JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS **158**, 289–324 (1998)
ARTICLE NO. FU983281

Coefficients binomiaux généralisés et polynômes de Macdonald

Michel Lassalle

École Polytechnique, 91128 Palaiseau Cedex, France
E-mail: lassalle@labri.u-bordeaux.fr

Received February 1, 1998; accepted March 22, 1998

1. INTRODUCTION

On connait deux généralisations de la formule classique du binôme dans

$$\prod_{i=0}^{k-1} (1+xq^i) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l}_q q^{l(l-1)/2} x^l.$$

D'autre part A. Lascoux [4] a introduit la notion de "déterminant binomial" $d_{\lambda\mu}$ associé à deux partitions, et explicité une formule du binôme pour les fonctions de Schur

$$s_\lambda(1+x_1, ..., 1+x_n) = \sum_{\mu \subseteq \lambda} d_{\lambda\mu} s_\mu(x_1, ..., x_n).$$

La théorie des polynômes de Macdonald [6] unifie dans un nouveau formalisme l'étude combinatoire des fonctions de Schur et l'analyse en base q. Il est donc naturel de rechercher dans ce cadre une généralisation de la formule du binôme. C'est le sujet de cet article.

Soient q et t deux indéterminées, et considérons l'algèbre des polynômes symétriques de n variables à coefficients rationnels en q et t. Les polynômes de Macdonald $P_\lambda(x; q, t)$ forment une base de cette algèbre, indexée par les partitions λ de longueur inférieure ou égale à n. A deux telles partitions κ et λ nous associons un coefficient du binôme généralisé $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}$. Nous étudions les propriétés générales de ces coefficients, et donnons une expression analytique explicite des plus élémentaires d'entre eux.

Cet article était en rédaction quand nous avons reçu le travail de Okounkov [8] qui aborde le même problème sous un angle complémentaire. Okounkov écrit une formule du binôme généralisée à l'aide des polynômes de Macdonald "décalés" qu'il a étudiés ailleurs [7]. Nous montrons

0022-1236/98 $25.00

que les coefficients qui interviennent dans sa formule sont précisément *les mêmes* que ceux introduits ici.

Les polynômes de Jack $J_\lambda(x; \alpha)$ peuvent être obtenus comme la limite lorsque t tend vers 1 des polynômes de Macdonald $P_\lambda(x; t^\alpha, t)$. Dans cette limite $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}$ définit un coefficient du binôme généralisé $\binom{\kappa}{\lambda}_\alpha$ associé aux polynômes de Jack. Nous étudions brièvement ces coefficients et la formule du binôme associée, démontrant ainsi les résultats annoncés dans [5] (voir également [1] et [9]).

Donnons pour conclure le plan de cet article. Les Sections 2 et 3 établissent nos notations. Les coefficients du binôme généralisés sont définis à la Section 4. La Section 5 est consacrée à quelques résultats combinatoires auxiliaires. Les Sections 6 à 8 étudient les coefficients binomiaux $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}$ dans le cas élémentaire $|\kappa| = |\lambda| + 1$. Nous obtenons une formule analytique explicite, et associons ces coefficients à une équation aux différences finies ainsi qu'à une formule de Pieri. Le coefficient binomial $\binom{\kappa}{1}_{q,t}$ est explicité à la Section 9. La Section 10 établit une formule de récurrence, ce qui permet de traiter aux Sections 11 et 12 le cas particulier des équerres et des rectangles. La Section 13 démontre la formule du binôme généralisée et compare nos résultats à ceux de [8]. La Section 14 est consacrée au cas limite des polynômes de Jack, et la Section 15 à une remarque de Macdonald.

2. GÉNÉRALITÉS ET NOTATIONS

Pour tout cet article la référence est le chapitre 6 du livre de Macdonald [6]. Dans cette section nous établissons nos notations et rappelons les résultats de [6] dont nous aurons besoin.

2.1. *Fonctions symétriques*

Une partition λ est une suite décroissante finie d'entiers positifs. On dit que le nombre n d'entiers non nuls est la longueur de λ. On note $\lambda = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$ et $n = l(\lambda)$. On dit que $|\lambda| = \sum_i \lambda_i$ est le poids de λ, et pour tout entier i que $m_i(\lambda) = \mathrm{card}(j : \lambda_j = i)$ est la multiplicité de i dans λ. On pose

$$z_\lambda = \prod_{i \geqslant 1} i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!.$$

On note λ' la partition conjuguée de λ définie par $\lambda'_i = \mathit{card}(j : \lambda_j \geqslant i)$. On identifie λ avec son diagramme $\{(i, j) : 1 \leqslant i \leqslant l(\lambda),\ 1 \leqslant j \leqslant \lambda_i\}$ et λ' avec le diagramme $\{(i, j) : (j, i) \in \lambda\}$.

On écrit $\lambda \geqslant \mu$ si $|\lambda| = |\mu|$ et si on a $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_k \geqslant \mu_1 + \mu_2 + \cdots + \mu_k$ pour tout $k \geqslant 1$. On définit ainsi un ordre partiel sur les partitions de même poids. On note $\mu \subseteq \lambda$ lorsque $\mu_i \leqslant \lambda_i$ pour tout i, c'est-à-dire lorsque le diagramme de μ est contenu dans celui de λ. Pour toute partition λ on pose $n(\lambda) = \sum_i (i-1)\,\lambda_i$.

Soit $\mu \subseteq \lambda$ avec $|\mu| = |\lambda| - 1$. Il existe alors un entier i tel que $\mu_i = \lambda_i - 1$ et $\mu_j = \lambda_j (j \neq i)$. Dans cette situation on note indifféremment $\mu = \lambda_{(i)}$ et $\lambda = \mu^{(i)}$.

Considérons n indéterminées indépendantes $x_1, ..., x_n$. On note Λ_n l'anneau des polynômes symétriques en $x_1, ..., x_n$ à coefficients dans Z. Soit λ une partition de longueur $\leqslant n$. Le polynôme symétrique monomial m_λ est défini par

$$m_\lambda(x_1, ..., x_n) = \sum_\sigma x_1^{\sigma_1} \cdots x_n^{\sigma_n},$$

où la somme s'effectue sur toutes les permutations distinctes de $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Les polynômes $\{m_\lambda, l(\lambda) \leqslant n\}$ forment une base de Λ_n.

Pour tout entier r on note 1^r la partition $(1, ..., 1)$ de longueur r et (r) sa conjuguée de longueur un. On pose $e_r = m_{1^r}$ et $p_r = m_{(r)}$. A chaque partition λ on associe le polynôme symétrique

$$p_\lambda = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} p_{\lambda_i} = \prod_{i \geqslant 1} p_i^{m_i(\lambda)}.$$

Soit mainteriant $x = (x_1, x_2, ...)$ un ensemble infini d'indéterminées. On appelle fonction symétrique $f(x)$ la donnée pour tout entier n d'un polynôme symétrique $f_n(x_1, ..., x_n) \in \Lambda_n$, telle que

$$f_{n+1}(x_1, ..., x_n, 0) = f_n(x_1, ..., x_n).$$

On définit ainsi l'anneau Λ des fonctions symétriques.

2.2. *Polynômes de Macdonald*

Soient q, t deux indéterminées indépendantes et $F = Q(q, t)$ le corps des fonctions rationnelles de q et t. On note $\Lambda_F = \Lambda \otimes_Z Q(q, t)$ l'algèbre des fonctions symétriques à coefficients dans $Q(q, t)$. On munit Λ_F d'un produit scalaire $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q,t}$ défini par

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_i}}{1 - t^{\lambda_i}},$$

avec $\delta_{\lambda\mu} = 1$ si $\lambda = \mu$ et sinon $\delta_{\lambda\mu} = 0$.

Pour toute partition λ il existe une fonction symétrique unique $P_\lambda(x; q, t) \in \Lambda_F$ telle que

(i) $$P_\lambda(q, t) = \sum_{\mu \leqslant \lambda} u_{\lambda\mu} m_\mu$$

avec $u_{\lambda\mu} \in F$ et $u_{\lambda\lambda} = 1$,

(ii) $$\langle P_\lambda(q, t), P_\mu(q, t) \rangle_{q, t} = 0 \qquad \text{si} \qquad \lambda \neq \mu.$$

La famille $\{P_\lambda(q, t)\}$ forme une base de Λ_F. Soit λ une partition telle que $l(\lambda) \leqslant n$. La restriction $P_\lambda(x_1, ..., x_n; q, t)$ est un polynôme symétrique homogène de degré $|\lambda|$ qu'on appelle polynôme de Macdonald.

Pour toute partition λ on pose

$$c_\lambda(q, t) = \prod_{(i, j) \in \lambda} (1 - q^{\lambda_i - j} t^{\lambda'_j - i + 1})$$

$$c'_\lambda(q, t) = \prod_{(i, j) \in \lambda} (1 - q^{\lambda_i - j + 1} t^{\lambda'_j - i}).$$

On définit la "forme intégrale" de $P_\lambda(q, t)$ en posant

$$J_\lambda(x; q, t) = c_\lambda(q, t)\, P_\lambda(x; q, t).$$

Les quantités suivantes ont été évaluées par Macdonald:

$$j_\lambda(q, t) = \langle J_\lambda(q, t), J_\lambda(q, t) \rangle_{q, t} = c_\lambda(q, t)\, c'_\lambda(q, t) \tag{2.1}$$

$$J_\lambda(1, t, ..., t^{n-1}; q, t) = \prod_{(i, j) \in \lambda} (t^{i-1} - q^{j-1} t^n). \tag{2.2}$$

On note désormais

$$J^*_\lambda(x_1, ..., x_n; q, t) = \frac{J_\lambda(x_1, ..., x_n; q, t)}{J_\lambda(1, t, ..., t^{n-1}; q, t)}.$$

Cette définition est dépendante de n. En posant

$$J^\#_\lambda(x; q, t) = \frac{J_\lambda(x; q, t)}{j_\lambda(q, t)},$$

on obtient la base de Λ_F qui est duale de la base $\{J_\lambda(q, t)\}$ pour la forme $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q, t}$. La relation suivante sera utile. Cest une conséquence immédiate des relations (2.3) (page 309) et (8.5) (page 353) de [6].

$$J^\#_\lambda\, (x; 1/q, 1/t) = (-1)^{|\lambda|}\, q^{n(\lambda') + |\lambda|}\, t^{n(\lambda)} J^\#_\lambda(x; q, t). \tag{2.3}$$

2.3. *q-calcul*

Soit a une indéterminée. On note

$$(a; q)_\infty = \prod_{i \geqslant 0} (1 - aq^i)$$

$$(a, q)_p = \frac{(a; q)_\infty}{(aq^p; q)_\infty} = \prod_{i=1}^{p} (1 - aq^{i-1}).$$

Si r et s sont deux entiers, on note

$$\binom{r}{s}_q = \prod_{i=1}^{s} \frac{1 - q^{r-i+1}}{1 - q^i}$$

le coefficient q-binomial classique.

3. FONCTIONS HYPERGÉOMÉTRIQUES

Soit a une indéterminée. On introduit l'homomorphisme $\varepsilon_{a,t} : \Lambda_F \to F$ défini par

$$\varepsilon_{a,t}(p_r) = \frac{1 - a^r}{1 - t^r} \qquad (r \geqslant 1).$$

On a

$$\varepsilon_{a,t}(p_\lambda) = \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1 - a^{\lambda_i}}{1 - t^{\lambda_i}}$$

et ([6], (8.8), p. 354)

$$\varepsilon_{a,t}(J_\lambda(q, t)) = \prod_{(i,j) \in \lambda} (t^{i-1} - aq^{j-1}). \tag{3.1}$$

Soient x et y deux ensembles infinis d'indéterminées. Si on pose

$$\Pi(x, y; q, t) = \prod_{i,j} \frac{(tx_i y_j; q)_\infty}{(x_i y_j; q)_\infty}$$

on sait ([6], (2.6), p. 309, et (2.7), p. 310) qu'on a

$$\Pi(x, y; q, t) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1-t^{\lambda_i}}{1-q^{\lambda_i}} p_\lambda(x)\, p_\lambda(y) \tag{3.2}$$

$$= \sum_\lambda J_\lambda(y; q, t)\, J_\lambda^{\#}(x; q, t). \tag{3.3}$$

On introduit la "fonction hypergéométrique généralisée" suivante

$$_1\Phi_0(a; x; q, t) = \sum_\lambda \varepsilon_{a,t}(J_\lambda(q, t))\, J_\lambda^{\#}(x; q, t).$$

Le résultat suivant généralise le "théorème de Heine". Il a été établi par Macdonald dans un manuscrit non publié (*Hypergeometric series II: q-analogues*); voir aussi [2], Theorem 3.5.

