(V) \subset [\delta, \Delta]$ et Y un champ de Jacobi (le long d'une géodésique quelconque, de V, tel que $Y(0) = 0$. Alors, quel que soit $t \leqslant \pi/\sqrt{\Delta}$, on a*:

$$(5.1) \qquad (\sin(\sqrt{\Delta}\cdot t)/\sqrt{\Delta})\cdot\|Y'(0)\| \leqslant \|Y(t)\| \leqslant (\sin(\sqrt{\delta}\cdot t)/\sqrt{\delta})\cdot\|Y'(0)\|$$

et le résultat analogue, de démonstration calquée sur celle de [6]:

THÉORÈME (5.2). ([3], théorème 1). *Soit V une variété riemannienne telle que $c(V) \subset [\delta, \Delta]$; et Y un champ de Jacobi de V tel que $Y'(0) = 0$. Alors, quel que soit $0 \leqslant t \leqslant \pi/2\sqrt{\Delta})$ on a*:

$$(5.2) \qquad (\cos\sqrt{\Delta}\,.\,t)\,.\,\|Y(0)\| \leqslant \|Y(t)\| \leqslant (\cos\sqrt{\delta}\,.\,t)\,.\,\|Y(0)\|\,.$$

Des théorèmes 5.1 et 5.2 on déduit les lemmes ci-dessous; dans l'énoncé de chacun de ces lemmes on suppose toujours implicitement que la variété riemannienne V vérifie $c(V) \subset [\delta, \Delta]$ et que Y est un champ de Jacobi de V.
On pose: $\mathbf{D} = \pi/2\sqrt{\Delta}$.

LEMME (5.3). *Quel que soit Y on a*:

$$(5.3) \qquad \|Y(\mathbf{D})\| \leqslant \cos(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot\|Y(0)\| + \sin(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot\|Y'(0)\|/\sqrt{\delta}$$

$$(5.4) \qquad \|Y(\mathbf{D})\| \geqslant \|Y'(0)\|/\sqrt{\Delta} - \cos(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot\|Y(0)\|$$

et, quel que soit $0 \leqslant t \leqslant \mathbf{D}$:

$$(5.5) \qquad \|Y(t)\| \leqslant \|Y(0)\| + \sin(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot\|Y'(0)\|/\sqrt{\delta}.$$

Le champ de Jacobi Y étant donné, définissons deux champs de Jacobi Y_1 et Y_2 par: $Y_1(0) = 0$, $Y_1'(0) = Y'(0)$ et $Y_2 = Y - Y_1$, en sorte que $Y_2(0) = Y(0)$ et $Y_2'(0) = 0$. D'après (5.1), pour tour $0 \leqslant t \leqslant \mathbf{D}$: $\|Y_1(t)\| \leqslant \sin(\sqrt{\delta}\cdot t)\cdot\|Y_1'(0)\|/\sqrt{\delta} = \sin(\sqrt{\delta}\cdot t)\cdot$

$\|Y'(0)\|/\sqrt{\delta}$. D'après (5.2), pour tout $0 \leqslant t \leqslant \mathbf{D}$: $\|Y_2(t)\| \leqslant \cos(\sqrt{\delta}\cdot t)\cdot\|Y_2(0)\| = \cos(\sqrt{\delta}\cdot t)\cdot\|Y(0)\|$. Mais $\|Y(t)\| = \|Y_1(t) + Y_2(t)\| \leqslant \|Y_1(t)\| + \|Y_2(t)\|$, d'où:

(5.6) $$\|Y(t)\| \leqslant \sin(\sqrt{\delta}\cdot t)\cdot\|Y'(0)\|/\sqrt{\delta} + \cos(\sqrt{\delta}\cdot t)\cdot\|Y(0)\|.$$

De (5.6) on déduit (5.3) en y faisant $t = \mathbf{D}$. De (5.6) on déduit (5.5) en remarquant que $\cos(\sqrt{\delta}\cdot t) \leqslant 1$ quel que soit t et que, de $t = 0$ à $t = \mathbf{D}$ la fonction $\sin(\sqrt{\delta}\cdot t)$ est croissante.

