



Sintonización de controladores Pareto-óptimo robustos para sistemas multivariados. Aplicación en un helicóptero de 2 grados de libertad.

J. Carrillo-Ahumada ^{a,*}, G. Reynoso-Meza ^b, S. García-Nieto ^c, J. Sanchis ^c, M.A. García-Alvarado ^d

^aInstituto de Química Aplicada. Universidad del Papaloapan. Circuito Central 200, colonia Parque Industrial, Tuxtpec, Oaxaca, México 68301.

^bPrograma de Posgraduados en Ingeniería de la Producción y Sistemas (PPGEPS). Pontificia Universidad Católica de Paraná (PUCPR). Inmaculada Concepción 1155(80215-901). Curitiba (PR), Brasil.

^cInstituto Universitario de Automática e Informática Industrial. Universidad Politécnica de Valencia. Camino de Vera s/n 46022. Valencia, España.

^dDepartamento de Ingeniería Química y Bioquímica. Instituto Tecnológico de Veracruz. Av. Miguel Ángel de Quevedo 2779. Veracruz, Ver., México 91860.

Resumen

La sintonización de controladores Pareto-óptimo robustos ha sido empleada para mejorar el rendimiento de un helicóptero de dos grados de libertad con un algoritmo de control lineal. El procedimiento de sintonización del controlador está basado en la minimización simultánea de las integrales de la suma del cuadrado del error y de la acción de control. Como resultado de dicha minimización y dado que los objetivos entran en conflicto, se obtiene un conjunto de soluciones que describen un frente de Pareto. Posteriormente, un proceso de análisis en los mismos es llevado a cabo para seleccionar los controladores a implementar en el sistema físico. Los resultados experimentales con los controladores seleccionados muestran que el procedimiento de ajuste es eficaz y práctico. Copyright © 2015 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L.U. Todos los derechos reservados

Palabras Clave:

Sistema no lineal, control robusto, control óptimo, índices de desempeño, tiempo real.

1. Introducción

Hoy en día existe un creciente interés por el desarrollo de vehículos aéreos no tripulados (UAV's por sus siglas en inglés) debido a la gran variedad de aplicaciones y usos civiles en los que pueden ser empleados. Los mismos van desde la monitorización climática y de emisiones contaminantes hasta la inspección de tuberías en la administración de granjas (Fregene (2012)). De lo anterior, el estudio de sistemas de control apropiados para dichos sistemas es un área de investigación en expansión (CSS (2012)).

Debido a la complejidad que puede representar un UAV para el diseño de sistemas de control, suele ser conveniente evaluar los algoritmos de control en sistemas más simples para garantizar el correcto funcionamiento de los mismos. Lo anterior puede ser a través de técnicas como *Hardware-In-The-Loop* (Velasco et al. (2013)) o empleando sistemas con menos grados de libertad.

En esta línea, un claro ejemplo es el denominado *Twin Rotor MIMO System* (TRMS), del que pueden encontrarse variedad

de modelos comerciales. Se trata de una plataforma de pruebas que emula el comportamiento dinámico de un helicóptero; se trata de un proceso apropiado para evaluar diferentes esquemas de control antes de ser implementados en sistemas UAV's más complejos como cuatrirrotores (Hernández et al. (2013)). Sistemas semejantes al TRMS fueron empleados con éxito en ediciones pasadas del concurso de ingeniería de control del comité Español de Automática (García-Sanz et al. (2006); García-Sanz y Elso (2007a,b)).

El TRMS suele presentar alta no linealidad, efectos de acoplamiento entre sus ejes, inaccesibilidad de algunos de sus estados y salidas medidas. Estas características lo hacen un proceso interesante para diversas investigaciones. Se han propuesto numerosos métodos para mejorar el desempeño de controladores aplicados a diferentes TRMS como lógica difusa (Juang et al. (2008a, 2011, 2008b); Toha y Tokhi (2009); Tao et al. (2010b,a); Liu et al. (2006)), control predictivo (Rahideh y Shaheed (2012, 2009); Rahideh et al. (2008)), desigualdades lineales de matrices (LMI's por sus siglas en inglés) (Nejjari et al. (2011); Witczak et al. (2010)), control lineal cuadrático (Gabriel (2008); Ahmad et al. (2000b)), control retroalimentado/bucle abierto (Ahmad et al. (2000a)), control por modos deslizantes (Su et al. (2002) y control *deadbeat* (Wen y Lu (2008)).

Recientemente, se ha propuesto una metodología de ajuste

* Autor en correspondencia

Correo electrónico: jcarrillo@unpa.edu.mx;
jesuscarrillo18@yahoo.com (J. Carrillo-Ahumada)

del controlador mediante optimización multiobjetivo (Reynoso-Meza et al. (2013)) para este tipo de sistemas. La optimización multi-objetivo (Miettinen (1998)), cuando es empleada para el ajuste de controladores (Reynoso-Meza et al. (2014b)), permite un grado de involucramiento diferente del diseñador en la selección del controlador deseado. El diseño mediante optimización multi-objetivo involucra tres etapas: definición del problema, aproximación del frente de Pareto y selección de la solución a implementar. Esa selección se hace con base al conjunto de soluciones Pareto óptimas calculadas, donde es posible analizar el intercambio de prestaciones entre soluciones, y a partir de ellos, seleccionar la solución más conveniente.

Aún y cuando esta metodología ha sido empleada con éxito en Reynoso-Meza et al. (2013) para formulaciones en espacio-estado de controladores para un TRMS, el proceso estocástico empleado para la selección de las ganancias del controlador tiene el inconveniente de no garantizar siempre la estabilidad del mismo. Aún y cuando esto ha sido verificado *a posteriori* (mediante un esquema de penalización en la función de coste) esto suele requerir un mayor número de iteraciones para converger a la solución requerida (Reynoso-Meza et al. (2014a)). Por lo tanto, nuevas metodologías emplean la filosofía multi-objetivo para el ajuste de controladores que garanticen dicha estabilidad aún son necesarias.

En este trabajo, se propone una estrategia de ajuste de controladores mediante optimización multi-objetivo empleando un esquema híbrido de optimización que garantiza la estabilidad en todo momento de los controladores. Para ello se propone emplear la técnica de control lineal óptimo-robusto, regulador/servo propuesto por García-Alvarado y Ruiz-López (2010). El método consiste en la minimización simultánea de una función integral del cuadrado del error (desempeño óptimo) unido con la función integral del cuadrado de la señal de control y como restricción que los valores propios de la matriz característica se encuentren en una región D del semiplano complejo izquierdo ($|\text{Im}/\text{Re}| < 1$) como condición de robustez, propuesto por Ruiz-López et al. (2006). El mismo ha sido empleado con éxito empleando la filosofía multi-objetivo en el control de sistemas no lineales con múltiple entrada, múltiple salida (MIMO, por sus siglas en inglés) en simulación numérica (Carrillo-Ahumada et al. (2011)).

La estructura de este documento es como sigue: En la Sección 2, se muestra el marco teórico de los preliminares en optimización multi-objetivo y en el proceso de optimización. En la Sección 3, se describe el TRMS empleado como caso de estudio y la estructura del controlador propuesto. En la Sección 4, se muestra el ajuste Pareto-óptimo robusto con la definición del problema multi-objetivo y los procesos de optimización y selección. En la Sección 5, se presentan los resultados de la optimización y selección, junto con la validación experimental. Por último, se presentan las conclusiones de este trabajo.

2. Marco teórico

Para presentar debidamente la propuesta de este trabajo, es necesario presentar algunos conceptos fundamentales de la

técnica de optimización a utilizar así como de la estrategia de ajuste del controlador.

2.1. Preliminares en optimización multi-objetivo

Como se mencionó con anterioridad, el proceso de diseño mediante la optimización multi-objetivo consta (al menos) de tres etapas primordiales: 1) definición del problema de optimización multi-objetivo (MOP, por sus siglas en inglés), 2) la etapa de optimización multi-objetivo (MOO, por sus siglas en inglés) y 3) la selección multi-criterio.

En la definición del MOP, es importante determinar cuál es el concepto de diseño a implementar (cómo solucionar el problema); cuáles son los objetivos de diseño (qué es importante optimizar); y cuáles son las restricciones impuestas (qué soluciones no son prácticas o permitidas). Un MOP, sin pérdida de generalidad ¹ puede ser establecido como:

$$\min_{\theta \in \mathcal{R}^n} \mathbf{J}(\theta) = [J_1(\theta), \dots, J_m(\theta)] \in \mathcal{R}^m \quad (1)$$

sujeto a:

$$\mathbf{g}(\theta) \leq 0 \quad (2)$$

$$\mathbf{h}(\theta) = 0 \quad (3)$$

$$\underline{\theta}_i \leq \theta_i \leq \bar{\theta}_i, i = [1, \dots, n] \quad (4)$$

donde $\theta \in \mathcal{R}^n$ se define como el vector de decisión, $\mathbf{J}(\theta) \in \mathcal{R}^m$ como el vector de objetivos y $\mathbf{g}(\theta)$, $\mathbf{h}(\theta)$ como los vectores de restricciones de desigualdad e igualdad, respectivamente; $\underline{\theta}_i$, $\bar{\theta}_i$ representan las cotas inferiores y superiores en el espacio de decisión.