PROPOSITION 1. *On a*

$$_1\Phi_0(a; x; q, t) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1-a^{\lambda_i}}{1-q^{\lambda_i}} p_\lambda(x).$$

Et si l'on spécifie n variables $x = (x_1, ..., x_n)$,

$$_1\Phi_0(a; x_1, ..., x_n; q, t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(ax_i; q)_\infty}{(x_i; q)_\infty}.$$

Preuve. En vertu des relations (3.2) et (3.3), on a

$$_1\Phi_0(a; x; q, t) = \varepsilon_{a,t}(\Pi(x, y; q, t))$$

$$= \sum_\lambda z_\lambda^{-1} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1-t^{\lambda_i}}{1-q^{\lambda_i}} (\varepsilon_{a,t} p_\lambda)\, p_\lambda(x).$$

D'où la première relation. Pour établir la seconde, on remarque que le membre de droite est $\Pi(x, (1, 0, ..., 0); q, a)$ et on applique (3.2). ∎

On note désormais

$$\phi(x; q, t) = {}_1\Phi_0(0; x; q, t) = \sum_\lambda t^{n(\lambda)} J_\lambda^{\#}(x; q, t)$$

$$\psi(x; q, t) = \lim_{a \to \infty} {}_1\Phi_0(a; x/a; q, t) = \sum_\lambda (-1)^{|\lambda|} q^{n(\lambda')} J_\lambda^{\#}(x; q, t).$$

La Proposition 1 implique immédiatement

$$\phi(x; q, t) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1}{1-q^{\lambda_i}}\, p_\lambda(x) \tag{3.4}$$

$$\psi(x; q, t) = \sum_\lambda z_\lambda^{-1} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1}{q^{\lambda_i}-1}\, p_\lambda(x). \tag{3.5}$$

Si l'on spécifie n variables $x = (x_1, ..., x_n)$ on a aussi

$$\phi(x; q, t) = \prod_{i=1}^{n} (x_i; q)_\infty^{-1}$$

$$\psi(x; q, t) = \prod_{i=1}^{n} (x_i; q)_\infty .$$

4. COEFFICIENTS BINOMIAUX GÉNÉRALISÉS

On introduit les coefficients du binôme généralisés par la définition suivante qui est indépendante du nombre de variables.

DÉFINITION 1. Soit λ une partition. Les coefficients binomiaux généralisés $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}$ sont définis par

$$J_\lambda^\#(x; q, t)\, \phi(x; q, t) = \sum_\kappa \binom{\kappa}{\lambda}_{q,t} t^{n(\kappa)-n(\lambda)} J_\kappa^\#(x; q, t).$$

En prenant les parties homogènes de ϕ par (3.4), cette définition est équivalente à la suivante

$$\begin{aligned} J_\lambda^\#(x; q, t) &\left[\sum_{|\mu|=p} z_\mu^{-1} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1}{1-q^{\mu_i}}\, p_\mu(x) \right] \\ &= \sum_{|\kappa|=|\lambda|+p} \binom{\kappa}{\lambda}_{q,t} t^{n(\kappa)-n(\lambda)} J_\kappa^\#(x; q, t). \end{aligned} \tag{4.1}$$

On introduit l'automorphisme de Λ_F défini par

$$\omega_{q,t}(p_\mu) = (-1)^{|\mu|-l(\mu)} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1-q^{\mu_i}}{1-t^{\mu_i}}\, p_\mu .$$

Cet automorphisme a été étudié par Macdonald ([6], p. 312). La relation suivante est une conséquence immédiate des relations (8.6) et (8.7) de [6] (p. 353):

$$\omega_{q,t}(J^{\#}_{\lambda}(q,t)) = J^{\#}_{\lambda'}(t,q).$$

THÉORÈME 1. *On a la relation de dualité suivante*

$$\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t} = \binom{\kappa'}{\lambda'}_{1/t,\,1/q}.$$

Preuve. On applique $\omega_{q,t}$ à la relation (4.1). On a

$$J^{\#}_{\lambda'}(t,q)\left[\sum_{|\mu|=p} z_\mu^{-1} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1}{t^{\mu_i}-1}\, p_\mu\right](-1)^p$$
$$= \sum_{|\kappa|=|\lambda|+p} \binom{\kappa}{\lambda}_{q,t} t^{n(\kappa)-n(\lambda)} J^{\#}_{\kappa'}(t,q).$$

En substituant λ à λ', κ à κ', et t à $1/q$ il vient

$$J^{\#}_{\lambda}(1/q,1/t)\left[\sum_{|\mu|=p} z_\mu^{-1} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1}{1-q^{\mu_i}}\, p_\mu\right](-q)^p$$
$$= \sum_{|\kappa|=|\lambda|+p} \binom{\kappa'}{\lambda'}_{1/t,\,1/q} q^{n(\lambda')-n(\kappa')} J^{\#}_{\kappa}(1/q,1/t). \tag{4.2}$$

Il suffit alors d'appliquer la relation (2.3) et de comparer avec (4.1). ∎

THÉORÈME 2. *La définition suivante est équivalente à la définition* 1:

$$J^{\#}_{\lambda}(x;q,t)\,\psi(x;q,t) = \sum_{\kappa} (-1)^{|\kappa|-|\lambda|} \binom{\kappa}{\lambda}_{1/q,\,1/t} q^{n(\kappa')-n(\lambda')} J^{\#}_{\kappa}(x;q,t).$$

Preuve. En portant le Théorème 1 dans la relation (4.2) on obtient

$$J^{\#}_{\lambda}(1/q,1/t)\left[\sum_{|\mu|=p} z_\mu^{-1} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1}{1-q^{\mu_i}}\, p_\mu\right](-q)^p$$
$$= \sum_{|\kappa|=|\lambda|+p} \binom{\kappa}{\lambda}_{q,t} q^{n(\lambda')-n(\kappa')} J^{\#}_{\kappa}(1/q,1/t).$$

Il suffit de substituer q à $1/q$ et t à $1/t$ pour conclure, en appliquant (3.5). ∎

Remarquons qu'on a $\phi\psi = 1$. La Définition 1 et le Théorème 2 entrainent immédiatement

$$\sum_{\kappa} \binom{\kappa}{\lambda}_{q,\,t} \binom{\mu}{\kappa}_{1/q,\,1/t} (-1)^{|\mu| - |\kappa|} \, q^{n(\mu') - n(\kappa')} \, t^{n(\kappa) - n(\lambda)} = \delta_{\lambda\mu}. \tag{4.3}$$

En comparant la Définition (4.1) avec la définition de ϕ, on a immédiatement

$$\binom{\kappa}{0}_{q,\,t} = \binom{\kappa}{\kappa}_{q,\,t} = 1.$$

Nous donnerons une expression de $\binom{\kappa}{1}_{q,\,t}$ à la Section 9. La. Section 6 sera consacrée à l'étude des coefficients binomiaux $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,\,t}$ dans le cas élémentaire $|\kappa| = |\lambda| + 1$.

5. RÉSULTATS COMBINATOIRES AUXILIAIRES

Les résultats auxiliaires présentés dans cette section permettent d'exprimer en termes analytiques des expressions combinatoires.

PROPOSITION 2. *Pour toute partition λ et tout $1 \leqslant k \leqslant l(\lambda)$, on a*

$$\prod_{j=1}^{\lambda_k} \frac{1 - q^{\lambda_k - j} \, t^{\lambda'_j - k + 1}}{1 - q^{\lambda_k - j + 1} \, t^{\lambda'_j - k + 1}} = \frac{1 - t}{1 - q^{\lambda_k} t^{l(\lambda) - k + 1}} \prod_{i=k+1}^{l(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_k - \lambda_i} \, t^{i - k + 1}}{1 - q^{\lambda_k - \lambda_i} \, t^{i - k}}. \tag{5.1}$$

Preuve. Désignons par $r_1 > r_2 > \cdots > r_p$ les valeurs *distinctes* prises par λ'_j lorsque j varie de 1 à λ_k. On a $r_1 = \lambda'_1 = l(\lambda)$ et $\lambda_{r_p} = \lambda_k$. Par définition on a $\lambda'_j = r_s$ pour tout $\lambda_{r_{s-1}} < j \leqslant \lambda_{r_s}$. D'où

$$\prod_{j=\lambda_{r_{s-1}}+1}^{\lambda_{r_s}} \frac{1 - q^{\lambda_k - j} \, t^{\lambda'_j - k + 1}}{1 - q^{\lambda_k - j + 1} \, t^{\lambda'_j - k + 1}} = \frac{1 - q^{\lambda_k - \lambda_{r_s}} \, t^{r_s - k + 1}}{1 - q^{\lambda_k - \lambda_{r_{s-1}}} \, t^{r_s - k + 1}}.$$

Avec la convention $\lambda_{r_0} = 0$ le membre de gauche de (5.1) s'écrit donc

$$\prod_{s=1}^{p} \frac{1 - q^{\lambda_k - \lambda_{r_s}} \, t^{r_s - k + 1}}{1 - q^{\lambda_k - \lambda_{r_{s-1}}} \, t^{r_s - k + 1}} = \frac{1 - t^{r_p - k + 1}}{1 - q^{\lambda_k} \, t^{r_1 - k + 1}} \prod_{s=1}^{p-1} \frac{1 - q^{\lambda_k - \lambda_{r_s}} \, t^{r_s - k + 1}}{1 - q^{\lambda_k - \lambda_{r_s}} \, t^{r_{s+1} - k + 1}}. \tag{5.2}$$

Par définition on a de même $\lambda_i = \lambda_{r_s}$ pour tout $r_{s+1} < i \leqslant r_s$. D'où

$$\prod_{i=r_{s+1}+1}^{r_s} \frac{1 - q^{\lambda_k - \lambda_i} \, t^{i - k + 1}}{1 - q^{\lambda_k - \lambda_i} \, t^{i - k}} = \frac{1 - q^{\lambda_k - \lambda_{r_s}} \, t^{r_s - k + 1}}{1 - q^{\lambda_k - \lambda_{r_s}} \, t^{r_{s+1} - k + 1}}.$$

On en déduit que

$$\prod_{i=k+1}^{l(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_k-\lambda_i}\,t^{i-k+1}}{1-q^{\lambda_k-\lambda_i}\,t^{i-k}} = \prod_{s=1}^{p-1} \frac{1-q^{\lambda_k-\lambda_{r_s}}\,t^{r_s-k+1}}{1-q^{\lambda_k-\lambda_{r_s}}\,t^{r_{s+1}-k+1}} \prod_{i=k+1}^{r_p} \frac{1-q^{\lambda_k-\lambda_i}\,t^{i-k+1}}{1-q^{\lambda_k-\lambda_i}\,t^{i-k}}$$
$$= \frac{1-t^{r_p-k+1}}{1-t} \prod_{s=1}^{p-1} \frac{1-q^{\lambda_k-\lambda_{r_s}}\,t^{r_s-k+1}}{1-q^{\lambda_k-\lambda_{r_s}}\,t^{r_{s+1}-k+1}}, \tag{5.3}$$

puisque $\lambda_i=\lambda_k$ pour tout $k+1\leqslant i\leqslant r_p$. On conclut par comparaison de (5.2) et (5.3). ∎

PROPOSITION 3. *Soient deux partitions λ et μ, avec $\mu=\lambda^{(k)}$ pour $1\leqslant k\leqslant l(\lambda)$. On a*

$$\frac{c_\lambda(q,t)}{c_\mu(q,t)} = \frac{1}{1-q^{\lambda_k}\,t^{l(\lambda)-k+1}} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_k-1}\,t^{k-i}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_k-1}\,t^{k-i+1}} \prod_{i=k+1}^{l(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_k-\lambda_i}\,t^{i-k+1}}{1-q^{\lambda_k-\lambda_i}\,t^{i-k}}$$

et de même

$$\frac{c'_\lambda(q,t)}{c'_\mu(q,t)} = \frac{1}{1-q^{\lambda_k+1}\,t^{l(\lambda)-k}} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_k}\,t^{k-i-1}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_k}\,t^{k-i}} \prod_{i=k+1}^{l(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_k-\lambda_i+1}\,t^{i-k}}{1-q^{\lambda_k-\lambda_i+1}\,t^{i-k-1}}.$$

