

## ESTIMACIÓN ADAPTABLE DE ESTADOS EN UN EDIFICIO DE MARCO PLANO EQUIPADO CON UN AMORTIGUADOR MAGNETO-REOLÓGICO<sup>1</sup>

René Jiménez-Fabián<sup>2</sup> y Luis Alvarez-Icaza<sup>3</sup>

*Instituto de Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma  
de México, CP 04510, Coyoacán, México D.F.*

Resumen: Se presenta un observador adaptable para un edificio equipado con un amortiguador magneto-reológico. Este observador es capaz de reconstruir los parámetros estructurales, las posiciones y las velocidades absolutas de los pisos a partir de mediciones de aceleración. Estas señales son reconstruidas en forma explícita gracias a que el esquema propuesto no requiere de formas canónicas ni transformaciones de estados. El desempeño de este observador se ilustra con resultados experimentales obtenidos en una estructura de escala reducida.  
*Copyright ©2008 CEA-IFAC*

Palabras Clave: Observador adaptable, amortiguador magneto-reológico, identificación de parámetros, control de estructuras.

### 1. INTRODUCCIÓN

El control a través de disipadores regulables de energía ha tomado gran importancia en el diseño de esquemas de protección de estructuras contra sismos. Este enfoque se designa comúnmente con el nombre de control semiactivo (Symans, M.D. and Constantinou, M.C., 1999). En la actualidad se investiga la implantación de estos esquemas de control a través de amortiguadores magneto-reológicos (AMR) principalmente por su bajo consumo de energía y su amplio rango dinámico de disipación (Janocha, H., 2001).

Aunque los esfuerzos encaminados al desarrollo de sistemas de control semiactivo no han sido pocos (Jansen, L.M. and Dyke, S.J., 2000), en el caso de edificios y otras estructuras civiles la mayoría de las estrategias desarrolladas hasta

este momento requieren de la medición directa de posiciones, velocidades y aceleraciones absolutas de cada piso y de los parámetros estructurales. Lamentablemente, en un caso práctico es difícil determinar *a priori* el valor exacto de los parámetros estructurales y contar con la instrumentación para medir en tiempo real todas las variables requeridas por los controladores implica el uso de sensores y sistemas de adquisición de datos que pueden elevar excesivamente los costos.

El propósito de este trabajo es presentar una opción para reducir el número de sensores en una estructura en la que se requiere de la medición de las señales ya mencionadas, ya sea para fines de control durante un evento sísmico o para análisis *a posteriori* del comportamiento dinámico de dicha estructura. Para este fin se desarrolló un observador adaptable capaz de reconstruir en tiempo real tanto los parámetros estructurales como las posiciones y velocidades correspondientes a cada uno de los niveles de una estructura de marco plano de múltiples grados de libertad (GdL) equipada con

<sup>1</sup> Trabajo con patrocinio de CONACyT, proyecto 47583, y de la UNAM, proyecto DGAPA-PAPIIT IN109306.

<sup>2</sup> [rjimenezf@iingen.unam.mx](mailto:rjimenezf@iingen.unam.mx), autor para correspondencia.

<sup>3</sup> [alvar@pumas.iingen.unam.mx](mailto:alvar@pumas.iingen.unam.mx).

un AMR. Este observador requiere únicamente de la medición de las aceleraciones de cada uno de los pisos y de la aceleración del terreno, señales relativamente fáciles de medir en una estructura civil. Los parámetros estructurales son ajustados en tiempo real a través de una ley de adaptación recursiva basada en el método de mínimos cuadrados.

Este trabajo constituye una extensión de un observador diseñado previamente (Jiménez, R. and Alvarez, L., 2004), el cual requiere de la medición de la fuerza generada por el AMR además de las señales mencionadas en el párrafo anterior. La principal contribución del presente trabajo es que a través del modelo modificado de LuGre (mLG) para amortiguadores magneto-reológicos (Jiménez, R. and Álvarez, L., 2005) se logra prescindir de la medición de fuerza. Además, la forma del observador permite reconstruir explícitamente los parámetros estructurales, los desplazamientos y las velocidades, a diferencia de la mayoría de los esquemas de observación adaptables propuestos por otros autores, en los que se requiere de transformaciones o formas canónicas que generalmente conducen a la estimación de estados difíciles de interpretar físicamente (Lüders, G. and Narendra, K.S., 1974; Narendra, K.S. and Annaswamy, A.M., 1989; Zhang, Q., 2005). Asimismo, la estimación de posiciones y velocidades a través del observador evita los errores de deriva que se sabe muy bien se presentan en la integración numérica directa de las aceleraciones.

## 2. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Para abordar el problema de diseño del observador se consideró una estructura de marco plano de  $n$  GdL. Se supuso también que para realizar el control de esta estructura se cuenta con un AMR instalado entre el nivel del terreno y el primer piso, como se muestra en la Figura 1.

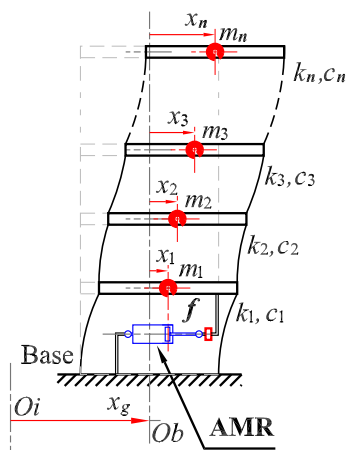


Figura 1. Estructura de marco plano con  $n$  GdL.

La dinámica de esta estructura se puede describir mediante

$$\mathbb{M}\ddot{x} + \mathbb{C}\dot{x} + \mathbb{K}x + \mathbb{B}f = -\mathbb{M}l\ddot{x}_g, \quad (1)$$

donde  $\mathbb{M} \in \mathbf{R}^{n \times n}$ ,  $\mathbb{C} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  y  $\mathbb{K} \in \mathbf{R}^{n \times n}$  son, respectivamente, las matrices de inercia, amortiguamiento y rigidez. Estas matrices están definidas como sigue

$$\mathbb{M} = \mathbb{M}^T = \text{diag}(m_1, m_2, \dots, m_n), \quad (2)$$

$$\mathbb{K} = \mathbb{K}^T = \begin{bmatrix} k_1 + k_2 & -k_2 & \cdots & 0 \\ -k_2 & k_2 + k_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & k_n \end{bmatrix}, \quad (3)$$

$$\mathbb{C} = \mathbb{C}^T = \begin{bmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & \cdots & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_n \end{bmatrix}, \quad (4)$$

donde  $m_j > 0$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ) representa la masa del  $j$ -ésimo piso. Los parámetros  $c_j > 0$  y  $k_j > 0$  denotan los coeficientes de amortiguamiento y rigidez en la dirección horizontal entre el  $j$ -ésimo y el  $(j - 1)$ -ésimo pisos de la estructura.