Como se ha comentado, al plantear un MOP, no se obtiene (probablemente) una única solución, sino un conjunto de soluciones potenciales, describiendo diferentes grados de compromiso entre los objetivos. Dicho conjunto de soluciones conforma lo que se conoce como conjunto de Pareto Θ_P , y su imagen en el espacio de objetivos, frente de Pareto J_P . Cada solución en el frente de Pareto se dice que es una solución no-dominada y Pareto-óptima.

El proceso de optimización para aproximar dicho frente de Pareto puede llevarse a cabo por diferentes técnicas, ya sea empleando algoritmos de optimización local (Marler y Arora (2004)) o global (Coello Coello (2006)). Finalmente, la selección de la solución implica un análisis del intercambio de prestaciones; para dicho cometido existen diversas metodologías (Figueira et al. (2005)) y técnicas de visualización (Lotov y Miettinen (2008)).

¹Un problema de maximización puede ser traducido en un problema de minimización. Para cada uno de los objetivos que deben ser maximizados, puede ser aplicada la transformación: $\max J_i(\theta) = -\min(-J_i(\theta))$.

2.2. Preliminares en el proceso de optimización

El método de sintonización de controladores lineales para sistemas lineales o linealizados propuesto por García-Alvarado y Ruiz-López (2010) es:

$$\frac{dx}{dt} = A_s x + B_{s1} w + B_{s2} u \quad (5)$$

$$y = C_s x + D_{s1} w + D_{s2} u \quad (6)$$

$$\frac{d\xi}{dt} = A_c \xi + B_{c1} r + B_{c2} y \quad (7)$$

$$u = C_c \xi + D_{c1} r + D_{c2} y \quad (8)$$

donde $x \in \mathfrak{X}^n$ es el vector de estado del proceso, $\xi \in \mathfrak{X}^k$ es el vector de estado del control, $w \in \mathfrak{X}^m$ es el vector de entradas exógenas, $u \in \mathfrak{X}^c$ es el vector de señales de control, $y \in \mathfrak{X}^r$ es el vector de salidas medidas (de otra forma, puede representar a los estados para una retroalimentación al controlador), $r \in \mathfrak{X}^r$ es el vector de puntos de consigna. El sistema ha sido definido lineal y sin embargo las matrices $A_s, B_{s1}, B_{s2}, C_s, D_{s1}$ y D_{s2} deben ser constantes o dependientes del tiempo. En caso de un proceso con dinámica no lineal (como lo puede ser el TRMS del presente estudio) el modelo debe ser linealizado y representado por (5) y (6). Por lo tanto, el modelo en bucle cerrado es:

$$\frac{dX}{dt} = AX + B_1 w + B_2 r \quad (9)$$

$$y = C_1 X + D_{11} w + D_{12} r \quad (10)$$

$$u = C_2 X + D_{21} w + D_{22} r \quad (11)$$

donde $X' = [x' \ \xi']$, las matrices en bucle cerrado $A, B_1, B_2, C_1, D_{11}, D_{12}, C_2, D_{21}, D_{22}$ y las matrices auxiliares Δ_1 y Δ_2 son:

$$A = \begin{bmatrix} A_s + B_{s2} \Delta_1 C_s & B_{s2} \Delta_2 C_c \\ B_{c2} \Delta_1 C_s & A_c + B_{c2} \Delta_1 D_{s2} C_c \end{bmatrix};$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{s1} + B_{s2} D_{c2} \Delta_1 D_{s1} \\ B_{c2} \Delta_1 D_{s1} \end{bmatrix}; \quad B_2 = \begin{bmatrix} B_{s2} \Delta_2 D_{c1} \\ B_{c1} + B_{c2} \Delta_1 D_{s2} D_{c1} \end{bmatrix};$$

$$C_1 = \begin{bmatrix} \Delta_1 C_s & \Delta_1 D_{s2} C_s \end{bmatrix}; \quad C_2 = \begin{bmatrix} D_{c2} \Delta_1 C_s & \Delta_2 C_c \end{bmatrix};$$

$$D_{11} = \begin{bmatrix} \Delta_1 D_{s1} \end{bmatrix}; \quad D_{12} = \begin{bmatrix} \Delta_1 D_{s2} D_{c1} \end{bmatrix};$$

$$D_{21} = \begin{bmatrix} D_{c2} \Delta_1 D_{s1} \end{bmatrix}; \quad D_{22} = \begin{bmatrix} \Delta_2 D_{c1} \end{bmatrix};$$

$$\Delta_1 = \begin{bmatrix} I_r - D_{s2} D_{c2} \end{bmatrix}^{-1}; \quad \Delta_2 = \begin{bmatrix} I_c + D_{c2} \Delta_1 D_{s2} \end{bmatrix}$$

Las matrices de transferencia en bucle cerrado desde r como entrada a y como salida; y desde r como entrada a u como salida son respectivamente:

$$T_{r,y} = C_1 (I_{n+k} s - A)^{-1} B_2 + D_{12} \quad (12)$$

$$T_{r,u} = C_2 (I_{n+k} s - A)^{-1} B_2 + D_{22} \quad (13)$$

El método de sintonización puede ser planteado como el siguiente problema de optimización multiobjetivo: encontrar los elementos $A_c, B_{c1}, B_{c2}, C_c, D_{c1}$ y D_{c2} con:

$$\min \mathbf{J} \quad (14)$$

sujeto a:

$$\lambda_i : |\lambda_i A - I_{n+k}| = 0, \forall i = 1, 2, \dots, (n+k) \in \mathbf{D} \quad (15)$$

donde

$$\mathbf{J} \in \mathfrak{X}^2 = [I_y \ I_u] \quad (16)$$

con

$$\mathbf{D} \subset \mathbf{C}_- = \{x : x = a + bj, |b/a| < 1, \forall a \in \mathbf{R}_-, \forall b \in \mathbf{R}\} \quad (17)$$

I_y es la función integral del cuadrado del error e I_u es la función integral del cuadrado de la acción de control. Entonces, I_y es un mapeo $I_y : \mathfrak{X}^r \rightarrow \mathfrak{X}$ e I_u es un mapeo de $I_u : \mathfrak{X}^c \rightarrow \mathfrak{X}$, estas integrales son definidas como:

$$I_y = \int_0^\infty (r - y)' Q (r - y) dt \quad (18)$$

$$I_u = \int_0^\tau u' R u dt \quad (19)$$

donde $Q \in \mathfrak{X}_+^{r \times r}$ y $R \in \mathfrak{X}^{c \times c}$ son matrices ponderadas definidas positivas. Las soluciones analíticas de esas integrales fueron deducidas cuando existe una entrada:

$$I_{y, servo} = K_2' B_2' P_y B_2 K_2 \quad (20)$$

$$I_{y, pulso} = 1' B_1' P_{yp} B_1 1 \quad (21)$$

$$I_{y, reg} = K_1' B_1' P_y B_1 K_1 \quad (22)$$

$$I_{u, servo} = K_2' B_2' P_u B_2 K_2 - K_2' B_2 (e^{A\tau})' P_u e^{A\tau} B_2 K_2$$

$$+ 2(A^{-1})(D_{21} K_2 - C_2 A^{-1} B_2 K_2)' R C_2 A^{-1}$$

$$\times (e^{A\tau} - I_{n+k}) B_2 K_2 + (D_{21} K_2 - C_2 A^{-1} B_2 K_2)' R$$

$$\times (D_{21} K_2 - C_2 A^{-1} B_2 K_2) \tau \quad (23)$$

$$I_{u, pulso} = 1' B_1' P_{up} B_1 1 \quad (24)$$

$$I_{u, reg} = K_1' B_1' P_u B_1 K_1 - K_1' B_1 (e^{A\tau})' P_u e^{A\tau} B_1 K_1$$

$$+ 2(A^{-1})(D_{21} K_1 - C_2 A^{-1} B_1 K_1)' R C_2 A^{-1}$$

$$\times (e^{A\tau} - I_{n+k}) B_1 K_1 + (D_{21} K_1 - C_2 A^{-1} B_1 K_1)' R$$

$$\times (D_{21} K_1 - C_2 A^{-1} B_1 K_1) \tau \quad (25)$$

Donde P_y, P_{yp}, P_u y P_{up} son resueltas por medio de las ecuaciones de Riccati:

$$A'P_y + P_yA = -(A^{-1})'C_1'QC_1A^{-1} \quad (26)$$

$$A'P_{yp} + P_{yp}A = -C_1'QC_1 \quad (27)$$

$$A'P_u + P_uA = -(A^{-1})'C_2'RC_2A^{-1} \quad (28)$$

$$A'P_{up} + P_{up}A = -C_2'RC_2 \quad (29)$$

y $K_2 \in \mathfrak{R}^7$ es la magnitud del escalón en $r(s) = s^{-1}K_2$ y $1' = [1 \ 1 \ \dots \ 1] \in \mathfrak{R}^1$ es el resultado de un pulso unitario en $w(s) = 1$.

