Topology Vol. 6, pp. 221–239. Pergamon Press, 1967. Printed in Great Britain

LISSAGE DES IMMERSIONS — I

ANDRÉ HAEFLIGER

(*Received in July* 1966)

LA PREMIÈRE partie de ce travail étudie divers types d'immersions de sphères dans sphères (semi-linéaires, semi-différentiables, différentiables ou lisses) et leurs relations (problèmes de lissage).

Après avoir donné au paragraphe 1 les définitions fondamentales de plongements, d'immersions, de concordances et de lissages, on montre (§ 3) que les classes de concordance d'immersions d'un type donné de sphères dans sphères forment un groupe abélien. Ces divers groupes prennent leur place dans des suites exactes (§ 4), où figurent également les groupes de sphères nouées C_n^q et Γ_n^q qui représentent ainsi les obstructions au lissage.

Les démonstrations, à vrai dire très naïves, s'appuyent sur des propriétés de trivialité des plongements des disques dans les variétés (§2). Les théorèmes de lissage de Hirsch et de Munkrès y jouent naturellement un rôle essentiel.

En utilisant les suites exactes établies au §4 et certains faits connus sur les groupes de noeuds, on obtient des résultats sur le groupe des classes de concordance des immersions semi-linéaires de S^n dans S^{n+q}.

Au §6, on montre plus précisément que ce groupe est isomorphe, pour $q > 2$, au groupe d'homotopie $\pi_n(G, G_q)$, où G_q est l'espace des applications de S^{q-1} dans elle-même, et G sa suspension stable.

La deuxième partie (II) utilisera les méthodes des ensembles semi-simpliciaux. Elle donnera de nouvelles interprétations homotopiques des résultats de la première partie, et conduira à une théorie des obstructions au lissage des immersions ou des plongements d'une variété semi-linéaire ou lisse dans une variété différentiable.

On y définira en particulier un groupe simplicial, noté $\boldsymbol{Pl}_q$, qui joue dans le cas semi-linéaire le même rôle que le groupe orthogonal O_q dans le cas différentiable.

L'auteur avait annoncé le plupart des résultats de cette première partie et de la seconde dans diverses conférences qu'il avait données aux Etats-Unis en automne 1963.

§1. DÉFINITIONS ET PROBLÈMES FONDAMENTAUX

1.1. Applications semi-linéaires et semi-différentiables

Un polyèdre est un sous-espace K d'un espace numérique qui est réunion localement finie de simplexes, deux simplexes se coupant suivant une face commune. Les polyèdres sont les objets d'une catégorie dont les morphismes sont les applications semi-linéaires (piecewise linear). Pour les définitions et propriétés de cette catégorie, les notes de Zeeman [23] seront notre référence de base.

Nous considérerons également la catégorie des applications différentiables dont les objets sont les variétés indéfiniment différentiables paracompactes, les morphismes étant également indéfiniment différentiables.

Une application f d'un polyèdre K dans une variété différentiable X est *semi-différentiable* (piecewise differentiable) s'il existe une triangulation de K telle que la restriction de f à chaque simplexe soit différentiable. Si g est une application semi-linéaire d'un polyèdre L dans le polyèdre K et h une application différentiable de X dans une variété Y, alors $h \circ f \circ g$ est une application semi-différentiable de L dans Y. Le composé de deux applications semi-différentiables n'est pas défini.

Nous abrégerons semi-linéaire par s.l. et semi-différentiable par s.d.

1.2. Variétés semi-linéaires et différentiables

Un homéomorphisme h d'un ouvert U de $\mathbf{R}^n$ sur un ouvert de $\mathbf{R}^n$ est un *homéomorphisme semi-linéaire* (resp. un *semi-difféomorphisme*) si tout point de U admet un voisinage triangulé rectilinéairement tel que la restriction de h à chaque simplexe de dimension n soit linéaire (resp. soit un difféomorphisme).

Une *variété semi-linéaire V de dimension n* est un espace topologique paracompact muni d'un atlas maximal A formé d'homéomorphismes d'ouverts de $\mathbf{R}^n$ sur ouverts de V, les changements de cartes $\varphi^{-1}\psi(\varphi, \psi \in A)$ étant des homéomorphismes semi-linéaires. Une carte en $v \in V$ est une carte de A dont le but contient v. On peut aussi définir V comme un polyèdre localement isomorphe à $\mathbf{R}^n$ muni de sa structure semi-linéaire.

Sur un espace topologique V, une structure de variété différentiable et une structure de variété semi-linéaire sont compatibles si pour toute carte φ de la structure semi-linéaire et carte ψ de la structure différentiable, $\psi^{-1}\varphi$ est un semi-difféomorphisme.

Si l'on se donne *a priori* sur V une structure s.l., alors une structure différentiable α compatible sur V est appelé un *lissage* de V, et V muni de ces deux structures sera noté V_α.

D'autre part, un semi-difféomorphisme d'une variété s.l. V sur une variété différentiable X est un homéomorphisme s.d. h de V dans X tel que, pour toute carte s.l. φ de V et toute carte différentiable ψ de X, alors $\psi^{-1}h\varphi$ est un semi-difféomorphisme. La structure s.l. définie sur X par h est alors compatible avec sa structure différentiable. Si T est une triangulation de V telle que la restriction de h à chaque simplexe soit différentiable, alors $h : T \to X$ est une triangulation différentiable de X.

On définit de même les variétés semi-linéaires à bord en remplaçant ci-dessus $\mathbf{R}^n$ par le demi-espace $\mathbf{R}^n_+$ défini par $x_n \geqq 0$.

1.3. Immersions et plongements

Soit V une variété différentiable de dimension n et X une variété différentiable de dimension $n + q$. Une *immersion différentiable* f de V dans X est une application telle que, pour tout $v \in V$, il existe des cartes locales $\varphi : \mathbf{R}^n \to V$ en v et $\psi : \mathbf{R}^{n+q} \to X$ en fv telles que $\psi^{-1}f\varphi$ soit la restriction à un ouvert de l'inclusion naturelle de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n+q}$.

Soit V une variété semi-linéaire de dimension n et soit X une variété semi-linéaire de dimension $n + q$. Une *immersion semi-linéaire* de V dans X est une application vérifiant les mêmes propriétés que précédemment, φ et ψ étant des homéomorphismes semi-linéaires.

Soit V une variété semi-linéaire de dimension n et X une variété différentiable. Une *immersion semi-différentiable* f de V dans X est une application s.d. telle que, pour tout $v \in V$, il existe une carte semi-linéaire φ en v et un semi-difféomorphisme ψ de $\mathbf{R}^{n+q}$ sur un voisinage de fv tels que $\psi^{-1}f\varphi$ soit la restriction à un ouvert de l'inclusion naturelle de $\mathbf{R}^n$ dans $\mathbf{R}^{n+q}$.

Enfin si V est une variété semi-linéaire et X une variété différentiable, une *immersion lisse* de V dans X est une immersion différentiable de V_α dans X, relativement à un lissage α de V (ce lissage est déterminé uniquement par f). Une immersion lisse est donc aussi semi-différentiable.

On parlera en général d'immersion de type C, ou de *C-immersion* où C pourra signifier "différentiable", "semi-linéaire", "semi-différentiable" ou "lisse".

Un *plongement* de type C de V dans X sera une immersion f de type C de V dans X qui est un homéomorphisme de V sur fV.

Voici quelques exemples destinés à éclaircir les définitions. $\mathbf{R}$ étant muni de ses structures semi-linéaires et différentiables usuelles, l'application f de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ définie par $f(x) = x$ pour $x \leqq 0$ et $f(x) = 2x$ pour $x \geqq 0$ est un plongement lisse qui n'est pas différentiable. L'application $x \to x^3$ de $\mathbf{R}$ dans $\mathbf{R}$ est différentiable, mais ce n'est pas une immersion semi-différentiable.