Preuve. On voit facilement que la contribution d'un point $(i,j)\in\lambda$ est la même pour $c_\lambda(q,t)$ et $c_\mu(q,t)$, sauf si $i=k$ ou si $\lambda_j=\lambda_k+1$. C'est-à-dire si (i,j) appartient à la ligne ou à la colonne passant par (k,λ_k+1). On en déduit

$$\frac{c_\lambda(q,t)}{c_\mu(q,t)} = \frac{1}{1-t} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_k-1}\,t^{k-i}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_k-1}\,t^{k-i+1}} \prod_{j=1}^{\lambda_k} \frac{1-q^{\lambda_k-j}\,t^{\lambda'_j-k+1}}{1-q^{\lambda_k-j+1}\,t^{\lambda'_j-k+1}}.$$

On applique alors la Proposition 2. La preuve de la seconde relation est analogue. ∎

PROPOSITION 4. *Soient deux partitions λ et μ, avec $\mu=\lambda_{(k)}$ pour $1\leqslant k\leqslant l(\lambda)$. On a*

$$\frac{j_\lambda(q,t)}{j_\mu(q,t)} = (1-q^{\lambda_k-1}\,t^{l(\lambda)-k+1})(1-q^{\lambda_k}\,t^{l(\lambda)-k})$$
$$\times \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_k}\,t^{k-i+1}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_k}\,t^{k-i}}\,\frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_k+1}\,t^{k-i}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_k+1}\,t^{k-i-1}}$$
$$\times \prod_{i=k+1}^{l(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_k-\lambda_i-1}\,t^{i-k}}{1-q^{\lambda_k-\lambda_i-1}\,t^{i-k+1}}\,\frac{1-q^{\lambda_k-\lambda_i}\,t^{i-k-1}}{1-q^{\lambda_k-\lambda_i}\,t^{i-k}}.$$

Preuve. C'est une conséquence immédiate de (2.1) et de la Proposition 3. ∎

Nous sommes alors en mesure de donner la formulation analytique suivante de la formule de Pieri établie par Macdonald ([6], (6.24), iv, p. 341).

PROPOSITION 5. *Pour toute partition λ on a*

$$e_1 J_\lambda(q,t) = \sum_{k=1}^{l(\lambda)+1} c_k^\lambda(q,t)\, J_{\lambda^{(k)}}(q,t)$$

avec

$$c_k^\lambda(q,t) = \frac{1}{1-q^{\lambda_k} t^{l(\lambda)-k+2}} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_k} t^{k-i-1}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_k} t^{k-i}} \prod_{i=k+1}^{l(\lambda)+1} \frac{1-q^{\lambda_k-\lambda_i} t^{i-k+1}}{1-q^{\lambda_k-\lambda_i} t^{i-k}}. \tag{5.4}$$

Preuve. Macdonald (*loc. cit.*) a démontré qu'on a

$$e_1 P_\lambda(q,t) = \sum_{k=1}^{l(\lambda)+1} \psi'(\lambda^{(k)}/\lambda)\, P_{\lambda^{(k)}}(q,t)$$

avec

$$\psi'(\lambda^{(k)}/\lambda) = \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_k} t^{k-i-1}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_k} t^{k-i}} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_k-1} t^{k-i+1}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_k-1} t^{k-i}}.$$

En effet avec les notations de Macdonald, $C_{\lambda^{(k)}/\lambda} - R_{\lambda^{(k)}/\lambda}$ est formé des points $(i,j) \in \lambda$ tels que $1 \leqslant i \leqslant k-1$ et $j = \lambda_k + 1$. On a évidemment

$$c_k^\lambda(q,t) = \frac{c_\lambda(q,t)}{c_{\lambda^{(k)}}(q,t)}\, \psi'(\lambda^{(k)}/\lambda).$$

L'expression énoncée est alors obtenue en appliquant la Proposition 3 lorsque $1 \leqslant k \leqslant l(\lambda)$, et directement lorsque $k = l(\lambda)+1$. ∎

Remarque. Pour $1 \leqslant k \leqslant l(\lambda)$ la relation (5.4) se simplifie et s'écrit

$$c_k^\lambda(q,t) = \frac{1}{1-q^{\lambda_k} t^{l(\lambda)-k+1}} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_k} t^{k-i-1}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_k} t^{k-i}} \prod_{i=k+1}^{l(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_k-\lambda_i} t^{i-k+1}}{1-q^{\lambda_k-\lambda_i} t^{i-k}}. \tag{5.5}$$

6. COEFFICIENTS BINOMIAUX ÉLÉMENTAIRES

Nous revenons maintenant à l'étude des coefficients binomiaux $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}$ dans le cas élémentaire où $|\kappa| = |\lambda| + 1$.

THÉORÈME 3. *Soient deux partitions λ et κ avec $|\kappa| = |\lambda| + 1$. On a* $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t} \neq 0$ *seulement si $\lambda \subseteq \kappa$, c'est-à-dire si $\kappa = \lambda^{(k)}$ pour un entier k avec $1 \leqslant k \leqslant l(\lambda) + 1$. On a*

$$e_1 J_\lambda^{\#}(q,t) = \sum_{k=1}^{l(\lambda)+1} (1-q)\, t^{k-1} \binom{\lambda^{(k)}}{\lambda}_{q,t} J_{\lambda^{(k)}}^{\#}(q,t). \tag{6.1}$$

Preuve. On applique la définition (4.1) avec $p = 1$. On obtient

$$J_\lambda^{\#}(q,t) \frac{e_1}{1-q} = \sum_{|\kappa| = |\lambda|+1} \binom{\kappa}{\lambda}_{q,t} t^{n(\kappa)-n(\lambda)} J_\kappa^{\#}(q,t).$$

Par la formule de Pieri (5.4) de Macdonald, la sommation au membre de droite est réduite aux partitions κ telles que $\lambda \subseteq \kappa$. ∎

THÉORÈME 4. *Pour toute partition λ et tout $1 \leqslant k \leqslant l(\lambda)$, on a*

$$\binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_{q,t} = t^{1-k} \frac{1 - q^{\lambda_k} t^{l(\lambda)-k}}{1-q} \prod_{i=1}^{k-1} \frac{1 - q^{\lambda_i - \lambda_k} t^{k-i+1}}{1 - q^{\lambda_i - \lambda_k} t^{k-i}}$$
$$\times \prod_{i=k+1}^{l(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_k - \lambda_i} t^{i-k-1}}{1 - q^{\lambda_k - \lambda_i} t^{i-k}}.$$

Preuve. Le Théorème 3 implique

$$(1-q)\, t^{k-1} \binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_{q,t} = \frac{j_\lambda(q,t)}{j_{\lambda_{(k)}}(q,t)} c_k^{\lambda_{(k)}}(q,t). \tag{6.2}$$

On applique alors la Proposition 4 et la Proposition 5 dans sa formulation (5.5). ∎

EXEMPLE. Soit $\lambda = (r, 1^s)$. On a

$$\binom{r, 1^s}{r-1, 1^s}_{q,t} = \frac{1 - q^r t^s}{1 - q^{r-1} t^s} \frac{1 - q^{r-1}}{1-q} \tag{6.3}$$

$$\binom{r, 1^s}{r, 1^{s-1}}_{q,t} = \frac{1}{t^s} \frac{1 - q^{r-1} t^{s+1}}{1 - q^{r-1} t^s} \frac{1 - t^s}{1-t}. \tag{6.4}$$

En particulier

$$\binom{(n)}{(n-1)}_{q,t} = \frac{1-q^n}{1-q} = \binom{n}{n-1}_q$$

$$\binom{1^n}{1^{n-1}}_{q,t} = \frac{1}{t^{n-1}} \frac{1-t^n}{1-t} = \binom{n}{n-1}_{1/t}.$$

On observera qu'on a

$$\binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_{1/q,\,1/t} = t^{k-1} q^{1-\lambda_k} \binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_{q,\,t}, \tag{6.5}$$

et que le Théorème 4 peut se réécrire sous la forme condensée

$$\binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_{q,\,t} = t^{1-l(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_k} t^{l(\lambda)-k}}{1-q} \prod_{i \neq k} \frac{1-q^{\lambda_i-\lambda_k} t^{k-i+1}}{1-q^{\lambda_i-\lambda_k} t^{k-i}}.$$

7. OPÉRATEURS AUX DIFFÉRENCES FINIES

Jusqu'à la fin de cette section, on spécifie n variables $x=(x_1, ..., x_n)$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose

$$A_i(x;t) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}.$$

PROPOSITION 6. *On a*

$$\text{(a)} \quad \sum_{i=1}^{n} A_i(x;t) = \frac{1-t^n}{1-t}$$

$$\text{(b)} \quad \sum_{i=1}^{n} x_i A_i(x;t) = t^{n-1} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$$\text{(c)} \quad \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} A_i(x;t) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}.$$

Preuve. Les deux premières relations sont données à l'exemple 2, p. 319 de [6]. La troisième s'obtient en substituant $1/x_i$ à x_i et t à $1/t$ dans la seconde. ∎

On note Λ_F^n l'algèbre de polynômes symétriques en $x_1, ..., x_n$ à coefficients dans F. On introduit les opérateurs suivants qui opérent dans Λ_F^n.

Pour tout $u \in F$ et tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on note $T_{u,i}$ l'opérateur de décalage défini par

$$(T_{u,i} f)(x_1, ..., x_n) = f(x_1, ..., ux_i, ..., x_n).$$

L'opérateur de q-dérivation partielle $\partial/\partial_u x_i$ est défini par

$$\frac{\partial}{\partial_u x_i} = \frac{T_{u,i} - 1}{(u-1)\, x_i}.$$

On a facilement

$$\frac{\partial}{\partial_u x_i} fg = \left(\frac{\partial}{\partial_u x_i} f\right) g + (T_{u,i} f) \left(\frac{\partial}{\partial_u x_i} g\right). \tag{7.1}$$

Pour tout entier $k \geqslant 0$ on introduit l'opérateur aux différences finies

$$E_k(x; q, t) = \sum_{i=1}^{n} x_i^k A_i(x; t) \frac{\partial}{\partial_q x_i}.$$

On sait ([6], page 322) que les polynômes de Macdonald sont fonctions propres de l'opérateur $E_1(x; q, t)$. On a

$$E_1(x; q, t)\, P_\lambda(x; q, t) = t^{n-1} e_\lambda(q, t)\, P_\lambda(x; q, t) \tag{7.2}$$

avec

$$e_\lambda(q, t) = \sum_{(i, j) \in \lambda} q^{j-1}\, t^{1-i}.$$

Dans la suite de cet article, on écrira parfois E_k pour $E_k(x; q, t)$.

Proposition 7. *On a*

$$E_0(x; q, t) = \frac{1}{q-1} \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i} (A_i(x; t) T_{q,i} - 1) \right)$$

$$E_1(x; q, t) = \frac{1}{q-1} \left(\sum_{i=1}^{n} A_i(x; t)\, T_{q,i} - \frac{1-t^n}{1-t} \right).$$

Preuve. Conséquence élémentaire de la Proposition 6. ∎

On désigne par e_1^+ (resp. e_1^-) l'opérateur de multiplication par $e_1(x) = \sum_{i=1}^n x_i$ (resp. $\sum_{i=1}^n 1/x_i$).

Proposition 8. *On a*

(a) $(q-1)\, E_2 = [E_1, e_1^+] - t^{n-1} e_1^+$

(b) $(1-q)\, E_0 = q[E_1, e_1^-] + e_1^-$.