3. Caso de estudio y estructura del controlador propuesto

3.1. Twin rotor mimo system

El sistema empleado para validar la anterior propuesta de control es el TRMS desarrollado por Feedback Instruments Limited™, el cual es mostrado en la Figura 1.



Figura 1: Twin Rotor MIMO System (TRMS) modelo 33-220.

El modelo dinámico Newtoniano del anterior TRMS, identificado en Gabriel (2008), es:

$$\frac{d\alpha_v}{dt} = \Omega_v \quad (30)$$

$$\frac{d\Omega_v}{dt} = \frac{1}{J_v}(M_G - M_{Fv} + M_{Av} - M_C + M_{MCt}) \quad (31)$$

$$\frac{d\varpi_m}{dt} = -\frac{1}{T_m}\varpi_m + \frac{1}{T_m}u_m \quad (32)$$

$$\frac{d\alpha_h}{dt} = \Omega_h \quad (33)$$

$$\frac{d\Omega_h}{dt} = \frac{1}{J_h}(-M_T - M_{Fh} + M_{Ah} + M_{MCm}) \quad (34)$$

$$\frac{d\varpi_t}{dt} = -\frac{1}{T_t}\varpi_t + \frac{1}{T_t}u_t \quad (35)$$

donde $\alpha_v, \Omega_v, \varpi_m, \alpha_h, \Omega_h, \varpi_t$ son los ángulos de desplazamiento vertical, velocidad vertical angular, pseudo-velocidad rotacional del rotor principal, ángulo de desplazamiento horizontal, velocidad angular horizontal y pseudo-velocidad rotacional del rotor respectivamente; u_m y u_t son las entradas del voltaje del motor del rotor principal y de cola, los cuales son entradas al sistema. Las salidas medidas son los ángulos de desplazamiento vertical y horizontal α_v y α_h respectivamente. El resto de las variables requeridas en (30)-(35) son definidas en los Apéndices A y B.

Como un punto de inicio en la metodología, un modelo lineal del sistema de estudio es necesario y por lo tanto fue obtenido en una expansión en series de Taylor. El modelo obtenido expresado en términos de (5) y (6) es definido por las siguientes matrices:

$$A_s = \begin{bmatrix} 0 & 1,0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -7,137 & -0,0315 & 9,420 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -0,751 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1,0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -0,229 & -0,347 & 2,5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2,325 \end{bmatrix};$$

$$B_{s2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0,354 \\ 0,75 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0,716 & 0 \\ 0 & 2,325 \end{bmatrix}$$

$C_s = I_6, B_{s1} = D_{s1} = D_{s2} = [0]$, donde las variables, expresadas como desviaciones con respecto al estado estacionario ($\alpha_{vs}, \Omega_{vs}, \varpi_{ms}, \alpha_{hs}, \Omega_{hs}, \varpi_{ts}$) son:

$$x = \begin{bmatrix} \alpha_v - \alpha_{vs} \\ \Omega_v - \Omega_{vs} \\ \varpi_m - \varpi_{ms} \\ \alpha_h - \alpha_{hs} \\ \Omega_h - \Omega_{hs} \\ \varpi_t - \varpi_{ts} \end{bmatrix}; w = [0]; u = \begin{bmatrix} u_m - u_{ms} \\ u_t - u_{ts} \end{bmatrix};$$

$$r = \begin{bmatrix} \alpha_{vd} - \alpha_{vds} \\ r_2 \\ r_3 \\ \alpha_{hd} - \alpha_{hds} \\ r_5 \\ r_6 \end{bmatrix}; y = x$$

α_{vd} y α_{hd} son los valores del punto de consigna de los ángulos de desplazamiento y r_i son las pseudo-variables de consigna. Es importante notar que las variables de salida son solo los ángulos de desplazamiento α_v y α_h pero el vector de salida y fue declarado igual al vector de estado debido al hecho que el controlador utiliza el vector de estado completo para una retroalimentación.

3.2. Estructura del controlador propuesto

La estrategia de control implementada es expresada en términos de (7) y (8) de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} \\ &+ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} r \\ &+ \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} y \end{aligned} \quad (36)$$

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{i11} & k_{i12} \\ k_{i21} & k_{i22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -k_{p11} & \cdots & -k_{p16} \\ -k_{p21} & \cdots & -k_{p26} \end{bmatrix} y \quad (37)$$

Donde (36) y (37) representan un controlador con ponderación en el punto de consigna (con $D_{c1} = 0$) con retroalimentación de estado. Cabe notar que con una adecuada selección de matrices en general (7) y (8) representan este algoritmo de control lineal. Por lo tanto, el procedimiento de sintonización es por medio de la elección de los elementos de (37) obtenidos por la solución del problema de optimización planteado en (14) a (17). Los valores de estado estacionario fueron: $\alpha_{vs} = 0,0$ rad, $\Omega_{vs} = 0,0$ rad/s, $\varpi_{ms} = 0,375$ [1], $\alpha_{hs} = 0,0$ rad, $\Omega_{hs} = 0,0$ rad/s, $\varpi_{ts} = -0,2355$ [1], $\alpha_{vds} = 0,0$ rad y $\alpha_{hds} = 0,0$ rad. Las integrales (18) y (19) fueron evaluadas analíticamente con las siguientes matrices de ponderación:

$$Q = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; R = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Con lo que se representa la estructura del controlador lineal con retroalimentación de estados con acción proporcional e integral.

4. Ajuste Pareto-óptimo robusto

Para el TRMS en bucle cerrado, pueden evaluarse cambios servo utilizando los índices $I_{y, servo}$ (20), $I_{u, servo}$ (23) y también con una modificación a los índices $I_{y, pulso}$ (21) y $I_{u, pulso}$ (24). Por lo tanto, las soluciones analíticas de éstos dos últimos son:

$$I_{y, pulso} = 1' B_2' P_{yp} B_2 1 \quad (38)$$

$$I_{u, pulso} = 1' B_2' P_{up} B_2 1 \quad (39)$$

Por otro lado, no se consideran entradas exógenas en el modelo del sistema ($B_{s1} = 0$) ni tampoco en el sistema físico, por lo tanto, si B_1 tiene un valor numérico no representa al vector de entradas exógenas. Bajo esta consideración, se omiten los índices $I_{y, reg}$ (22) e $I_{u, reg}$ (25). A continuación, serán descritas cada una de las etapas del proceso de ajuste mediante optimización multi-objetivo.

4.1. Definición del problema multi-objetivo

Debido a que el TRMS tiene dos señales de control y dos salidas medidas. Es necesario separar los diferentes elementos de las integrales (20, 23, 38, 39) $I_{y_i, \psi}$ e $I_{u_j, \psi}$ (donde ψ puede ser servo o pulso). Entonces, las matrices Q y R fueron definidas de la siguiente forma:

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ para } I_{y1, \psi} \text{ y}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ para } I_{y2, \psi};$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ para } I_{u1, \psi} \text{ y}$$

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, R = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ para } I_{u2, \psi}$$

Por lo que se obtiene los índices $I_{y1, servo}$, $I_{y2, servo}$, $I_{y1, pulso}$, $I_{y2, pulso}$, $I_{u1, servo}$, $I_{u2, servo}$, $I_{u1, pulso}$ e $I_{u2, pulso}$. Aunque estos indicadores pueden ser abordados simultáneamente mediante la optimización multi-objetivo, es muy posible que la convergencia de las soluciones se vea afectada por las problemáticas asociadas a la optimización de muchos objetivos; usualmente, a partir de cuatro objetivos las capacidades de exploración de los algoritmos multi-objetivo puede entrar en conflicto con sus capacidades de explotación, como señala Corne y Knowles (2007). Por lo tanto, se agruparán los anteriores objetivos mediante una sumatoria ponderada de las diferentes integrales como:

$$I_y = w_{1,i} I_{y_i, servo} + w_{2,i} I_{y_i, pulso} \quad (40)$$

$$I_u = w_{3,j} I_{u_j, servo} + w_{4,j} I_{u_j, pulso} \quad (41)$$

De esta forma, la fase de optimización se llevará en un espacio de 2 objetivos; la fase de análisis y selección se hará tanto en el espacio original como en el espacio simplificado. La técnica de agrupamiento para mantener el esquema multi-objetivo en espacios más reducidos es usada como alternativa cuando se optimizan muchos objetivos (Ishibuchi et al. (2008)). El balance entre desempeño y esfuerzo de control es ajustado por las ponderaciones $w_{1,i}$, $w_{2,i}$, $w_{3,j}$, $w_{4,j}$. Los subíndices i, j representan el número de salidas medidas y señales de control respectivamente. Por lo tanto, (16) es un mapeo $\mathbf{J} : \mathcal{R}^r \times \mathcal{R}^c \rightarrow \mathcal{R}^2$ donde los dos elementos (comúnmente) están en conflicto, y por ello la optimalidad de Pareto es empleada para encontrar el intercambio de prestaciones deseado. Los detalles de la optimización se presentan a continuación.