Dans le cas où V a un bord ∂V et X n'a pas de bord, on définit de même les immersions de type C de V dans X en remplaçant dans les définitions précédentes $\mathbf{R}^n$ par le demi-espace $\mathbf{R}^n_+$. Lorsque X a aussi un bord non vide, on remplacera également $\mathbf{R}^{n+q}$ par $\mathbf{R}^{n+q}_+$ de sorte que f restreint à ∂V est une immersion de ∂V dans ∂X.

1.4. Concordance et isotopie

Deux C-immersions f_0 et f_1 de V dans X sont *concordantes* s'il existe une C-immersion F de $\mathbf{R} \times V$ dans $\mathbf{R} \times X$ telle que $F(t, v) = (t, f_0 v)$ pour $t \leqq 0$ et $(t, f_1 v)$ pour $t \geqq 1$. On dira que F est une *concordance* reliant f_0 à f_1. Même définition pour les plongements en remplaçant immersion par plongement. Souvent on remplacera aussi $\mathbf{R}$ par l'intervalle $[0, 1] = I$.

Si de plus F est de la forme $F(t, v) = (t, f_t v)$, on dit que f_0 et f_1 sont *isotopes* et que F ou f_t est une *isotopie* reliant f_0 à f_1. Une isotopie reliant deux immersions est souvent appelée une *homotopie régulière*. Dans le cas semi-différentiable ou s.l., on impose encore à f_t d'être localement plat uniformément en t (cf. [9], p. 72 et [3], p. 76).

Si A est un sous-espace de V, on dira que F est une concordance ou une isotopie fixe sur A (ou relative à A) si $F(t, v) = (t, f_0 v)$ pour tout $v \in A$.

Les relations de concordance ou d'isotopie sont des relations d'équivalence.

1.5. Lissage d'une immersion ou d'un plongement

Soient V une variété semi-linéaire, X une variété différentiable et f une immersion s.d. de V dans X. Nous aurons deux notions différentes de lissage de f suivant que l'on se donne ou non un lissage de V.

Un *lissage de l'immersion s.d. f de V dans X est une concordance s.d. F reliant f à une immersion lisse q.* Deux lissages F_0 et F_1 reliant f à g_0 et g_1 resp. sont concordants, s'il existe une concordance s.d. G, fixe sur $0 \times V$, reliant F_0 à F_1, et dont la restriction à $R \times 1 \times V$ est une concordance lisse reliant g_0 à g_1. Autrement dit G est une immersion s.d. de $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times V$ dans $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \times X$ telle que

$$G(\tau, 0, v) = (\tau, 0, fv) \text{ pour tout } v \in V \text{ et } \tau \in \mathbf{R},$$

$$G|\mathbf{R} \times 1 \times V \text{ est une immersion lisse dans } \mathbf{R} \times 1 \times V$$

et $G(i, t, v) = (i, F_\alpha(t, v))$ pour $i = 0, 1$.

Si α est un lissage de la variété semi-linéaire V, alors *un lissage de l'immersion semi-différentiable f de V_α* (c.à.d. V muni du lissage α) *dans X, est une concordance s.d. F reliant f à une immersion différentiable de V_α dans X.* Deux lissages F_0 et F_1 de f sont concordants s'il existe une concordance G comme plus haut, mais $G|\mathbf{R} \times 1 \times V_\alpha$ étant cette fois une immersion différentiable dans $\mathbf{R} \times 1 \times X$.

Les mêmes définitions s'appliquent également aux plongements; on remplace partout immersion par plongement.

Le problème du lissage des plongements se ramène à celui du lissage des immersions. On démontrera en effet dans la paragraphe suivant (cf. 2.12) le

1.6. THÉORÈME. *Soient V une variété s.l., X une variété différentiable et f un plongement s.d. de V dans X.*

(a) *Il existe une correspondance bijective entre les classes de concordance des lissages de f, considéré comme un plongement, et les classes de concordance des lissages de f considéré comme une immersion. En fait si f est s.d. concordant à une immersion lisse, alors f est s.d. isotope à un plongement lisse.*

(b) *Soit α un lissage de V. Il existe une correspondance bijective entre les classes de concordance des lissages de $f: V_\alpha \to X$, considéré comme un plongement, et celles de f considéré comme une immersion de V_α dans X.*

§2. QUELQUES PROPRIÉTÉS FONDAMENTALES DES APPLICATIONS s.l. ET s.d.

2.1.

Un plongement s.d. d'un ployèdre K dans une variété différentiable X est une application $f: K \to X$ qui est un homéomorphisme sur son image et qui vérifie la condition locale suivante: pour tout $x \in K$, il existe un semi-difféomorphisme τ_x de $\mathbf{R}^{n+q}$ sur un voisinage de $f(x)$, un voisinage K_x de x dans K et un plongement s.l. φ_x de K_x dans $\mathbf{R}^{n+q}$ tel que $\tau_x \cdot \varphi_x = f|K_x$.

En utilisant les techniques de triangulation de J. H. C. Whitehead [22], on peut montrer les théorèmes suivants.†

THÉORÈME. *Etant donné un plongement s.d. f d'un polyèdre K dans une variété différentiable X, il existe une triangulation différentiable $\tau : T \to X$ et un plongement s.l. $\varphi : K \to T$ tel que $f = \tau\varphi$.*

2.2.

Soit I^n le cube $[0, 1]^n$ et I^{n-1} le sous-cube $I^{n-1} \times 0$.

THÉORÈME. *Soit F un plongement s.d. de $K \times I^n$ dans $X \times \mathbf{R}^n$ de la forme $F(x, t) = (f_t x, t)$. Supposons donné un semi-difféomorphisme τ_0 de $T \times I^{n-1}$ sur $X \times I^{n-1}$ respectant la projection sur I^{n-1}, où T est un polyèdre, et un plongement s.l. $\varphi_0 : K \times I^{n-1} \to T \times I^{n-1}$ tel que $\tau_0\varphi_0 = F|K \times I^{n-1}$. Il existe alors un semi-difféomorphisme τ de $T \times I^n$ sur $X \times I^n$ et un plongement s.l. φ de $K \times I^n$ dans $T \times I^n$ tel que $\varphi\tau = F$.*

Ces théorèmes permettent d'appliquer au cas s.d. la plupart des théorèmes démontrés dans le cas s.l., on a par exemple le corollaire suivant qui résulte du théorème de Hudson–Zeeman (cf. [9] et [10]).

2.3. COROLLAIRE (*extension des isotopies s.d.*) *Soit f un plongement localement plat semi-différentiable d'une variété s.l. M dans une variété différentiable X et soit V une sous-variété compacte s.l. de M. Toute isotopie s.d. de $f|V$ peut s'étendre suivant une isotopie s.d. de f. Plus généralement, le même résultat est valable pour les cubes d'isotopie s.d.*

2.4. Comparaison des applications s.l. et s.d.

Soient V une variété s.l., W une sous-variété de V et X une variété s.l. munie d'un lissage α. Soit $f : W \to X$ un plongement s.l. *Le complexe semi-simplicial des plongements s.l. de V dans X dont la restriction à W est égale à f*, est défini comme suit:

Un k-simplexe est un plongement s.l. $F : \Delta^k \times V \to \Delta^k \times X$ qui est de la forme $F(t, x) = (t, F_t x)$ et tel que $F(t, x) = (t, fx)$ pour tout $t \in \Delta^k$ et $x \in W$ (Δ^k désigne un k-simplexe euclidien dans $\mathbf{R}^k$).