Las componentes de  $x = [x_1 \ x_2 \ \cdots \ x_n]^T \in \mathbf{R}^n$  son los desplazamientos de las masas, medidos con respecto a la base de la estructura, en el sistema de referencia unidimensional  $Ob$ .  $\mathbb{B} = [1 \ 0 \ 0 \ \cdots \ 0]^T \in \mathbf{R}^n$  es el vector de distribución de la fuerza debida al AMR. Las variables  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$  simbolizan, respectivamente, la primera y segunda derivadas con respecto al tiempo de  $x$ .  $l = [1 \ 1 \ \dots \ 1]^T \in \mathbf{R}^n$  es el vector de distribución de la excitación sísmica, denotada por  $\ddot{x}_g$ , misma que representa la aceleración del terreno medida con respecto al sistema de referencia inercial  $O_i$ . De esta forma,

$$\psi = \ddot{x} + l\ddot{x}_g, \quad \psi \in \mathbf{R}^n \quad (5)$$

constituye el vector de aceleraciones absolutas de los pisos de la estructura.

Sistemas muy similares al descrito en los párrafos anteriores han sido estudiados en diversos trabajos sobre protección de estructuras (Dyke, S.J. *et al.*, 1996).

## 3. MODELO EN EL ESPACIO DE ESTADOS Y PARAMETRIZACIÓN

Para realizar la identificación en tiempo real del AMR se propone el siguiente modelo, denotado por  $\Sigma_a$ :

$$\dot{z} = \dot{x}_1 - \mu(v)|\dot{x}_1|z, \quad (6)$$

$$\mu(v) = \frac{1}{m_1}(\varrho_0 + \varrho_1 v) > 0, \quad (7)$$

$$f = \vartheta_0 z + \vartheta_1 m_1 \dot{z} + \vartheta_2 \dot{x}_1, \quad (8)$$

donde  $\varrho_0$  (kg/m),  $\varrho_1$  (kg/(m·V)),  $\vartheta_0$  (N/m),  $\vartheta_1 = 1 \text{ s}^{-1}$  y  $\vartheta_2$  (N·s/m) son parámetros constantes.  $z$  se puede interpretar como un promedio de la deformación elástica que experimenta el fluido magneto-reológico en el interior del AMR (Jiménez, R. and Álvarez, L., 2005). La fuerza que ejerce el AMR sobre la estructura está representada por  $f$ . La variable  $v$  denota el voltaje aplicado a dicho dispositivo.

Este modelo se basa en el mLG, introducido por Álvarez, L. and Jiménez, R. (2002). La estructura de dicho modelo ofrece la posibilidad de identificar varios de sus parámetros de manera recursiva, a diferencia de otros modelos que se pueden encontrar en la literatura (Spencer, B.F. *et al.*, 1996; Butz, T. and von Stryk, O., 1999). La forma de  $\Sigma_a$  permite estimar directamente los parámetros de (6) que, junto con  $\vartheta_0$  y los parámetros estructurales, se suponen desconocidos.

Definiendo los estados como  $\xi = [x^T \dot{x}^T z]^T \in \mathbf{R}^{2n+1}$ , el modelo de la estructura puede escribirse como  $\Sigma_\xi$ , descrito por

$$\dot{\xi} = \Delta \xi + \mathcal{B} \theta_f |\dot{x}_1| z + \Pi \ddot{x}_g, \quad (9)$$

$$\psi = \Lambda \xi + b \theta_f |\dot{x}_1| z, \quad (10)$$

donde

$$\Delta = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n \times n} & \mathbb{I}_{n \times n} & \mathbb{O}_n \\ -\mathbb{M}^{-1} \mathbb{K} & -\mathbb{M}^{-1} (\mathbb{C} + \mathbb{C}_\vartheta) & -\Delta_\vartheta \\ \mathbb{O}_n^T & \mathbb{B}^T & 0 \end{bmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n \times 2} \\ b \\ -\mathbb{V} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n+1 \times 2}, \quad \Pi = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_n \\ -l \\ 0 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{2n+1},$$

$$\Lambda = [-\mathbb{M}^{-1} \mathbb{K} \quad -\mathbb{M}^{-1} (\mathbb{C} + \mathbb{C}_\vartheta) \quad -\Delta_\vartheta],$$

$$\mathbb{C}_\vartheta = \text{diag}(m_1 + \vartheta_2, 0, \dots, 0) \in \mathbf{R}^{n \times n},$$

$$b = \begin{bmatrix} \mathbb{V} \\ \mathbb{O}_{n-1 \times 2} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times 2}, \quad \mathbb{V} = [1 \ v] \in \mathbf{R}^{1 \times 2},$$

$$\Delta_\vartheta = \begin{bmatrix} \vartheta_0 \\ m_1 \\ \mathbb{O}_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n, \quad \theta_f = \begin{bmatrix} \varrho_0 \\ m_1 \\ \varrho_1 \\ m_1 \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^2. \quad (11)$$

La matriz identidad de dimensión  $r$  se representa con  $\mathbb{I}_{r \times r}$  mientras que  $\mathbb{O}_{r \times s}$  es una matriz nula de  $r \times s$ .

En este caso, las formas diagonal de  $\mathbb{M}$  y tridiagonal de  $\mathbb{K}$  y  $\mathbb{C}$  permiten la parametrización  $\psi = U \theta$  en la cual, los elementos de  $U = [U_k \ U_c \ U_z \ U_f] \in \mathbf{R}^{n \times 4n+1}$  están definidos por

$$U_k = - \begin{bmatrix} q_1 & -q_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & q_2 & -q_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & q_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times 2n-1},$$

$$U_c = - \begin{bmatrix} \dot{q}_1 & -\dot{q}_2 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dot{q}_2 & -\dot{q}_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dot{q}_n \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times 2n-1},$$

$$U_z = \begin{bmatrix} -z \\ \mathbb{O}_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^n \text{ y } U_f = \begin{bmatrix} |\dot{x}_1| z & |\dot{x}_1| z v \\ \mathbb{O}_{n-1} & \mathbb{O}_{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbf{R}^{n \times 2},$$

donde  $q_j = x_j - x_{j-1}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ . Los elementos de  $\theta = [\theta_k^T \ \theta_c^T \ \theta_z^T \ \theta_f^T]^T \in \mathbf{R}^{4n+1}$  están definidos por los vectores de dimensión  $2n - 1$

$$\theta_k = \begin{bmatrix} k_1 & k_2 & k_2 & \dots & k_n \end{bmatrix}^T, \\ \theta_c = \begin{bmatrix} c_1 + \vartheta_1 m_1 + \vartheta_2 & c_2 & c_2 & \dots & c_n \end{bmatrix}^T, \quad (12)$$

por  $\theta_z = \begin{bmatrix} \vartheta_0 \\ m_1 \end{bmatrix}$  y  $\theta_f$  definido en (11).