4.2. Proceso de optimización

El método de sintonización propuesto para la solución al problema definido en (14) y (15) como restricción, es una serie de subproblemas de optimización propuesto por Carrillo-Ahumada et al. (2011), cada uno es resuelto por una modificación del algoritmo Complex descrito por Ruiz-López et al. (2006). La serie de subproblemas de optimización es:

- Encontrar un número de parámetros del controlador que coloquen todos los valores propios de la matriz A en C_{-} .

La solución de este subproblema encuentra una solución estable. El problema fue resuelto por la minimización de la abscisa espectral de A (la máxima parte real de los valores propios de A). El óptimo que se encuentra es tomado como condición inicial para los siguientes subproblemas.

- Encontrar un conjunto de parámetros del controlador que coloquen todos los valores propios de la matriz A en una región D (17). Este subproblema fue resuelto por la minimización del máximo $|b/a|$ (17) con la abscisa espectral < 0 como restricción. El óptimo encontrado es tomado como condición inicial para el siguiente subproblema. Adicionalmente, los resultados del segundo subproblema muestra que las diferentes integrales $I_{y, servo}$, $I_{y, pulso}$, $I_{u, servo}$ e $I_{u, pulso}$ pueden tener diferentes órdenes de magnitud. Por lo tanto, es necesario la elección de las ponderaciones $w_{i,j}$ para que cada término de (40)-(41) tenga aproximadamente el mismo orden de magnitud. La elección fue realizada considerando la integral con el valor numérico más grande como valor de referencia y elegir diferentes $w_{1,i}$, $w_{2,i}$, $w_{3,j}$, $w_{4,j}$ de manera que el resto de los términos en (40)-(41) fueran aproximados al orden de magnitud utilizado como referencia.
- Dos subproblemas principales fueron resueltos: uno de ellos es encontrar el conjunto de parámetros del controlador que minimicen I_y con todos los valores propios en D como restricción; y el otro para minimizar I_u con la misma restricción. El planteamiento de estos subproblemas genera los extremos del frente de Pareto en una gráfica I_y contra I_u .
- Una serie de subproblemas de optimización fueron resueltos para minimizar I_y con diferentes valores de I_u (y todos los valores propios en D). Los valores diferentes de I_u como restricción fueron intermedios entre los extremos del frente de Pareto. Estos últimos subproblemas de optimización construyen (tras un posible proceso de filtrado) el contorno del frente de Pareto, del cual el mejor controlador es elegido.

4.3. Proceso de selección

Aunque existe una gran variedad de técnicas y visualizaciones para el proceso de selección (Lotov y Miettinen (2008)), al tratarse de un problema con dos objetivos, una inspección del frente de Pareto suele ser suficiente. Para la selección se empleará el criterio de Nash, que ha sido empleado con éxito en anterioridad para seleccionar controladores en problemas multi-objetivo de ingeniería de control (Sánchez y Vilanova (2013a,b)). En algunos casos, dicho proceso de selección coincide con la solución de menor norma infinito (Reynoso-Meza et al. (2014c)) dentro del frente aproximado.

5. Resultados

5.1. Resultado de la optimización y selección

En las Figuras 2 y 3 se muestran los frentes de Pareto para el espacio reducido (2 objetivos) y el espacio ampliado (8 obje-

tivos) respectivamente. Se observa que aunque hay puntos dominantes en la Figura 2, que usualmente son removidos tras un proceso de filtrado, en el espacio de objetivos ampliado (Figura 3) no los hay, y por ello se conservan para la etapa de selección. El conjunto de Pareto formado por los parámetros de control es: $k_{p11} \in [-1,02, 4,98]$, $k_{p12} \in [4,07, 7,49]$, $k_{p13} \in [8,37, 9,71]$, $k_{p14} \in [0,86, 2,98]$, $k_{p15} \in [1,67, 2,98]$, $k_{p16} \in [-1,96, -1,16]$, $k_{i11} \in [-8,76, -2,12]$, $k_{i12} \in [-0,47, 0,89]$, $k_{p21} \in [-0,70, 0,56]$, $k_{p22} \in [-3,17, -1,15]$, $k_{p23} \in [-1,14, 1,40]$, $k_{p24} \in [-7,32, -3,77]$, $k_{p25} \in [-9,81, -3,74]$, $k_{p26} \in [-6,30, -3,93]$, $k_{i21} \in [0, 0,69]$ y $k_{i22} \in [-1,65, -0,86]$.

En la Tabla 1 se muestra los índices de desempeño para cada salida medida de control (20,23,38, 39), el parámetro D (17), sumatoria ponderada para la salida y acción de control (40, 41) que se presenta con el frente de Pareto reducido (Figura 2) y el ampliado (Figura 3). Además en esta misma tabla se presentan las normas-2 y norma- ∞ de las matrices en bucle cerrado de (12) y (13) considerando también los valores máximos, mínimos y promedio.

El número de controlador referido en la Tabla 1 indica un controlador óptimo dentro de las regiones definidas en el primer párrafo de ésta sección y cada uno de los controladores están graficados en las Figuras 2 y 3 (donde solo se señalan tres de ellos: 10, 14 y 17). Es complicado intentar establecer la relación de todos los índices de desempeño mostrados en la Tabla 1, y por ello las técnicas de visualización suelen ser valiosas en este proceso de selección. Con la información anterior y junto con la Figura 3, se determina que el controlador con el grado de compromiso deseado entre los objetivos de diseño es el número 10, de acuerdo al criterio de Nash, con los siguientes parámetros de control: $k_{p11} = -0,043$, $k_{p12} = 4,236$, $k_{p13} = 8,493$, $k_{p14} = 1,039$, $k_{p15} = 1,726$, $k_{p16} = -1,299$, $k_{i11} = -2,707$, $k_{i12} = 0,428$, $k_{p21} = -0,183$, $k_{p22} = -1,331$, $k_{p23} = -0,854$, $k_{p24} = -3,984$, $k_{p25} = -3,929$, $k_{p26} = -4,123$, $k_{i21} = 0,063$ y $k_{i22} = -1,385$.

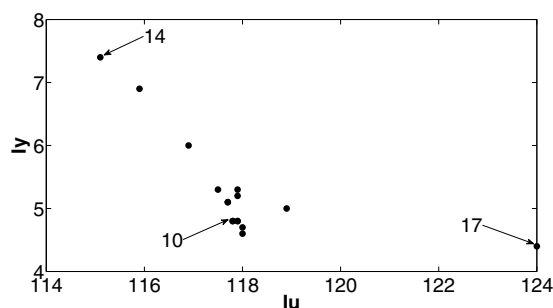


Figura 2: Espacio de objetivos 2D (reducido) del TRMS utilizando I_y e I_u con $w_{1,1} = 1$, $w_{1,2} = 1$, $w_{2,1} = 10$, $w_{2,2} = 10$, $w_{3,1} = 1 \times 10^{-2}$, $w_{3,2} = 1$, $w_{4,1} = 10$, $w_{4,2} = 1 \times 10^2$.

Para observar la dinámica del sistema no lineal en el dominio del tiempo y los efectos de acoplamiento, se utilizaron los

Tabla 1: Índices de desempeño para el TRMS.

Controlador	$I_{y,pulso}[y_1 \ y_2]$	$I_{y,servo}[y_1 \ y_2]$	$I_{u,pulso}[u_1 \ u_2]$	$I_{u,servo}[u_1 \ u_2]$	D	I_u	I_y	$\ T_{ry}(s)\ _2$	$\ T_{ry}(s)\ _{\infty}$	$\ T_{ru}(s)\ _2$	$\ T_{ru}(s)\ _{\infty}$				
1	0.143	0.158	2.226	2.355	0.406	0.047	114.288	3.169	0.0	117.911	4.883	0.845	1.2789	0.8256	0.7973
2	0.089	0.102	3.430	3.316	0.161	0.024	112.612	3.112	0.0	115.910	6.936	0.693	1.2974	0.656	0.7979
3	0.117	0.106	2.588	3.261	0.337	0.024	113.386	3.144	0.0	116.891	6.071	0.770	1.2789	0.783	0.7976
4	0.150	0.117	2.141	2.935	0.443	0.031	114.261	3.183	0.0	117.918	5.343	0.785	1.2789	0.774	0.7972
5	0.139	0.137	2.271	2.578	0.387	0.038	114.152	3.169	0.047	117.747	5.125	0.819	1.2789	0.808	0.7973
6	0.142	0.162	2.241	2.338	0.405	0.051	114.277	3.167	0.055	117.899	4.882	0.837	1.2789	0.814	0.7972
7	0.139	0.135	2.278	2.613	0.383	0.037	114.132	3.169	0.089	117.721	5.164	0.816	1.2789	0.803	0.7973
8	0.141	0.167	2.247	2.295	0.402	0.048	114.270	3.166	0.107	117.887	4.850	0.848	1.2789	0.822	0.7972
9	0.136	0.135	2.321	2.610	0.371	0.038	114.071	3.166	0.111	117.645	5.201	0.811	1.2789	0.796	0.7972
10	0.140	0.181	2.290	2.196	0.390	0.061	114.294	3.165	0.133	117.910	4.807	0.873	1.2789	0.842	0.7973
11	0.150	0.122	2.147	2.841	0.428	0.031	114.312	3.183	0.178	117.954	5.260	0.827	1.2789	0.825	0.7972
12	0.143	0.200	2.272	2.039	0.422	0.078	114.367	3.169	0.204	118.037	4.653	0.920	1.2789	0.907	0.7976
13	0.133	0.128	2.346	2.756	0.372	0.030	113.981	3.163	0.275	117.546	5.363	0.824	1.2789	0.811	0.7972
14	0.077	0.098	3.829	3.448	0.147	0.023	111.893	3.084	0.290	115.147	7.452	0.795	1.2789	0.756	0.7971
15	0.148	0.173	2.171	2.220	0.453	0.060	114.397	3.171	0.225	118.080	4.712	0.884	1.2789	0.876	0.7973
16	0.199	0.120	1.727	2.950	0.814	0.047	118.940	3.213	0.178	118.940	4.996	0.800	1.2789	0.888	0.7972
17	0.373	0.155	1.126	2.831	4.221	0.420	116.163	3.279	0.0	124.084	4.485	1.163	1.2872	2.107	0.9137
Valor mínimo	0.077	0.098	1.126	2.039	0.147	0.023	111.893	3.084	0.0	115.147	4.485	0.693	1.2789	0.656	0.7971
Valor máximo	0.373	0.200	3.829	3.448	4.221	0.420	116.163	3.279	0.290	124.084	7.452	1.163	1.2974	2.107	0.9137
Valor promedio	0.150	0.141	2.332	2.681	0.620	0.064	114.101	3.169	0.111	117.955	5.305	0.842	1.2805	0.888	0.8042

