JOURNAL OF MATHEMATICAL ANALYSIS AND APPLICATIONS **46**, 13–35 (1974)

Groupes a un Paramètre Opérant dans le Domaine Minimal d'un Opérateur Différentiel

MARC AUTHIER

Département de Mathématiques, Faculté des sciences de Reims, B.P. 347, 51062 Reims Cedex, France

Submitted by J. L. Lions

Dans ce travail on cherche à cerner les limites de la méthode des quotients différentiels, ou méthode de Nirenberg (cf. [6, 7]), dans l'étude de la régularité des solutions de problèmes de Dirichlet variationnels, non nécessairement elliptiques. Pour celà on remplace le groupe des translations par un groupe de difféomorphismes à un paramètre, arbitraire, la dérivation par le champs de vecteurs associé, les opérateurs elliptiques par des itérés d'opérateurs de type principal. On obtient une condition nécessaire et suffisante, assez restrictive, sur les champs de vecteurs de laquelle on tire des résultats positifs et négatifs concernant la régularité des solutions des problèmes de Dirichlet associés.

1. INTRODUCTION ET PRÉLIMINAIRES

Nous allons, pour fixer les idées, faire des hypothèses assez restrictives sur les ouverts et les opérateurs différentiels (à la Section 6 on verra comment on peut les affaiblir). Soit Ω un ouvert de R^n borné très régulier ($\bar{\Omega}$ est donc une variété C^∞ compacte à bord), et soit $B(D)$, $D = -i(\partial/\partial x)$, un opérateur différentiel linéaire d'ordre m, à coefficients constants. On désigne par $H_0^k(B, \Omega)$ le domaine minimal de $B(D)$ dans l'espace de Sobolev $H^k(\Omega)$, k entier positif où nul, c'est-à-dire le complété de $\mathscr{D}(\Omega)$ pour la norme

$$\| u \|_{B,k}^2 = \| u \|_k^2 + \| Bu \|_k^2 ,$$

c'est un sous-espace hilbertien normal de $\mathscr{D}'(\Omega)$.

Soit g un difféomorphisme de $\bar{\Omega}$, l'application de $\mathscr{D}'(\Omega)$ dans lui-même qui à toute distribution fait correspondre son image par g est un opérateur G linéaire continu dans $\mathscr{D}'(\Omega)$. On dira que g opère dans $H_0^k(B, \Omega)$ si la restriction de G à $H_0^k(B, \Omega)$ est un opérateur borné.

Soit maintenant $(g_t)_{t\in U}$, U voisinage de 0 dans R, un groupe local à un paramètre de difféomorphismes de $\bar{\Omega}$. Ce groupe local définit un groupe local continu à un paramètre d'opèrateurs continus dans $\mathscr{D}'(\Omega)$: $(G_t)_{t\in U}$. On notera X le générateur infinitésimal du groupe local $(g_t)_{t\in U}$. C'est un champ de vecteurs sur $\bar{\Omega}$, qui s'identifie donc à un opérateur différentiel du premier ordre à coefficients réels et C^∞, tangent au bord de Ω. On notera encore X toutes les réalisations que nous rencontrerons de cet opérateur différentiel comme opérateur, borné ou non, dans divers espaces de distributions.

On dira que le groupe local $(g_t)_{t\in U}$ opère dans $H_0^k(B, \Omega)$ si, pour tout $t \in U$, g_t opère dans $H_0^k(B, \Omega)$. Il suffit évidemment pour cela, par application du théorème du graphe fermé, que $G_t u \in H_0^k(B, \Omega)$ pour tout $t \in U$ et tout $u \in H_0^k(B, \Omega)$.

Le problème étudié est le suivant: soient k un entier positif ou nul, Ω un ouvert borné très régulier (pour fixer les idées, en fait on peut prendre pour un B donné certains ouverts non bornés, cf. Section 6), $B(D)$ un opérateur de type principal à partie principale réelle, caractériser les générateurs infinitésimaux X des groupes locaux $(g_t)_{t\in U}$ opérant dans $H_0^k(B, \Omega)$[1]. On dira qu'un champs de vecteurs sur $\bar{\Omega}$ a la propriété de Nirenberg s'il est générateur infinitésimal d'un tel groupe local.

L'intérêt d'un tel problème réside principalement en ses liens avec la méthode des quotients différentiels, liens que nous expliciterons au paragraphe 5. Pour l'instant donnons quelques indications sur le problème aux limites auquel nous nous intéresserons.

Soit $A(D)$ un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, positif dans Ω, i.e., vérifiant

$$\langle A(D)\, u, \bar{u}\rangle \geqslant 0, \qquad \text{pour tout } u \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Soit V' le sous-espace hilbertien de noyau A (cf. [10]); si V' est normal (par exemple si Ω est borné) son dual V est un sous-espace hilbertien normal de $\mathscr{D}'(\Omega)$ et A est un isomorphisme de V sur V'. Nous appellerons problème de Dirichlet associé à A le problème aux limites ainsi posé. On notera A^{-1} l'isomorphisme réciproque de A.

Plus particulièrement on s'intéressera ici, le cas elliptique étant bien connu, au cas où A a des caractéristiques réelles, et, plus précisément encore, au cas où la partie principale A_{2m} de A est de la forme $A_{2m}(D) = B^*(D)\, B(D)$, avec B réel et de type principal. On peut motiver ce choix par le fait que, dans le cas où A est hyperbolique, sa positivité implique une telle factorisation de sa partie principale (cf. [1]). D'autre part, un opérateur de type principal étant de même force que sa partie principale, on voit que, si Ω est borné,

$$V = H_0(B, \Omega).^2$$

[1] Le cas le plus intéressant est a priori $k = 0$ (cf. Section 6, Remarque 9). De toute façon on verra que la propriété est indépendante de k.

[2] $H_0(B, \Omega) = H_0^0(B, \Omega)$, d'une façon générale on supprimera k dans le cas particulier de $k = 0$.

On va maintenant rassembler les notations employées dans la suite, puis donner un plan détaillé avec indications sur les résultats.

Notations

Ω: ouvert de R^n borné très régulier, $\mathrm{Diff}(\bar{\Omega})$: ensemble des difféomorphismes de $\bar{\Omega}$.

pour $g \in \mathrm{Diff}(\bar{\Omega})$, on note $G \in \mathscr{L}(\mathscr{D}'(\Omega))$ l'opérateur: image par g.

$(g_t)_{t \in U}$: groupe local à un paramètre de difféomorphismes de $\bar{\Omega}$.

X: générateur infinitésimal de $(g_t)_{t \in U}$.

$B(D)$: opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, à partie principale réelle, et de type principal.

$V_x(P)$: soit $P(x, D)$ un opérateur différentiel linéaire d'ordre m

$$V_x(P) = \{\xi \in R^n; P_m(x, \xi) = 0\}$$

dans le cas particulier où P est à coefficients constants on note $V(P)$ l'ensemble des zéros réels de P_m.

Si H est un espace de distributions et P un opérateur différentiel on note

$$D(P, H) = \{T \in H; PT \in H\}.$$

$\| \cdot \|_k$ et $\| \cdot \|_{B,k}$ désignent respectivement les normes dans $H^k(\Omega)$ et dans $H_0^k(B, \Omega)$.