#### 4. DISEÑO DEL OBSERVADOR

Considere el siguiente sistema dinámico

$$\dot{\hat{\xi}} = \hat{\Delta} \hat{\xi} + \hat{\mathcal{B}} \hat{\theta}_f |\hat{x}_1| \hat{z} + \Pi \ddot{x}_g + J \tilde{\psi}, \quad (13)$$

$$\hat{\psi} = \hat{\Lambda} \hat{\xi} + b \hat{\theta}_f |\hat{x}_1| \hat{z} = \hat{U} \hat{\theta}, \quad (14)$$

$$\dot{\hat{\theta}} = \frac{1}{\varphi^2} \Upsilon \hat{U}^T \tilde{\psi}, \quad \Upsilon = \Upsilon^T > 0, \quad (15)$$

$$\dot{\Upsilon} = -\frac{1}{\varphi^2} \Upsilon \hat{U}^T \hat{U} \Upsilon, \quad \Upsilon(0) = \Upsilon_0 > 0, \quad (16)$$

denotado por  $\Omega_\xi$ , donde  $\hat{\xi}$  es el vector de estados estimado,  $\hat{\theta}$  es el estimado del vector de parámetros y  $\varphi$  es una señal de normalización tal que  $\frac{\varphi}{\varphi} \in \mathcal{L}_\infty$ . Las matrices  $\hat{\Delta}$  y  $\hat{\Lambda}$  son las estimaciones de  $\Delta$  y  $\Lambda$ , respectivamente. Las matrices estimadas son reconstruidas en forma indirecta a través de las componentes de los vectores estimados de parámetros, designados por  $\hat{\theta}_k$ ,  $\hat{\theta}_c$ ,  $\hat{\theta}_z$  y  $\hat{\theta}_f$ .  $J \in \mathbf{R}^{2n+1 \times n}$  es la matriz de ganancias del término de retroalimentación del observador, basado en el error de estimación de las salidas del sistema,

$$\tilde{\psi} = \psi - \hat{\psi}. \quad (17)$$

$\Upsilon$  es la matriz de covarianza de la ley de identificación de parámetros expresada en (15) y (16). En esta ley de adaptación la matriz  $\hat{U}$  depende completamente del estado estimado.

El seguimiento asintótico de los estados se puede llevar a cabo si se considera que  $v(t)$  y  $\dot{x}_1(t)$  son continuas y están acotadas<sup>4</sup>, y si la matriz  $J$  se

<sup>4</sup> La suposición  $\dot{x}_1(t) < \infty$  se deriva de que, en general, el objetivo del control de estructuras es sólo ayudar

elige de tal suerte que se satisfagan simultáneamente

$$W = -\varphi_{m\acute{e}n}\mathbb{I}_\xi - 2JJ^T + JY^T + YJ^T < 0, \quad (18)$$

$$J_{2n+1,\{\cdot\}} = \mathbb{O}_{1 \times n} \quad (19)$$

$$J_{\{\cdot\},1} = [\check{\mathbb{O}}_{1 \times n} \ell \check{\mathbb{O}}_{1 \times n-1} \ 0]^T \quad (20)$$

para algún número real positivo  $\varphi_{m\acute{e}n}$ , donde  $Y = [\mathbb{O}_{n \times n} \ \mathbb{I}_{n \times n} \ \mathbb{O}_n]^T$ ,  $\mathbb{I}_\xi$  es la matriz identidad de dimensión  $2n + 1$ ,  $J_{2n+1,\{\cdot\}}$  representa el último renglón de  $J$  y  $J_{\{\cdot\},1}$  representa la primera columna de  $J$ .  $\check{\mathbb{O}}_{1 \times (\cdot)}$  debe satisfacer  $\|\check{\mathbb{O}}_{1 \times (\cdot)}\| < \epsilon$  con  $\epsilon \in \mathbf{R}$  y  $\ell \in \mathbf{R}$  suficientemente pequeños (incluso iguales a cero).

Con estas hipótesis se puede mostrar que el error de estimación de los estados, definido por

$$\tilde{\xi} = \xi - \hat{\xi}, \quad (21)$$

y el error de estimación de salidas tienden asintóticamente a cero.

*Suposición 1.* El voltaje suministrado al AMR es una función continua

$$v(t) : [0, \infty) \mapsto [0, v_{m\acute{a}x}] \in \mathbf{R}. \quad (22)$$

*Suposición 2.* Se satisfacen

$$\hat{\mu}(v) = \frac{\widehat{\varrho_0}}{m_1} + \frac{\widehat{\varrho_1}}{m_1} v, \quad (23)$$

con  $\hat{\mu}_{m\acute{a}x} \geq \hat{\mu} \geq \hat{\mu}_{m\acute{e}n} > 0$  y  $\hat{\mu}_{m\acute{e}n}$  suficientemente grande.

*Observación 1.* La condición anterior se puede lograr mediante un algoritmo de identificación con proyección de parámetros para  $\frac{\widehat{\varrho_0}}{m_1}$  y  $\frac{\widehat{\varrho_1}}{m_1}$  (Ioannou, P.A. and Sun, J., 1996).

*Lema 1.* Considere el sistema

$$\dot{\hat{z}} = \hat{x}_1 - \hat{\mu}(v)|\hat{x}_1|\hat{z}. \quad (24)$$

Si se satisfacen (22) y (23) y, además, para  $t = 0$  se cumple  $|\hat{z}(0)| \leq z_0$  y  $|\hat{x}_1(0)| \leq \hat{x}_{1_0}$  con  $z_0$  y  $\hat{x}_{1_0}$  números reales finitos, entonces la solución de equilibrio de (24), cuando  $\hat{x}_1 \neq 0$ , dada por

$$\hat{z}_e = \frac{\text{sig}(\hat{x}_1)}{\hat{\mu}(v)},$$

es asintóticamente estable (AE).

a disminuir la deformación plástica que se presenta en los diferentes elementos estructurales durante un sismo. Es razonable pensar que una estructura civil (construida correctamente, de acuerdo con los códigos de seguridad y normas de construcción pertinentes) se comporta como un sistema estable en el sentido de Lyapunov, al menos para un escenario sísmico típico de la región en la que se encuentre. En el mejor entendimiento de los autores, hasta el día de hoy no se construyen estructuras civiles inestables.