On définit de même le complexe semi-simplicial des plongements s.d. de V dans X_α dont la restriction *à* W est f.

Ces complexes vérifient trivialement la condition d'extension des homotopies de Kan, cf. [1].

L'inclusion naturelle du premier complexe dans le second est une équivalence d'homotopie.

Il en est de même si, dans les définitions précédentes, on remplace plongement par immersion, ou si l'on compare les homéomorphismes s.l. de V sur X avec les semi-difféomorphismes de V sur X_α.

Ces propriétés se démontrent par les méthodes de J. H. C. Whitehead, cf. [22], [16], [13].

† Les démonstrations complètes de ces théorèmes figureront dans un travail de D. White.

2.5. Théorème de Cairns–Hirsch. (*cf.* [7] *et* [8]). *Soit V une variété s.l., X une variété différentiable et α_0 un lissage d'un voisinage U d'un fermé A de V. Soit $f: V \times \mathbf{R}^q \to X$ un plongement s.d. dont la restriction à $U_{\alpha_0} \times R^q$ est différentiable. On suppose que $f(\partial V \times \mathbf{R}^q) \subset \partial X$ ou que $f(V \times \mathbf{R}^q) \cap \partial X = \emptyset$.*

Il existe un lissage α de V qui coïncide avec α_0 sur un voisinage de A, et une isotopie s.d. fixe au voisinage de $A \times \mathbf{R}^q$, reliant f à un plongement différentiable g de $V_\alpha \times \mathbf{R}^q$ dans X.

Il résulte de ce théorème que g et α sont uniques à une concordance lisse près fixe sur un voisinage de A.

2.6. Théorème de lissage de Munkrès (cf. [17], [7], [18]). *Soit V une variété s.l. munie d'un lissage α, et soit X une variété différentiable. Soit h un semi-difféomorphisme de V sur X qui est différentiable au voisinage d'un sous-polyèdre A, et supposons que V puisse se collapser sur A (cf.* [23]) *(plus généralement que $H^i(V; A) = 0$ pour tout i). Il existe alors une concordance s.d., fixe sur un voisinage de A, reliant h à un difféomorphisme de V_α sur X.*

2.7. Plongements s.l. de disques

Soi D l'intervalle $[-1, +1] \subset \mathbf{R}$ avec sa structure s.l. naturelle. Ainsi D^n est le sous-espace $[-1, +1]^n$ de $\mathbf{R}^n$; on identifie D^n au sous-espace $D^n \times 0 \subset D^n \times D^q = D^{n+q}$. De même $S^n = \partial D^{n+1}$ est un sous-espace de $S^{n+q} = \partial D^{n+q+1}$.

Tout homéomorphisme s.l. h de degré 1 de S^{n+q} (resp. D^{n+q}) est isotope à l'identité. Si h est l'identité sur S^n (resp. D^n), il peut être relié à l'identité par une isotopie fixe sur S^n (resp. D^n).

Pour une démonstration, cf. [25], ou M. W. Hirsch, *Proc. Cam. Phil. Soc.*, **62** (1966).

Deux plongements s.l. et de même degré de D^{n+q} dans l'intérieur d'une variété s.l. X de dimension $n + q$, sont isotopes. Si V est une sous-variété localement plate de X, de dimension n, alors tout plongement f de D^n dans V, tel que $f(D^n) \subset \operatorname{int} X$, peut s'étendre suivant un plongement g de D^{n+q} dans X tel que $g^{-1}(V) = D^n$; *deux telles extensions qui ont le même degré peuvent être reliées par une isotopie de X, fixe sur V* (cf. [25] ou M. W. Hirsch, *loc. cit.*).

2.8.

Soit f un plongement s.l. et localement plat de D^n dans une variété s.l. X de dimension $n + q$, envoyant ∂D^n dans ∂X.

Soit D_0 une face de D^n, c'est-à-dire un $(n - 1)$-disque plongé dans ∂D^n. Tout plongement φ_0 de $D_0 \times D^q$ dans ∂X qui prolonge $f| D_0 \times 0$ et tel que $\varphi_0^{-1}(fV) = D_0$, peut s'étendre suivant un plongement φ de $D^n \times D^q$ dans X tel que $\varphi(x, 0) = f(x)$ et $\varphi(\partial V \times D^q) \subset \partial X$. Le même résultat est vrai si D_0 est remplacé par l'union de deux faces disjointes d'après 2.7 (cf. [25]).

2.9. Théorème. *Soit V une variété s.l. de dimension n et soit X une variété différentiable de dimension $n + q$. Soit f un plongement s.d. de V dans X localement plat tel que $f(\partial V) \subset \partial X$. On suppose que f est lisse au voisinage d'un sous-polyèdre A de V. Soit $K \supset A$ un sous-polyèdre* *se collapsant sur A. Alors il existe une isotopie s.d., fixe sur A, reliant f à un plongement s.d. lisse sur K.*

Démonstration. L'hypothèse de collapsibilité implique que l'on peut se ramener au cas suivant. K est l'union de A et d'une n-boule s.l. C rencontrant A suivant une $(n-1)$-face $B \subset \partial C$ et ∂V suivant un voisinage régulier.

Nous allons construire un plongement s.d. $\varphi : C_1 \times D^q \to X$, où C_1 est un voisinage de C, tel que

(i) $\varphi(x, 0) = f(x)$ pour tout $x \in C_1$

(ii) $\varphi(x, y) \in \partial X$ si $x \in \partial V$

(iii) sur un voisinage U de B où f est différentiable relativement à un lissage α, alors $\varphi | U_\alpha \times D^q$ est différentiable.

Pour obtenir le théorème, il suffira d'appliquer le théorème de Cairns–Hirsch (2.5) et 2.3.

Construction de φ. Comme f est lisse au voisinage de B et que B est contractile, on peut construire un plongement différentiable $\varphi_0 : U \times D^q \to X$ tel que $\varphi(x, 0) = f(x)$, $\varphi_0(x, y) \in \partial X$ si $X \in \partial V$ et $\varphi_0^{-1}(C) = C \cap U$; on suppose que U est un sous-polyèdre qui est un voisinage de B.

Triangulons X et V de sorte que B, C et U soient des sous-complexes, et que f et φ_0 soient s.l. Soient C' et B' les voisinages réguliers de C et B qui sont des seconds dérivés (cf. [23]).

Considérons la variété s.l. $X' = \overline{X - \varphi_0(B' \times D^q)}$. Posons $C'' = \overline{C' - B'}$, $B'' = B' \cap C''$ et $D'' = \overline{\partial C'' - \partial X'}$. Remarquons que C'' se collapse sur $B'' \subset \partial C''$ et que $\varphi_0(B'' \times D^q) \subset \partial X''$. Soit X'' un voisinage régulier dans X' de $f(C'') \cup \varphi_0(B'' \times D^q)$, modulo $f(D'') \cup \varphi_0[\partial(B'' \times D^q]$ (cf. [11]); c'est une variété s.l.; f plonge C'' dans X'' et envoie $\partial C''$ dans $\partial X''$; enfin $\varphi_0(B'' \times D^q) \subset \partial X''$. On peut appliquer 2.8. pour obtenir un plongement $\varphi_1 : C'' \times D^q \to X''$ qui étend $\varphi_0 | B'' \times D^q$ et tel que $\varphi_1(x, 0) = f(X)$ et $\varphi_1(\partial C'' \times D^q) \subset \partial X''$. La réunion $\varphi : C' \times D^q \to X$ des plongements $\varphi_0 | B' \times D^q$ et φ_1 vérifie les conditions (i) et (iii). Pour que (ii) soit réalisé, il suffit de restreindre φ à $C_1 \times D_1^q$, où C_1 est un voisinage de C contenu dans C' et D_1^q un cube assez petit contenu dans D^q et de même centre.