Enfin, soit Ω une variété différentiable de dimension n, X un champ de vecteurs sur Ω, α une forme différentielle de degré 1, on notera $\langle X, \alpha \rangle$ le produit intérieur $i_X\alpha$. Son expression en coordonnées locales est, pour

$$X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x) \frac{\partial}{\partial x_i} \qquad \text{et} \qquad \alpha = \sum_{i=1}^{n} \alpha^i(x)\, dx_i ,$$

$$\langle X, \alpha \rangle (x) = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\, \alpha^i(x);$$

c'est une fonction différentiable sur Ω. Dans le cas où Ω est un ouvert de R^n, on identifie le vecteur $\xi \in R^n$ avec la section $\xi: x \mapsto (x, \xi)$ du fibré (trivial) $T^*(\Omega)$, d'où la notation $\langle X, \xi \rangle$.

Plan de l'étude

2. On montre qu'une condition nécessaire pour que X ait la propriété de Nirenberg est:

$$\text{pour tout } x \in \bar{\Omega} \qquad V_x(BX - XB) \supset V(B). \tag{C}$$

Et on donne une interprétation géométrique de cette propriété: $\langle X, \xi \rangle$, pour tout vecteur caractéristique $\xi \in R^n$ de B, reste constant le long des bicaractéristiques de B associées à ξ. On donne aussi une autre condition nécessaire, et un exemple d'utilisation de l'interprétation géométrique précédente et de la géométrie de l'ouvert Ω, pour avoir des renseignements sur les points critiques, les sous ensembles invariants, et l'existence de champs de vecteurs ayant la propriété de Nirenberg.

3. On montre que la condition (C) est suffisante pour que X ait la propriété de Nirenberg.

4. On montre qu'en général ($n \geqslant 3$ et $d^0B \geqslant 2$) seuls des champ de vecteurs à coefficients polynômes peuvent avoir la propriété (C), et par suite la propriété de Nirenberg. On donne également quelques propriétés des champs de vecteurs ayant la propriété (C) et une méthode pratique pour les obtenir.

5. On fait le lien de ce qui précède avec la partie de la méthode des quotients différentiels concernant la régularité à l'intérieur et la régularité tangentielle au bord. On démontre: si X a la propriété de Nirenberg pour B, alors $A(D) = B^*(D)\, B(D)$ est un isomorphisme de $D(X, V)$ sur $D(X, V')$. On applique ce résultat à l'étude de la régularité du problème de Dirichlet pour l'itéré de l'opérateur des cordes vibrantes.

6. Dans cette section on fait quelques remarques concernant la possibilité de lever certaines des hypotèses faites dans les sections précédentes et concernant: la différentiabilité de X et $\bar{\Omega}$, la compacité de $\bar{\Omega}$. etc. On s'intéresse aussi aux propriétés algébriques des champs de vecteurs ayant la propriété de Nirenberg.

Je tiens à remercier C. Goulaouic pour de nombreuses et fructueuses conversations. Par ailleurs certains des résultats présentés ici (Sections 2 et 5) ont étés annoncés dans [2], sous une forme d'ailleurs en partie inexacte (voir Remarque 12).

2. Nécessité de la condition (C)

Ce qu'on va faire dans la suite repose pour une bonne part sur le résultat suivant, qui n'a aucune prétention à l'originalité; et dont nous donnons une démonstration n'ayant pu trouver dans la littérature ni énoncé, ni démonstration, de la propriété sous la forme sous laquelle elle nous est utile.

PROPOSITION 1. *Soient* $g \in \mathrm{diff}(\bar{\Omega})$ *et* $B(D)$ *un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants, d'ordre* m, *de type principal,* g *opère dans* $H_0^k(B, \Omega)$ *si et seulement si* $V(B) \subset V_x(G^{-1}BG)$ *pour tout* $x \subset \bar{\Omega}$.

Démonstration. $\bar{\Omega}$ étant compact et $B(D)$ à caractéristiques réelles simples on a une inégalité à priori du type

$$\| u \|_{m+k-1} \leqslant C_k \| Bu \|_k , \qquad \text{pour tout } u \in \mathscr{D}(\Omega).$$

Pour que g opère dans $H_0^k(B, \Omega)$ il est donc nécessaire et suffisant que

$$\| G^{-1}BGu \|_k \leqslant C \| Bu \|_k , \tag{1}$$

pour tout $u \in \mathscr{D}(\Omega)$ et tout $k \in N$. Posons

$$P(x, D) = G^{-1}BG.$$

$P(x, D)$ est un opérateur d'ordre m, et on va montrer que (1) équivaut à

$$V(B) \subset V_x(P), \qquad \text{pour tout } x \in \bar{\Omega}. \tag{2}$$

Supposons que (2) n'est pas vérifié, autrement dit il existe $x_0 \in \bar{\Omega}$ et $\xi_0 \in R^n$ tels que $B_m(\xi_0) = 0$ et $P_m(x_0 , \xi_0) \neq 0$. Par un changement de coordonnées on se ramène au cas où $\xi_0 = (1, 0,..., 0)$, et, en posant $D' = (D_2 ,..., D_n)$, on peut écrire:

$$B_m(D) = D_1^{m-1} b_1(D') + D_1^{m-2} b_2(D') + \cdots + b_m(D'),$$

$$P_m(x, D) = \alpha_0(x)\, D_1^m + D_1^{m-1} \beta_1(x, D') + \cdots + q_m(x, D').$$

On a donc $\alpha(x_0) \neq 0$; on peut donc trouver un voisinage V de x_0 dans $\bar{\Omega}$ dans lequel $| \alpha(x)|$ est minoré par un nombre strictement positif. Il est alors facile de construire une suite (u_p) de fonctions de $\mathscr{D}(V)$ de la forme

$$u_p(x) = V_p(x_1)\, W(x_2 ,..., x_n)$$

telle que $\| P_m(x, D)\, u_p \|_k$ tendent vers l'infini avec p alors que $\| Bu_p \|_k$ reste borné. (1) ne peut donc être valable.

Réciproquement, supposons (2) vérifiée. Soit $Q_1 ,..., Q_r$ une base de l'espace vectoriel des polynômes Q de degré inférieur ou égal à m vérifiant

$$V(B) \subset V(Q) \tag{3}$$

(où l'on identifie un polynôme Q de degré inférieur ou égal à $m - 1$ avec un polynôme de degré m de partie principale nulle, donc vérifiant (3)). On voit immédiatement qu'il existe des $\lambda_i \in \mathscr{E}(\bar{\Omega})$ tel que

$$P(x, D) = \sum_{i=1}^{r} \lambda_i(x)\, Q_i(D)$$

ce qui ramène la vérification de (1) au cas des coefficients constants. Soit donc Q vérifiant (3), pour montrer une inégalité du type

$$\| Q(D)\, u \|_k < C \| B(D)\, u \|_k\,, \qquad \text{pour tout } u \in \mathscr{D}(\Omega),$$

il suffit, Ω étant borné, de montrer que Q est moins fort que B; et pour cela étudier le rapport

$$| Q_m(\xi) | / \tilde{B}(\xi) \tag{4}$$

sur R^n. Un argument standard d'homogénéité et de compacité ramène cette étude à une étude locale sur la sphère unité de R^n.

Or les caractéristiques réelles de B étant simples, le théorème des fonctions implicites permet d'écrire au voisinage d'un zéro réel ξ_0 de B_n ($| \xi_0 | = 1$), après un changement éventuel de coordonnées:

$$B_m(\xi) = (\xi_1 - \lambda(\xi'))\, B_1(\xi_1\,, \xi')$$

où $B(\xi_1\,, \xi')$ est homogène de degré $m - 1$ et non nul au voisinage de ξ_0. En posant $\xi_1 - \lambda(\xi') = \epsilon$, on peut développer Q par rapport à ϵ, et la propriété (3) montre alors que le rapport (4) est borné au voisinage de ξ_0.