**Demostración:** Considerando (24) escrita como  $\dot{\hat{z}} = g(u, \hat{z})$ , donde  $g : U \times \mathbf{R} \mapsto \mathbf{R}$ ,  $U = \{u \in \mathbf{R} : u = \hat{\mu}(v)|\hat{x}_1|, \hat{x}_1 \neq 0\}$  y suponiendo  $\dot{\hat{z}}_e = g(u, \hat{z}_e)$ , los cambios de variable  $\varkappa = g(u, \hat{z}) - g(u, \hat{z}_e)$  y  $\varkappa_0 = \hat{z}(0) - \hat{z}_e(0)$ ,  $\hat{z}_e(0) = \hat{z}_e(\hat{\mu}(0), \hat{x}_1(0))$  transforman a (24) en

$$\dot{\varkappa} = -u\varkappa, \quad \varkappa(0) = \varkappa_0, \quad u > 0. \quad (25)$$

Por lo tanto, para toda  $\hat{x}_1 \neq 0$  el punto de equilibrio  $\varkappa = 0$  de (25) es AE. Se sigue entonces que  $\hat{z}_e$  es una solución AE para (24) cuando  $\hat{x}_1 \neq 0$ .  $\square$

*Teorema 1.* Considere los sistemas  $\Sigma_\xi$  y  $\Omega_\xi$  con los parámetros definidos en (11). Si se satisfacen las siguientes condiciones

1. La matriz  $\Delta$  no tiene valores propios con parte real positiva,
2. Las señales  $v(t)$ ,  $\mu(v)$  y  $\hat{x}_1(t)$  respectivamente satisfacen  $v_{m\acute{a}x} \geq v(t) \geq 0$ ,  $\mu_{m\acute{a}x} \geq \mu(v) > 0$  y  $|\hat{x}_1(t)| \leq \hat{x}_{1m\acute{a}x} \forall t \in [0, \infty)$ .
3. La matriz  $J$  satisface (18), (19) y (20).

Entonces, el error de estimación de los estados y el error de estimación de las salidas satisfacen

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\xi} = \mathbb{O}_{2n+1} \quad \text{y} \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \tilde{\psi} = \mathbb{O}_n,$$

respectivamente, y  $\tilde{\theta} = \theta - \hat{\theta} \in \mathcal{L}_\infty$ .

**Demostración:** Considere la matriz de estados expresada como

$$\Delta = \Delta_E + \Delta_z \quad (26)$$

donde

$$\Delta_E = \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n \times n} & \mathbb{I}_{n \times n} & \mathbb{O}_n \\ -\mathbb{M}^{-1}\mathbb{K} & -\mathbb{M}^{-1}(\mathbb{C} + \mathbb{C}_\vartheta) & -\Delta_\vartheta \\ \mathbb{O}_n^T & \mathbb{B}^T & -\rho_z \end{bmatrix},$$

$$\Delta_z = \text{diag}(0, 0, \dots, \rho_z),$$

y  $\rho_z$  es un número real positivo que garantiza que todos los valores propios de  $\Delta_E$  tengan parte real negativa. Tomando el lado derecho de (26), la dinámica del error de estimación de estados puede expresarse de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}} = & (\Delta_E - J\Lambda)\tilde{\xi} + (\tilde{\Delta} - J\tilde{\Lambda})\hat{\xi} + \\ & + (\mathbb{B} - Jb) \left( \theta_f |\hat{x}_1| z - \hat{\theta}_f |\hat{x}_1| \hat{z} \right) + \Delta_z \tilde{\xi}, \end{aligned}$$

donde  $\tilde{\Delta} = \Delta - \hat{\Delta} = \Delta_E - \hat{\Delta}_E$ ,  $\tilde{\Lambda} = \Lambda - \hat{\Lambda}$ . Obsérvese que  $\tilde{\Delta} = Y\tilde{\Lambda}$  y  $\mathbb{B} = Nb$ , donde

$$N = [\mathbb{O}_{n \times n} \ \mathbb{B}^T \ \mathbb{O}_{n-1 \times n} \ -\mathbb{B}^T].$$

Definiendo  $J_N = N - J$  se tiene que

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}} = & (\Delta_E - J\Lambda)\tilde{\xi} + (\tilde{\Delta} - J\tilde{\Lambda})\hat{\xi} + \\ & + J_N b \left( \theta_f |\hat{x}_1| z - \hat{\theta}_f |\hat{x}_1| \hat{z} \right) + \Delta_z \tilde{\xi}. \end{aligned}$$

Considere ahora la siguiente candidata a función de Lyapunov

$$V_\xi = \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T S \tilde{\xi} + \frac{1}{2}\tilde{\theta}^T \Upsilon^{-1} \tilde{\theta} > 0, \quad (27)$$

cuya derivada con respecto al tiempo, evaluada a lo largo de las trayectorias de la dinámica del error de observación de estados, está dada por

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi &= \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T [S(\Delta_E - J\Lambda) + (\Delta_E - J\Lambda)^T S] \tilde{\xi} + \\ &+ \tilde{\xi}^T S [J_Y \tilde{\Lambda} \hat{\xi} + J_N b (\theta_f |\dot{x}_1| z - \hat{\theta}_f |\dot{x}_1| \hat{z}) + \Delta_z \tilde{\xi}] \\ &- \frac{1}{\varphi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \tilde{U} \tilde{\theta} - \frac{3}{2\varphi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta}, \end{aligned}$$

donde  $J_Y = Y - J$ . Si se define  $\tilde{\theta}_f = \theta_f - \hat{\theta}_f$ , a través de la desigualdad triangular se llega a