Preuve. Pour tout $f \in \Lambda_F^n$ la relation (7.1) implique

$$[E_1, e_1^+] f = \sum_{i=1}^n x_i A_i(x; t)\, T_{q,i} f$$
$$= (q-1) \sum_{i=1}^n x_i^2 A_i(x; t) \frac{\partial f}{\partial_q x_i} + f \sum_{i=1}^n x_i A_i(x; t)$$
$$[E_1, e_1^-] f = \sum_{i=1}^n x_i A_i(x; t)\, T_{q,i} f \frac{\partial}{\partial_q x_i} \left(\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} \right) = -\frac{1}{q} \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} A_i(x; t)\, T_{q,i} f$$
$$= \frac{1-q}{q} \sum_{i=1}^n A_i(x; t) \frac{\partial f}{\partial_q x_i} - \frac{1}{q} f \sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i} A_i(x; t).$$

On applique la Proposition 6. ∎

Propositon 9. *Pour toute partition λ de longueur $\leqslant n$, on a*

$$E_2(x; q, t)\, J_\lambda^{\#}(x; q, t) = t^{n-1} \sum_{k=1}^{l(\lambda)+1} \binom{\lambda^{(k)}}{\lambda}_{q,t} (t^{k-1} - q^{\lambda_k})\, J_{\lambda^{(k)}}^{\#}(x; q, t).$$

Preuve. En vertu de la Proposition 8 (a) et des relations (6.1) et (7.2), le membre de gauche est égal à

$$t^{n-1} \sum_{k=1}^{l(\lambda)+1} \binom{\lambda^{(k)}}{\lambda}_{q,t} t^{k-1} (1 + e_\lambda(q, t) - e_{\lambda^{(k)}}(q, t))\, J_{\lambda^{(k)}}^{\#}(x; q, t).$$

Mais on a

$$e_{\lambda^{(k)}}(q, t) - e_\lambda(q, t) = q^{\lambda_k} t^{1-k}. \quad ∎$$

Proposition 10. *Au point $x_0 = (1, t, ..., t^{n-1})$ on a*

$$E_k(x_0; q, t)\, P_\lambda(x_0; q, t) = t^{k(n-1)} e_\lambda(q, t)\, P_\lambda(x_0; q, t).$$

Preuve. Au point x_0 on a visiblement

$$A_i(x_0; t) = 0 \quad (1 \leqslant i \leqslant n-1)$$
$$E_k(x_0; q, t) = t^{k(n-1)} A_n(x_0; t) \frac{\partial}{\partial_q x_n}.$$

On applique la relation (7.2). ∎

8. ÉQUATION AUX DIFFÉRENCES FINIES

Jusqu'à la fin de cette section, on spécifie n variables $x=(x_1, ..., x_n)$.

THÉORÈME 5. *Pour toute partition λ de longueur $\leqslant n$, on a*

$$E_0(x; q, t)\, J^*_\lambda(x; q, t) = \sum_{k=1}^{l(\lambda)} \binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_{q,t} J^*_{\lambda_{(k)}}(x; q, t).$$

Remarque. Le théorème 5 établit que les coefficients binomiaux $\binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_{q,t}$ sont égaux, au facteur t^{1-k} près, à ceux introduits par Kaneko [2]. Notre démonstration simplifie considérablement celle de [2].

Nous allons procéder en deux étapes et démontrer d'abord la propriété remarquable suivante.

THÉORÈME 6. *Pour toute partition λ de longueur $\leqslant n$, on a*

$$E_0(x; q, t)\, J^*_\lambda(x; q, t) = \sum_{k=1}^{l(\lambda)} c_k(n)\, J^*_{\lambda_{(k)}}(x; q, t)$$

où les coefficients $c_k(n)$ dépendent de n et restent à déterminer.

Preuve. On a évidemment

$$e_1^- P_\lambda(x; q, t) = \left(\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) P_\lambda(x; q, t) = \frac{e_{n-1}(x)}{e_n(x)} P_\lambda(x; q, t).$$

En vertu de la formule de Pieri démontrée par Macdonald ([6], (6.24), page 340), le membre de droite s'écrit

$$\frac{1}{e_n(x)} \sum_\mu a_\mu P_\mu(x; q, t),$$

où μ est une partition telle $\mu\backslash\lambda$ soit une $(n-1)$-bande verticale. En particulier μ est de longueur n ou $n-1$.

Appliquons la Proposition 8 (b). Nous obtenons, en écrivant e_λ pour $e_\lambda(q, t)$:

$$(1-q)\, E_0 P_\lambda = q \sum_\mu a_\mu E_1\left(\frac{P_\mu}{e_n}\right) + (1 - qt^{n-1} e_\lambda)\, e_1^- P_\lambda.$$

Maintenant on a

$$E_1\left(\frac{P_\mu}{e_n}\right)=\sum_{i=1}^{n} x_i A_i(x;t)\left(\frac{\partial}{\partial_q x_i}\left(\frac{1}{e_n}\right)P_\mu+\frac{1}{qe_n}\frac{\partial}{\partial_q x_i}P_\mu\right)$$
$$=\frac{1}{q}\left[t^{n-1}e_\mu-\left(\sum_{i=1}^{n}A_i(x;t)\right)\right]\frac{P_\mu}{e_n}$$

où la seconde relation résulte de (7.2) et de

$$\frac{\partial}{\partial_q x_i}\left(\frac{1}{e_n}\right)=-\frac{1}{qx_ie_n}.$$

Finalement on a, en appliquant la Proposition 6(a),

$$(1-q)\,E_0P_\lambda=\sum_\mu a_\mu\left[t^{n-1}(e_\mu-qe_\lambda)+\frac{t^n-t}{1-t}\right]\frac{P_\mu}{e_n}.$$

Montrons qu'au membre de droite la sommation est réduite aux partitions μ de longueur n. En effet si μ est de longueur $n-1$, on a

$$e_\lambda(q,t)=\sum_{i=1}^{l(\lambda)}\sum_{j=1}^{\lambda_i}q^{j-1}\,t^{1-i}$$
$$e_\mu(q,t)=\sum_{i=1}^{l(\lambda)}\sum_{j=1}^{\lambda_i+1}q^{j-1}\,t^{1-i}+\sum_{i=l(\lambda)+1}^{n-1}t^{1-i}.$$

D'où

$$e_\mu(q,t)-qe_\lambda(q,t)=\sum_{i=1}^{n-1}t^{1-i}=t^{2-n}\frac{1-t^{n-1}}{1-t},$$

et l'assertion.

Lorsque la partition μ est de longueur n et s'écrit $\mu=(\mu_1,...,\mu_n)$, on sait par la propriété (4.17). page 325, de [6] que

$$\frac{P_\mu(x;q,t)}{e_n(x)}=P_{(\mu_1-1,...,\mu_n-1)}(x;q,t).$$

On a $\mu_i=\lambda_i+1$ sauf pour un entier i_0, pour lequel on a $\mu_{i_0}=\lambda_{i_0}$. La partition $(\mu_1-1,...,\mu_n-1)$ est donc égale, à $\lambda_{(i_0)}$. ∎

On note D l'opérateur adjoint de la multiplication par e_1 pour la forme $\langle\cdot,\cdot\rangle_{q,t}$:

$$\langle Df,g\rangle_{q,t}=\langle f,e_1g\rangle_{q,t}\quad(f,g\in\Lambda_F).$$

PROPOSITION 11. *Pour toute partition λ, on a*

$$DJ_\lambda(q,t)=(1-q)\sum_{k=1}^{l(\lambda)} t^{k-1}\binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_{q,t} J_{\lambda_{(k)}}(q,t).$$

Preuve. Par définition on a

$$\langle DJ_\lambda(q,t), J_\mu^{\#}(q,t)\rangle_{q,t}=\langle J_\lambda(q,t), e_1 J_\mu^{\#}(q,t)\rangle_{q,t}$$

c'est-à-dire

$$DJ_\lambda(q,t)=\sum_\mu \langle J_\lambda(q,t), e_1 J_\mu^{\#}(q,t)\rangle_{q,t}\, J_\mu(q,t).$$

On applique le Théorème 3. ∎

PROPOSITION 12. *Le coefficient de x_{n+1} dans $J_\lambda(x, x_{n+1}; q, t)$ est $[(1-t)/(1-q)]\, DJ_\lambda(x;q,t)$.*

Preuve. Rappelons la notion de fonction symétrique gauche $Q_{\lambda/\mu}$ définie par Macdonald ([6], page 344) par

$$\langle Q_{\lambda/\mu}(q,t), f\rangle_{q,t}=\frac{1}{c'_\lambda(q,t)}\langle J_\lambda(q,t), P_\mu(q,t)\, f\rangle_{q,t}\quad (f\in\Lambda_F).$$

Par la définition de D on a

$$DJ_\lambda(q,t)=c'_\lambda(q,t)\, Q_{\lambda/\{1\}}(q,t).$$

Par la relation (7.9) de [6] (p. 345) on a

$$J_\lambda(x, x_{n+1}; q,t)=\sum_\mu \frac{c'_\lambda(q,t)}{c'_\mu(q,t)}\; Q_{\lambda/\mu}(x;q,t)\, J_\mu(x_{n+1};q,t).$$

Mais $J_\mu(x_{n+1};q,t)$ est non nul seulement si μ est de longueur un, c'est-à-dire $\mu=(k)$ et alors $J_\mu(x_{n+1};q,t)=a_k x_{n+1}^k$, pour une constante a_k. Finalement le coefficient de x_{n+1} dans $J_\lambda(x, x_{n+1}; q,t)$ est

$$a_1\frac{c'_\lambda(q,t)}{c'_1(q,t)}\, Q_{\lambda/\{1\}}\,(x;q,t)=\frac{a_1}{c'_1(q,t)}\, DJ_\lambda(x;q,t). \quad ∎$$

PROPOSITION 13. *On a*

$$\begin{aligned}&E_0(x, x_{n+1}; q,t)\, J_\lambda(x, x_{n+1}; q,t)|_{x_{n+1}=0}\\ &\quad = tE_0(x;q,t)\, J_\lambda(x;q,t)+(1-t)\sum_{k=1}^{l(\lambda)}\binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_{q,t} t^{k-1} J_{\lambda_{(k)}}(x;q,t).\end{aligned}$$

Preuve. On a clairement

$$A_{n+1}(x, x_{n+1}; t)|_{x_{n+1}=0} = 1$$

$$A_i(x, x_{n+1}; t)|_{x_{n+1}=0} = tA_i(x; t) \quad (1 \leqslant i \leqslant n)$$

$$\begin{aligned} &E_0(x, x_{n+1}; q, t)\, J_\lambda(x, x_{n+1}; q, t)|_{x_{n+1}=0} \\ &\quad = tE_0(x; q, t)\, J_\lambda(x; q, t) + \frac{\partial}{\partial_q x_{n+1}} J_\lambda(x, x_{n+1}; q, t)\Big|_{x_{n+1}=0}. \end{aligned}$$

On applique les Propositions 11 et 12. ∎

Preuve du Théorème 5. Il s'agit de déterminer les coefficients $c_k(n)$ du Théorème 6. La Proposition 13 implique immédiatement

$$\frac{J_\lambda(1, t, ..., t^n)}{J_{\lambda_{(k)}}(1, t, ..., t^n)}\, c_k(n+1) = t\, \frac{J_\lambda(1, t, ..., t^{n-1})}{J_{\lambda_{(k)}}(1, t, ..., , t^{n-1})}\, c_k(n) + (1-t)\, t^{k-1} \binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_{q,t}.$$

Soit encore en vertu de (2.2)

$$\begin{aligned} &(t^{k-1} - q^{\lambda_k - 1}\, t^{n+1})\, c_k(n+1) \\ &\quad = t(t^{k-1} - q^{\lambda_k - 1}\, t^n)\, c_k(n) + (1-t)\, t^{k-1} \binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_{q,t}. \end{aligned}$$

Cette relation de récurrence possède une solution indépendante de n. ∎

Nous aurons ultérieurement besoin d'exprimer le Théorème 5 en utilisant les opérateurs $T_{q,i}$ au lieu des opérateurs $\partial/\partial_q x_i$.

Théorème 5 bis. *Pour toute partition λ de longueur $\leqslant n$, on a*

$$\begin{aligned} &\left[\sum_{i=1}^n \frac{1}{x_i}\left(A_i(x; t)\, T_{q,i} - 1\right) - t^{1-n} \sum_{i=1}^n A_i(x; t)\, T_{q,i}\right] J^*_\lambda(x; q, t) \\ &\quad = (q-1) \sum_{k=1}^{l(\lambda)} \binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_{q,t} J^*_{\lambda_{(k)}}(x; q, t) \\ &\qquad - \left((q-1)\, e_\lambda(q, t) + t^{1-n}\, \frac{1-t^n}{1-t}\right) J^*_\lambda(x; q, t). \end{aligned}$$

Preuve. Conséquence immédiate du Théorème 5, de la relation (7.2) et de la Proposition 7. ∎

Donnons pour terminer une conséquence intéressante du Théorème 5. On introduit la fonction hypergéométrique généralisée à deux variables

$$\mathscr{F}(x, y; q, t) = \sum_{\lambda} t^{n(\lambda)} J_{\lambda}^{\#}(x; q, t)\, J_{\lambda}^{*}(y; q, t).$$

Cette définition est dépendante de l'entier n.