D'après (5.1), pour $0 \leqslant t \leqslant \mathbf{D}$, on a:
$\|Y_1(\mathbf{D})\| \geqslant \sin(\pi/2)\cdot\|Y_1'(0)\|/\sqrt{\Delta} = \|Y'(0)\|/\sqrt{\Delta}$. Mais:
$\|Y(t)\| = \|Y_1(t) + Y_2(t)\| \geqslant \|Y_1(t)\| - \|Y_2(t)\|$, d'où (5.4).

LEMME (5.4). *Soit Y_1 tel que $Y_1(0) = 0$; alors* $\|Y_1'(\mathbf{D})\| \leqslant \sin(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})(\sqrt{\Delta}/\sqrt{\delta})\cdot\|Y_1'(0)\|$. *Soit Y_2 tel que $Y_2'(0) = 0$; alors* $\|Y_2'(\mathbf{D})\| \leqslant \sqrt{\Delta}(1 + \cos^2(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D}))\cdot\|Y_2(0)\|$.

Définissons Y par $Y(x) = Y_1(\mathbf{D} - x)$ quel que soit x; D'après (5.4): $\|Y_1(0)\| = \|Y(\mathbf{D})\| \geqslant \|Y'(0)\|/\sqrt{\Delta} - \cos(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot\|Y(0)\| = \|Y_1'(\mathbf{D})\|/\sqrt{\Delta} - \cos(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot\|Y_1(\mathbf{D})\|$. Mais, par hypothèse: $Y_1(0) = 0$, donc: $\|Y_1'(\mathbf{D})\| \leqslant \sqrt{\Delta}\cos(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D}).\|Y_1(\mathbf{D})\|$. D'après (5.1); $\|Y_1(\mathbf{D})\| \leqslant \sin(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot\|Y_1'(0)\|/\sqrt{\delta}$ d'où la première inégalité du lemme.

Définissons maintenant Y par $Y(x) = Y_2(\mathbf{D} - x)$ quel que soit x. D'après (5.4):
$$\|Y_2(0)\| = \|Y(\mathbf{D})\| \leqslant \|Y'(0)\|/\sqrt{\Delta} - \cos(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot\|Y(0)\| = \|Y_2'(\mathbf{D})\|/\sqrt{\Delta} - \cos(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot\|Y_2(\mathbf{D})\|$$

D'où: $\|Y_2'(\mathbf{D})\| \leqslant \sqrt{\Delta}\cos(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot\|Y_2(\mathbf{D})\| + \sqrt{\Delta}\|Y_2(0)\|$. Mais, d'après (5.2): $\|Y_2(\mathbf{D})\| \leqslant \cos(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot\|Y_2(0)\|$; d'où l'on déduit la deuxième inégalité du lemme.

Du lemme 5.4 on déduit évidemment la formule:

(5.7) $$\|Y'(\mathbf{D})\| \leqslant (\sqrt{\Delta}/\sqrt{\delta})\sin(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot\|Y'(0)\| + \sqrt{\Delta}(1 + \cos^2(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D}))\cdot\|Y(0)\|.$$

LEMME (5.5). *Soit Y tel que $Y(0) = 0$. Pour tout nombre réel positif t, désignons par $\eta(t)$ la partie entière de $t/\mathbf{D}$ augmentée de 1. Alors, quel que soit t:*
$\|Y(t)\| \leqslant \|Y'(0)\|\cdot(2 + (\pi/2))^{\eta(t)}\cdot(\sqrt{\Delta})^{-1}$.