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi &\leq \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T [S(\Delta_E - J\Lambda) + (\Delta_E - J\Lambda)^T S] \tilde{\xi} + \\ &+ \tilde{\xi}^T S [J_Y \tilde{\Lambda} \hat{\xi} + J_N (F_1 \tilde{\xi} + F_2 \tilde{\theta}) + \Delta_z \tilde{\xi}] + \\ &- \frac{1}{\varphi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \tilde{U} \tilde{\theta} - \frac{3}{2\varphi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta}, \end{aligned}$$

definiendo previamente

$$F_1 = \mu(v) \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n \times n} \\ \text{diag}(\text{sig}(\dot{x}_1) \hat{z}, 0, \dots, 0)_{n \times n} \\ |\dot{x}_1| \\ \mathbb{O}_{n-1 \times 1} \end{bmatrix}^T$$

y

$$F_2 = [\mathbb{O}_{n \times 4n-1} \hat{U}_f].$$

Considere ahora la ecuación del estado estimado  $\hat{z}$ , que corresponde al último renglón de (13)

$$\dot{\hat{z}} = \dot{x}_1 - \hat{\mu}(v) |\dot{x}_1| \hat{z} + J_{2n+1, \{\cdot\}} \tilde{\psi}, \quad (28)$$

donde, por hipótesis,  $\hat{\mu}_{\max} \geq \hat{\mu}(v) > 0$ . Si  $J_{2n+1, \{\cdot\}} = \mathbb{O}_{1 \times n}$ , del *Lema 1* la solución de equilibrio de (28) es acotada y es AE para todo  $\dot{x}_1 \neq 0$ . Para  $\dot{x}_1 = 0$  el estado estimado  $\hat{z}$  no cambia con respecto al tiempo. Por lo tanto, se cumple que  $|\hat{z}| \leq z_{\max} < \infty$ . De esta forma se puede mostrar que la derivada de  $V_\xi$  con respecto al tiempo cumple con la siguiente desigualdad

$$\begin{aligned} \dot{V}_\xi &\leq \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T [S(\Delta_E - J\Lambda) + (\Delta_E - J\Lambda)^T S] \tilde{\xi} + \\ &+ \frac{1}{2}\tilde{\xi}^T [S J_N F_{1_{\max}} + F_{1_{\max}}^T J_N^T S] \tilde{\xi} + \\ &+ \varphi \tilde{\xi}^T S S \tilde{\xi} - \frac{\varpi}{2\varphi^2} \tilde{\theta}^T \hat{U}^T \hat{U} \tilde{\theta} \end{aligned} \quad (29)$$

donde  $\varphi > 0$ ,  $\varpi > 0$  y

$$F_{1_{\max}} = \mu_{\max} \begin{bmatrix} \mathbb{O}_{n \times n} \\ \text{diag}(z_{\max}, 0, \dots, 0)_{n \times n} \\ \dot{x}_{1_{\max}} \\ \mathbb{O}_{1 \times n-1} \end{bmatrix}.$$

El término  $J_N F_{1_{\max}}$  depende de los valores de  $J_{\{\cdot\}, 1}$ , del valor de  $\mu_{\max}$ , de  $\dot{x}_{1_{\max}}$  y de  $z_{\max}$  (el cual no depende de la magnitud de  $\dot{x}_1$ ). Por lo tanto, si

$J_{\{\cdot\}, 1}$  satisface (20), se puede suponer que  $J_N F_{1_{\max}}$  actúa como una perturbación pequeña sobre  $\Delta_E$  tal que  $\Delta_E + J_N F_{1_{\max}}$  mantiene todos sus valores propios con parte real negativa.

Ahora bien, si  $J$  cumple con (18), entonces

$$(\Delta_E + J_N F_{1_{\max}})Z + Z(\Delta_E + J_N F_{1_{\max}})^T = (\tau + 1)W < 0$$

implica la existencia de  $S^{-1} = Z = Z^T > 0$  para cualquier  $\tau > 0$  dado que  $\Delta_E + J_N F_{1_{\max}}$  es una matriz estable. Se sigue entonces que

$$\begin{aligned} &(\Delta_E + J_2 F_{1_{\max}})Z + Z(\Delta_E + J_2 F_{1_{\max}})^T - W < 0 \\ &S(\Delta_E + J_2 F_{1_{\max}}) + (\Delta_E + J_2 F_{1_{\max}})^T S + \\ &+ \varphi S S + 2S J J^T S - S J Y^T S - S Y J^T S < 0 \\ &S(\Delta_E - J\Lambda) + (\Delta_E - J\Lambda)^T S + \\ &+ S J_2 F_{1_{\max}} + F_{1_{\max}}^T J_2^T S + \varphi S S < 0 \end{aligned}$$

Por lo tanto,  $\dot{V}_\xi \leq 0$  y los puntos de equilibrio  $\tilde{\xi} = \mathbb{O}_{2n+1}$  y  $\tilde{\theta} = \mathbb{O}_n$  son estables. La convergencia asintótica de  $\tilde{\xi} \rightarrow \mathbb{O}_{2n+1}$  y  $\tilde{\theta} \rightarrow \mathbb{O}_n$  puede verificarse usando el Lema de Barbálat.  $\square$

## 5. RESULTADOS EXPERIMENTALES

Usando datos experimentales se realizaron pruebas para evaluar el comportamiento del observador. Estos datos corresponden a las mediciones de la respuesta de una estructura a escala 1 : 13,5 equipada con un AMR (Figura 2) y sujeta al sismo de la ciudad de México (1985) escalado en el tiempo (Jiménez, R., 2006). La estructura está instrumentada con acelerómetros en cada uno de los pisos y en la base y con transductores LVDT sujetos a un marco de rereferencia para medir desplazamientos relativos a la base de la estructura. Las velocidades fueron estimadas numéricamente a partir de dichas mediciones. Las mediciones de desplazamiento sólo fueron utilizadas para comparar con las señales generadas por el algoritmo propuesto. Para el AMR se usaron voltajes aleatorios con una distribución uniforme en su rango de entrada.

La matriz de ganancias del observador,  $J$ , se diseñó en dos etapas. La primera consistió en resolver un problema estándar de ubicación de polos para las matrices  $\Delta_0$  y  $\Lambda_0$  construidas con parámetros con errores numéricos de alrededor de 35,0% con respecto a los valores nominales de la estructura. Los parámetros iniciales para el modelo  $\Sigma_a$  tuvieron un error inicial cercano al 70,0% (Tabla 1).

Por simplicidad, y dado que la estimación de la fuerza del AMR no es uno de los objetivos de este esquema adaptable, el valor de  $\vartheta_2$  se supuso cero. Teóricamente, su contribución se incluye en el primer elemento de  $\hat{\theta}_c$  en (12).