2.10.

Si V est muni d'une structure différentiable compatible, le Théorème 2.9 est encore vrai si l'on remplace lisse par différentiable et isotope par concordant. Cela résulte de 2.8 et 2.9.

Enfin 2.9 est aussi vrai si f est une immersion; on se ramène en effet au cas d'un plongement en remplaçant X par un voisinage tubulaire de f (cf. [3], p. 87).

2.11.

Nous aurons encore besoin de la propriété suivante qui découle de 2.8, de 2.5 et 2.6.

Soit X une variété différentiable et soit f un plongement s.d. (ou une immersion) de

$D^n \times \mathbf{R}$ dans X, lisse en dehors de $D^n \times (0, 1)$. On suppose que $f(\partial D^n \times \mathbf{R}) \subset \partial X$ ou que $f(D^n \times \mathbf{R}) \subset \operatorname{int} X$. Il existe alors une isotopie s.d., fixe sur le complément de $D^n \times (0, 1)$, reliant f à un plongement lisse (ou une immersion lisse).

On a le même énoncé en remplaçant lisse par différentiable et isotope par concordant.

2.12. *Démonstration du Théorème 1.6.* Soit f un plongement s.d. de V dans X et soit $F: I \times V \to I \times X$ une concordance s.d. reliant f à une immersion lisse g de V dans X. D'après la construction de [3], p. 87, il existe une variété différentiable Y, de même dimension que $I \times X$, une immersion différentiable $\Phi : Y \to I \times X$ appliquant ∂Y dans $\partial(I \times X)$, la restriction de Φ à $Y_0 = \Phi^{-1}(0 \times X) \subset \partial Y$ étant un plongement, et un plongement s.d. $\bar{F} : I \times V \to Y$ tel que $\Phi_0 \bar{F} = F$.

Comme $I \times V$ peut se collapser sur $0 \times V$, on peut appliquer 2.9 pour obtenir une isotopie s.d., fixe sur $I \times V$, reliant F à un plongement lisse. En composant cette isotopie avec Φ et en prenant sa restriction à $0 \times V = V$, on obtient une isotopie s.d. G reliant f à un plongement lisse qui est concordant à g. Par une méthode analogue, on vérifie que la classe de concordance de G ne dépend que de celle de F.

Supposons maintenant que V soit déjà muni d'un lissage α et que F soit une concordance reliant f à une immersion différentiable $g : V_\alpha \to X$. Alors $\bar{F}$ induit sur $I \times V$ un lissage γ qui coincide avec α sur $I \times V = V$. D'après 2.6, il existe une concordance, fixe sur $1 \times V$, reliant l'identité de $I \times V$ à un difféomorphisme h de $(I \times V)_\gamma$ sur $I \times V_\alpha$. Alors $\Phi \bar{F} h^{-1}$, restreint à $0 \times V = V$ est un plongement différentiable relié à f par une concordance s.d. et à g par une concordance différentiable. Ceci montre la dernière partie du théorème.

§3. GROUPES D'IMMERSIONS ET DE PLONGEMENTS DE S^n DANS S^{n+q}

3.1.

S^n est la sphère unité de l'espace numérique $\mathbf{R}^{n+1}$ centrée à l'origine. C'est une variété différentiable. On identifiera S^n à une sous-sphère de S^{n+q} par l'inclusion $(x_1, \dots, x_{n+1}) \to (x_1, \dots x_{n+1}, 0, \dots, 0)$ de R^{n+1} dans R^{n+q+1}. L'hémisphère de S^n défini par $x_1 \geqq 0$ (resp. $x_1 \leqq 0$) est désigné par D^n_+ (resp. D^n_-).

Nous définissons sur S^n une structure de variété semi-linéaire compatible avec sa structure différentiable en projetant radialement sur S^n la structure semi-linéaire du bord du cube $[-1, +1]^{n+1} = D^{n+1}$.

Nous désignerons respectivement par $\mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q})$, $\mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q})$ et $\mathrm{Im}^l(S^n, S^{n+q})$ les classes de concordance d'immersions différentiables, semi-différentiables et lisses respectivement de S^n dans S^{n+q}. L'ensemble des classes de concordance des C-immersions (cf. 1.3) de S^n dans S^{n+q} sera désigné par $\mathrm{Im}^C(S^n, S^{n+q})$. Remarquons que $\mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q})$ est isomorphe à l'ensemble des classes de concordance d'immersions s.l. de S^n dans S^{n+q} (2.4).

3.2. THÉORÈME. $\mathrm{Im}^C(S^n, S^{n+q})$ *est muni d'une structure naturelle de groupe abélien.*

La définition de la somme repose sur le lemme suivant:

3.3. LEMME. (a) *Toute C-immersion g de S^n dans S^{n+q} est réqulièrement homotope à une C-immersion f telle que*

(i) *f restreint à un voisinage de D^n_- est l'inclusion naturelle dans D^{n+q}_-*

(ii) *$f | D^n_+$ est une immersion de D^n_+ dans D^{n+q}_+*

(b) *Si f_0 et f_1 sont deux C-immersions concordantes vérifiant (i), (ii) et (a), il existe une concordance $F: \mathbf{R} \times S^n \to \mathbf{R} \times S^{n+q}$ reliant f_0 à f_1 et telle que $F | R \times D^n_-$ est l'inclusion naturelle.*

Démonstration. (a) Supposons d'abord que la restriction de g à un voisinage de D^n_- est un plongement différentiable. Nous pouvons construire un plongement différentiable j du disque D contenu dans S^{n+q} et défini par $x_{n+q+1} \leqq \varepsilon$, $\varepsilon > 0$ petit, dans S^{n+q} tel que $j = g$ sur $D \cap S^n$. Soit D' un petit disque dans l'intérieur de D^{n+q}_- tel que $j(D') \cap f(D^n_+) = \varnothing$. Il existe une isotopie différentiable de S^{n+q}, fixe sur $S^{n+q} - j(D)$, reliant l'identité à un difféomorphisme d tel que $d \circ j(D') \supset j(D^{n+q})$. Posons

$$g'(x) = \begin{cases} g(x) & \text{pour } x \in D \\ d \circ g(x) & \text{pour } x \in S^n - D \end{cases}$$

L'immersion g' est régulièrement homotope à g. De plus le plongement j de D dans S^{n+q} est égal à g' sur $S^n \cap D$ et $j(D^{n+q}_-) \cap g'$ (int $D^n_-) = \varnothing$. Pour obtenir f, il suffira de composer g' avec un difféomorphisme h de S^{n+q}, isotope à l'identité et tel que $h \circ j$ soit l'identité sur un voisinage de D^{n+q}_-.

Nous devons encore nous ramener au cas précédent lorsque g est semi-différentiable ou lisse. Nouse pouvons toujours supposer que g est lisse au voisinage d'un point de S^n. En composant avec g un homéomorphisme semi-linéaire de S^n envoyant D^n_- dans ce voisinage et isotope à l'identité, on obtient une immersion régulièrement homotope à g et qui est lisse sur un voisinage D de D^n_-. Désignons encore par g cette immersion. Soit r un plongement différentiable de D^n_- dans l'intérieur de D et respectant les orientations. Il existe une isotopie semidifférentiable h_t de D (muni de sa structure semi-linéaire) dans D (muni de la structure différentiable induite par l'immersion lisse g), fixe au voisinage du bord de D, et telle que h_0 soit l'identité et que $H_1 | D^n_- = i$ (cf. 2.4, 2.5 and 2.7). En définissant h_1 sur S^n tout entier par l'identité en dehors de D, l'immersion gh_1 est différentiable sur un voisinage de D^n_-.