Pour tout entier $k \geqslant 0$, posons $f_k = \|Y(k\mathbf{D})\|$ et $g_k = \|Y'(k\mathbf{D})\|/\sqrt{\Delta}$. Si l'on applique la formule (5.3) au champ de Jacobi Z défini par $Z(x) = Y(x - k\mathbf{D})$ pour tout x, on obtient: $f_{gk+1} \leqslant \cos(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot f_k + (\sqrt{\Delta}/\sqrt{\delta})\sin(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D})\cdot g_k$. Mais, comme $\cos(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D}) \leqslant 2$ et $\sin(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D}) \leqslant \sqrt{\delta}\,\mathbf{D} \leqslant \pi/2$, on aura:

(5.8) $$f_{k+1} \leqslant 2f_k + (\pi/2)g_k.$$

Appliquons (5.7) à Z; on obtient: $g_{k+1} \leqslant (\sqrt{\Delta}/\sqrt{\delta})\sin(\sqrt{\delta}D)\cdot g_k + (1 + \cos^2(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D}))\cdot f_k$. Mais on a $1 + \cos^2(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D}) \leqslant 2$ et $\sin(\sqrt{\delta}\,\mathbf{D}) \leqslant \sqrt{\delta}\,\mathbf{D}$, d'où:

(5.9) $$g_{k+1} \leqslant 2f_k + (\pi/2)g_k.$$

Puisque $f_0 = 0$ et $g_0 = \|Y'(0)\|/\sqrt{\Delta}$, on déduit de (5.8) et (5.9) par une récurrence triviale:

(5.10) $$f_k, g_k \leqslant (2 + (\pi/2))^k\cdot\|Y'(0)\|/\sqrt{\Delta}.$$

Par définition de $\eta(t)$, on a: $t = (\eta(t) - 1)\mathbf{D} + x$ avec $0 < x < \mathbf{D}$. Appliquons (5.5) au champ de Jacobi Z défini, pour tout v, par $Z(v) = Y(v - (\eta(t) - 1)\mathbf{D})$. On a $Y(t) = Z(x)$, d'où: $\|Y(t)\| = \|Z(x)\| - 2f_{\eta(t)-1} + (\pi/2)g_{\eta(t)-1}$. D'après (5.10):

$$\|Y(t)\| \leqslant (2 + (\pi/2))(2 + (\pi/2))^{\eta(t)-1} \cdot \|Y'(0)\|/\sqrt{\Delta} = (2 + (\pi/2))^{\eta(t)} \cdot \|Y'(0)\|/\sqrt{\Delta},$$

ce qu'il fallait démontrer.

§6. MAJORATION DES NOMBRES DE BETTI DE $\Omega(V)$

Dans ce §6, nous rapprochons les résultats des §4 et §5 pour en déduire le résultat essentiel de ce travail, le corollaire 6.3 ci-dessous.

PROPOSITION (6.1). *Soit V une variété riemannienne complète telle que $c(V) \subset [\delta, \Delta]$ $(\delta > 0)$. Alors, quel que soit $s > 0$:*

$$\int_{B_s T} |w| \leqslant \sigma_d \cdot \Delta^{-(d-1)/2} \cdot s \cdot (2 + (\pi/2))^{(d-1)\eta(s)}$$

où la fonction $\eta(t)$ est définie dans le lemme 5.5 et où $\sigma_d = \mathrm{mes}(S_1^T)$ désigne le volume de la sphère unité de l'espace euclidien R^d.

Soit x un vecteur quelconque de $T(V)_m$ et complétons le en un repère orthonormé $\{x/\|x\|, y_1, \ldots, y_{d-1}\}$ de l'espace tangent à $T(V)_m$ en x. D'après (2.6):

$$w(x/\|x\|, y_1, \ldots, y_{d-1}) = v(\|x\|^{-1}(d(\exp))(x), (d(\exp))(y_1), \ldots\ldots, (d(\exp))(y_{d-1}).$$