Figura 2. Estructura a escala de cinco GdL.

Tabla 1. Valores iniciales de los parámetros del modelo  $\Sigma_a$ .

Parámetro	Valor	Unidades
$\left. \frac{\widehat{\vartheta}_0}{m_1} \right _{t=0}$	$6,82 \times 10^4$	N/(m·kg)
$\left. \frac{\widehat{\varrho}_0}{m_1} \right _{t=0}$	$5,82 \times 10^3$	m <sup>-1</sup>
$\left. \frac{\widehat{\varrho}_1}{m_1} \right _{t=0}$	$1,10 \times 10^3$	(m·V) <sup>-1</sup>

En la siguiente etapa se ajustaron los valores de la versión preliminar de  $J$  para satisfacer las condiciones  $J_{11,\{\cdot\}} = \mathbb{O}_{1 \times 5}$ ,  $J_{\{\cdot\},1} = [\mathbb{O}_{1 \times 5} \ell \mathbb{O}_{1 \times 4} 0]^T$ ,  $\ell = 0,998$  con  $\|\mathbb{O}_{1 \times (\cdot)}\| < 0,006$  y la desigualdad matricial (18). El resultado de este proceso para el caso presentado es

$$J = \begin{bmatrix} -0,001 & -0,001 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \\ -0,001 & -0,002 & -0,001 & -0,001 & -0,001 \\ -0,001 & -0,002 & -0,002 & -0,002 & -0,001 \\ -0,001 & -0,002 & -0,002 & -0,002 & -0,002 \\ -0,001 & -0,002 & -0,002 & -0,002 & -0,002 \\ 0,998 & -0,002 & -0,001 & 0,000 & 0,001 \\ -0,003 & 0,995 & -0,004 & -0,003 & -0,001 \\ -0,003 & -0,005 & 0,993 & -0,006 & -0,004 \\ -0,003 & -0,005 & -0,007 & 0,992 & -0,006 \\ -0,003 & -0,005 & -0,007 & -0,008 & 0,992 \\ 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 & 0,000 \end{bmatrix}$$

usando polos sobre el eje real alrededor de 12,0 como referencia para este cálculo. Esta matriz satisface (18) con  $\varrho_{min} \geq 0,05$ .

La matriz  $\Upsilon_0$  se tomó como una matriz diagonal con elementos un orden de magnitud mayores que los parámetros asociados a cada bloque. La señal de normalización se construyó con la norma

matricial de Frobenius (Horn, R.A. and Johnson, C.R., 1993).

En las Figuras 3 y 4 se muestran las normas euclidianas ( $l_2$ ) de los errores de estimación de las salidas y de los estados. En estas figuras se aprecia que en menos de un segundo ambos errores se aproximan a cero, permaneciendo en un nivel aceptable para el resto del experimento (alrededor del 10,0% del error inicial).

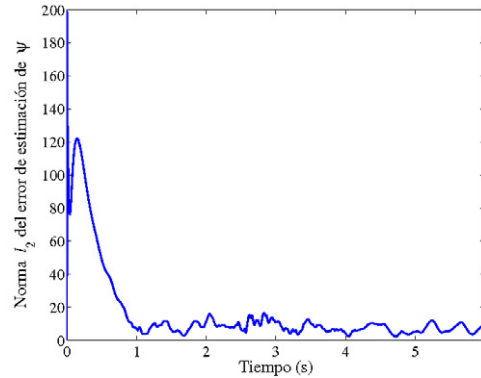


Figura 3. Norma del error de estimación de salidas.

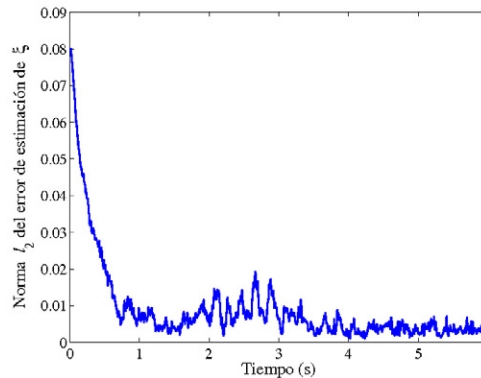


Figura 4. Norma del error de estimación de estados.

En la Figura 5 se compara el estado medido con su respectiva estimación, obtenida a través de  $\Omega_\xi$ . Las condiciones iniciales de los estados estimados difieren en un 20,0% con respecto a las condiciones iniciales del experimento. No obstante, la reconstrucción de los desplazamientos de los pisos es aceptable a partir de 1,0 s, cuando la excitación incrementa su intensidad. El seguimiento de las velocidades es bueno incluso antes de 0,5 s (c.f. Figura 6). En las Figuras 7-10 se muestran otras componentes del vector de estados.

El ajuste en tiempo real de los parámetros estimados  $\hat{\theta}_k$  y  $\hat{\theta}_c$  (Figuras 11 y 12) muestra que las estimaciones alcanzan valores prácticamente constantes en aproximadamente 0,5 s, como ocurre también con los parámetros del AMR (Figuras 13-15). Calculando las frecuencias naturales de la estructura con los valores finales de dichas estimaciones se puede concluir que hay una mejoría con

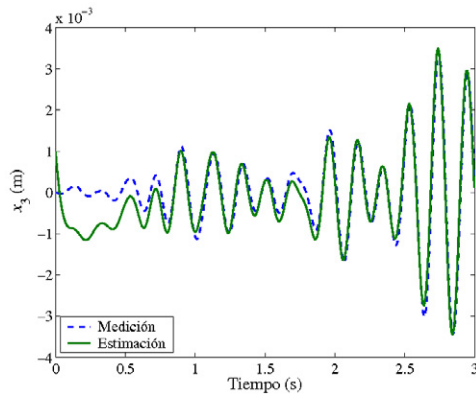


Figura 5. Desplazamiento del tercer piso.

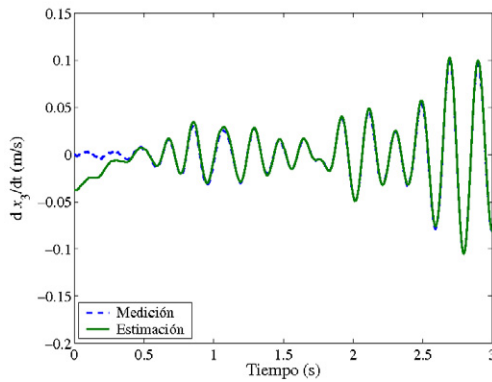


Figura 6. Velocidad del tercer piso.