THÉORÈME 7. *On a*

$$E_0(y; q, t)\, \mathscr{F}(x, y; q, t) = \frac{1}{1-q}\, e_1(x)\, \mathscr{F}(x, y; q, t).$$

Preuve. Il suffit de comparer les Théorèmes 3 et 5. ∎

9. LE CAS PARTICULIER $\lambda = 1$

Nous sommes maintenant en mesure de calculer $\binom{\kappa}{1}_{q,t}$. Par la Définition 1, on a d'une part

$$\frac{e_1}{1-q}\, \phi(q, t) = \sum_{\kappa} \binom{\kappa}{1}_{q,t} t^{n(\kappa)} J_{\kappa}^{\#}(q, t) \tag{9.1}$$

Mais d'autre part la définition de ϕ implique

$$\begin{aligned} \frac{e_1}{1-q}\, \phi(q, t) &= \frac{1}{1-q} \sum_{\lambda} t^{n(\lambda)} e_1 J_{\lambda}^{\#}(q, t) \\ &= \sum_{\lambda} t^{n(\lambda)} \sum_{k=1}^{l(\lambda)+1} \binom{\lambda^{(k)}}{\lambda}_{q,t} t^{k-1} J_{\lambda^{(k)}}^{\#}(q, t) \\ &= \sum_{\kappa} t^{n(\kappa)} \left(\sum_{i=1}^{l(\kappa)} \binom{\kappa}{\kappa_{(i)}}_{q,t} \right) J_{\kappa}^{\#}(q, t) \end{aligned} \tag{9.2}$$

où la seconde égalité résulte du Théorème 3. En identifiant les coefficients de $J_{\kappa}^{\#}(q, t)$ dans les développements (9.1) et (9.2), on obtient

$$\binom{\kappa}{1}_{q,t} = \sum_{i=1}^{l(\kappa)} \binom{\kappa}{\kappa_{(i)}}_{q,t}. \tag{9.3}$$

Maintenant au point $x_0 = (1, t, ..., t^{n-1})$ on a grâce à la Proposition 10

$$E_0(x_0; q, t)\, J_{\kappa}^{*}(x_0; q, t) = e_{\kappa}(q, t)\, J_{\kappa}^{*}(x_0; q, t) = \sum_{(i, j) \in \kappa} q^{j-1}\, t^{1-i}.$$

Et d'après le Théorème 5

$$E_0(x_0; q, t)\, J_\kappa^*(x_0; q, t) = \sum_{i=1}^{l(\kappa)} \binom{\kappa}{\kappa_{(i)}}_{q,t}.$$

Par comparaison avec (9.3) on voit qu'on a démontré le

THÉORÈME 8. *Pour toute partition κ on a*

$$\binom{\kappa}{1}_{q,t} = \sum_{i=1}^{l(\kappa)} \binom{\kappa}{\kappa_{(i)}}_{q,t} = \sum_{(i,j)\in\kappa} q^{j-1} t^{1-i}.$$

10. RELATIONS DE RÉCURRENCE

Le but de cette section est d'établir deux relations de récurrence entre les différents coefficients binomiaux généralisés. On spécifie n variables $x = (x_1, ..., x_n)$ et on note pour simplifier

$$\phi = \phi(x; q, t) = \prod_{i=1}^{n} (x_i; q)_\infty^{-1}$$

$$E_1 \phi = E_1(x; q, t)\, \phi(x; q, t).$$

PROPOSITION 14. *Pour toute partition λ on a*

$$E_1(J_\lambda^\# \phi) - (E_1 J_\lambda^\#)\, \phi = t^{n-1} \phi \left(\sum_{k=1}^{l(\lambda)+1} \binom{\lambda^{(k)}}{\lambda}_{q,t} q^{\lambda_k} J_{\lambda^{(k)}}^\# \right).$$

Preuve. En utilisant

$$\frac{\partial}{\partial_q x_i} ((x_i; q)_\infty^{-1}) = \frac{1}{1-q} (x_i; q)_\infty^{-1}$$

et la Proposition 6 (b), on a

$$E_1 \phi = \sum_{i=1}^{n} x_i A_i(x; t) \frac{\phi(x; q, t)}{1-q} = \frac{1}{1-q} t^{n-1} e_1 \phi.$$

En vertu de (7.1) on en déduit

$$E_1(J_\lambda^\# \phi) = \frac{1}{1-q} t^{n-1} e_1 J_\lambda^\# \phi + \sum_{i=1}^{n} x_i A_i(x; t)(T_{q,i} \phi) \frac{\partial}{\partial_q x_i} J_\lambda^\# .$$

Maintenant on a facilement

$$T_{q,i}\phi(x;q,t)=(1-x_i)\,\phi(x;q,t).$$

D'où

$$\begin{aligned}E_1(J^{\#}_{\lambda}\phi)&=\frac{1}{1-q}\,t^{n-1}e_1J^{\#}_{\lambda}\phi+\left(\sum_{i=1}^{n}x_iA_i(x;t)(1-x_i)\frac{\partial}{\partial_q x_i}J^{\#}_{\lambda}\right)\phi\\&=\frac{1}{1-q}\,t^{n-1}e_1J^{\#}_{\lambda}\phi+(E_1J^{\#}_{\lambda})\,\phi-(E_2J^{\#}_{\lambda})\,\phi.\end{aligned}$$

Le Théorème 3 et la Proposition 9 permettent de conclure. ∎

THÉORÈME 9. *Soient κ et λ deux partitions arbitraires. On a $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}\neq 0$ seulement si $\lambda\subseteq\kappa$. On a*

$$\left(\sum_{(i,j)\in\kappa\backslash\lambda}q^{j-1}\,t^{1-i}\right)\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}=\sum_{k=1}^{l(\lambda)+1}\binom{\kappa}{\lambda^{(k)}}_{q,t}\binom{\lambda^{(k)}}{\lambda}_{q,t}q^{\lambda_k}\,t^{1-k}$$

Preuve. On part de la Définition 1. En appliquant l'opérateur $E_1(x;q,t)$ à chaque membre, et en tenant compte de la Proposition 14, on obtient

$$\begin{aligned}&\sum_{\kappa}\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}t^{n(\kappa)-n(\lambda)}(e_\kappa(q,t)-e_\lambda(q,t))\,J^{\#}_{\kappa}(q,t)\\&\quad=\sum_{k=1}^{l(\lambda)+1}\binom{\lambda^{(k)}}{\lambda}_{q,t}q^{\lambda_k}\sum_{\mu}\binom{\mu}{\lambda^{(k)}}_{q,t}t^{n(\mu)-n(\lambda^{(k)})}J^{\#}_{\mu}(q,t).\end{aligned}$$

En identifiant les coefficients de $J^{\#}_{\kappa}(q,t)$ dans chaque membre, on obtient

$$(e_\kappa(q,t)-e_\lambda(q,t))\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}=\sum_{k=1}^{l(\lambda)+1}\binom{\lambda^{(k)}}{\lambda}_{q,t}q^{\lambda_k}\binom{\kappa}{\lambda^{(k)}}_{q,t}t^{1-k}.$$

Cette relation de récurrence implique que $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}\neq 0$ seulement si $\lambda\subseteq\kappa$. En effet ceci est vérifié si $|\kappa|-|\lambda|=1$. Or la relation de récurrence implique que si $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}\neq 0$ il existe au moins un $\binom{\kappa}{\lambda^{(k)}}_{q,t}\neq 0$. Une récurrence croissante sur $|\kappa|-|\lambda|$ permet donc de conclure. ∎

De maniére analogue on a le

THÉORÈME 9 BIS. *Soient κ et λ deux partitions arbitraires. On a*

$$\left(\sum_{(i,j)\in\kappa\backslash\lambda}q^{j-1}\,t^{1-i}\right)\binom{\kappa}{\lambda}_{1/q,1/t}=\sum_{i=1}^{l(\kappa)}\binom{\kappa}{\kappa_{(i)}}_{1/q,1/t}\binom{\kappa_{(i)}}{\lambda}_{1/q,1/t}q^{\kappa_i-1}t^{1-i}.$$

Preuve. On part du Théorème 2 qu'on écrit

$$J_\lambda^{\#}(x;q,t)=\sum_\kappa(-1)^{|\kappa|-|\lambda|}\binom{\kappa}{\lambda}_{1/q,\,1/t} q^{n(\kappa')-n(\lambda')}J_\kappa^{\#}(x;q,t)\,\phi(x;q,t).$$

On applique l'opérateur $E_1(x;q,t)$ à chaque membre, puis la Proposition 14. On a facilement

$$\sum_\kappa(-1)^{|\kappa|-|\lambda|}\binom{\kappa}{\lambda}_{1/q,\,1/t} q^{n(\kappa')-n(\lambda')}(e_\lambda(q,t)-e_\kappa(q,t))\,J_\kappa^{\#}(q,t)\,\phi$$
$$=\sum_\kappa(-1)^{|\kappa|-|\lambda|}\binom{\kappa}{\lambda}_{1/q,\,1/t} q^{n(\kappa')-n(\lambda')}\phi\left(\sum_{i=1}^{l(\kappa)+1}\binom{\kappa^{(i)}}{\kappa}_{q,\,t} q^{\kappa_i}J_{\kappa^{(i)}}^{\#}(q,t))\right).$$

Il suffit alors d'identifier les coefficients dans chaque membre, en tenant compte de la relation (6.5). ∎

Remarque 1. Chacune des relations des Théorème 9 et 9 bis se réduit à une identité triviale lorsque $\lambda=\kappa_{(i)}(1\leqslant i\leqslant l(\kappa))$. Lorsque $\lambda=0$ on retrouve les deux égalités du Théorème 8.

Remarque 2. Chacun des Théorèmes 9 ou 9 bis permet en principe de calculer tous les coefficients binomiaux par récurrence sur l'entier $|\kappa|-|\lambda|$, puisque les coefficients binomiaux élémentaires $\binom{\lambda^{(k)}}{\lambda}_{q,\,t}$ ou $\binom{\kappa}{\kappa_{(i)}}_{1/q,\,1/t}$ sont explicitements connus. Nous allons maintenant utiliser cette méthode dans les situations où κ est une équerre ou un rectangle.

11. LE CAS DES ÉQUERRES

Nous explicitons d'abord la valeur de $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,\,t}$ lorsque κ est une équerre $(r,1^s)$. Toute partition $\lambda\subseteq\kappa$ est alors une équerre $(r',1^{s'})$, avec $1\leqslant r'\leqslant r$ et $0\leqslant s'\leqslant s$.