COROLLAIRE. *Les hypothèses étant celles de la Proposition* 1, *si de plus*

$$B(D) = \prod_i B_i(D),$$

une condition nécessaire et suffisante pour que $g \in \mathrm{Diff}(\bar{\Omega})$ *opère dans* $H_0{}^k(B, \Omega)$ *est que* g *opère dans* $H_0{}^k(B_i\,, \Omega)$ *pour tout* i.

Démonstration. La propriété résulte immédiatement de la Proposition 1 et du fait que

$$G^{-1}BG = \prod_i G^{-1}B_iG.$$

Remarque 1. Dans le cas où B est elliptique on retrouve le fait, bien connu, que tous les difféomorphismes opèrent dans $H_0{}^k(B, \Omega)$.

D'autre part la Proposition 1 nous montre également que g opère dans $H_0{}^k(B, \Omega)$ si et seulement si g opère dans $H_0{}^k(B_m\,, \Omega)$, B_m partie principale de B.

Enfin cette même proposition montre que g opère simultanément dans tous les $H_0{}^k(B, \Omega)$, k parcourant l'ensemble des entiers positifs ou nuls.

Venons en maintenant aux groupes locaux $(g_t)_{t \in u}$ et à leurs générateurs infinitésimaux X.

PROPOSITION 2. *Si* X *a la propriété de Nirenberg, alors* $V_x([B, X]) \supset V(B)$, *pour tout* $x \in \bar{\Omega}$ (condition (C)).

On a noté $[B, X]$ le commutateur $BX - XB$, c'est un opérateur d'ordre m.

Démonstration. Supposons que X ait la propriété de Nirenberg, il s'intègre donc en un groupe local $(g_t)_{t \in U}$ opérant dans $H_0{}^k(B, \Omega)$, donc pour tout $t \in U$ et tout $x \in \bar{\Omega}$

$$V_x(G_{-t}BG_t) \supset V(B). \tag{5}$$

D'autre part un calcul direct montre que

$$\frac{d}{dt}(G_{-t}BG_t)\Big|_{t=t_0} = G_{-t_0}[B, X]\, G_{t_0} \tag{6}$$

d'où, en particulier:

$$[B, X] = \frac{d}{dt}(G_{-t}BG_t)\Big|_{t=0}. \tag{7}$$

Il est alors facile de voir, en utilisant le fait que, si l'on pose

$$P(t, x, D) = G_{-t}BG_t\,,$$

la dérivée que l'on a calculée n'est autre que $(\partial P/\partial t)\,(t, x, D)$, que la propriété (5) implique que, pour tout $t \in U$ et tout $x \in \bar{\Omega}$:

$$V_x(G_{-t}[B, X]\, G_t) \supset V(B) \tag{8}$$

d'où la propriété cherchée pour $t = 0$.

Remarque 2. On peut montrer une autre condition nécessaire, a priori plus forte que celle de la Proposition 2, pour que X ait la propriété de Nirenberg.

En effet considérons la suite d'opérateurs différentiels définie par récurrence par

$$B_0 = B, \qquad B_k = [B_{k-1}\,, X].$$

Le raisonnement fait pour passer de (5) à (8) montre que, si pour tout $t \in U$ et tout $x \in \bar{\Omega}$ on a

$$V_x(G_{-t}B_kG_t) \supset V(B),$$

alors on a aussi

$$V_x(G_{-t}B_{k+1}G_t) \supset V(B).$$

D'où la condition nécessaire pour que X ait la propriété de Nirenberg: pour tout $x \in \bar{\Omega}$ et tout $k \in N$

$$V_x(B_k) \supset V(B). \tag{9}$$

En fait, on verra que la condition de la Proposition 2 est aussi suffisante, et donc que (9) n'est plus forte que (C) qu'en apparence, (voir cependant la section 6 pour des cas où ces deux conditions ne seraient pas équivalentes, et à la section 3 (remarque 3) une démonstration, dans le cas traité ici, de leur équivalence n'utilisant pas la suffisance de (C)).

On peut interpréter géométriquement la condition (C).

PROPOSITION 3. (C) *est équivalente à la propriété suivante: pour tout vecteur* $\xi \in R^n$ *non nul tel que* $B(\xi) = 0$, $\langle X, \xi \rangle$ *est constant sur toutes les bicaractéristiques de B associées à* ξ.

Démonstration. Soit $L_m(x, \xi)$ la partie principale de $[B, X]$, un calcul direct montre que:

$$L_m(x, \xi) = \operatorname{grad}_\xi B(\xi) \cdot \operatorname{grad}_x \langle X, \xi \rangle. \tag{10}$$

Soit alors ξ_0 un vecteur caractéristique réel de B, $\operatorname{grad}_\xi B(\xi)$ est précisément la direction des bicaractéristiques associées à ξ_0, et on a, d'après (C),

$$0 = \operatorname{grad}_\xi B(\xi_0) \cdot \operatorname{grad}_x \langle X, \xi \rangle \tag{11}$$

c'est-à-dire la propriété cherchée. Le réciproque est évidente puisque (11) traduit simultanément (C) et la propriété de la Proposition 3.

Cette interprétation géométrique est utile pour voir rapidement, en fonction de la géométrie de Ω, la structure des champs de vecteurs ayant la propriété de Nirenberg.

EXEMPLE. Ω est un ouvert du plan R^2, $B(D) = D_1 D_2$, opérateur des cordes vibrantes. Soit X un champ de vecteurs de $\bar{\Omega}$ ayant la propriété de Nirenberg, on a:

(a) si une trajectoire de X est tangente à une bicaractéristique, elle est contenue dans cette bicaractéristique: c'est le cas particulier $\langle X, \xi \rangle = 0$ dans la Proposition 3.

(b) soit $a \in \partial\Omega$ un point caractéristique de $\partial\Omega$ tel que Ω soit convexe au voisinage de a. On voit alors que a est nécessairement point critique de X, donc qu'en tout point de la bicaractéristique δ passant par a et rencontrant Ω, X est dirigé suivant δ (Fig. 1).

(c) soit $a \in \partial\Omega$ un point caractéristique de $\partial\Omega$ tel que Ω ne soit pas convexe au voisinage de a, soit δ la bicaractéristique tangente en a à $\partial\Omega$, δ' l'autre bicaractéristique passant par a, δ et δ' rencontrent Ω. D'après la Proposition 3 en tout point de δ, X est dirigé suivant δ. Le bord $\partial\Omega$, étant aussi invariant par X on voit que a est nécessairement point critique pour X. On en déduit qu'en tout point de δ', X est dirigé suivant δ' (Fig. 2).

(d) par tout point caractéristique de $\partial\Omega$ il passe donc au moins une bicaractéristique δ, telle qu'en tout point de δ, X soit dirigé suivant, δ. δ recoupe $\partial\Omega$ en un point b qui est donc point critique de X.

Si b n'est pas caractéristique, il passe une deuxième bicaractéristique δ' par b qui rencontre Ω, et, en tout point de δ', X est dirigé suivant δ': il y a eu réflexion en b de la condition sur X (Fig. 3).