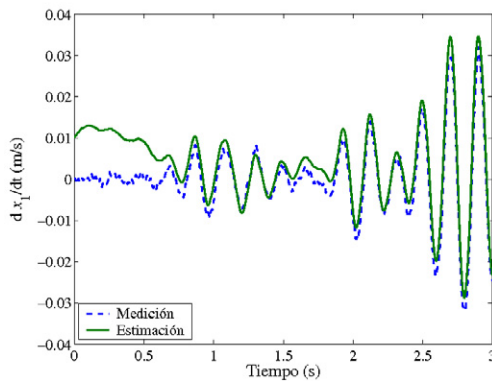


Figura 7. Velocidad del primer piso.

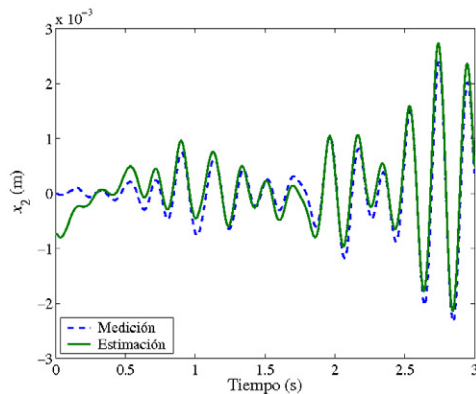


Figura 8. Desplazamiento del segundo piso.

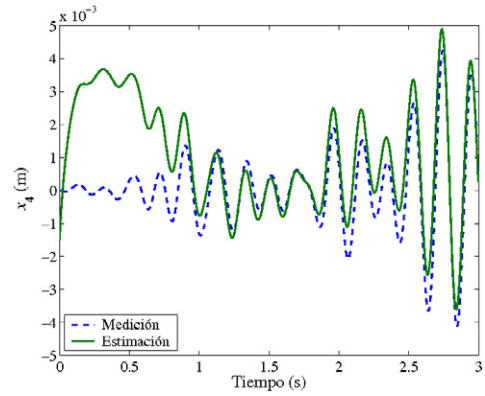


Figura 9. Desplazamiento del cuarto piso.

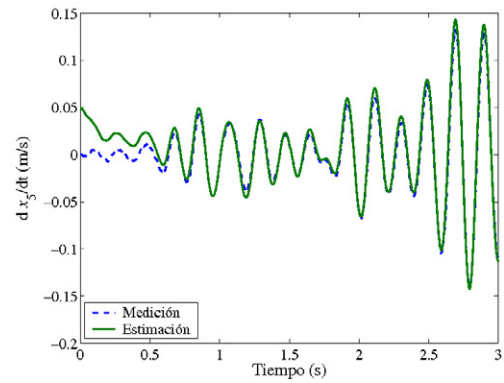


Figura 10. Velocidad del quinto piso.

respecto a los valores iniciales, como se muestra en la Tabla 2 donde se comparan los resultados de este ensayo con los valores nominales de la estructura, determinados experimentalmente bajo las mismas condiciones de excitación.

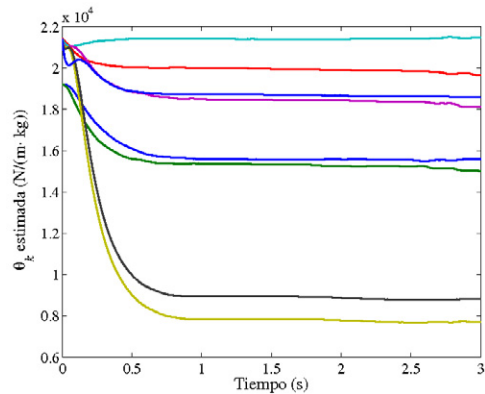
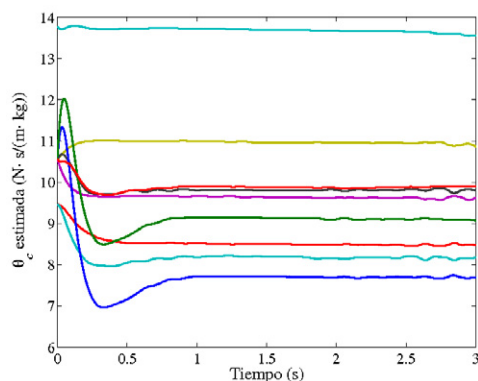
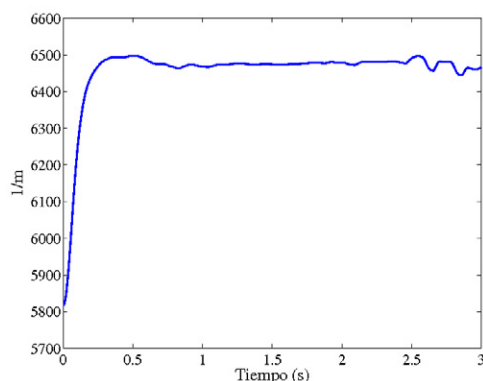
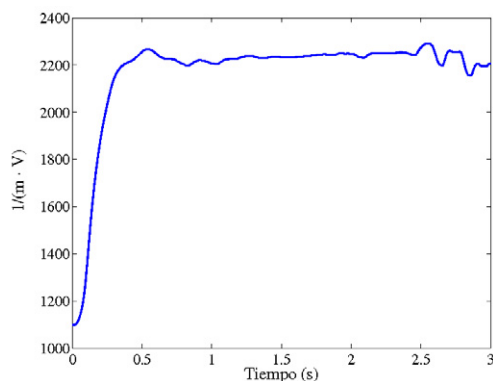


Figura 11. Ajuste en tiempo real de  $\hat{\theta}_k$ .

La comparación entre los estados estimados y sus respectivas mediciones muestra algunas diferencias debidas al comportamiento del algoritmo de identificación de parámetros. En el ajuste en tiempo real de los parámetros estimados,  $\hat{\theta}_k$  y  $\hat{\theta}_c$ , se aprecia que las estimaciones alcanzan valores prácticamente constantes durante los primeros 0,5 s, tiempo en el que el error de salida reduce su valor a menos del 10,0% de su valor inicial. Los parámetros estructurales no sufren ningún ajuste

Figura 12. Ajuste en tiempo real de  $\hat{\theta}_c$ .Figura 13. Ajuste en tiempo real de  $\frac{\hat{\varrho}_0}{m_1}$ .Figura 14. Ajuste en tiempo real de  $\frac{\hat{\varrho}_1}{m_1}$ .

importante después de 1,0 s ya que el algoritmo de mínimos cuadrados deja de funcionar adecuadamente cuando el error de estimación de la salida disminuye (la norma de la matriz de covarianza se vuelve arbitrariamente pequeña, disminuyendo drásticamente la velocidad de convergencia de los parámetros estimados).