(b) Soit G une concordance reliant f_0 à f_1. Nous pouvons supposer que $G(t, x) = (t, f_0 x)$ pour $t \leqq \varepsilon$, et $G(t, x) = (t, f_1 x)$ pour $t \geqq 1 - \varepsilon$, où $0 < \varepsilon < 1/2$.

Si la restriction de G à $\mathbf{R} \times D^n_-$ est un plongement différentiable, il existe, si $n + q > 2$, un difféomorphisme h de $\mathbf{R} \times S^{n+q}$, fixe en dehors de $[0, 1] \times S^{n+q}$, tel que $h \circ G$ soit l'identité sur $\mathbf{R} \times D^n_-$. On posera donc $F = h \circ G$.

Pour se ramener à ce cas, on s'arrangera d'abord, par position générale, pour que la restriction de G à $\mathbf{R} \times V$ soit un plongement, où V est un petit disque s.l. dans D^n_- contenant $0_- = (-1, 0, \ldots, 0)$. En utilisant une isotopie s.l. de S^n reliant l'identité à un homéomorphisme appliquant D^n_- dans V, on pourra supposer que $G | \mathbf{R} \times D^n_-$ est un plongement. On lissera ensuite G sur $\mathbf{R} \times D^n_-$ en appliquant 2.11.

3.4. *Démonstration du Théorème.* Pour définir la somme de deux classes de concordance de C-immersions, on procède comme dans [4]. On représente ces classes par des C-immersions f et g dont la restriction à D^n_- et D^n_+ resp. est l'identité. La somme des classes sera représentée par la C-immersion $f + g$ définie par

$$(f+g)(x) = \begin{cases} f(x) & \text{pour } x \in D^n_+ \\ g(x) & \text{pour } x \in D^n_- \end{cases}$$

On montre comme dans [4] que cette opération est bien définie pour les classes de concordance (en utilisant le Lemme 3.3, b)), qu'elle est commutative et associative. L'inclusion de S^n dans S^{n+q} représente l'élément neutre.

Une C-immersion f de S^n dans S^{n+q} est concordante à l'inclusion de S^n dans S^{n+q} si et seulement s'il existe une C-immersion F de l'hémisphère nord de S^{n+1} défini par $x_{n+2} \geqq 0$ dans l'hémisphère nord de S^{n+q+1} défini par $x_{n+q+2} \geqq$;0 et qui prolonge f.

Soit f une C-immersion de S^n dans S^{n+q} vérifiant les conditions (i) et (ii) du lemme (a). L'immersion $\sigma f \sigma$ représente l'inverse de la classe de f, où σ est la symétrie de S^n ou S^{n+q} laissant fixe le plan $x_1 = 0$. En effet, soit R_θ (resp. R'_θ) la rotation d'angle θ de R^{n+2} (resp. R^{n+q+2}) qui laisse fixe le sous-espace $x_1 = 0, x_{n+2} = 0$ (resp. $x_1 = 0$, $x_{n+q+2} = 0$), alors $F(R_\theta(x)) = R'_\theta f(x)$, $x \in D^n_-$, $0 \leqq \theta \leqq \pi$, définit une C-immersion de l'hémisphère nord de S^{n+1} dans celui de S^{n+q+1} qui étend $f + \sigma f \sigma$.

3.5. Les groupes C^q_n, Γ^q_n et Γ_n

Par définition, Γ^q_n (resp. C^q_n) est l'ensemble des classes de concordance des plongements lisses (resp. différentiables) de S^n dans S^{n+q}, vérifiant de plus les conditions de trivialité semi-différentiables suivantes (nécessaire seulement si $q \leqq 2$ d'après Zeeman [24]):

(a) Un élément de Γ^q_n (resp. C^q_n) est représenté par un plongement lisse (resp. différentiable) f de S^n dans S^{n+q} tel qu'il existe un semi-difféomorphisme h de degré 1 de S^{n+q}, avec $h \mid S^n = f$. Ceci équivaut à dire que f est s.d. isotope à l'inclusion, car h est s.d. isotope à l'identité.

(b) Deux plongements lisses (resp. différentiables) f_0 et f_1 représentent le même élément de Γ^q_n (resp. C^q_n) s'il existe une concordance lisse (resp. différentiable) F reliant f_0 à f_1 et un semi-difféomorphisme H de $\mathbf{R} \times S^{n+q}$ tel que $H \mid \mathbf{R} \times S^n = F$, H appliquant la tranche $t \times S^{n+q}$ dans $t \times S^{n+q}$ pour tout $t \notin (0, 1)$.

On définit bien ainsi une relation d'équivalence. Car si h_0 et h_1 sont des homéomorphismes s.d. de S^{n+q}, égaux sur S^n, il existe une isotopie s.d. h_t qui les relie et qui est égale sur S^n à h_0 pour toute valeur de t. (cf. 2.7).

Pour q grand par rapport à n, Γ^q_n est indépendant de q et s'identifie à l'ensemble $\mathbf{\Gamma}_n$ des classes de concordance des lissages de S^n.

3.6. THÉORÈME. *Les ensembles C^q_n, Γ^q_n et Γ_n sont munis de structures naturelles de groupes abéliens.*

La démonstration est tout à fait analogue à celle du Théorème 3.2. Pour définir la somme, on démontre un lemme analogue au Lemme 1.3 de [4], et qui se démontre comme 3.3.

Dans le §5 sont réunis quelques résultats et références sur ces groupes.

3.7. *Remarque.* Les deux définitions suivantes sont équivalentes à la précédente.

(i) Γ_n^q (resp. C_n^q) est l'ensemble des classes de concordance des lissages (cf. 1.5) de l'inclusion de S^n dans S^{n+q}, S^n étant considérée comme une variété semi-linéaire (resp. S^n étant muni du lissage usuel).

(ii) Γ_n^q (resp. C_n^q) est l'ensemble des classes de concordance des plongements s.d. de D_+^{n+1} dans D_+^{n+q+1} dont la restriction au bord ∂D^{n+1} est un plongement lisse (resp. différentiable) dans ∂D_+^{n+q+1}. Les concordances $F: \mathbf{R} \times D_+^{n+1} \to \mathbf{R} \times D_+^{n+q+1}$ restreintes à $\mathbf{R} \times \partial D_+^{n+1}$ sont lisses (resp. différentiables).

La démonstration de l'équivalence de ces définitions sera laissée au lecteur; nous n'utiliserons que la première (3.5).

§4. SUITES EXACTES

Nous allons tout d'abord définir un homomorphisme $\omega : \mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q}) \to C_{n-1}^q$ qui mesurera l'obstruction au lissage.

4.1. PROPOSITION. *Toute immersion s.d. de S^n dans S^{n+q} est régulièrement homotope à une immersion f telle que $f|D_+^n$ soit une immersion différentiable dans D_+^{n+q} et que $f|D_-^n$ soit un plongement s.d. dans D_-^{n+q} isotope s.d. à l'inclusion. L'élément de C_{n-1}^q représenté par $f|D_+^n$ considéré comme un plongement de $S^{n-1} = \partial D_+^n$ dans $S_+^{n+q-1} = \partial D_+^{n+q}$, est indépendant du choix de f dans sa classe de concordance a et sera noté $\omega(a)$.*

Démonstration. D'après le Lemme 3.3, nous pouvons représenter la classe a par une immersion g telle que $g|D_-^n$ = inclusion et g (int D_+^n) $\subset$ int D_+^{n+q}. D'après 2.9, nous pouvons construie une homotopie régulière s.d. reliant l'immersion $g|D_+^n$ à une immersion lisse $g' : D_+^n \to D_+^{n+q}$, la restriction à ∂D_+^n de l'homotopie régulière étant une isotopie de plongements dans ∂D_+^{n+q}. D'après Munkrès (2.6), il existe un difféomorphisme h de D_+^n muni de sa structure différentiable usuelle sur D_+^n muni du lissage induit par g'. Posons $f_+ = g' \circ h$. Comme h est s.d. isotope à l'identité et que $g_0|\partial D_+^n$ est s.d. isotope à $g|D\partial_+^n$, il existe une immersion f, s.d. régulièrement homotope à g, et vérifiant les conditions de la Proposition 4.1, avec $f|D_+^n = f_+$.