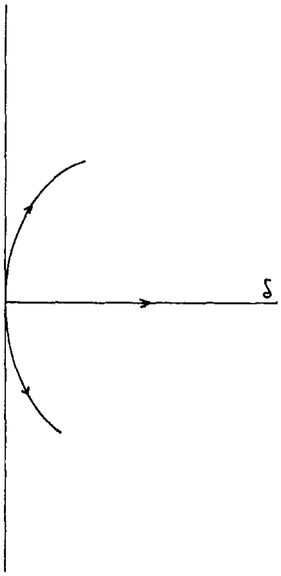

FIGURE 1

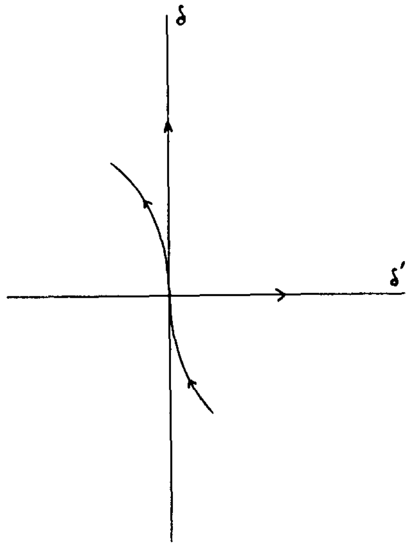

FIGURE 2

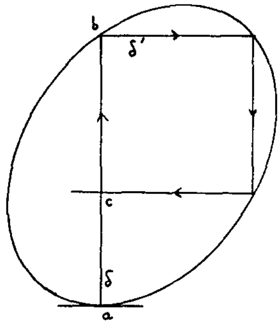

FIGURE 3

(e) On remarque alors qu'un point tel que c sur la Fig. 3 est nécessairement point critique de X. Or soit Ω l'intérieur de l'ellipse paramétrée en

$$x_1 = a \cos t,$$
$$x_2 = b \cos(t - h)$$

on peut montrer que, si $(h/2\pi)$ est transcendant, le réseau des points d'intersection des bicaractéristiques obtenues par le procédé précédent est dense dans Ω. Autrement dit, X est identiquement nul; aucun champ non trivial sur Ω n'a la propriété de Nirenberg.

(les propriétés arithmétiques de h et du réseau associé de bicaractéristiques ont déjà été utilisées par Hadamard [4] dans ses travaux sur le problème de Dirichlet pour l'équation des cordes vibrantes).

3. Suffisance de la condition (C)

On va d'abord donner un lemme de divisibilité sur les polynômes.

Lemme 1. *Soit $P \in R[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme homogène irréductible sur $\mathbb{R}$, de degré m, tel que $P(\xi)$ et grad $P(\xi)$ ne soient pas nuls simultanément pour $\xi \in R^n$ non nul; soit $Q \in R[X_1, \ldots, X_n]$ un polynôme homogène de degré k, s'annulant sur les zéros réels de P, alors:*

ou P est elliptique,

ou $k \geqslant m$ et P divise Q.

Démonstration. Supposons P non elliptique, et soit $\xi_0 \in R^n$ non nul tel que $P(\xi_0) = 0$. On sait que grad $P(\xi_0) \neq 0$, supposons par exemple $(\partial P/\partial \xi_n)(\xi_0) \neq 0$. On peut alors trouver, d'après le théorème des fonctions implicites, un voisinage V de ξ_0 (que l'on peut supposer être un pavé $\prod_{i \leqslant n} V_i$) et deux fonctions analytiques réelles $a(\xi')$, $\xi' = (\xi_1, \ldots, \xi_{n-1}) \in R^{n-1}$, et $D(\xi)$ définies respectivement dans $\prod_{i \leqslant n-1} V_i$ et dans V, tels que, pour tout $\xi \in V$:

$$\begin{gathered} P(\xi) = (\xi_n - a(\xi'))\, D(\xi), \\ D(\xi) \neq 0, \qquad Q(\xi', a(\xi')) = 0. \end{gathered} \tag{12}$$

Pour démontrer que P divise Q, il suffit, compte tenu de l'irréductibilité de P, de montrer l'existence d'un facteur commun.

Supposons P et Q sans facteur commun, alors ils sont sans facteur commun dans $R[X_1, \ldots, X_{n-1}]\,[X_n]$; il existe donc deux, polynômes R et S dans

$R[X_1, ..., X_{n-1}]\,[X_n]$, et un polynôme T non identiquement nul dans $R[X_1, ..., X_{n-1}]$ tels que

$$QR + PS = T \tag{13}$$

en remplaçant ξ_n par $a(\xi')$ dans (13) on trouve $T(\xi') = 0$ dans $\prod_{i \leqslant n-1} V_i$, donc $T = 0$, d'où le lemme.

D'après la remarque 1 et le corollaire de la Proposition 1 il nous suffira de démontrer la suffisance de (C) dans le cas particulier où B est homogène irréductible et non elliptique.

Proposition 4. *Soit B vérifiant les hypothèses de la Proposition* 1 *est supposé de plus homogène irréductible et non elliptique, soit X un champ de vecteurs sur $\bar{\Omega}$ vérifiant* (C), *alors X a la propriété de Nirenberg.*

Démonstration. On remarque d'abord que l'on peut prolonger X à R^n en un champ à support compact qui s'intègre donc en un groupe (global) de difféomorphismes de R^n, ces difféomorphismes laissent stable Ω et $\partial\Omega$, leurs restrictions à $\bar{\Omega}$ sont donc des difféomorphismes de $\bar{\Omega}$. Soit donc (g_t), $g_t \in \operatorname{Diff} \bar{\Omega}$, le groupe obtenu par restriction, il faut montrer que (g_t) opère dans $H_0{}^k(B, \Omega)$. Pour cela, en posant:

$$P(t, x, D) = G_{-t} B G_t,$$

il suffit de montrer que pour tout $t \in R$ et tout $x \in \bar{\Omega}$

$$V_x(P) \supset V(B)$$

d'après la Proposition 1. On sait d'autre part, d'après le Lemme 1, que la condition (C) va se traduire par l'existence de $\lambda \in \mathscr{E}(\bar{\Omega})$ telle que

$$[B, X]_m = \lambda B. \tag{14}$$

L'égalité (6) s'écrira alors:

$$\frac{\partial P_m}{\partial t}(t_0, x, \xi) = (G_{-t_0}\lambda)(x)\, P_m(t_0, x, \xi), \tag{15}$$

on posera $k(t, x) = G_{-t}\lambda(x)$. Soit alors $x_0 \in \bar{\Omega}$ et $\xi_0 \in R^n$ non nul tel que $B(\xi_0) = 0$; la fonction de t:

$$y\colon t \mapsto P_m(t, x_0, \xi_0)$$

est déterminée par l'équation différentielle:

$$y' = k(t, x_0)\, y \tag{16}$$

avec la condition initiale:

$$y(0) = 0. \tag{17}$$

On voit immédiatement que (16) et (17) n'admettent que la solution nulle, ce qui termine la démonstration

Remarque 3. Reprenons les notations de la Remarque 2 pour les crochets successifs de B et de X, et supposons B irréductible non elliptique. Il est alors facile de voir que si:

$$(B_k)_m = \lambda_k(B_{k-1})_m$$

alors la même relation est valable entre les parties principales de B_{k+1} et B_k:

$$(B_{k+1})_m = \lambda_{k+1}(B_k)_m$$

donc que, si la condition (C) est vérifiée, ce qui s'écrit

$$(B_1)_m = \lambda B_m ,$$

la relation (9) de la Remarque 2 est aussi vérifiée; ce qui montre que cette condition nécessaire n'est qu'apparemment plus forte que (C).

Pour résumer cette section et la précédente, on a montré.