## 6. CONCLUSIONES

Se presentó un observador adaptable para estimar el vector de estados compuesto por los desplazamientos y velocidades de los pisos de una estructura de varios grados de libertad y del estado

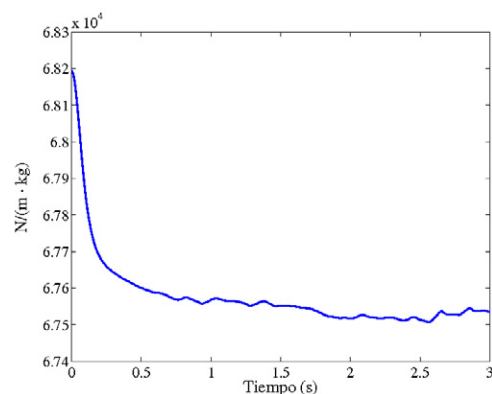
Figura 15. Ajuste en tiempo real de  $\frac{\hat{\vartheta}_0}{m_1}$ .

Tabla 2. Comparación de las frecuencias estimadas a través de  $\Omega_\xi$  y los valores nominales (Hz).

$\Omega_\xi$	$\Omega_\xi$	Valor	Error	Error
$t = 0$	$t = 3,0 \text{ s}$	nominal	inicial (%)	final (%)
6.90	6.17	6.09	13.3	1.3
19.83	15.51	17.46	13.6	11.2
30.76	26.76	26.05	18.1	2.7
39.31	35.07	33.32	18.0	5.25
44.75	39.49	37.98	17.8	3.98

del modelo de un amortiguador magneto-reológico. Además de la reconstrucción de estas señales, dicho observador permite el ajuste en tiempo real de los parámetros estructurales, mejorando la estimación de las frecuencias naturales de la estructura. Los resultados teóricos que aquí se presentan pueden ser fácilmente extendidos al caso de más amortiguadores actuando en los demás pisos de la estructura.

La principal contribución de este trabajo es que el diseño del observador adaptable no requiere que el modelo del sistema se ajuste a ninguna forma canónica ni se requiere tampoco de transformaciones estáticas o dinámicas de los estados, condiciones que son comunes en la mayoría de los diseños propuestos por otros autores.

Se ha mostrado que la selección de la matriz de ganancias del observador juega un papel importante en la estabilidad del esquema propuesto. Si bien las condiciones asociadas a esta matriz conducen a un buen desempeño del observador, las posibilidades para su elección son muchas y convendría estudiar el efecto de dicha elección en aspectos como la velocidad de convergencia de las señales estimadas. Lo mismo sucede para la matriz de covarianza de la ley de identificación de parámetros, cuya selección inicial influye también en la convergencia de los parámetros estimados.



Como trabajo a futuro se plantea el rediseño de este observador con una ley de identificación de parámetros más eficiente y la implantación de dicho algoritmo en un sistema de adquisición de datos de mayor capacidad.

## 7. AGRADECIMIENTOS

Los autores agradecen al Consejo Nacional de Ciencia y Tecnología por el apoyo económico otorgado. También se agradece a Rolando Carrera y Roberto Durán por su invaluable ayuda en la realización de los experimentos. El primer autor también agradece el apoyo de la Dirección General de Estudios de Posgrado de la Universidad Nacional Autónoma de México.

## REFERENCIAS

- Álvarez, L. and Jiménez, R. (2002). Real-time identification of magneto-rheological dampers. In: *Proceedings of the 15th Triennial IFAC World Congress, Barcelona España*. Vol. L.
- Butz, T. and von Stryk, O. (1999). Modelling and simulation of rheological fluid devices. Technical Report SFB-438-9911(99). Sonderforschungsbereich 438. Technische Universität München, D-80290 München, Germany.
- Dyke, S.J., Spencer, B.F., Sain, M.K. and Carlson, J.D. (1996). Modelling and control of magnetorheological dampers for seismic response reduction. *Smart Materials and Structures* **5**(5), pp. 565–575.
- Horn, R.A. and Johnson, C.R. (1993). *Matrix Analysis*. Cambridge University Press. USA.
- Ioannou, P.A. and Sun, J. (1996). *Robust Adaptive Control*. Prentice-Hall. Upper Saddle River, NJ, USA.
- Janocha, H. (2001). Application potential of magnetic field driven new actuators. *Journal of Sensors and Actuators A: Physical* **91**(1-2), 126–132.
- Jansen, L.M. and Dyke, S.J. (2000). Semi-active control strategies for MR dampers: A comparative study. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **126**(8), 795–803.
- Jiménez, R. (2006). Observadores adaptables para edificios con amortiguadores magneto-reológicos. PhD thesis. Programa de Maestría y Doctorado en Ingeniería, Universidad Nacional Autónoma de México.
- Jiménez, R. and Alvarez, L. (2004). Observador adaptable para edificios basado en mediciones de fuerza y aceleración. In: *Memorias del Congreso Anual de la Asociación de México de Control Automático, Ciudad de México*. pp. 318–323.
- Jiménez, R. and Álvarez, L. (2005). LuGre friction model for a magnetorheological damper. *Structural Control and Health Monitoring* **12**(1), 91–116.
- Lüders, G. and Narendra, K.S. (1974). Stable adaptive schemes for state estimation and identification of linear systems. *IEEE Transactions on Automatic Control* **19**(6), 841–847.
- Narendra, K.S. and Annaswamy, A.M. (1989). *Stable Adaptive Systems*. Prentice-Hall. Englewood Cliffs, NJ, USA.
- Spencer, B.F., Dyke, S.J., Sain, M.K. and Carlson, J.D. (1996). Phenomenological model of a magnetorheological damper. *ASCE Journal of Engineering Mechanics* **123**(3), pp. 230–238.
- Symans, M.D. and Constantinou, M.C. (1999). Semi-active control systems for seismic protection of structures: a state-of-the-art review. *Engineering Structures* **21**(6), 469–487.
- Zhang, Q. (2005). Revisiting different adaptive observers through a unified formulation. In: *44th IEEE Conference on Decision and Control, and the European Control Conference*. pp. 3067–3072.