Théorème 10. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\binom{\kappa}{\lambda}_{q,\,t}=\binom{r-1}{r'-1}_q\binom{s}{s'}_{1/t}t^{s'-s}$$
$$\times\frac{(1-q^r t^{s'})(1-q^{r'-1}t^{s+1})-q^{r'}t^{s'}(1-q^{r-r'})(1-t^{s-s'})}{(1-q^{r'}t^{s'})(1-q^{r'-1}t^{s'+1})}.$$

Preuve. Par récurrence décroissante sur $|\lambda|=r'+s'$. La relation est évidente si $\lambda=\kappa$. Si on la suppose vraie pour toutes les équerres $\lambda=(r',1^{s'})$ telles que $r'+s'=N$, la relation de récurrence donne $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,\,t}$ pour toutes les équerres λ avec $r'+s'=N-1$. On a en effet

$$
\begin{aligned}
&\binom{r,\,1^s}{r',\,1^{s'}}_{q,t}\left(q^{r'}\frac{1-q^{r-r'}}{1-q}+t^{-s}\frac{1-t^{s-s'}}{1-t}\right)\\
&\quad=\binom{r,\,1^s}{r'+1,\,1^{s'}}_{q,t}\binom{r'+1,\,1^{s'}}{r',\,1^{s'}}_{q,t}q^{r'}+\binom{r,\,1^s}{r',\,1^{s'+1}}_{q,t}\binom{r',\,1^{s'+1}}{r',\,1^{s'}}_{q,t}t^{-s'-1}\\
&\quad=\binom{r,\,1^s}{r'+1,\,1^{s'}}_{q,t}\frac{1-q^{r'+1}t^{s'}}{1-q}\,\frac{1-q^{r'}}{1-q^{r'}t^{s'}}\,q^{r'}\\
&\qquad+\binom{r,\,1^s}{r',\,1^{s'+1}}_{q,t}\frac{1-q^{r'-1}t^{s'+2}}{1-t}\,\frac{1-t^{s'+1}}{1-q^{r'-1}t^{s'+1}}\,t^{-2(s'+1)},
\end{aligned}
$$

où la dernière relation résulte des expressions (6.3) et (6.4). Si on pose

$$
\binom{r,\,1^s}{r',\,1^{s'}}_{q,t}=\binom{r-1}{r'-1}_q\binom{s}{s'}_{1/t}t^{s'-s}\frac{v(r',s')}{(1-q^{r'}t^{s'})(1-q^{r'-1}t^{s'+1})}
$$

un calcul élémentaire, laissé au lecteur, montre que la relation précédente devient

$$
\begin{aligned}
&[q^{r'}(1-q^{r-r'})(1-t)+t^{-s}(1-q)(1-t^{s-s'})](1-q^{r'}t^{s'+1})\,v(r',s')\\
&\quad=q^{r'}(1-t)(1-q^{r'-1}t^{s'+1})(1-q^{r-r'})\,v(r'+1,s')\\
&\qquad+t^{-s}(1-q)(1-q^{r'}t^{s'})(1-t^{s-s'})\,v(r',s'+1).
\end{aligned}
$$

Le théorème sera démontré si on établit que

$$
v(r',s')=(1-q^{r}t^{s'})(1-q^{r'-1}t^{s+1})-q^{r'}t^{s'}(1-q^{r-r'})(1-t^{s-s'})
$$

satisfait cette relation de récurrence. Pour cela posons $a=t^{s-s'}$, $b=q^{r-r'}$ et $c=q^{r'}t^{s}$. La relation précédente devient

$$
\begin{aligned}
&[c(1-b)(1-t)+(1-a)(1-q)]\left(1-\frac{tc}{a}\right)\\
&\quad\times\left[\left(1-\frac{bc}{a}\right)\left(1-\frac{tc}{q}\right)-\frac{c}{a}(1-b)(1-a)\right]\\
&\quad=c(1-t)\left(1-\frac{tc}{qa}\right)(1-b)\left[\left(1-\frac{bc}{a}\right)(1-tc)-\frac{qc}{a}\left(1-\frac{b}{q}\right)(1-a)\right]\\
&\qquad+(1-q)\left(1-\frac{c}{a}\right)(1-a)\left[\left(1-\frac{tbc}{a}\right)\left(1-\frac{tc}{q}\right)-\frac{tc}{a}(1-b)\left(1-\frac{a}{t}\right)\right].
\end{aligned}
$$

Cette identité est aisément vérifiée, par exemple au moyen d'un logiciel de calcul formel comme Maple. ∎

12. LE CAS DES RECTANGLES

Nous calculons maintenant $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}$ lorsque κ est un rectangle (k^n), c'est-à-dire $l(\kappa)=n$ et $\kappa_1=\cdots=\kappa_n=k$.

THÉORÈME 11. *Avec les notations précédentes, on a*

$$\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}=(-q^k\,t^{1-n})^{|\lambda|}\,\frac{t^{n(\lambda)}}{q^{n(\lambda')}}\,\varepsilon_{q^{-k},t}\,(J_\lambda(q,t))\,J^{\#}_\lambda(1,t,...,t^{n-1};q,t)$$

$$=\prod_{(i,j)\in\lambda} t^{i-n}\,\frac{t^{i-1}-q^{j-1}\,t^n}{1-q^{\lambda_i-j}\,t^{\lambda'_j-i+1}}\,\frac{1-q^{k-j+1}\,t^{i-1}}{1-q^{\lambda_i-j+1}\,t^{\lambda'_j-i}}.$$

Preuve. Par récurrence décroissante sur $|\lambda|$. La propriété est aisément vérifiée pour $\lambda=(k^n)$. Si on la suppose vraie pour toutes les partitions λ avec $|\lambda|=N$, la relation de récurrence explicite $\binom{k^n}{\lambda}_{q,t}$ pour toutes les partitions λ avec $|\lambda|=N-1$. On a en effet

$$\binom{k^n}{\lambda}_{q,t}\left(t^{1-n}\,\frac{1-t^n}{1-t}\,\frac{1-q^k}{1-q}-e_\lambda(q,t)\right)=\sum_{i=1}^{l(\lambda)+1}\binom{k^n}{\lambda^{(i)}}_{q,t}\binom{\lambda^{(i)}}{\lambda}_{q,t}q^{\lambda_i}t^{1-i}.$$

Mais les relations (3. 1) et (2.2) impliquent

$$\begin{aligned}\varepsilon_{q^{-k},t}(J_{\lambda^{(i)}}(q,t))&=\varepsilon_{q^{-k},t}(J_\lambda(q,t))(t^{i-1}-q^{\lambda_i-k})\\ J_{\lambda^{(i)}}(1,t,...,t^{n-1};q,t)&=J_\lambda(1,t,...,t^{n-1};q,t)(t^{i-1}-q^{\lambda_i}\,t^n).\end{aligned}\tag{12.1}$$

Le Théorème sera donc établi si l'on prouve

$$e_\lambda(q,t)-t^{1-n}\,\frac{1-t^n}{1-t}\,\frac{1-q^k}{1-q}$$
$$=\sum_{i=1}^{l(\lambda)+1}q^{k-\lambda_i}\,t^{i-n}(t^{i-1}-q^{\lambda_i-k})(t^{i-1}-q^{\lambda_i}\,t^n)\,q^{\lambda_i}\,t^{1-i}\,\frac{j_\lambda(q,t)}{j_{\lambda^{(i)}}(q,t)}\binom{\lambda^{(i)}}{\lambda}_{q,t}.$$

Compte-tenu de (6.2) cette relation est équivalente à

$$(1-q^{-k})\,\frac{1-t^n}{1-t}+q^{-k}\,t^{n-1}(1-q)\,e_\lambda(q,t)$$
$$=\sum_{i=1}^{l(\lambda)+1}(t^{i-1}-q^{\lambda_i-k})(t^{i-1}-q^{\lambda_i}\,t^n)\,t^{1-i}c_i^\lambda(q,t).$$

Mais c'est une conséquence immédiate de la proposition suivante. ∎

Proposition 15. *Pour toute partition λ, on a*

$$\sum_{i=1}^{l(\lambda)+1} q^{\lambda_i} c_i^{\lambda}(q,t) = \sum_{i=1}^{l(\lambda)+1} t^{i-1} c_i^{\lambda}(q,t) = \frac{1}{1-t}$$

$$\sum_{i=1}^{l(\lambda)+1} q^{2\lambda_i} t^{1-i} c_i^{\lambda}(q,t) = \frac{1}{1-t} + \frac{1-q}{q}\, e_{\lambda}(q,t).$$

Preuve. Les deux premières relations résultent facilement de la définition de $c_i^{\lambda}(q,t)$.On a en effet

$$e_1(1,t,...,t^{n-1})\, J_{\lambda}(1,t,...,t^{n-1};q,t) = \sum_{i=1}^{l(\lambda)+1} c_i^{\lambda}(q,t)\, J_{\lambda^{(i)}}(1,t,...,t^{n-1};q,t).$$

D'où en utilisant (2.2),

$$\sum_{i=1}^{l(\lambda)+1} (t^{i-1} - q^{\lambda_i} t^n)\, c_i^{\lambda}(q,t) = \frac{1-t^n}{1-t}$$

et on identifie dans chacun des membres les contributions indépendantes de n.

Pour démontrer la troisième relation, écrivons la Proposition 9 au point $x_0 = (1, t, ..., t^{n-1})$. Nous obtenons

$$E_2(x_0;q,t)\, J_{\lambda}^{\#}(x_0;q,t) = t^{n-1} \sum_{i=1}^{l(\lambda)+1} \binom{\lambda^{(i)}}{\lambda}_{q,t} (t^{i-1} - q^{\lambda_i})\, J_{\lambda^{(i)}}^{\#}(x_0;q,t).$$

Soit encore en vertu de la Proposition 10 et de la relation (6.2),

$$(q-1)\, t^{n-1} e_{\lambda}(q,t)\, J_{\lambda}(x_0;q,t) = \sum_{i=1}^{l(\lambda)+1} (q^{\lambda_i} t^{1-i} - 1)\, c_i^{\lambda}(q,t)\, J_{\lambda^{(i)}}(x_0;q,t).$$

D'où grâce à (12.1),

$$(q-1)\, t^{n-1} e_{\lambda}(q,t) = \sum_{i=1}^{l(\lambda)+1} (q^{\lambda_i} t^{1-i} - 1)(t^{i-1} - q^{\lambda_i} t^n)\, c_i^{\lambda}(q,t).$$

En développant le membre de droite, on obtient la troisième relation annoncée. ∎

Spécifions maintenant n variables $x = (x_1, ..., x_n)$ et considérons la fonction ${}_1\Phi_0(a;x;q,t)$ introduite à la Section 3. En vertu de la Proposition 1, on a

$${}_1\Phi_0(q^{-k}; q^k x; q,t) = \prod_{i=1}^{n} \frac{(x_i;q)_{\infty}}{(q^k x_i;q)_{\infty}}.$$

Soit encore d'après la définition de ${}_1\Phi_0$,

$$\sum_{\lambda} \varepsilon_{q^{-k}, t} (J_\lambda(q, t))\, q^{k|\lambda|} J_\lambda^{\#}(x; q, t) = \prod_{i=1}^{n} (x_i; q)_k.$$

Compte-tenu du Théorème 11, ceci s'écrit

$$\prod_{i=1}^{n} (x_i; q)_k = \sum_{\lambda \subseteq k^n} \binom{k^n}{\lambda}_{q, t} (-1)^{|\lambda|} \frac{q^{n(\lambda')}}{t^{n(\lambda)}} t^{(n-1)|\lambda|} J_\lambda^{*}(x; q, t). \tag{12.2}$$

Cette relation est une première généralisation de la formule q-binomiale classique

$$(x; q)_k = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l}_q q^{l(l-1)/2} (-x)^l,$$

que nous allons maintenant étendre au cas le plus général.

13. FORMULE DU BINÔME GÉNÉRALISÉ

Jusqu'à la fin de cette section, on spécifie n variables $x = (x_1, ..., x_n)$. Plusieurs auteurs [3, 7, 10, 11] ont simultanément introduit la notion de polynôme de Macdonald "décalé". Pour toute partition λ, de longueur inférieure ou égale à n, on désigne ainsi l'unique polynôme $\widetilde{P}_\lambda(x_i, ..., x_n; q, t)$ qui est

(i) symétrique dans les variables $x_i t^{1-i}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$,

(ii) de degré $|\lambda|$,

(iii) tel que $\widetilde{P}_\lambda(q^{\mu_1}, ..., q^{\mu_n}; q, t) \neq 0 \Rightarrow \lambda \subseteq \mu$, et $\widetilde{P}_\lambda(q^{\lambda_1}, ..., q^{\lambda_n}; q, t) \neq 0$.

Nous aurons besoin des deux résultats suivants qui ont été démontrés par Okounkov [8]. D'une part on a

$$\widetilde{P}_\lambda(x_1, ..., x_n; q, t)$$
$$= P_\lambda(x_1, t^{-1}x_2, ..., t^{1-n}x_n; q, t) + \text{termes de degré inférieur},$$

et

$$\widetilde{P}_\lambda(0; q, t) = (-1)^{|\lambda|} \frac{q^{n(\lambda')}}{t^{n(\lambda)}} P_\lambda(1, t^{-1}, ..., t^{1-n}; q, t). \tag{13.1}$$

D'autre part il existe un opérateur aux différences finies $\widetilde{D}(u; q, t)$ tel que

$$\widetilde{D}(u: q, t)\, \widetilde{P}_\lambda(x; q, t) = \prod_{i=1}^{n} (q^{-\lambda_i} t^{i-1} - ut^{n-1})\, \widetilde{P}_\lambda(x: q, t). \tag{13.2}$$

Okounkov [8] a donné l'expression explicite suivante de $\widetilde{D}(u; q, t)$:

$$\widetilde{D}(u; q, t) = \left(\prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i}\right) \sum_{I \subset \{1, 2, ..., n\}} (-1)^{|I|}\, t^{(n-|I|)(n-|I|-1)/2}$$
$$\times \prod_{i \in I} (1 - x_i t^{n-i}) \prod_{i \notin I} (1 - ux_i t^{n-i})$$
$$\times \prod_{i \in I,\, j \notin I} \frac{x_i - x_j t^{i-j+1}}{x_i - x_j t^{i-j}} \prod_{i \in I} T_{1/q,\, i}.$$

Nous allons démontrer la formule du binôme généralisée suivante.