Mais, d'après (2.1), (2.2), (2.3) et le lemme 5.5: $\|(d(\exp))(y_i)\| \leqslant (\|x\|\sqrt{\Delta})^{-1}(2 + (\pi/2))^{\eta(\|x\|)(d-1)}$. Donc, d'après (2.4): $|w| \leqslant (\|x\|\sqrt{\Delta})^{-(d-1)}(2 + (\pi/2))^{\eta(\|x\|)(d-1)}$. Si l'on désigne par $\bar{w}$ le volume euclidien de $T(V)_m$, on aura $\bar{w}(x/\|x\|, y_1, \ldots, y_{d-1}) = 1$, donc on aura au point x:

$$|w|_x \leqslant (\|x\|\sqrt{\Delta})^{-(d-1)}(2 + (\pi/2))^{\eta(\|x\|)(d-1)} \cdot \bar{w}_x. \tag{6.1}$$

D'où:

$$\int_{B_s T} |w| \leqslant \int_{B_s T} (\|x\|\sqrt{\Delta})^{-(d-1)}(2 + (\pi/2))^{\eta(\|x\|)(d-1)} \cdot \bar{w}_x.$$

Comme $(2 + (\pi/2))^u$ et $\eta(u)$ sont des fonctions croissantes de u, on aura:

$$\int_{B_s T} |w| \leqslant \Delta^{-(d-1)/2} \cdot (2 + (\pi/2))^{\eta(s)(d-1)} \cdot \int_{B_s T} \|x\|^{-(d-1)} \cdot \bar{w}_x.$$

Mais si σ_d désigne le volume de la sphère unité de l'espace euclidien R^d:

$$\int_{B_s T} \|x\|^{-(d-1)}\bar{w}_x = \int_0^s \left(\int_{S_s T} \|x\|^{-(d-1)}\bar{w}_x\right) \mathrm{d}t = \int_0^s (\|x\|^{-(d-1)}\|x\|^{d-1})\sigma_d \,\mathrm{d}s = \sigma_d s.$$

THÉORÈME (6.2). *Soit V une variété riemanniene compacte qui vérifie $c(V) \subset (k\Delta, \Delta]$ $(\Delta > 0, k > 0)$ et a_λ comme défini en* (3.2) *pour un corps commutatif quelconque. Alors:*

$$a_\lambda \leqslant (\mathrm{mes}(V))^{-1} \cdot \Delta^{-(d+1)/2} \cdot \sigma_d \cdot ((\lambda + 1)\pi/(d - 1)\sqrt{k}) \cdot (2 + (\pi/2))^{(2(\lambda+1)/\sqrt{k} + (d-1))}.$$

Appliquons la proposition 4.4 avec $\delta = k\Delta$. On aura: $a_\lambda \leqslant (\mathrm{mes}(V))^{-1}\int_{B_s T}|w|$ où $s = \xi(\lambda)\pi/\sqrt{(k\Delta)}$. Pour appliquer la proposition 6.1, il faut évaluer s et $\eta(s)$ en fonction de λ. Par définition de $\xi(\lambda): \xi(\lambda) \geqslant (\lambda + 1)/(d - 1)$; d'où: $s \geqslant (\lambda + 1)\pi/(d - 1)\sqrt{(k\Delta)}$. Par définition de $\eta(s): \eta(s) \geqslant 2s\sqrt{\Delta}/\pi + 1$, donc $\eta(s) \geqslant 2(\lambda + 1)/\sqrt{k}(d - 1) + 1$, soit $\eta(s) \geqslant (2(\lambda + 1) + \sqrt{k}(d - 1))/\sqrt{k}(d - 1)$. Comme t et $(2 + (\pi/2))^t$ sont des fonctions croissantes de t, on aura, vues les majorations obtenues pour s et $\eta(s)$ et la proposition 6.1, l'inégalité du théorème.

COROLLAIRE (6.3). *Quand λ tend vers l'infini, le type exponentiel de a_λ n'est pas plus grand que* $2 \log(2 + (\pi/2))/\sqrt{k}$.