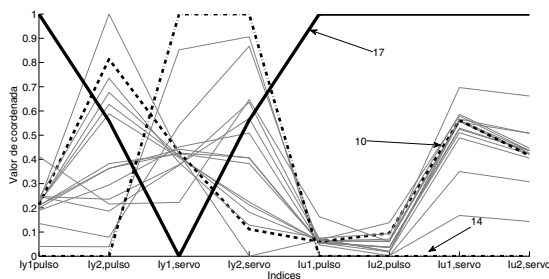


Figura 3: Frente de Pareto ampliado del TRMS (visualización mediante *Parallel Coordinates*). Controlador 10 (- -), controlador 14 (- · -), controlador 17 (-).

controladores que forman el frente de Pareto reducido (Figura 3). Se realizaron dos pruebas con el servosistema en simulación. La primera prueba fue un cambio en escalón en el punto de consigna del ángulo de desplazamiento vertical a $\alpha_{vd} = -0,2$ rad manteniendo constante el ángulo desplazamiento horizontal $\alpha_{vh} = 0,0$ rad (Figura 4); y la segunda prueba se realizó manteniendo constante el ángulo desplazamiento vertical $\alpha_{vd} = 0,0$ rad con un cambio en escalón en el punto de consigna del ángulo de desplazamiento horizontal a $\alpha_{vh} = -0,2$ rad (Figura 5). Estos controladores fueron evaluados con las dos pruebas en el servosistema comentadas anteriormente, utilizando la integral del error absoluto del error (IAE por sus siglas en inglés (42)) y la integral del valor absoluto de la derivada de la acción de control (IADU por sus siglas en inglés (43)) Vargas et al. (2011), Huba (2013), Skogestad (2003), Vilanova et al. (2012)):

$$J_{e1} = \text{IAE} = T_k \sum_{k=1}^N e(k)^2 \quad (42)$$

$$J_{u1} = \text{IADU} = \sum_{k=1}^N |u(k) - u(k-1)| \quad (43)$$

donde k es la muestra, $e(k)$ es el error de seguimiento, $u(k)$ es la señal de control N es el número de muestras en un tiempo de muestreo T_k con $[t_0, t_f]$. Los valores numéricos de $\text{IAE}[e_1 \ e_2]$ e $\text{IADU}[e_1 \ e_2]$ para ambas pruebas con el servosistema son mostradas en la Tabla 2. Los valores de la Tabla 2 demuestran que el controlador 10 es el que obtiene el rendimiento deseado entre los índices de error y de la acción de control.

5.2. Validación experimental

En la práctica, la retroalimentación del estado puede ser implementada por medio de un observador Luenberger. El observador es definido por:

$$\hat{x}(k+1) = A_{obs}\hat{x}(k) + L_{obs}(\varphi(k) - \hat{\varphi}(k)) + B_{obs}u(k) \quad (44)$$

donde $\varphi'(k) = [\alpha_v \ \alpha_h]$ son las mediciones en línea de los ángulos vertical y horizontal $\hat{\varphi}(k) = C_{obs}\hat{x}(k)$. Las matrices del observador fueron obtenidas por medio de una asignación de polos. Las matrices son,

$$A_{obs} = e^{A_s\tau_d}; \quad B_{obs} = A_s^{-1}(e^{A_s\tau_d} - I)B_{s2};$$

$$C_{obs} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad L_{obs} = \begin{bmatrix} 0,501 & 0,109 \\ 3,637 & 1,706 \\ 0,875 & 0,625 \\ 0,017 & 0,403 \end{bmatrix}$$

Por lo tanto, el estado retroalimentado utilizado en (36) y (37) es $y = \hat{x}(k+1)$. Se eligieron para una evaluación experimental los controladores 14, 17 y 10 debido a que representan el compromiso para I_u, I_y , de forma equilibrada I_u e I_y respectivamente como se presenta en la Figura 2. Como se observa en la Tabla 1, los controladores se encuentran en diferentes regiones D.

Los controladores elegidos fueron implementados con un periodo de control de $\tau_d = 0,02$ s, en un PXI de National Instruments[®] y programados en LabView[®]. Los resultados

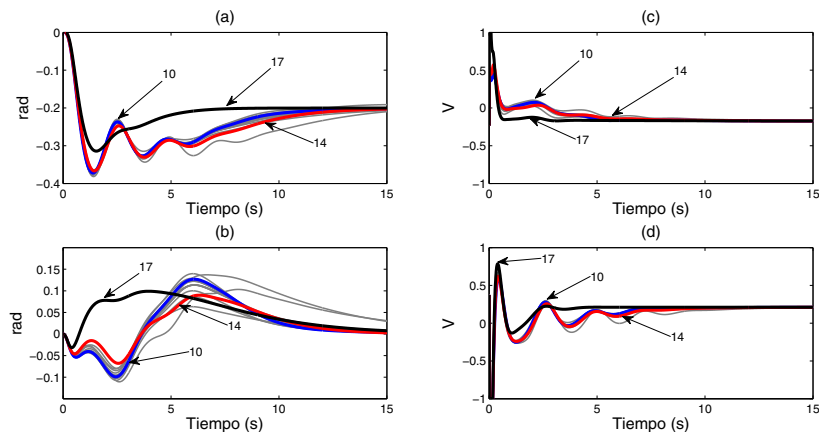


Figura 4: Efectos de acoplamiento de la respuesta dinámica del modelo no lineal del TRMS para el ángulo vertical como respuesta a un cambio en escalón en el punto de consigna de $\alpha_{vd} = -0,2$ rad (a) y $\alpha_{vh} = 0,0$ rad (b) con u_m (c) y u_d (d).

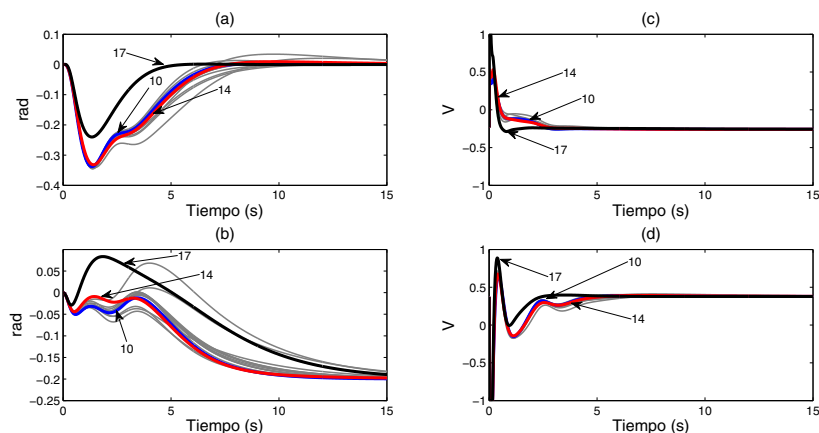


Figura 5: Efectos de acoplamiento de la respuesta dinámica del modelo no lineal del TRMS para el ángulo horizontal como respuesta a un cambio en escalón en el punto de consigna de $\alpha_{vd} = 0,0$ rad (a) y $\alpha_{vh} = -0,2$ rad (b) con u_m (c) y u_d (d).

experimentales de los controladores son mostrados en las Figuras 6 y 7, donde el desempeño servo fue obtenido experimentalmente como una respuesta a un cambio en escalón del punto de consigna y se muestran los efectos de acoplamiento. La evaluación de estos controladores con el sistema real se realizó con los índices IAE (42) e IADU (43) mostrándose en la Tabla 3. La conclusión obtenida por simulación se confirma experimentalmente como muestra en la Tabla 3. El controlador 10 es el que más equilibra a todos los índices de acuerdo al criterio de Nash.