THÉORÈME 1. *Soit Ω un ouvert borné régulier de R^n, soit $B(D)$ un opérateur différentiel linéaire à coefficients constants de type principal et à partie principale réelle, soit enfin X un champ de vecteurs sur $\overline{\Omega}$. Une condition nécessaire et suffisante pour que X ait la propriété de Nirenberg est que, pour tout $x \in \overline{\Omega}$:*

$$V_x([B, X]) \supset V(B). \tag{C}$$

4. PROPRIÉTÉS DES CHAMPS DE VECTEURS AYANT LA PROPRIÉTÉ DE NIRENBERG

On va d'abord montrer qu'en général (par exemple pour $n \geqslant 3$, $m \geqslant 2$ et B non elliptique) seul des champs très particuliers peuvent avoir la propriété de Nirenberg. On va se placer dans l'hypothèse où B est homogène, irréductible sur R, non elliptique, ce qui n'élimine de fait que les opérateurs elliptiques.

PROPOSITION 5. *Sous les hypothèses du Théorème* 1, *si, de plus,* $B(D)$ *est homogène et vérifie: il existe un système de $2n - 1$ vecteurs caractéristiques réels ξ_k tels que tous les sous-systèmes de n vecteurs soient de rang n de même que les systèmes* grad $B(\xi_k)$ *correspondants, alors les champs de vecteurs X ayant la propriété de Nirenberg sont à coefficients polynomiaux.*

Démonstration. Soit $X = \sum_{j=1}^{n} a_j(x)\,(\partial/\partial x_j)$, et soit $\xi \in R^n$ un vecteur caractéristique réel quelconque de B. La condition (C) s'écrit alors, en utilisant l'égalité (10):

$$\sum_{i,j} \frac{\partial B}{\partial \xi_i}(\xi)\,\xi_j\,\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = 0. \tag{18}$$

En tenant compte de l'hypothèse supplémentaire faite sur $B(D)$, les a_j sont donc solutions du système homogène de $2n - 1$ équations linéaires à coefficients constants:

$$\sum_j \xi_{k,j} \sum_i \frac{\partial B}{\partial \xi_i}(\xi_k)\,\frac{\partial a_j}{\partial x_i} = 0. \tag{19}$$

Soit $p(\eta)(\eta = -i(\partial/\partial x))$ la matrice à coefficients polynomiaux représentant le système (19) par transformation de Fourier. Un déterminant d'ordre n de cette matrice correspond à un choix d'un sous-système $(\xi_{k_1},\ldots,\xi_{k_n})$ du système (ξ_k), et s'écrit alors

$$\prod_{s=1}^{n} \Big(\sum_i \frac{\partial B}{\partial \xi_i}(\xi_{k_s})\,\eta_i\Big) \cdot \det(\xi_{k_s})$$

où $\det(\xi_{k_s})$ est le déterminant de la matrice ayant les (ξ_{k_s}) comme colonnes. D'après l'hypothèse faite, quelque soit le choix du sous-système

$$\det(\xi_{k_s}) \neq 0.$$

D'autre part, cette même hypothèse nous montre que pour tout vecteur $\eta \in \mathbb{C}^n$ non nul il existe un sous-système $(\xi_{k_1},\ldots,\xi_{k_n})$ tel que, pour tout $s \in \{1,\ldots,n\}$, on ait:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial B}{\partial \xi_i}(\xi_{k_s})\,\eta_i \neq 0.$$

Autrement dit, si N est l'ensemble des $\eta \in \mathbb{C}^n$ tels que la matrice $p(\eta)$ soit de rang strictement inférieur à n, on voit que:

$$N = \{0\}.$$

Or on sait (cf. [8], Chapitre VI, Section 4, Théorème 1 et Remarque, par exemple) que lorsque N est fini, toute solution $A = (a_1,\ldots,a_n) \in \mathscr{E}(R^n)$ est combinaison linéaire finie d'exponentielles-polynômes solutions. Ici, les a_i sont donc des polynômes.

Il reste, pour appliquer la proposition précédente, à avoir des critères pratiques de validité des hypothèses de cette proposition.

PROPOSITION 6. *Soit $B(D)$ un opérateur homogène d'ordre m supérieur ou égal à 2, dans R^n, $n \geqslant 3$, réel, de type principal et non elliptique, alors il existe $2n - 1$ vecteurs caractéristiques réels ξ_k tels que tous les sous-systèmes de n vecteurs extraits de ce système, soient de rang n, de même que les systèmes grad $B(\xi_k)$ correspondants à ces sous-systèmes.*

Démonstration. Compte tenu des hypothèses faites, il ne peut y avoir de facteur du premier degré dans une décomposition de B en polynômes irréductibles, le résultat devient alors évident.

Remarque 4. Dans le cas $n = 2$, il suffit d'avoir trois facteurs (du premier degré) réels (ils sont nécessairement distincts, donc linéairement indépendants deux à deux, ainsi que leurs orthogonaux) pour que les hypothèses de la Proposition 5 soient vérifiées.

Pour $n \geqslant 3$, les opérateurs strictement hyperboliques et les opérateurs ultra-hyperboliques par exemple vérifient ces hypothèses.

Remarque 5. Si les hypothèses de la Proposition 5 ne sont pas vérifiées, la conclusion ne l'est en général pas non plus.

Par exemple, pour $n = 2$ et $B(D) = D_1 D_2$, les champs de vecteurs vérifiant la propriété (C) sont donnés par:

$$X = a(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + b(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

où a et b sont des fonctions C^∞ arbitraires.

On va maintenant envisager quelques conséquences de la propriété (C) et voir comment déterminer pratiquement les champs de vecteurs ayant cette propriété. Introduisons une notation, on notera:

$$\Gamma^0(x_0, B) = \{y \in R^n; y - x = \lambda \operatorname{grad} B_m(\xi), \xi \in V(B)\}$$

le cône bicaractéristique réel de B de sommet x_0.

PROPOSITION 7. *Soit X un champ de vecteurs vérifiant la propriété* (C), *soit x_0 un point critique de X, $\Gamma^0(x_0, B)$ est un invariant* (*du système-dynamique défini par X*).

Démonstration. Il suffit de vérifier qu'en tout point $y \in \Gamma^0(x_0, B)$, X est tangent à $\Gamma^0(x_0, B)$, donc normal un vecteur caractéristique $\xi_0 \in V(B)$ tel que $y - x_0 = \lambda$ grad $B(\xi_0)$.

Or $\langle X(y), \xi_0 \rangle$ est constant sur la bicaractéristique passant par x_0 et y (d'après la Proposition 3), en particulier:

$$\langle X(y), \xi_0 \rangle = \langle X(x_0), \xi_0 \rangle = 0;$$

d'où le résultat.

On peut démontrer d'autres résultats analogues. Concernant la détermination pratique de tous les champs de vecteurs ayant la propriété (C), on a ce qui suit.

Soit $X = \sum_{i=1}^{n} a_i(x)\,(\partial/\partial x_i)$ un champ de vecteurs vérifiant la propriété (C), l'opérateur $B(D)$ étant supposé homogène irréductible non elliptique. Pour $x \in \bar{\Omega}$ on pose

$$Q(x, \xi) = \sum_{i,j} \frac{\partial B}{\partial \xi_i}(\xi)\, \xi_j \frac{\partial a_j}{\partial x_i};$$

pour chaque $x \in \bar{\Omega}$ le polynôme $Q(x, \xi)$ est nul pour tous les $\xi \in R^n$ tels que $B(\xi) = 0$. D'après le Lemme 1 et les hypothèses faites sur B, $Q(x, \xi)$ est divisible par $B(\xi)$

$$Q(x, \xi) = \lambda(x)\, B(\xi). \tag{20}$$

Cette relation est nécessaire et suffisante pour que X ait la propriété (C). D'autre part pour écrire que le polynôme $Q(x, \xi) - \lambda(x)\, B(\xi)$ est le polynôme nul on écrit la nullité de tous ses coefficients. Ce qui donne un système de $(n + r - 1)!/(r!(n - 1)!)$ équations du premier ordre homogènes, indépendantes de ξ; dont les solutions, après élimination de λ, donneront tous les champs de vecteurs cherchés.