Théorème 12. *Pour toute partition λ, de longueur inférieure ou égale à n, on a*

$$\frac{\widetilde{P}_\lambda(x_1, ..., x_n; 1/q, 1/t)}{\widetilde{P}_\lambda(0; 1/q, 1/t)} = \sum_\mu \binom{\lambda}{\mu}_{q,t} \frac{q^{n(\mu')}}{t^{n(\mu)}} (-1)^{|\mu|}\, J^*_\mu(x_1, tx_2, ..., t^{n-1}x_n; q, t). \tag{13.3}$$

Une formule analogue a été obtenue par Okounkov [8]. Le Théorème 12 démontre ainsi que les coefficients binomiaux que nous avons introduits dans cet article sont *les mêmes* que ceux de [8].

Avant de démontrer le Théorème 12, notons que lorsque $\lambda = (k^n)$, on a la

Proposition 16. *On a*

$$\frac{\widetilde{P_{k^n}}(x_1, ..., x_n; q, t)}{\widetilde{P_{k^n}}(0; q, t)} = \prod_{i=1}^{n} (x_i t^{n-i}; 1/q)_k.$$

Preuve. On utilise la Proposition 4.2 de [7] qui implique

$$\frac{\widetilde{P_{k^n}}(x_1, ..., x_n; q, t)}{\widetilde{P_{k^n}}(0; q, t)} = \prod_{i=1}^{n} (1 - x_i t^{n-i}) \frac{\widetilde{P_{(k-1)^n}}(x_1/q, ..., x_n/q; q, t)}{\widetilde{P_{(k-1)^n}}(0; q, t)}.$$

L'assertion se démontre alors par récurrence sur k, le cas $k = 1$ étant connu par l'Exemple 5.5 de [7]. ∎

On voit ainsi que la relation (12.2) n'est autre que le Théorème 12 dans le cas particulier $\lambda = (k^n)$.

Preuve du Théorème 12. Notons $R_\lambda(x; 1/q, 1/t)$ le membre de gauche de (13.3). C'est un polynôme symétrique dans les variables $z=(z_1, ..., z_n)$ avec $z_i=x_i t^{i-1}$. On peut donc écrire son développement sur les polynômes de Macdonald, de la forme

$$R_\lambda(x; 1/q, 1/t)=\sum_\mu c_{\lambda\mu}\,\frac{q^{n(\mu')}}{t^{n(\mu)}}\,(-1)^{|\mu|)}J^*_\mu(z; q, t) \tag{13.4}$$

Les coefficients $c_{\lambda\mu}$ sont à déterminer. On a évidemment $c_{\lambda 0}=1$, et en appliquant (13.1), $c_{\lambda\lambda}=1$.

Notons $C(q, t)$ le coefficient de u^{n-1} dans $\tilde{D}(u; 1/q, 1/t)$. En vertu de (13.2), on a

$$C(q, t)\, R_\lambda(x; 1/q, 1/t)=(-1)^{n-1}\, t^{-(n-1)(n-1)}\left(\sum_{i=1}^{n} q^{\lambda_i}\, t^{1-i}\right) R_\lambda(x; 1/q, 1/t). \tag{13.5}$$

L'opérateur $C(q, t)$ s' écrit explicitement

$$\begin{aligned}C(q, t)=&\left(\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\right)\Bigg[\,t^{-n(n-1)/2}(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j t^{j-n}\\ &-t^{-(n-1)(n-2)/2}(-1)^{n-1}\sum_{i=1}^{n}(1-x_i t^{i-n})\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} x_j t^{j-n}\\ &\times\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{x_i-x_j t^{j-i-1}}{x_i-x_j t^{j-i}}\,T_{q,i}\Bigg]\\ =&(-1)^{n-1}\,t^{-n(n-1)/2}\Bigg[\,t^{-n(n-1)/2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i t^{i-n}}-t^{-(n-1)(n-2)/2}\\ &\times\sum_{i=1}^{n}\frac{1-x_i t^{i-n}}{x_i t^{i-n}}\,t^{1-n}\prod_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n}\frac{t^i x_i-t^{j-1}x_j}{t^{i-1}x_i-t^{j-1}x_j}\,T_{q,i}\Bigg]\\ =&(-1)^{n-1}\,t^{-(n-1)(n-1)}\left[\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z_i}-\left(\frac{1}{z_i}-t^{1-n}\right)A_i(z; t)\,T_{q,i}\right].\end{aligned}$$

Appliquons alors le Théorème 5bis. On obtient

$$\begin{aligned}C(q, t)\,J^*_\mu(z; q, t)=&(-1)^{n-1}\,t^{-(n-1)(n-1)}\left(\left[(q-1)\,e_\mu(q, t)+t^{1-n}\frac{1-t^n}{1-t}\right]\right.\\ &\left.\times J^*_\mu(z; q, t)-(q-1)\sum_{k=1}^{l(\mu)}\binom{\mu}{\mu_{(k)}}_{q,t} J^*_{\mu_{(k)}}(z; q, t)\right).\end{aligned}$$

Considérons maintenant le développement (13.4), et appliquons lui l'opérateur $C(q, t)$. En vertu de la relation (13.5) on obtient

$$\left(\sum_{i=1}^{n} q^{\lambda_i} t^{1-i}\right) \sum_{\lambda} c_{\lambda\mu} \frac{q^{n(\mu')}}{t^{n(\mu)}} (-1)^{|\mu|} J_\mu^*(z; q, t)$$

$$= \left(\sum_{\lambda} c_{\lambda\mu} \frac{q^{n(\mu')}}{t^{n(\mu)}} (-1)^{|\mu|} \left[(q-1)\, e_\mu(q, t) + t^{1-n} \frac{1-t^n}{1-t}\right] J_\mu^*(z; q, t)\right)$$

$$-(q-1) \sum_{\lambda} c_{\lambda\mu} \frac{q^{n(\mu')}}{t^{n(\mu)}} (-1)^{|\mu|} \sum_{k=1}^{l(\mu)} \binom{\mu}{\mu_{(k)}}_{q,t} J_{\mu_{(k)}}^*(z; q, t).$$

En identifiant les coefficients de J_μ^* dans chacun des membres, on obtient la relation de récurrence suivante pour les coefficients $c_{\lambda\mu}$:

$$\left[\sum_{i=1}^{n} q^{\lambda_i} t^{1-i} - (q-1)\, e_\mu(q, t) - t^{1-n} \frac{1-t^n}{1-t}\right] c_{\lambda\mu}$$

$$= (q-1) \sum_{k=1}^{l(\mu)+1} c_{\lambda\mu^{(k)}} \binom{\mu^{(k)}}{\mu}_{q,t} q^{\mu_k} t^{1-k}. \tag{13.6}$$

Mais on a

$$t^{n-1} \sum_{i=1}^{n} q^{\lambda_i} t^{1-i} - \frac{1-t^n}{1-t} = \sum_{i=1}^{n} (q^{\lambda_i} - 1)\, t^{n-i} = (q-1)\, t^{n-1} e_\lambda(q, t).$$

La relation de récurrence (13.6) peut donc se réécrire

$$(e_\lambda(q, t) - e_\mu(q, t))\, c_{\lambda\mu} = \sum_{k=1}^{l(\mu)+1} c_{\lambda\mu^{(k)}} \binom{\mu^{(k)}}{\mu}_{q,t} q^{\mu_k} t^{1-k}. \tag{13.7}$$

Nous sommes alors en mesure de prouver le théorème, c'est-à-dire la relation

$$c_{\lambda\mu} = \binom{\lambda}{\mu}_{q,t}.$$

La propriété s'établit par une récurrence décroissante, sur $|\mu|$. On a vu qu'elle est vraie pour $\mu = \lambda$. Si on la suppose vraie pour toute partition μ telle que $|\mu| = N$, elle est également vraie pour $|\mu| = N-1$. Il suffit en effet de comparer la relation de récurrence (13.7) avec le Théorème 9. ▮

COROLLAIRE. *Pour toute partition λ de longueur inférieure ou égale à n, on a inversement*

$$\begin{aligned} &J_\lambda^*(x_1, tx_2, ..., t^{n-1}x_n; q, t) \\ &\quad = \sum_\mu \binom{\lambda}{\mu}_{1/q,\, 1/t} \frac{t^{n(\mu)}}{q^{n(\mu')}} (-1)^{|\mu|} \frac{\widetilde{P}_\mu(x_1, ..., x_n; 1/q, 1/t)}{\widetilde{P}_\mu(0, 1/q, 1/t)}. \end{aligned}$$

Preuve. En vertu du Théorème 9 la matrice

$$\left(\binom{\lambda}{\mu}_{1/q,\, 1/t} \frac{t^{n(\mu)}}{q^{n(\mu')}} (-1)^{|\mu|}\right)_{\lambda, \mu}$$

est triangulaire (par rapport à l'ordre partiel associé à l'inclusion), et en vertu de la relation (4.3) son inverse est la matrice

$$\left(\binom{\lambda}{\mu}_{q,\, t} \frac{q^{n(\mu')}}{t^{n(\mu)}} (-1)^{|\mu|}\right)_{\lambda, \mu}. \quad \blacksquare$$

14. POLYNÔMES DE JACK

Dans cette section nous explicitons brièvement les conséquences des résultats précédents en ce qui concerne les polynômes de Jack. La référence est la section 10 du chapitre 6 de [6] (voir aussi [12]). Les résultats que nous allons préciser ont été auparavant annoncés dans [5]. Une démonstration en a été ultérieurement donnée dans [1]. Une nouvelle approche a récemment été présentée dans [9].

La "forme intégrale" des fonctions symétriques de Jack est définie pour toute partition λ par

$$J_\lambda(x; \alpha) = \lim_{t \to 1} J_\lambda\left(\frac{x}{1-t}; t^\alpha, t\right),$$

où x est un ensemble infini d'indéterminées et α un nombre réel >0. On a

$$\langle J_\lambda(\alpha), J_\mu(\alpha)\rangle_\alpha = j_\lambda(\alpha)\, \delta_{\lambda\mu},$$

où le produit scalaire, $\langle \cdot, \cdot \rangle_\alpha$ est défini par

$$\langle p_\lambda, p_\mu\rangle_\alpha = \lim_{t \to 1} \langle p_\lambda, p_\mu\rangle_{t^\alpha, t} = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \alpha^{l(\lambda)}.$$

On note

$$J_\lambda^{\#}(x, \alpha) = \frac{J_\lambda(x; \alpha)}{j_\lambda(\alpha)}$$

$$J_\lambda^{*}(x; \alpha) = \frac{J_\lambda(x; \alpha)}{J_\lambda(1, 1, ..., 1; \alpha)}.$$

On introduit la fonction

$$\phi(x; \alpha) = \sum_\lambda \alpha^{|\lambda|} J_\lambda^{\#}(x; \alpha),$$

et on définit les coefficients binomiaux $\binom{\kappa}{\lambda}_\alpha$ par la relation suivante

$$J_\lambda^{\#}(x; \alpha)\, \phi(x; \alpha) = \sum_\kappa \alpha^{|\kappa| - |\lambda|} \binom{\kappa}{\lambda}_\alpha J_\kappa^{\#}(x; \alpha).$$

On voit facilement qu'on a

$$J_\lambda^{\#}(x; \alpha)) = \lim_{t \to 1} J_\lambda^{\#}((1-t)\, x; t^\alpha, t)$$

$$\phi(x; \alpha) = \lim_{t \to 1} \phi((1-t^\alpha)\, x; t^\alpha, t) = \exp(e_1(x))$$

$$\binom{\kappa}{\lambda}_\alpha = \lim_{t \to 1} \binom{\kappa}{\lambda}_{t^\alpha, t}.$$

D'où la relation de dualité (Théorème 2)

$$\binom{\kappa}{\lambda}_\alpha = \binom{\kappa'}{\lambda'}_{1/\alpha},$$

et l'expression analytique suivante des coefficients binomiaux élémentaires (Théorème 4)

$$\binom{\lambda}{\lambda_{(k)}}_\alpha = \left(\lambda_k + \frac{1}{\alpha}(l(\lambda) - k)\right) \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{l(\lambda)} \frac{\alpha(\lambda_k - \lambda_j) + j - k - 1}{\alpha(\lambda_k - \lambda_j) + j - k}.$$