En la Figura 6, se muestra la dinámica del sistema ante un cambio en el punto de consigna de α_{vd} de 0.0 rad a -0.2 rad manteniendo $\alpha_{vh} = 0,0$ rad. En la Figura 6(a), los tres controladores presentan un tiempo de asentamiento de aproximadamente 10 s. El controlador 17 presenta un mayor grado de compromiso con I_y , por lo tanto no presenta tanto bajo impulso como los otros

controladores.

El efecto de acoplamiento entre los ejes es mostrado en la Figura 6(b). Al variar α_{vd} de 0.0 rad a -0.2 rad manteniendo $\alpha_{vh} = 0,0$ rad, el controlador que rechaza efectos de acoplamiento es el 17 y no hay presencia significativa de sobre y bajo impulsos como en los otros controladores. En la Tabla 3 ($\alpha_{vd} = -0,2$ rad con $\alpha_{vh} = 0,0$ rad) con respecto a $IAE[e_1]$, el controlador 17 domina a los demás controladores. Con lo que respecta a $IAE[e_2]$, el controlador 10 presenta domina a los otros.

Las señales de control u_m y u_d (Figuras 6(c) y (d)) en forma gráfica no se observa una variación relevante, pero conforme a la Tabla 3 ($\alpha_{vd} = -0,2$ rad con $\alpha_{vh} = 0,0$ rad) con respecto a $IADU[u_1]$ el controlador 17 domina a los demás. Para $IADU[u_2]$, el controlador 10 es el que domina a los otros.

En la Figura 7 se muestra la dinámica del sistema ante un

Tabla 2: Desempeño de controladores con el sistema no lineal en simulación como respuesta a un cambio en escalón en el punto de consigna.

Controlador	$\alpha_{vd} = -0,2 \text{ rad}$ con $\alpha_{vh} = 0,0 \text{ rad}$				$\alpha_{vd} = 0,0 \text{ rad}$ con $\alpha_{vh} = -0,2 \text{ rad}$			
	IAE[e_1 e_2]		IADU[u_1 u_2]		IAE[e_1 e_2]		IADU[u_1 u_2]	
1	320.653	452.287	4.500	1.473	339.263	447.813	4.999	1.602
2	602.445	883.771	4.718	2.339	640.316	699.042	5.694	2.514
3	538.294	1039.324	4.595	1.989	402.114	848.878	5.228	1.988
4	420.178	348.688	4.592	1.541	452.337	317.562	5.077	1.687
5	344.155	494.563	4.524	1.566	365.024	452.595	5.052	1.701
6	330.840	456.600	4.502	1.504	354.778	452.384	5.010	1.629
7	348.636	505.265	4.524	1.550	368.909	459.097	5.057	1.683
8	318.494	447.571	4.488	1.512	338.274	445.975	4.978	1.631
9	354.770	511.014	4.527	1.564	375.852	464.761	5.059	1.695
10	305.369	374.613	4.499	1.468	337.467	420.541	5.009	1.607
11	343.370	345.494	4.527	1.595	385.717	342.119	5.073	1.734
12	298.550	379.042	4.522	1.547	293.124	438.987	5.100	1.671
13	323.383	487.718	4.463	1.629	333.434	443.350	4.920	1.700
14	360.919	385.590	4.485	1.777	428.533	367.081	5.044	1.852
15	298.410	414.041	4.489	1.599	310.947	431.017	5.010	1.693
16	391.166	515.688	4.619	2.177	394.651	301.994	4.962	2.279
17	102.379	894.531	4.582	2.591	80.840	440.070	4.503	2.485
Valor mínimo	102.379	345.494	4.463	1.468	80.840	301.994	4.503	1.602
Valor máximo	602.445	1039.324	4.718	2.591	640.316	848.878	5.694	2.514
Valor promedio	353.059	525.635	4.539	1.731	364.799	457.251	5.046	1.832

Tabla 3: Desempeño de controladores con el sistema real como respuesta a un cambio en escalón en el punto de consigna.

Controlador	$\alpha_{vd} = -0,2 \text{ rad}$ con $\alpha_{vh} = 0,0 \text{ rad}$				$\alpha_{vd} = 0,0 \text{ rad}$ con $\alpha_{vh} = -0,2 \text{ rad}$			
	IAE[e_1 e_2]		IADU[u_1 u_2]		IAE[e_1 e_2]		IADU[u_1 u_2]	
10	67.961	147.242	16.744	8.389	13.862	12.818	8.559	4.051
14	104.862	153.760	19.850	11.912	31.753	36.821	11.435	6.511
17	65.495	148.958	16.129	8.643	4.669	23.363	9.273	5.328

cambio en el punto de consigna de α_{vh} de 0.0 rad a -0.2 rad manteniendo constante $\alpha_{hd} = 0,0 \text{ rad}$. En la Figura 7(b) se observa que los controladores 14 y 17 tienen un tiempo de asentamiento de aproximadamente 5 s, a comparación del controlador 10 que presenta un tiempo de asentamiento de 3 s.

El efecto de acoplamiento entre los ejes es mostrado en la Figura 7(a). Al variar α_{vh} de 0.0 rad a -0.2 rad, manteniendo $\alpha_{vd} = 0,0 \text{ rad}$ el controlador 17 rechaza efectos de acoplamiento al mantenerse en el punto de consigna con un ancho de banda menor que los otros dos controladores. En la Tabla 3 ($\alpha_{vd} = 0,0 \text{ rad}$ con $\alpha_{vh} = -0,2 \text{ rad}$) con respecto a IAE[e_1] el controlador 17 domina a los demás aunque para IAE[e_2] el controlador 10 domina a los otros.

Las señales de control u_m y u_d (Figuras 7(c) y (d)) en forma gráfica no presenta variación relevante. pero conforme a la Tabla 3 ($\alpha_{vd} = 0,0 \text{ rad}$. con $\alpha_{vh} = -0,2 \text{ rad}$) con respecto a IADU[u_1] y a IADU[u_2] el controlador 10 domina a los demás.

Por lo tanto el controlador que presenta el compromiso deseado en los índices IAE y IADU es el 10. El cual se encuentra más equilibrado entre I_u e I_y como se observa en el frente de Pareto reducido (Figura 2) y ampliado (Figura 3) de acuerdo al criterio de Nash.

6. Conclusiones

La minimización simultánea de la suma del cuadrado del error contra la señal de control produce un frente de Pareto 2D

el cual muestra un conjunto de controladores óptimos. La selección está basada en encontrar un controlador Pareto-óptimo con un intercambio de prestaciones *equilibrado* entre I_y e I_u , de acuerdo al criterio de Nash. Los controladores seleccionados han mostrado buenos resultados experimentales, por lo que se valida la técnica aquí presentada como una herramienta eficaz para el ajuste de controladores. El trabajo futuro se orientará al ajuste de controladores de sistemas más complejos, así como la incorporación de mecanismos para la optimización de 4 o más objetivos de diseño.

English Summary

Tuning of Pareto-optimal robust controllers for multivariable systems. Application on helicopter of two-degrees-of-freedom

Abstract

The tuning of Pareto-optimal robust controllers was applied to improve the performance of a helicopter with two-degrees-of-freedom with a linear control algorithm. The tuning procedure is based on the simultaneous minimization of the integral of square sum of errors and the integral of square sum of control action. A 2D Pareto front is built with these integrals. Afterwards, a decision-making process is carried out to select the most preferable controller. Experimental results on the physical platform validate the tuning procedure as practical and reliable.

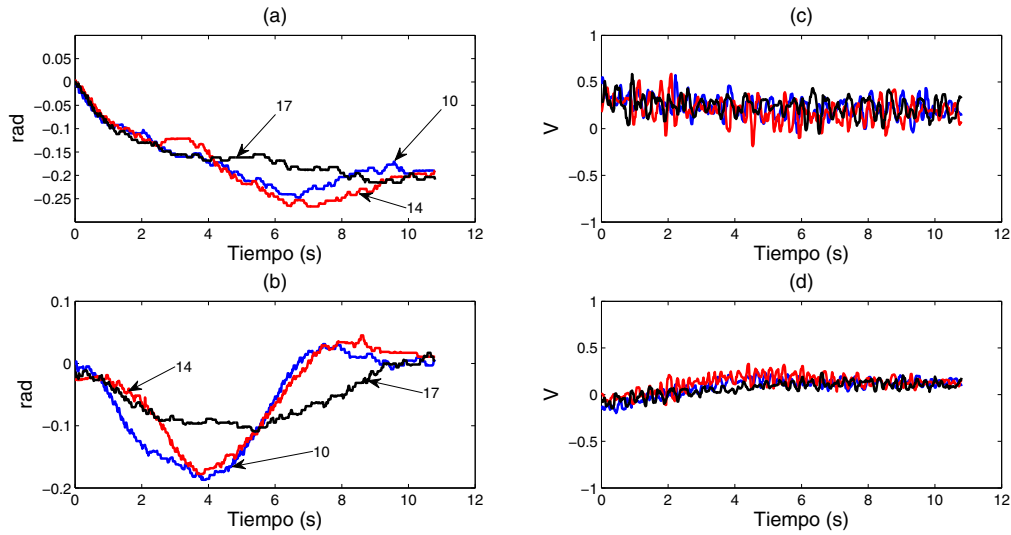


Figura 6: Efectos de acoplamiento de la respuesta dinámica del TRMS para el ángulo vertical como respuesta a un cambio en escalón en el punto de consigna de $\alpha_{vd} = -0,2$ rad (a) y $\alpha_{vh} = 0,0$ rad (b) con u_m (c) y u_d (d). Controlador 10 (-), controlador 14 (-), controlador 17 (-).