Exemple. Prenons pour $n = 3$, l'équation des ondes

$$B(D) = D_1^2 - D_2^2 - D_3^2.$$

On obtient le système de 6 équations

$$\begin{gathered} \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + \lambda = \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + \lambda = \frac{\partial a_3}{\partial x_3} + \lambda = 0, \\ \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + \frac{\partial a_2}{\partial x_1} = -\frac{\partial a_2}{\partial x_3} + \frac{\partial a_3}{\partial x_2} = -\frac{\partial a_1}{\partial x_3} + \frac{\partial a_3}{\partial x_1} = 0, \end{gathered} \tag{21}$$

qui s'intègre facilement en

$$\begin{aligned} a_1(x_1, x_2, x_3) &= A(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2) + 2x_1(Bx_2 + Cx_3) \\ &\quad + Dx_1 + Ex_2 + Fx_3 + K, \\ a_2(x_1, x_2, x_3) &= B(x_1^2 + x_2^2 - x_3^2) + 2x_2(Ax_1 + Cx_3) \\ &\quad + Ex_1 + Dx_2 + Gx_3 + L, \\ a_3(x_1, x_2, x_3) &= C(x_1^2 - x_2^2 + x_3^2) + 2x_3(Ax_1 + Bx_2) \\ &\quad + Fx_1 - Gx_2 + Dx_3 + M, \end{aligned} \tag{22}$$

où $A, B, C, D, E, F, G, K, L, M$ sont 10 constantes arbitraires.

5. La Méthode des Quotients Différentiels

Dans cette section on va faire le lien entre ce qui précède et une méthode, classique dans le cas elliptique, de recherche des propriétés de régularité des solutions de problèmes de Dirichlet. Pour cela on va d'abord énoncer quelques lemmes, dont on ne détaillera d'ailleurs pas les démonstrations car ils ne sont que des adaptations à notre situation de résultats standards.

Auparavant rappelons en quelques mots le problème aux limites étudié. Soit $B(D)$ un opérateur de type principal homogène, posons:

$$A(D) = B^*(D)\, B(D).$$

Si Ω est un ouvert borné, le sous espace hilbertien V' de $\mathscr{D}'(\Omega)$ de noyau A est normal, ainsi que son dual V. $A(D)$ est un isomorphisme entre V et V'. On supposera Ω très régulier.

On remarque immédiatement que, si $B(D)$ n'est pas elliptique, les méthodes classiques pour étudier la régularité des solutions de ce problème faisant intervenir l'invariance de l'espace des solutions par difféomorphismes puis une localisation, ne conviennent pas ici. C'est pourquoi on est amené à développer la méthode qui suit.

Lemme 2. *$\mathscr{D}(\Omega)$ est dense dans $D(X, V) = \{u \in V; Xu \in V\}$ (X est un champ de vecteurs sur $\bar{\Omega}$).*

Démonstration. X étant tangent au bord, il est facile de mettre en oeuvre la méthode habituelle de vérification d'une densité de $\mathscr{D}(\Omega)$ par troncature et régularisation. D'où le résultat.

Lemme 3. *Soit X un champ de vecteurs ayant la propriété de Nirenberg relativement à $B(D)$, (G_t) est un groupe fortement continu d'opérateurs bornés dans V et dans V'.*

Démonstration. (a) Pour montrer que (G_t) est fortement continu dans V il suffit de montrer que $\| G_t u - u \|$ tend vers 0 quand t tend vers 0 (on sait déjà que $G_t \in \mathscr{L}(V, V)$, puisque $V = H_0(B, \Omega)$). Or

$$\| G_t u - u \|_V = \|(BG_t - B)\, u\|_{L^2}$$

et, X ayant la propriété de Nirenberg:

$$BG_t u = G_t[\lambda(t, x)\, Bu];$$

et il est évident que $G_t \cdot \lambda(t, u) - I$ tend vers 0 dans $\mathscr{L}(L^2, L^2)$ fort, d'où le résultat cherché.

(b) Il est évident que G_t opère continuement dans V', et, évaluant $G_t{}^*$ en fonction de G_{-t}, que (G_t) est également un groupe fortement continu dans V'.

On peut considérer alors X comme générateur infinitésimal des ces groupes, avec les domaines usuels, notés provisoirement $D_1(X, V)$ et $D_1(X, V')$. Ces domaines sont a priori des sous espaces fermés de $D(X, V)$ et $D(X, V')$ munis de la norme du graphe; comme d'autre part $\mathscr{D}(\Omega)$ est contenu dans $D_1(X, V)$, le Lemme 2 permet d'affirmer qu'en fait $D_1(X, V) = D(X, V)$.

LEMME 4. *Soient $B(D)$ réel, homogène, de type principal, non elliptique, $A(D) = B(D)\, B(D)$, et X un champ de vecteurs sur $\bar{\Omega}$ ayant la propriété de Nirenberg relativement à $B(D)$, il existe $M > 0$ et U voisinage de 0 dans R tels que:*

$$\sup_{t\in U} \left\| \frac{AG_t - G_tA}{t} \right\|_{\mathscr{L}(V, V')} \leqslant M. \tag{23}$$

Démonstration. On utilise le fait que, X ayant la propriété de Nirenberg, les hypothèses sur $B(D)$ entraînent:

$$BG_t = G_t(\lambda(t, x)\, B).$$

D'où:

$$\begin{aligned} AG_t - G_tA &= (-1)^m\, [B(BG_t - G_tB) + (BG_t - G_tB)\, B] \\ &= (-1)^m\, [BG_t(\lambda(t, x) - 1)\, B + G_t(\lambda(x, t) - 1)\, BB]. \end{aligned}$$

Or la fonction $[\lambda(x, t) - 1]/t$ est bornée au voisinage de l'origine (en t), uniformément par rapport à $x \in \bar{\Omega}$, et G_t borné dans $\mathscr{L}(L^2, L^2)$ au voisinage de l'origine. D'où le résultat cherché en utilisant le fait que $B(D)$ opère continuement de V dans $L^2(\Omega)$ et de $L^2(\Omega)$ dans V'.

LEMME 5. *On a:*

$$D(X, V) = \left\{ u \in V; \left\| \frac{G_tu - u}{t} \right\|_V \text{ borné pour } t \text{ voisin de } 0 \right\},$$

$$D(X, V') = \left\{ T \in V'; \left\| \frac{G_tT - T}{t} \right\|_{V'} \text{ borné pour } t \text{ voisin de } 0 \right\}.$$

Démonstration. Le première égalité est conséquence immédiate de $D(X, V) = D_1(X, V)$. D'autre part, si l'on considère le groupe $(G_t{}^*)$ dual de (G_t), on sait caractériser son générateur infinitésimal faible: en tant qu'opérateur différentiel c'est l'adjoint (formel) X^* de X, son domaine étant

$$D_*(X^*, V') = \{T \in V'; \exists S \in V', \langle S, \bar{u}\rangle = \langle T, X\bar{u}\rangle, \forall u \in D_1(X, V)\}$$

dont il est immédiat de remarquer, compte tenu de $D(X, V) = D_1(X, V)$, qu'il coïncide avec $D(X, V')$. Or on avait a priori:

$$D_*(X^*, V') \subset \left\{ T \in V'; \left\| \frac{G_t T - T}{t} \right\|_{V'} \text{ borné pour } t \text{ voisin de } 0 \right\} \subset D(X, V')$$

ce qui prouve la deuxième égalité.