Soit f' une immersion s.d. concordante à f et satisfaisant les mêmes conditions que f. D'après le Lemme 3.3, (b), il existe une concordance $F: \mathbf{R} \times S^n \to \mathbf{R} \times S^{n+q}$ reliant f à f' et telle que $F|\mathbf{R} \times D_-^n$ soit un plongement dans $\mathbf{R} \times D_-^{n+q}$ appliquant $\mathbf{R} \times \partial D_-^n$ dans $\mathbf{R} \times \partial D_-^{n+q}$. D'après 2.11, il existe un difféomorphisme H de $\mathbf{R} \times D_+^n$ sur $\mathbf{R} \times D_+^n$ muni de la structure différentiable induite par le lissage de F, H étant l'identité en dehors de $\mathbf{R} \times (0, 1)$. Alors $F \circ H|\mathbf{R} \times \partial D_+^n$ est une concordance différentiable reliant les restrictions de f et f' à ∂D_+^n.

Pour vérifier que l'application ω est un homomorphisme, on représente les éléments a

et b de $\mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q})$ par des immersions f et g vérifiant les conditions de la proposition avec l'exigence supplémentaire que f (resp. g) restreinte à l'hémisphère $x_2 \leqq 0$ (resp. $x_2 \geqq 0$) est l'inclusion. Alors la somme $a + b$ est représentée par l'immersion h égale à f sur l'hémisphère $x_2 \geqq 0$ et à g sur $x_2 \leqq 0$; la restriction de h à ∂D^n_- représente bien la somme $\omega(a) = \omega(b)$.

4.2. *Remarque.* Désignons par FC^q_n le groupe des classes de concordance des plongements différentiables de $S^n \times \mathbf{R}^q$ dans S^{n+q}, les restrictions des plongements à $S^n \times 0$ et des concordances à $\mathbf{R} \times S^n \times 0$ vérifiant les conditions (a) et (b) de 3.5. On a donc un homomorphisme naturel $FC^q_n \to C^q_n$.

En utilisant la proposition précédente, on voit facilement que l'homomorphisme ω se factorise par un homomorphisme $\omega' : \mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q}) \to FC^q_{n-1}$. Avec les notations de la Proposition 4.1, ω' (a) sera représenté par un plongement de $\partial D^n_+ \times \mathbf{R}^q$ dans ∂D^{n+q}_+ qui est la restriction d'une immersion différentiable $h : D^n_+ \times \mathbf{R}^q \to D^{n+q}_+$ telle que $h(x, 0) = f(x)$.

On a d'autre part un homomorphisme $j : \mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q}) \to \mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q})$, car une immersion différentiable est aussi semidifférentiable, et un homomorphisme $i : C^q_n \to \mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q})$, car un plongement différentiable est aussi une immersion.

4.3. THÉORÈME. *La suite.*

$$\xrightarrow{\omega} C^q_n \xrightarrow{i} \mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q}) \xrightarrow{j} \mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q}) \xrightarrow{\omega} C^q_{n-1} \to$$

est exacte.

Démonstration. D'après les définitions, il est évident que le composé de deux homomorphismes consécutifs est nul.

Soit h un plongement différentiable de ∂D_+ dans ∂D^{n+q}_+ représentant un élément de C^q_{n-1} dont l'image par i est nulle. Alors h peut s'étendre suivant une immersion différentiable f_+ de D^n_+ dans D^{n+q}_+, et suivant un plongement s.d. f_- de D^n_- dans D^{n+q}_- puisque le plongement h est non noué semi-différentiablement. L'immersion s.d. f de S^n dans S^{n+q} égale à f_- sur D^n_- et à f_+ sur D^n_+ vérifie les conditions de la Proposition 4.1. L'image par ω de sa classe est la classe de h.

Soit f une immersion s.d. de S^n dans S^{n+q} vérifiant les conditions de la Proposition 4.1. Supposons que l'élement de C^q_{n-1} représenté par le plongement $f|\partial D^n_+$ soit trivial. Il existe un plongement différentiable g_- de D^n_- dans D^{n+q}_- égal à f sur ∂D^n_- et s.d. isotope à l'inclusion en vertu de la condition (b) de 3.5. On peut choisir g_- au voisinage de ∂D^n_- de sorte que l'immersion g égale à g_- sur D^n_- et à f sur D^n_+ soit différentiable. L'immersion g est s.d. régulièrement homotope à f, car il existe une isotopie s.d. reliant $f|D^n_-$ à g_-, fixe sur ∂D^n_- (cf. 2.7). Ainsi la classe de f est l'image par i d'un élément de $\mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q})$.

Enfin soit f une immersion différentiable de S^n dans S^{n+q} et supposons que l'image par i de sa classe soit nulle. Il existe donc une concordance s.d. $F : \mathbf{R} \times S^n \to \mathbf{R} \times S^{n+q}$ reliant f à l'inclusion.

En appliquant 2.9 et 2.10, on peut lisser F et la remplacer par une concordance G différentiable reliant f à un plongement différentiable g de S^n dans S^{n+q} qui est s.d. isotope à l'inclusion. Ainsi la classe de f est l'image par i d'un élément de C^q_n.

4.4.

On a également des homomorphismes évidents $\mathrm{Im}^l(S^n, S^{n+q}) \to \mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q})$ et $\Gamma_n^q \to \mathrm{Im}^l(S^n, S^{n+q})$. On a aussi un homomorphisme de $\mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q})$ dans Γ_{n-1}^q obtenu en composant ω avec l'homomorphisme naturel $C_{n-1}^q \to \Gamma_{n-1}^q$. Le théorème suivant se démontre comme le précédent, sauf qu'il n'est pas nécessaire d'utiliser les résultats de Munkrès.

4.5. THÉORÈME. *La suite*

$$\to \Gamma_n^q \to \mathrm{Im}^l(S^n, S^{n+q}) \to \mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q}) \to \Gamma_{n-1}^q \to$$

est exacte.

4.6.

Soit i l'homomorphisme évident de C_n^q dans Γ_n^q (une immersion différentiable est aussi lisse). Soit λ l'homomorphisme de Γ_n^q dans Γ_n faisant correspondre à la classe d'un plongement lisse f de S^n dans S^{n+q} la classe de concordance du lissage de S^n qui en résulte.

Enfin soit $\tau : \Gamma_n \to C_{n-1}^q$ l'homomorphisme défini comme suit. Tout lissage de S^n est concordant à un lissage α qui induit sur D_-^n la structure différentiable usuelle. D'après Mumkrès [17], il existe un difféomorphisme h de D_-^n muni de sa structure différentiable naturelle sur D_+^n muni du lissage α, h préservant les orientations. La restriction de h à ∂D_+^n, considéré comme un difféomorphisme de $S^{n-1} = \partial D_+^n$ et composée avec l'inclusion de S^{n-1} dans S^{n+q-1}, représente l'image par τ de la classe de α. On utilise le fait que deux difféomorphismes de D_+^n préservant l'orientation sont concordants.

4.7. THÉORÈME. *La suite des homomorphismes*

$$\to C_n^q \xrightarrow{i} \Gamma_n^q \xrightarrow{\lambda} \Gamma_n \xrightarrow{\tau} C_{n-1}^q \to$$

est exacte.