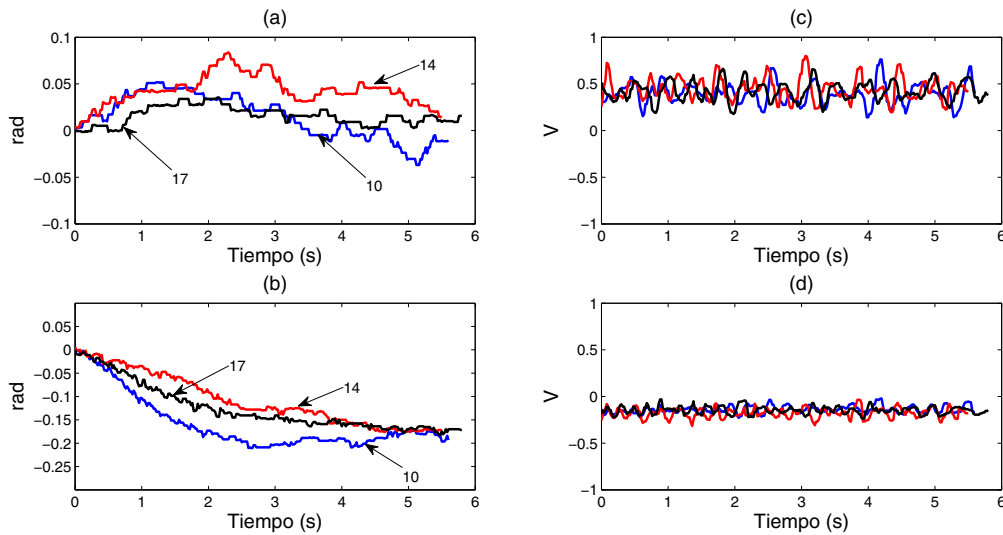


Figura 7: Efectos de acoplamiento de la respuesta dinámica del TRMS para el ángulo horizontal como respuesta a un cambio en escalón en el punto de consigna de $\alpha_{vd} = 0,0$ rad (a) y $\alpha_{vh} = -0,2$ rad (b) con u_m (c) y u_d (d). Controlador 10 (-), controlador 14 (-), controlador 17 (-).

Keywords:

Nonlinear system, robust control, optimal control, performance indices, real-time.

Agradecimientos

Los autores agradecen a la Dirección General de Educación Tecnológica Superior (DGEST), al Consejo Nacional de Cien-

cia y Tecnología (CONACyT) por el apoyo parcial al proyecto titulado "Control en L2/D". Al programa de mejoramiento del profesorado (PROMEP) por el proyecto PROMEP/103.5/12/7959, UNPA-PTC-119. Al Consejo Nacional de Desarrollo Científico y Tecnológico de Brasil - CNPq (proyecto BJT 304804/2014-2). Al Ministerio de Economía y Competitividad, gobierno de España (proyectos TIN2011-28082 y ENE2011-25900).

Referencias

- Ahmad, S., Chipperfield, A., Tokhi, M., 2000a. Modelling and control of a twin rotor multi-input multi-output system. En: American Control Conference, 2000. Proceedings of the 2000. Vol. 3. pp. 1720–1724 vol.3.
- Ahmad, S., Chipperfield, A., Tokhi, O., 2000b. Dynamic modeling and optimal control of a twin rotor mimo system. En: National Aerospace and Electronics Conference, 2000. NAECON 2000. Proceedings of the IEEE 2000. pp. 391–398.
- Carrillo-Ahumada, J., Rodríguez-Jimenes, G., García-Alvarado, M., 2011. Tuning optimal-robust linear mimo controllers of chemical reactors by using pareto optimality. *Chemical Engineering Journal* 174 (1), 357–367.
- Coello Coello, C., 2006. Evolutionary multi-objective optimization: A historical view of the field. *IEEE Computational Intelligence Magazine* 1 (1), 28–36.
DOI: 10.1109/MCI.2006.1597059
- Come, D. W., Knowles, J. D., 2007. Techniques for highly multiobjective optimisation: some nondominated points are better than others. En: Proceedings of the 9th annual conference on Genetic and evolutionary computation. GECCO '07. ACM, New York, NY, USA, pp. 773–780.
- CSS, 2012. Unmanned aerial vehicle. special issue. *IEEE Control Systems magazine* 32 (5).
- Figueira, J., Greco, S., Ehr Gott, M., 2005. Multiple criteria decision analysis: State of the art surveys. Springer international series.
- Fregene, K., 2012. Unmanned aerial vehicles and control: Lockheed martin advanced technology laboratories. *Control Systems, IEEE* 32 (5), 32–34.
DOI: 10.1109/MCS.2012.2205474
- Gabriel, C., 2008. Modelling, simulation and control of a twin rotor mimo-system. Master thesis, Polytechnic University of Valencia, Spain.
- García-Sanz, M., Elso, J., 2007a. Ampliación del benchmark de diseño de controladores para el cabeceo de un helicóptero. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 4 (1), 107–110.
- García-Sanz, M., Elso, J., 2007b. Resultados del benchmark de diseño de controladores para el cabeceo de un helicóptero. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 4 (4), 117–120.
- García-Sanz, M., Elso, J., Egaña, I., 2006. Control del ángulo de cabeceo de un helicóptero como benchmark de diseño de controladores. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 3 (2), 111–116.
- García-Alvarado, M., Ruiz-López, I., 2010. A design method for robust and quadratic optimal mimo linear controllers. *Chemical Engineering Science* 65 (11), 3431–3438.
- Hernández, L. H., Pestana, J., Palomeque, D. C., Campoy, P., Sanchez-Lopez, J. L., 2013. Identificación y control en cascada mediante inversión de no linealidades del cuatrirrotor para el concurso de ingeniería de control cea ifac 2012. *Revista Iberoamericana de Automática e Informática Industrial* 10 (3), 356–367.
- Huba, M., 2013. Performance measures, performance limits and optimal PI control for the IPDT plant. *Journal of Process Control* 23 (4), 500–515.
- Ishibuchi, H., Tsukamoto, N., Nojima, Y., 2008. Evolutionary many-objective optimization: A short review. En: *Evolutionary Computation, 2008. CEC 2008. (IEEE World Congress on Computational Intelligence)*. IEEE Congress on.
- Juang, J.-G., Huang, M.-T., Liu, W.-K., sept. 2008a. PID control using presearched genetic algorithms for a mimo system. *Systems, Man, and Cybernetics, Part C: Applications and Reviews, IEEE Transactions on* 38 (5), 716–727.
- Juang, J.-G., Lin, R.-W., Liu, W.-K., 2008b. Comparison of classical control and intelligent control for a mimo system. *Appl. Math. Comput.* 205, 778–791.
- Juang, J.-G., Liu, W.-K., Lin, R.-W., 2011. A hybrid intelligent controller for a twin rotor mimo system and its hardware implementation. *ISA Transactions* 50, 609–619.
- Liu, C.-S., Chen, L.-R., Li, B.-Z., Chen, S.-K., Zeng, Z.-S., may 2006. Improvement of the twin rotor mimo system tracking and transient response using fuzzy control technology. En: *Industrial Electronics and Applications, 2006 1ST IEEE Conference on*. pp. 1–6.
- Lotov, A., Miettinen, K., 2008. Visualizing the Pareto frontier. En: Branke, J., Deb, K., Miettinen, K., Slowinski, R. (Eds.), *Multiobjective Optimization*. Vol. 5252 of Lecture Notes in Computer Science. Springer Berlin / Heidelberg, pp. 213–243.
- Marler, R., Arora, J., 2004. Survey of multi-objective optimization methods for engineering. *Structural and Multidisciplinary Optimization* (26), 369–395.
- Miettinen, K. M., 1998. *Nonlinear multiobjective optimization*. Kluwer Academic Publishers.
- Nejjari, F., Rotondo, D., Puig, V., Innocenti, M., june 2011. Lpv modelling and control of a twin rotor mimo system. En: *Control Automation (MED), 2011 19th Mediterranean Conference on*. pp. 1082–1087.
- Rahideh, A., Shaheed, M., april 2009. Robust model predictive control of a twin rotor mimo system. En: *Mechatronics, 2009. ICM 2009. IEEE International Conference on*. pp. 1–6.
- Rahideh, A., Shaheed, M., 2012. Constrained output feedback model predictive control for nonlinear systems. *Control Engineering Practice* 20 (4), 431–443.
- Rahideh, A., Shaheed, M., Huijberts, H., june 2008. Stable adaptive model predictive control for nonlinear systems. En: *American Control Conference, 2008*. pp. 1673–1678.
- Reynoso-Meza, G., García-Nieto, S., Sanchis, J., Blasco, F., 2013. Controller tuning by means of multi-objective optimization algorithms: A global tuning framework. *Control Systems Technology, IEEE Transactions on* 21 (2), 445–458.
- Reynoso-Meza, G., Sanchis, J., Blasco, X., Herrero, J. M., August 2014a. A stabilizing PID controller sampling procedure for stochastic optimizers. En: *Memories of the 19th World Congress IFAC 2014*. pp. 8158–8163.
- Reynoso-Meza, G., Sanchis, J., Blasco, X., Martínez, M., 2014b. Controller tuning using evolutionary multi-objective optimisation: current trends and applications. *Control Engineering Practice* 28, 58–73.
- Reynoso-Meza, G., Sánchez, H. S., Blasco, X., Vilanova, R., August 2014c. Reliability based multiobjective optimization design procedure for PI controller tuning. En: *Memories of the 19th World Congress IFAC 2014*. pp. 10263–10268.
- Ruiz-López, I., Rodríguez-Jimenes, G., García-Alvarado, M., 2006. Robust MIMO PID controllers tuning based on complex/real ratio of the characteristic matrix eigenvalues. *Chemical Engineering Science* 61 (13), 4332–4340.
- Skogestad, S., 2003. Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Journal of Process Control* 13 (4), 291–309.
- Sánchez, H. S., Vilanova, R., 2013a. Multiobjective tuning of PI controller using the NNC method: Simplified problem definition and guidelines for decision making. En: *Proceedings of the 18th. IEEE Conference on emerging technologies & factory automation (ETFA)*.
- Sánchez, H. S., Vilanova, R., 2013b. Nash-based criteria for selection of pareto optimal controller. En: *Proceedings of the 17th. International Conference on System Theory, Control and Computing*.
- Su, J.-P., Liang, C.-Y., Chen, H.-M., dec. 2002. Robust control of a class of nonlinear systems and its application to a twin rotor mimo system. En: *Industrial Technology, 2002. IEEE ICIT '02. 2002 IEEE International Conference on*. Vol. 2. pp. 1272–1277.
- Tao, C., Taur, J., Chen, Y., 2010a. Design of a parallel distributed fuzzy lqr controller for the twin rotor multi-input multi-output system. *Fuzzy Set. Syst.* 161, 2081–2103.
- Tao, C.-W., Taur, J.-S., Chang, Y.-H., Chang, C.-W., 2010b. A novel fuzzy-sliding and fuzzy-integral-sliding controller for the twin-rotor multi-input multi-output system. *Fuzzy Systems, IEEE Transactions on* 18, 893–905.
- Toha, S., Tokhi, M., nov. 2009. Dynamic nonlinear inverse-model based control of a twin rotor system using adaptive neuro-fuzzy inference system. En: *Computer Modeling and Simulation, 2009. EMS '09. Third UKSim European Symposium on*. pp. 107–111.
- Vargas, F. J., Salgado, M. E., Silva, E. I., 2011. Optimal ripple-free deadbeat control using an integral of time squared error (ITSE) index. *Automatica* 47 (9), 2134–2137.
- Velasco, J., García-Nieto, S., Reynoso-Meza, G., Sanchis, J., 2013. Implementación de un sistema hardware-in-the-loop para la simulación en tiempo real de pilotos automáticos para uavs. En: *de Automática, C. E. (Ed.), Memorias de las XXXIV Jornadas de Automática*.
- Vilanova, R., Alfaro, V., Arrieta, O., 2012. Simple robust autotuning rules for 2-dof PI controllers. *ISA Transactions* 51 (1), 30–41.
- Wen, P., Lu, T.-W., november 2008. Decoupling control of a twin rotor mimo system using robust deadbeat control technique. *Control Theory Applications, IET* 2 (11), 999–1007.
- Witczak, M., Puig, V., de Oca, S., oct. 2010. A fault-tolerant control scheme for non-linear discrete-time systems: Application to the twin-rotor system. En: *Control and Fault-Tolerant Systems (SysTol), 2010 Conference on*. pp. 861–866.