On peut maintenant énoncer le résultat auquel nous voulions arriver dans ce paragraphe.

PROPOSITION 8. *Si X a la propriété de Nirenberg, alors $A(D)$ est un isomorphisme de $D(X, V)$ sur $D(X, V')$.*

Démonstration. Soit $u \in V$ tel que $A(D)\, u \in D(X, V')$, on a d'après le Lemme 5 un voisinage U_1 de 0 dans R tel que

$$\sup_{t \in U_1} \left\| \frac{G_t Au - Au}{t} \right\| < M_1 . \tag{24}$$

Posons

$$\frac{G_t u - u}{t} = v_t \in V,$$

on a:

$$\begin{aligned} \| v_t \|_V^2 &= \left\langle \frac{G_t Au - u}{t}, v_t \right\rangle + \left\langle \frac{AG_t - G_t A}{t} u, \bar{v}_t \right\rangle \\ &= a_1(u, v_t) + a_2(u, v_t). \end{aligned}$$

De (24) on peut tirer:

$$\sup_{t \in U_1} | a_1(u, v_t) | < M_1 \| v_t \|_V . \tag{25}$$

D'autre part le Lemme 4 nous donne une constante M_2 et un voisinage U_2 de 0 tel que

$$\sup_{t \in U_2} | a_2(u, v_t) | < M_2 \| u \|_V \| v_t \|_V . \tag{26}$$

En juxtaposant (25) et (26) on voit que $\| v_t \|_V$ est borné quand $t \in U_1 \cap U_2$, donc, d'après le Lemme 5, que $u \in D(X, V)$.

Réciproquement, soit $u \in D(X, V)$. On a:

$$\begin{aligned} \left\| \frac{G_t Au - Au}{t} \right\|_{V'} &\leqslant \left\| \frac{AG_t u - Au}{t} \right\|_{V'} + \left\| \frac{G_t A - AG_t}{t} u \right\|_{V'} \\ &\leqslant \left\| \frac{G_t u - u}{t} \right\|_V + M_2 \| u \|_V , \qquad \text{pour } t \in U_2 \\ &\leqslant C(\| Xu \|_V + \| u \|)_V , \qquad \text{pour } t \in U_2 . \end{aligned}$$

Donc $A(D)$ opère continuement de $D(X, V)$ dans $D(X, V')$ d'après le Lemme 5; $A(D)$ étant de plus bijectif, c'est un isomorphisme d'après le théorème de Banach.

C'est cette proposition qui est à la base de la méthode des quotients différentiels. Dans le cas elliptique habituel ce type de résultat est appliqué pour obtenir un gain de régularité à l'intérieur, et de régularité tangentielle au bord (après avoir ramené le problème à un demi-espace et en utilisant comme groupes de difféomorphismes les groupes de translations parallèles au bord).

Cette méthode a été employée dans d'autres situations, pour un opérateur hyperbolique par exemple, mais toujours avec des groupes de translations, pour étudier la régularité dans une bande spatiale (cf. [1]). D'ailleurs, on peut remarquer que les champs constants vérifient toujours la condition (C), et que, par suite, dès qu'un ouvert est invariant par les translations parallèles à une direction (donc non borné, voir section suivante), on peut appliquer la proposition 8 avec la dérivation dans cette direction.

Cette méthode a également été employée dans [2] pour un opérateur elliptique dans un ouvert "à coins", avec comme groupe des groupes d'homothéties (donc des champs de vecteurs non constants), les champs de vecteurs obtenus admettent aux points anguleux de la frontière des points critiques.

On va maintenant à titre d'exemple, donner des résultats de régularité concernant l'opérateur $A(D) = D_1{}^2 D_2{}^2$, iteré de l'opérateur des cordes vibrantes. Rappelons (cf. [5, Section 4, Remarque 5]) que l'on a la proposition.

PROPOSITION 9. *Un champ de vecteurs X vérifie la condition* (C) *si et seulement si il s'écrit*

$$X = a(x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} + b(x_2)\frac{\partial}{\partial x_2}$$

où a et b sont des fonctions C^∞.

On admettra la validité de cette proposition dans certains ouverts non bornés, et en particulier dans ceux qui suivent (cf. Section 6). On va d'autre part utiliser les résultats de la discussion géométrique de la Section 2.

Les champs de vecteurs sur $\bar{\Omega}$ ayant la propriété de Nirenberg forment un espace vectoriel (puisque la condition (C) est linéaire). Soit alors $x \in \bar{\Omega}$, on notera $\mathscr{R}_x$ le sous-espace vectoriel de $T_x(\bar{\Omega})$ engendré par les champs de vecteurs ayant la propriété de Nirenberg (relativement à $B(D) = D_1 D_2$). La dimension de $\mathscr{R}_x$ caractérise dans une certaine mesure la régularité du problème de Dirichlet. En particulier si U est un ouvert de $\bar{\Omega}$ dans lequel

$$\mathscr{R}_x = T_x(\bar{\Omega}), \qquad \text{pour tout } x \in U$$

(c'est-à-dire $\dim \mathscr{R}_x = 2$ si $x \in \Omega \cap U$, $\dim \mathscr{R}_x = 1$ si $x \in \partial\Omega \cap U$). On a dans U le meilleur résultat possible de régularité à l'intérieur et de régularité tangentielle au bord (tout ceci peut évidemment se faire pour d'autres opérateurs que celui des cordes vibrantes!). On va donner quelques exemples d'ouverts.

(a) *$\partial\Omega$ n'est jamais caractéristique.* Ω ne peut évidemment être borné, l'exemple-type est celui de la bande spatiale B: $t_0 < x_1 + x_2 < t_1$. Les champs de vecteurs sur $\bar{\Omega}$ ayant la propriété de Nirenberg sont donnés par

$$X = b(t_0 - x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + b(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

où b est une fonction C^∞ quelconque, périodique de période $t_1 - t_0$. On a évidemment $\mathscr{R}_x = T_x(\bar{\Omega})$ quel que soit $x \in \bar{\Omega}$.

(b) *$\partial\Omega$ n'a qu'un seul point caractéristique.* Ici encore Ω ne peut-être borné. D'autre part il ne peut y avoir de réflexions des bicaractéristiques comme à la Section 2b. Deux types d'exemple: d'abord

$$\Omega = \{(x_1, x_2); x_2 - x_1^2 > 0\}:$$

soit a une fonction impaire définie sur R et b définie pour $t \geqslant 0$ par $b(t^2) = 2t\, a(t)$, le champ de vecteurs

$$X = a(x_1) \frac{\partial}{\partial x_1} + b(x_2) \frac{\partial}{\partial x_2}$$

répond à la question. D'où $\mathscr{R}_x = T_x(\bar{\Omega})$ sauf pour $x_1 = 0$ où $\dim \mathscr{R}_x = 1$ si $x_2 \neq 0$, $\dim \mathscr{R}_{(0,0)} = 0$. L'autre exemple est celui donné dans [1, Section III, 3.2] d'un ouvert non convexe au point caractéristique, pour lequel on construit une solution singulière montrant qu'effectivement on ne peut améliorer la régularité transversalement à la bicaractéristique.

(c) *Ω est borné, mais il n'y a pas de réflexions.* On prendra comme exemple le disque $\Omega = \{(x_1, x_2); x_1^2 + x_2^2 < 1\}$. Il est facile de voir que l'on peut disposer arbitrairement d'une composante de X sur l'un des quatre arcs connexes non caractéristiques de $\partial\Omega$ (sous réserve qu'elle s'annule aux extrêmités de l'arc). D'où $\mathscr{R}_x = T_x(\bar{\Omega})$ pour $x_1 \cdot x_2 \neq 0$. Pour $x_1 = 0$, $x_2 \neq \pm 1, 0$, (ou $x_2 = 0$, $x_1 \neq \pm 1, 0$) $\dim \mathscr{R}_x = 1$; aux cinq points restants $\mathscr{R}_x = \{0\}$.