7. UNE APPLICATION

LEMME (7.1). *Soit V une variété compacte dont le polynôme de Poincaré pour l'homologie entière est $1 + ht^\alpha + t^{2\alpha}(\alpha \geqslant 2)$. Alors les nombres de Betti $bi = \dim H_i(\Omega(V); Q)$ de la cohomologie rationnelle de l'espaces des lacets de V vérifient la relation de récurrence $b_{\lambda+2\alpha-2} \geqslant hb_{\lambda+\alpha-1} - b_\lambda$ quel que soit $\lambda \geqslant 0$.*

On considère la suite spectrale $\{E^r_{p,q}\}$ de la fibration de Serre, fibration dont la base est V, la fibre $\Omega(V)$ et l'espace fibré l'espace rétractile des chemins d'origine fixe dans V, d'extrémité quelconque. Comme l'espace fibré est rétractile, on devra avoir $E^\infty_{p,q} = 0$ quels que soient p,q. Comme Q est un corps, on a l'isomorphisme: $E^2_{p,q} \approx H_p(V; Q) \times H_q(\Omega(V); Q)$. Posons $e^r_{p,q} = \dim E^r_{p,q}$; on aura $e^2_{0,q} = b_q$ et $e^2_{p,0} = 0$ sauf $e^2_{0,0} = e^2_{2\alpha,0} = 1$ et $e^2_{\alpha,0} = h$. D'où $e^2_{p,q} = 0$ sauf $e^2_{0,q} = b_q$, $e^2_{\alpha,q} = hb_q$, $e^2_{2\alpha,q} = b_q$. Ceci implique qu'une différentielle d^r est nulle si $r \neq \alpha$ et $r \neq 2\alpha$. Donc $E^2_{p,q} = E^\alpha_{p,q}$ quels que soient p, q. De plus $d^{2\alpha}$ est nulle sur $E^\alpha_{\alpha,q}$, donc on doit avoir $E^{\alpha+1}_{\alpha,q} = E^{2\alpha}_{\alpha,q} = E^\infty_{\alpha,q} = 0$. Mais $E^{\alpha+1}_{\alpha,q}$ est le quotient du noyau de l'application $d^\alpha: E^\alpha_{\alpha,q} \to E^\alpha_{0,q+\alpha-1}$ par l'image $d^\alpha(E^\alpha_{2\alpha,q-\alpha+1})$. D'où: $e^\alpha_{2\alpha,q-\alpha+1} \geqslant e^\alpha_{\alpha,q} - \dim(d^\alpha(E^\alpha_{\alpha,q}))$. Comme $d^\alpha(E^\alpha_{\alpha,q}) \subset E^\alpha_{0,q+\alpha-1}$, on a:

$$b_{q-\alpha+1} = e_{2\alpha,q-\alpha+1} \geqslant e^\alpha_{\alpha,q} - e^\alpha_{0,q+\alpha-1} = hb_q - b_{q+\alpha-1}.$$

En faisant $q - \alpha + 1 = \lambda$ dans cette relation, on obtient le lemme.

LEMME (7.2). *Soit $\{b_{kx}\}$ $(k \geqslant 1)$ une suite de nombres vérifiant les relations de récurrence $b_{(k+2)x} \geqslant hb_{(k+1)x} - b_{kx}$ quel que soit $k \geqslant -1$, et les conditions initiales $b_{-x} = 0$, $b_0 = 1$. Alors, si $h \geqslant 3$, la somme $\bar{a}_{kx} = \sum_{i=0}^{k} b_{ix}$ croît, quand k tend vers l'infini, avec un type exponentiel supérieur ou égal à* $\log(h - 1)$.