Démonstration. Nous nous contenterons de démontrer l'exactitude en Γ_n. Tout d'abord, pour démontrer que $\tau \circ \lambda = 0$ considérons un plongement lisse $f : S^n \to S^{n+q}$ dont la restriction à D_-^n est l'inclusion et tel que $f(\mathrm{int}\, D_+^n) \subset \mathrm{int}\, D_+^{n+q}$. Soit h un difféomorphisme de D_+^n sur D_+^n muni du lissage induit par f. L'image de la classe de f par $\tau\lambda$ est représentée par $h|\partial D_+^n$ considéré comme un plongement dans ∂D_+^{n+q}. Mais la classe de $h|\partial D_+^n$ est nulle car ce plongement peut s'étendre suivant un plongement différentiable fh de D_+^n dans D_+^{n+q} qui est s.d. isotope à l'inclusion.

Soit α un lissage de S^n induisant sur D_-^n la structure différentiable usuelle. Soit h un difféomorphisme de D_+^n sur D_+^n muni de la structure α. Si l'image par τ de la classe de α est nulle, il existe un plongement différentiable f_+ de D_+^n dans D_+^{n+q} dont la restriction à ∂D_+^n est égale à h; de plus il existe (d'après 3.5b)) un semi-difféomorphisme H de D_+^{n+q} tel que $H|D_+^n = f_+$. Soit $f : S^n \to S^{n+q}$ le plongement lisse tel que $f|D_-^n =$ inclusion et que $f|D_+^n = f_+h^{-1}$; il représente un élément de Γ_n^q, car f est un plongement semi-différentiablement trivial; le lissage induit par f sur S^n est justement α.

On peut aussi définir des homomorphismes évidents de $\mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q})$ dans $\mathrm{Im}^l(S^n, S^{n+q})$, de $\mathrm{Im}^l(S^n, S^{n+q})$ dans Γ_n, et un homomorphisme de Γ_n dans $\mathrm{Im}^d(S^{n-1}, S^{n+q-1})$ qui est le composé de τ et de i.

4.8. THÉORÈME. *La suite*

$$\to \mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q}) \to \mathrm{Im}^l(S^n, S^{n+q}) \to \Gamma_n \to \mathrm{Im}^d(S^{n-1}, S^{n+q-1})$$

est exacte.

En résumé, les quatre suites exactes 4.3, 4.5, 4.7 et 4.8 s'enchevêtrent dans le diagramme commutatif en tresse:

4.9.

$$\begin{tikzcd}
{} \arrow[r] & \mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q}) \arrow[rr] \arrow[dr] & & \Gamma^q_{n-1} \arrow[r] & {} \\
& & \mathrm{Im}^l(S^n, S^{n+q}) \arrow[ur] \arrow[dr] & & C^q_{n-1} \arrow[ur] \arrow[dr] & & \\
{} \arrow[r] & \Gamma^q_n \arrow[ur] \arrow[rr] & & \Gamma_n \arrow[ur] \arrow[rr] & & (\mathrm{Im}^d S^{n-1}, S^{n+q-1}) &
\end{tikzcd}$$

Dans la partie II, nous donnerons deux interprétations de ce diagramme comme suites exactes de groupes d'homotopie.

§5. QUELQUES APPLICATIONS ET EXEMPLES

5.1.

Les résultats qui suivent se déduisent de l'isomorphisme de Smale $\mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q}) = \pi_n(SO, SO_q)$ (cf. [19]), et d'informations connues sur les groups Γ^q_n et C^q_n.

Rappelons tout d'abord que le groupe Γ_n est isomorphe pour $n \geqq 5$ au groupe θ_n étudié par Kervaire et Milnor [12]; ceci résulte de Smale [20]. Pour $n \leqq 6$, alors $\Gamma_n = 0$ (voir notamment Cerf [2]). On a $\Gamma_7 = \mathbf{Z}_{28}$, $\Gamma_8 = \mathbf{Z}_2$, etc. (cf. 12).

Γ^q_n est isomorphe pour $n \geqq 5$ et $q > 2$ au groupe θ^q_n des classes de h-cobordisme des n-sphères d'homotopie plongées dans S^{n+q}. C'est une conséquence du "unknotting theorem" de Zeeman (cf. [24]) et de Smale [20]. Le groupe θ^q_n a été étudié par Levine dans [14].

Pour $q = 1$, il est bien connu que $\Gamma^1_n = 0$. Cela résulte de l'unicité du fibré normal en condimension un dans le cas différentiable et semi-linéaire (unicité des cols, cf. [23]), et du théorème de Cairns–Hirsch. Pour $q = 2$, Wall a démontré tout récemment que $\Gamma^q_n = 0$ (cf. [21]). Pour $n > 4$, cela résulte également d'un théorème plus fort de Levine (cf. [15]).

Le groupe C^q_n est isomorphe pour $q > 2$, d'après le théorème de Zeeman [24], au groupe défini dans [4] et noté de le même manière. On a montré l'isomorphisme $C^q_n = \pi_{n-1}(G; SO, G_q)$.

Pour $q \leqq 2$, comme $\Gamma^q_n = 0$, il résulte de 4.7 que $C^q_n = \Gamma_{n+1}$. Les deux premiers groupes non nuls sont $C^3_3 = \mathbf{Z}$ et $C^3_4 = \mathbf{Z}_{12}$ (cf. [4]).

5.2. THÉORÈME. *La suite exacte* 4.8 *donne la suite exacte courte:*

$$0 \to \mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q}) \to \mathrm{Im}^l(S^n, S^{n+q}) \to \Gamma_n \to 0.$$

Il suffit de montrer que $\mathrm{Im}^l(S^n, S^{n+q}) \to \Gamma_n$ est toujours surjectif. Soit α un lissage de S^n. La variété différentiable $(S^n)_\alpha$ peut toujours être plongée dans une sphère S^{n+N} de grande dimension. D'après Adams, son fibré normal est trivial (cf. [12]) de sorte que ce plongement est régulièrement homotope à une immersion différentiable dans S^{n+q}, où $q > 0$ (cf. Hirsch [6], Th. 6.4).

5.3. Codimension 1 et 2

Des suites exactes 4.3, 4.5, 4.7 du Théorème 5.2 et de $\Gamma_n^q = 0$ pour $q \leqq 2$, on déduit le

THÉORÈME. *Pour $q = 1$ ou 2, on a*

$$\mathrm{Im}^l(S^n, S^{n+q}) = \mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q})$$

et une suite exacte

$$0 \to \mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q}) \to \mathrm{Im}^l(S^n, S^{n+q}) \to \Gamma_n \to 0.$$

Remarquons que $\mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q}) = \pi_n(SO)$ pour $q = 1{,}2$ et $n > 2$. Nous laissons au lecteur le soin de démontrer que le groupe $\mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q})$ est isomorphe à $F\Gamma_n$, c'est à dire au groupe des classes de concordance des lissages de S^n muni d'une trivialisation de leur fibré normal stable.

5.4. Exemple d'une immersion semi-différentiable qui ne peut être lissée

Toute immersion s.d. non triviale de S^4 dans S^7 ne peut être lissés. Ces dimensions sont les plus basses où ce phénomène peut se produire.