Spécifions n variables $x = (x_1, ..., x_n)$. On introduit les opérateurs différentiels $E_k(x)$ définis par

$$E_k(x) = \sum_{i=1}^n x_i^k \frac{\partial}{\partial x_i} = \lim_{t \to 1} E_k(x; t^\alpha, t).$$

La Proposition 9 et le Théorème 6 entraînent

$$
\begin{aligned}
E_0 J^*_\lambda(x;\alpha) &= \sum_{i=1}^{l(\lambda)} \binom{\lambda}{\lambda_{(i)}}_\alpha J^*_{\lambda_{(i)}}(x;\alpha) \\
E_1 J_\lambda(x;\alpha) &= |\lambda|\, J_\lambda(x;\alpha) \qquad (14.1)\\
E_2 J^\#_\lambda(x;\alpha) &= \sum_{i=1}^{l(\lambda)+1} \binom{\lambda^{(i)}}{\lambda}_\alpha (\alpha\lambda_i - i + 1) J^\#_{\lambda^{(i)}}(x;\alpha).
\end{aligned}
$$

Si l'on introduit la fonction hypergéométrique généralisée à deux variables

$$
\mathscr{F}(x, y;\alpha) = \sum_\lambda \alpha^{|\lambda|} J^\#_\lambda(x;\alpha)\, J^*_\lambda(y;\alpha) = \lim_{t\to 1} \mathscr{F}((1-t^\alpha)\, x, y; t^\alpha, t)
$$

on a

$$
E_0(y)\, \mathscr{F}(x, y;\alpha) = e_1(x)\, \mathscr{F}(x, y;\alpha).
$$

Enfin les coefficients binomiaux satisfont la relation de récurrence des Théorème 9 et 9 bis.

$$
\begin{aligned}
(|\kappa| - |\lambda|) \binom{\kappa}{\lambda}_\alpha &= \sum_{i=1}^{l(\lambda)+1} \binom{\kappa}{\lambda^{(i)}}_\alpha \binom{\lambda^{(i)}}{\lambda}_\alpha, \\
&= \sum_{i=1}^{l(\kappa)} \binom{\kappa}{\kappa_{(i)}}_\alpha \binom{\kappa_{(i)}}{\lambda}_\alpha \qquad (14.2)
\end{aligned}
$$

qui permet en principe de les calculer tous explicitement par récurrence sur $|\kappa| - |\lambda|$.

En particulier si κ est l'équerre $(r, 1^s)$ et $\lambda \subseteq \kappa$ l'équerre $(r', 1^{s'})$ avec $1 \leqslant r' \leqslant r$ et $0 \leqslant s' \leqslant s$, on a

$$
\binom{\kappa}{\lambda}_\alpha = \binom{r-1}{r'-1} \binom{s}{s'} \frac{(s' + \alpha r)(s + 1 + \alpha(r'-1)) - \alpha(r - r')(s - s')}{(s' + \alpha r')(s' + 1 + \alpha(r'-1))}.
$$

De même si κ est le rectancyle (k^n), on a pour tout $\lambda \subseteq \kappa$

$$
\binom{k^n}{\lambda}_\alpha = \prod_{(i,j)\in\lambda} (k\alpha - \alpha(j-1) + i - 1)\, J^\#_\lambda(1, 1, ..., 1;\alpha).
$$

Enfin on a la formule du binôme généralisée

$$
J^*_\lambda(1 + x_1, ..., 1 + x_n;\alpha) = \sum_{\mu\subseteq\lambda} \binom{\lambda}{\mu}_\alpha J^*_\mu(x_1, ..., x_n;\alpha).
$$

Preuve. La démonstration est plus simple que celle du Théorème 12. Posons

$$J_\lambda^*(1+x_1, ..., 1+x_n; \alpha) = \sum_\mu c_{\lambda\mu}(\alpha)\, J_\mu^*(x_1, ..., x_n; \alpha).$$

Alors (voir par exemple [1], relations (38) et (52)), il résulte uniquement de cette définition et de l'homogénéité des polynômes de Jack que

$$E_0 J_\lambda^*(x; \alpha) = \sum_{i=1}^{l(\lambda)} c_{\lambda\lambda_{(i)}}(\alpha)\, J_{\lambda_{(i)}}^*(x; \alpha)$$

$$\binom{|\lambda| - |\mu|}{p - |\mu|} c_{\lambda\mu}(\alpha) = \sum_{|v| = p} c_{\lambda v}(\alpha)\, c_{v\mu}(\alpha).$$

La première relation et (14.1) impliquent $c_{\lambda_{(i)}} = \binom{\lambda}{\lambda_{(i)}}_\alpha$. La seconde, écrite pour $p = |\mu| + 1$, et comparée à la relation de récurrence (14.2), donne $c_{\lambda\mu}(\alpha) = \binom{\lambda}{\mu}_\alpha$. ∎

15. UNE REMARQUE DE MACDONALD

Après avoir lu cet article, le Professeur Macdonald nous a communiqué les remarques suivantes que nous incluons ici avec sa permission. Pour tout couple (κ, λ) de partitions on pose

$$J_{\kappa/\lambda}(x; q, t) = \frac{c_\kappa(q, t)}{c_\lambda(q, t)} P_{\kappa/\lambda}(x; q, t) = \frac{c'_\kappa(q, t)}{c'_\lambda(q, t)} Q_{\kappa/\lambda}(x; q, t),$$

où les fonctions symétriques gauches $P_{\kappa/\lambda}(x; q, t)$ et $Q_{\kappa/\lambda}(x; q, t)$ sont définies, comme au §7 de [6], page 344, par

$$\langle P_{\kappa/\lambda}(q, t), f \rangle_{q,t} = \langle P_\kappa(q, t), Q_\lambda(q, t)\, f \rangle_{q,t}$$

$$\langle Q_{\kappa/\lambda}(q, t), f \rangle_{q,t} = \langle Q_\kappa(q, t), P_\lambda(q, t)\, f \rangle_{q,t} \qquad (f \in \Lambda_F)$$

avec ([6], relations (4.12), page 323, (6.19), page 339 et (8.7), page 353)

$$Q_\lambda(q, t) = \frac{c_\lambda(q, t)}{c'_\lambda(q, t)} P_\lambda(q, t) = c_\lambda(q, t)\, J_\lambda^{\#}(q, t).$$

On en déduit immédiatement

$$\langle J_{\kappa/\lambda}(q, t), f \rangle_{q,t} = \langle J_\kappa(q, t), J_\lambda^{\#}(q, t)\, f \rangle_{q,t} \qquad (f \in \Lambda_F).$$

THÉORÊME. *On a*

(a) $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t} \neq 0$ *seulement si* $\lambda \subseteq \kappa$,

(b) $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t} t^{n(\kappa)-n(\lambda)} = J_{\kappa/\lambda}(1, t, t^2, ..., ; q, t)$.

Preuve. La Définition 1 peut se réécrire, avec $\phi = \phi(x; q, t)$,

$$\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t} t^{n(\kappa)-n(\lambda)} = \langle J_\kappa(q,t), J_\lambda^{\#}(q,t)\,\phi \rangle_{q,t} = \langle J_{\kappa/\lambda}(q,t), \phi \rangle_{q,t}.$$

Mais on sait ([6], (7.7) (i), p. 344) que $Q_{\kappa/\lambda}(q,t) = 0$ sauf si $\lambda \subseteq \kappa$. D'où (a). Pour établir (b) on pose

$$J_{\kappa/\lambda}(x; q, t) = \sum_\mu a_\mu(q,t)\, p_\mu(x),$$

où ([6], (7.7)(ii), p. 344) la sommation a lieu sur les partitions μ telles que $|\mu| = |\kappa| - |\lambda|$. La relation (3.4) implique

$$\begin{aligned}\langle J_{\kappa/\lambda}(q,t), \phi \rangle_{q,t} &= \sum_\mu a_\mu(q,t)\, z_\mu^{-1} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1}{1-q^{\mu_i}} \langle p_\mu, p_\mu \rangle_{q,t} \\ &= \sum_\mu a_\mu(q,t) \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1}{1-t^{\mu_i}}.\end{aligned}$$

Mais on a clairement

$$\begin{aligned}p_\mu(1, t, t^2, ...) &= \prod_{i \geqslant 1} \left(p_i(1, t, t^2, ...)\right)^{m_i(\mu)} \\ &= \prod_{i \geqslant 1} \left(\frac{1}{1-t^i}\right)^{m_i(\mu)} = \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1}{1-t^{\mu_i}}. \quad \blacksquare\end{aligned}$$

Il résulte de ce théorème que $\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t}$ peut être exprimé comme une somme de tableaux. Plus précisément on a

$$\binom{\kappa}{\lambda}_{q,t} = \frac{c_\kappa(q,t)}{c_\lambda(q,t)} t^{n(\lambda)+|\lambda|-n(\kappa)-|\kappa|} \sum_T \Psi_T(q,t)\, t^{|T|},$$

où la sommation a lieu sur les tableaux de forme $\kappa - \lambda$ avec $|T| = \sum_{s \in \kappa/\lambda} T(s)$, et $\Psi_T(q,t)$ est défini par la relation (7.11') de [6], page 346.

Dans le cas limite des polynômes de Jack, si on pose

$$J_{\kappa/\lambda}(x; \alpha) = \lim_{t \to 1} J_{\kappa/\lambda}\left(\frac{x}{1-t}; t^\alpha, t\right) = \sum_\mu a_\mu(\alpha)\, p_\mu(x),$$

on voit facilement qu'on a

$$\binom{\kappa}{\lambda}_\alpha = \lim_{t \to 1} \sum_\mu a_\mu(t^\alpha, t) \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{1}{1-t^{\mu_i}}$$
$$= \sum_\mu a_\mu(\alpha) \lim_{t \to 1} \prod_{i=1}^{l(\mu)} \frac{(1-t)^{\mu_i}}{1-t^{\mu_i}} = a_{1^{|\kappa|-|\lambda|}}(\alpha).$$

Ainsi $\binom{\kappa}{\lambda}_\alpha$ est le coefficient de $p_1^{|\kappa|-|\lambda|}$ dans le développement de $J_{\kappa/\lambda}(\alpha)$. Il revient au même de dire qu'on a $\binom{\kappa}{\lambda}_\alpha = \zeta(J_{\kappa/\lambda}(\alpha))$, où $\zeta\colon \Lambda_F \to F$ est l'homomorphisme d'algèbres défini par

$$\zeta(p_1) = 1 \qquad \text{et} \qquad \zeta(p_r) = 0 \qquad (r > 1).$$

BIBLIOGRAPHIE

1. J. Kaneko, Selberg integrals and hypergeometric functions associated with Jack polynomials, *SIAM J. Math. Anal.* **24** (1993), 1086–1110.
2. J. Kaneko, q-Selberg integrals and Macdonald polynomials, *Ann. Sci. Ecole. Norm. Sup.* **29** (1996), 583–637.
3. F. Knop, Symmetric and non-symmetric quantum Capelli polynomials, to appear.
4. A. Lascoux, Classes de Chern des variétés de drapeaux, *C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **295** (1982), 393–398.
5. M. Lassalle, Une formule du binôme généralisée pour les polynômes de Jack, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I* **310** (1990), 253–260.
6. I. G. Macdonald, "Symmetric Functions and Hall Polynomials," 2nd ed., Clarendon, Oxford, 1995.
7. A. Okounkov, (Shifted) Macdonald polynomials: q-integral representation and combinatorial formula, *Compositio Math.* (1998).
8. A. Okounkov, Binomial formula for Macdonald polynomials and applications, *Math. Research Lett.* **4** (1997), 533–553.
9. A. Okounkov et G. Olshanski, Shifted Jack polynomials, binomial formula and applications, *Math. Research Lett.* **4** (1997), 69–78.
10. A. Okounkov and G. Olshanski, Shifted Schur functions, *St. Petersburg Math. J.* **9** (1998).
11. S. Sahi, Interpolation, integrality, and a generalization of Macdonald's polynomials, *Internat. Math. Res. Notices* **10** (1996), 457–471.
12. R. P. Stanley, Some combinatorial properties of Jack symmetric functions, *Adv. in Math.* **77** (1989), 76–115.