Soit c_{kx} la suite d'entiers définis par les relations de récurrence $c_{(k+2)x} = hc_{(k+1)x} - c_{kx}$, quel que soit k, et les conditions initiales $c_{-x} = 0$, $c_0 = 0$. Comme $h \geqslant 3$, l'équation $A^2 - hA + 1 = 0$ a deux racines distinctes $\beta_1 = (h + \sqrt{(h^2 - 4)})/2$, $\beta_2 = (h - \sqrt{(h^2 - 4)})/2$; on sait qu'alors il existe u, v tels que, quel que soit k, on ait: $c_{kx} = u\beta_1^k + v\beta_2^k$. Les conditions initiales entraînent que:

$$c_{kx} = \beta_1^{k+1}/(\beta_1 - \beta_2) - \beta_2^{k+1}/(\beta_1\beta_2). \tag{7.1}$$

Puisque $\beta_1 > \beta_2 > 0$, on a $c_{kx} \geqslant 0$ quel que soit k, et, quand k tend vers l'infini, le type exponentiel de c_{kx} est $\log \beta_1$. Mais on vérifie que $\beta_1 \geqslant (h - 1)$, donc le type exponentiel de c_{kx} est supérieur ou égal à $\log (h - 1)$.

Posons maintenant $e_{kx} = b_{kx} - c_{kx}$; on a $e_{-x} = e_0 = 0$ et $e_{(k+2)x} \geqslant he_{(k+1)x} - e_{kx}$, ce qu'on peut écrire: $e_{(k+2)x} - e_{(k+1)x} \geqslant (e_{(k+1)x} - e_{kx}) + (h-2)e_{(k+1)x}$. Si l'on adopte l'hypothèse de récurrence $e_{(k+1)x} \geqslant e_{kx} \geqslant 0$, on voit que cette relation implique $e_{kx} \geqslant 0$ quel que soit k, c'est à dire $b_{kx} \geqslant c_{kx}$. Le type exponentiel de b_{kx} est donc supérieur ou égal à celui de c_{kx}, ce qu'il fallait démontrer, puisque b_{kx} et a_{kx} ont le même type exponentiel.

THÉORÈME (7.3). *Soit V une variété riemannienne compacte telle que $c(V) \subset [k\Delta, \Delta]$ ($\Delta > 0$, $k > 0$) et dont le polynôme de Poincaré de l'homologie entière est $1 + ht^{\alpha} + t^{2\alpha}$ ($\alpha \geqslant 2$). Alors il est nécessaire que $h \leqslant 1 + (2 + (\pi/2)) \exp(2(\alpha - 1)/\sqrt{k})$.*

Banal à partir du corollaire 6.3 et du lemme 7.2, en remarquant que le type exponentiel en λ de a_λ est égal à celui de a_{kx} en k, divisé par $x = \alpha - 1$ et qu'évidemment $a_{kx} \geqslant \bar{a}_{kx}$. On remarquera aussi que la restriction $h \geqslant 3$ du lemme 7.2 n'intervient pas puisqu'on a toujours, si $\alpha \geqslant 2 : 1 + (2 + (\pi/2)) \exp(2(\alpha - 1)/\sqrt{k}) \geqslant 3$ ($k \leqslant 1$).

BIBLIOGRAPHIE

1. M. BERGER: Les variétés riemanniennes homogènes normales simplement connexes à courbure strictement positive, *Ann. del. Scuola Norm. Sup. Pisa* **15** (1961), 179–246.
2. M. BERGER: Les variétés riemanniennes à courbure positive, *Bull. Soc. Math. Belgique* **10** (1958), 89–104.
3. M. BERGER: An extension of Rauch's metric comparison theorem, *Illinois J. Math.*, à paraître.
4. M. BERGER: On the characteristic of positively-pinched Riemannian manifolds, *Proc. Nat. Acad. Sci., Wash.*, à paraître.
5. W. KLINGENBERG: Über Riemannsche Mannifaltigkeiten mit nach oben beschränkter Krümmung *Annali di Mathematica*, à paraître.
6. H. E. RAUCH: A contribution to differential geometry in the large, *Ann. Math., Princeton* **54** (1951), 38–55.

Département de Mathématiques,
Université de Strasbourg.