(d) On renvoie à la Section 2e, pour le cas d'un ouvert borné ou il y a des réflexions. Et on voit donc que, même dans le cas de l'opérateur des cordes vibrantes, où, à priori, il y avait plus de champ de vecteurs ayant la propriété de Nirenberg que dans le cas de l'opérateur des ondes de dimension supérieure ou égale à 3, la propriété de Nirenberg est extrêmement restrictive dès qu'il y a des caractéristiques réelles.

6. Remarques et Compléments

Remarque 6. On ne s'est pas intéressé dans les paragraphes précédents aux propriétés algébriques des champs de vecteurs ayant la propriété de Nirenberg.

Proposition 10. *Les champs de vecteurs sur $\bar{\Omega}$ ayant la propriété de Nirenberg (relativement à $B(D)$) forment une algèbre de Lie.*

Démonstration. Il est évident qu'ils constituent un espace vectoriel, il suffit donc de vérifier que la propriété (C) est stable par crochet. Et il suffit de vérifier cela lorsque B est irréductible homogène non elliptique. Soit donc X_1 et X_2 tels que

$$[B, X_1]_m = \lambda_1 B, \qquad [B, X_2]_m = \lambda_2 B,$$

alors

$$\begin{aligned}[B, [X_1, X_2]]_m &= -[X_1[X_2, B]]_m - [X_2, [B, X_1]]_m \\ &= -[X_1, \lambda_2 B]_m - [X_2, \lambda_1 B]_m \\ &= \mu B.\end{aligned}$$

Remarque 7. On peut diminuer notablement les conditions de différentiabilité sur X et Ω: on n'a jamais utilisé plus de m dérivées dans les calculs. On peut même facilement obtenir des résultats analogues à ceux de la fin du paragraphe précédent dans des ouverts "à coins". Il suffit de considérer des champs de vecteurs sur Ω, à coefficients C^∞ sur $\bar{\Omega}$, tangents au bord de Ω partout où il existe une tangente (ces champs admettent obligatoirement les points anguleux du bord comme points critiques), toute la méthode développée ici peut s'adapter à ce cas.

Remarque 8. A plusieurs reprises au cours des sections précédentes on a signalé que l'hypothèse: Ω borné, était susceptible d'être affaiblie. Soit par exemple $B(D)$ strictement hyperbolique par rapport au vecteur N de R^n et homogène, on a vu dans [1, Section 1.3] qu'une condition suffisante pour que V' soit normal (donc pour que l'on puisse poser le problème aux limites) est que Ω soit contenu dans un demi-espace de la forme $\langle x, N\rangle > a$, $a \in R$. Pour un ouvert très régulier vérifiant cette condition on peut modifier la démonstration de la Proposition 1 (en prenant des estimations avec poids au lieu d'estimations dans les espaces de Sobolev usuels, et en utilisant l'homogénéité de $B(D)$) (cf. [1, Section I.3 et II.1]); les Propositions 2 et 3 sont donc vérifiées. La Proposition 4 suppose que l'on impose à X de s'intégrer en un groupe local de difféomorphismes (X ne se prolonge plus nécessairement en un champ à support compact!), avec cette hypothèse supplémentaire la démonstration est inchangée; le Théorème 1 est alors valable. La Section 4 et la Section 5 ne s'appuient sur la compacité de $\bar{\Omega}$ que par l'intermédiaire du Théorème 1.

Remarque 9. Au paragraphe 5 nous n'avons mis en évidence que la première étape de la méthode classique des quotients différentiels. Cette méthode comporte en effet en plus une démonstration de régularité transversale au bord et une récurrence. Il est évident que cette récurrence n'a aucune raison de se faire dans les espaces $H_0^k(B, \Omega)$ introduits au début de ce travail; les espaces de Sobolev usuels, trop liés aux problèmes elliptiques, n'ont, a priori, pas un rôle privilégié ici. Par contre, d'une part les considérations qui précèdent ne s'appliquent pas pour $k = 0$; cas qui a son intérêt propre; d'autre part, si en tout point $x \in \bar{\Omega}$ on a $\mathscr{R}_x = T_x(\bar{\Omega})$ (notations de la Section 5), et si le bord de Ω n'est jamais caractéristique, on vérifie facilement la régularité transversale au bord et on peut faire effectivement une récurrence dans les espaces $H_0^k(B, \Omega)$, et avoir donc des résultats optimaux de régularité (c'est ce qui est fait dans [1, Section III.2], pour un opérateur $B(D)$ strictement hyperbolique et une bande spatiale).

Remarque 10. On pouvait a priori se poser deux problèmes analogues liés à la régularité des solutions des problèmes de Dirichlet étudiés ici:

Caractériser les X tels que A soit un isomorphisme de $D(X, V)$ sur $D(X, V')$.

Caractériser les X tels que A^{-1} applique

$$V_1' = \left\{ f \in V'; \frac{\partial f}{\partial x_i} \in V', i \in \{1,\ldots, n\} \right\}$$

dans $D(X, V)$.

Nous avons trouvé ici une condition suffisante pour le premier de ces deux problèmes. On peut trouver une condition nécessaire du même type que la condition (C) (mais plus faible), sur laquelle nous reviendrons dans un autre travail. Dans [2] nous nous sommes intéressés au second problème; mais, en fait, la démonstration proposée est incomplète et le résultat énoncé incorrect sous la forme où il est présenté. La condition donnée dans [2] est équivalente à la propriété de Nirenberg comme nous le voyons ici; et il est facile de voir que, pour B strictement hyperbolique et Ω (suivant les notations de [1]) de type futur, tous les champs à support compact dans Ω conviennent pour ce second problème si le bord de Ω est non caractéristique (cf. la forme des solutions, [1, p. 712]).

BIBLIOGRAPHIE

1. M. AUTHIER, Problème de Dirichlet pour des opérateurs hyperboliques de type positif, *Ann. Sc. Norm. Sup. Pisa* **25** (1971), 691–765.
2. M. AUTHIER, Champs de vecteurs et régularité des solutions de certains problèmes de Dirichlet variationnels, Lecture Notes in Mathematics," Springer, Vol. 280, pp. 207–211, Conference on the theory of Ordinary and Partial Differential Equation, Dundee, 1972.
3. P. BOLLEY AND J. CAMUS, Certains résultats de régularité des problèmes élliptiques variationnels par la méthode des quotients différentiels, *Sem. Math. Univ. Rennes* (1969).
4. J. HADAMARD, Le problème de Dirichlet pour les équations hyperboliques, *J. Chinese Math. Soc.* **2** (1937), 6–20.
5. L. HÖRMANDER, On the existence and the regularity of solutions of linear partial differential equations, *Enseight. Math.* **17** (1971), 99–163.
6. J. L. LIONS AND E. MAGENES, "Problèmes aux Limites non Homogènes," Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
7. L. NIRENBERG, Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Comm. Pure Appl. Math.* **8** (1955), 649.
8. V. P. PALAMODOV, "Linear Differential Operators with Constant Coefficients," Springer, New York, 1970.
9. L. SCHWARTZ, Sous-espaces hilbertiens d'espaces vectoriels topologiques et noyaux associés, *J. An. Math. Jerusalem* **13** (1964), 115–256.