Apéndice A. Definición de parámetros del TRMS

k_c	Constante de torsión	0.0043 [N·m/rad]	F	Parámetro constante	0.0087
k_h	Constante de fricción viscosa en la parte horizontal	0.0065 [N·m·s/rad]	M_{Ah}	Torsión debida a la fuerza ascendente del sistema horizontal	[N·m]
k_v	Constante de fricción viscosa en la parte vertical	0.0008 [N·m·s/rad]	M_{Av}	Torsión debida a la fuerza ascendente en el sistema vertical	[N·m]
k_{cm}	Contante de acoplamiento electro-mecánico del rotor principal	0.0134 [N·m/rpm]	M_C	Torsión centrífuga	[N·m]
k_{ct}	Constante de acoplamiento electro-mecánico del rotor de cola	0.009 [N·m/rpm]	M_{Fh}	Fricción torsión horizontal	[N·m]
k_{fhp}	Constante de la fuerza ascendente en el eje horizontal	$1,50 \times 10^{-7}$ [N/rpm ²]	M_{Fv}	Fricción torsión vertical	[N·m]
k_{fvp}	Constante de la fuerza ascendente en el eje vertical	$1,71 \times 10^{-6}$ [N/rpm ²]	M_G	Torsión por gravedad	[N·m]
J_v	Momento de inercia en el sistema vertical (Evaluado experimentalmente)	0.0254 [kg _m]	M_{MCm}	Torsión debido al acoplamiento electromecánico en la parte principal	[N·m]
l_t	Longitud de la parte de cola de la viga	0.282 [m]	M_{MCt}	Torsión debido al acoplamiento electromecánico en la parte de cola	[N·m]
l_m	Longitud de la parte de principal de la viga	0.228 [m]	M_T	Torsión debido al torque	[N·m]
T_m	Constante de tiempo del sistema del rotor principal	1.330 [s]	J_h	Momento de inercia del sistema horizontal	[kg _m]
T_t	Constante de tiempo del sistema del rotor de cola	0.430 [s]			
m_t	Masa de la parte de cola de la viga	0.015 [kg]			
m_{tr}	Masa del motor y rotor de cola	0.110 [kg]			
m_{ts}	Masa de la armadura de cola	0.090 [kg]			
m_m	Masa de la parte principal del contrapeso	0.0140 [kg]			
m_{mr}	Masa del motor y rotor principal	0.1255 [kg]			
m_{ms}	Masa de la armadura principal	0.150 [kg]			
m_b	Masa del contrapeso de la viga	0.022 [kg]			
m_{cb}	Masa del contrapeso de la viga	0.068 [kg]			
l_b	Longitud del contrapeso de la viga	0.260 [kg]			
l_{cb}	Distancia del contrapeso y del pivote	0.230 [m]			
g	Fuerza de gravedad	9.81 [N/kg]			
D	Parámetro constante	0.01			

Apéndice B. Ecuaciones complementarias del TRMS

$$M_{Ah} = k_{fhp} \cdot \text{sgn}(\omega_t) \omega_t^2 l_t \cos(\alpha_v) \quad (\text{B.1})$$

$$M_{Av} = k_{fvp} \cdot \text{sgn}(\omega_m) \omega_m^2 l_m \quad (\text{B.2})$$

$$M_C = 0,5 \omega_m^2 \sin(2\alpha_v) H \quad (\text{B.3})$$

$$M_{Fh} = k_h \Omega_h; \quad M_T = k_c \alpha_h \quad (\text{B.4})$$

$$M_G = \{(A - B) \cos(\alpha_v) - C \sin(\alpha_v)\} g \quad (\text{B.5})$$

$$M_{MCm} = k_{cm} u_m \cos(\alpha_v) \quad (\text{B.6})$$

$$M_{MCt} = k_{ct} u_t \quad (\text{B.7})$$

$$\omega_m = 63,23 \varpi_m^6 + 518,84 \varpi_m^5 - 106,16 \varpi_m^4 - 1060 \varpi_m^3 + 47,93 \varpi_m^2 + 1166,2 \varpi_m \quad (\text{B.8})$$

$$\omega_t = 89,65 \varpi_t^6 + 532,48 \varpi_t^5 - 88,56 \varpi_t^4 - 1027,3 \varpi_t^3 + 23,91 \varpi_t^2 + 1519,8 \varpi_t \quad (\text{B.9})$$

$$J_h = D \cos(\alpha_v^2) + E \sin(\alpha_v^2) + F \quad (\text{B.10})$$

$$A = \left(\frac{m_t}{2} + m_{tr} + m_{ts} \right) l_t \quad (\text{B.11})$$

$$B = \left(\frac{m_m}{2} + m_{mr} + m_{ms} \right) l_m \quad (\text{B.12})$$

$$C = \frac{m_b l_b}{2} + m_{cb} l_{cb} \quad (\text{B.13})$$

$$E = \left(\frac{m_b l_b^2}{3} + m_{cb} \right) l_{cb}^2 \quad (\text{B.14})$$

$$H = A l_t + B l_m + \left(\frac{m_b l_b^2}{2} \right) + m_{cb} l_{cb}^2 \quad (\text{B.15})$$