Remarquons d'abord que toute immersion différentiable de S^4 dans S^7 est régulièrement homotope à l'inclusion, car $\pi_4(SO, SO_3) = 0$. D'autre part $C_3^3 = \mathbf{Z}$ (cf. [4]), et tout plongement différentiable de S^3 dans S^6 est trivial comme immersion (cf. [4]). Donc d'après 4.3, on a

$$\mathrm{Im}^{sd}(S^4, S^7) = C_3^3 = \mathbf{Z}$$

Ces immersions sont construites comme suit. Soit $f_0 : S^3 \to S^6$ un plongement différentiable noué (le générateur est décrit explicitement dans [5]). On peut étendre f_0 suivant une immersion différentiable f_N de l'hémisphère nord $x_5 \geqq 0$ de S^4 dans l'hémisphère nord $x_8 \geqq 0$ de S^7 et suivant un plongement s.d. f_S de l'hémisphère sud de S^4 dans l'hémisphère sud de S^7. La réunion des applications f_N et f_S est une immersion s.d. de S^4 dans S^7; l'obstruction pour la lisser est précisément la classe de f_0 (cf. 4.1). Remarquons d'ailleurs que $\mathrm{Im}^l(S^4, S^7)$ est aussi trivial car $\Gamma_4 = 0$ d'après Cerf [2].

Le premier cas où une immersion différentiable non concordante à l'inclusion peut l'être par une concordance s.d. (c'est-à-dire où l'homomorphisme $\mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q}) \to \mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q})$ n'est pas injectif), se produit pour $n = 7$ et $q = 4$. En effet, le groupe $\mathrm{Im}^d(S^7, S^{11}) = \pi_7(SO, SO_4)$ est infini, alors que $\mathrm{Im}^{sd}(S^7, S^{11})$ est fini (cf. 5.7).

On a les résultats plus généraux suivants.

5.5. THÉORÈME. *L'application $\mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q}) \to \mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q})$ est bijective pour $n < 2q - 2$ et injective pour $n = 2q - 2$.* Ceci résulte de 4.3 et de [4] 6.6 et 6.10.

Dans le cas limite où $n = 2q - 2$, c'est-à-dire $q = r + 1$ et $n = 2r$, on a le théorème suivant qui découle de 4.3, 5.5 et de [4] 8.14.

5.6. THÉORÈME. *Pour $r > 1$, on a la suite exacte:*

$$0 \to \mathrm{Im}^d(S^{2r}, S^{3r+1}) \to \mathrm{Im}^{sd}(S^{2r}, S^{3r+1}) \to C_{2r-1}^{r+1} \to 0$$

où C_{2r-1}^{r+1} est $\mathbf{Z}$ ou $\mathbf{Z}_2$ suivant que r est pair ou impair.

5.7. Caractère de finitude

Le groupe $\pi_n(SO, SO_q) = \mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q})$ est isomorphe à la somme directe de $\mathbf{Z}$ et d'un groupe fini pour $n = q$ pairs et pour $n = 4k - 1$ et $q < 2k + 1$; il est fini dans les autres cas.

Quant au groupe C_n^q, il est somme directe de $\mathbf{Z}$ et d'un groupe fini pour $n = 4k - 1$ et $2 < q \leqq 2k + 1$; c'est un goupe fini dans les autres cas (cf. [14] et Kervaire–Milnor [12]). De plus par l'homomorphisms $C_{4k-1}^q \to \mathrm{Im}^d(S^{4k-1}, S^{4k-1+q})$, les éléments d'ordre infini sont appliqués sur des éléments d'ordre infini pour $2 \leqq q < 2k + 1$ (cf. [4], remarque 6.8).

Le théorème suivant se déduit donc de la suite exacte 4.3 et de 5.3.

THÉORÈME. *Le groupe $\mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q})$ est la somme directe de $\mathbf{Z}$ et d'un groupe fini dans les cas suivants:*

(i) *n et q sont éqaux et pairs,*

(ii) *$n = 4k$ et $q = 2k + 1$,*

(iii) *$n = 4k - 1$ et $q = 1$ ou 2.*

Il est fini dans les autres cas.

Dans le paragraphe suivant, nous montrerons le résultat plus précis que $\mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q})$ est isomorphe à $\pi_n(G, G_q)$ pour $q > 2$.

§6. L'ISOMORPHISME $\mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q}) = \pi_n(G, G_q)$ POUR $q > 2$.

6.1. Construction de l'homomorphisme $\pi\colon \mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q}) \to \pi_n(G, G_q)$

G_q est l'espace des applications de degré 1 de S^{q-1} dans elle-même. Par suspension, on identifie G_q à un sous-espace de G_{q+1} et G désigne la limite inductive des G_q. Dans ce paragraphe D^n désigne la sous-variété différentiable de $\mathbf{R}^n$ formée des vecteurs de longueur $\leqq 1$.

Un élément de $\pi_n(G, G_q)$ peut être représenté par une application h de $D^n \times S^{N+q-1}$ dans S^{N+q-1}, N grand, telle que, pour tout $x \in \partial D^n$, l'application $h_x : S^{N+q-1} \to S^{N+q-1}$ définie par $h_x(y) = h(x, y)$ est la N-suspension d'une application de degré 1 de S^{q-1} dans S^{q-1}.

D'après la Proposition 4.1, toute classe de concordance d'immersions s.d. de S^n dans S^{n+q} peut être représentée par une immersion f telle que $f|D_-^n$ soit un plongement s.d. dans D^{n+q} isotope à l'identité et proche de l'inclusion, et que $f_+ = f|D_+^n$ soit une immersion différentiable dans D_+^{n+q}. Nous pouvons supposer de plus que $f(D_+^n)$ est contenu dans un voisinage tubulaire standard de D_+^n dans D_+^{n+q} qui sera identifié à $D^n \times D^q$.

Ainsi l'immersion différentiable $f_+ : D^n_+ \to D^n \times D^q$ applique ∂D^n_+ dans $\partial D^n \times D^q$. En considérant $D^n \times D^q$ comme un sous-espace de $D^n \times D^{q+N}$ par l'inclusion de D^q dans D^{q+N}, si $N + q \geqq n + 1$, on peut construire d'après Whitney une homotopie régulière différentiable fixe sur D^n_+, reliant f_+ à un plongement $g : D^n_+ \to D^n \times D^{q+N}$. Soit $\varphi^+ = (\varphi_1^+, \ldots, \varphi_{q+N}^+)$ un champ de repères normaux à f_+ tels que $\varphi_i^+(x) = (0, e_i)$ où e_i est le $i^{\text{ème}}$ vecteur de base de $\mathbf{R}^{q+N}$. L'homotopie régulière faisant passer de f_+ à g peut s'étendre suivant une homotopie du champ des repères normaux, fixe sur ∂D^n_+, reliant φ^+ à un champ de repères normaux $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_{q+N})$ à g_+. En utilisant le même argument que dans [4] §2, on peut construire une application différentiable H de $D^n \times D^{q+N} \to D^{q+N}$ telle que $H^{-1}(0)$ soit la sous-variété différentiable $g(D^n_+)$, que la différentielle de H en $g(x)$ applique le vecteur $\varphi_i(x)$ sur e_i, et que pour $x \in \partial D^n$ l'application $H_x : D^{q+N} \to D^{q+N}$ (définie par $H_x(y) = H(x, y)$) soit la suspension d'une application de D dans D^q. Enfin H applique $D^n \times D^{q+N}$ dans D^{q+N}.

La restriction h de H à $D^n \times \partial D^{q+N} \to \partial D^{q+N}$ représente un élément de $\pi_n(G, G_q)$ qui sera par définition l'image par π de la classe de f.

Cet élément ne dépend pas du choix particulier de f dans sa classe de concordance, ni de l'arbitraire de notre construction. Pour le montrer, on utiliserait la deuxième partie de la démonstration de la Proposition 4.1 et un argument analogue à celui de [4], §2.5. On vérifie aussi facilement que π est un homomorphisme.

On pourrait montrer directement que π est un isomorphisme si $q > 2$ par la méthode de [4]; on devrait utiliser de plus le fait démontré par Zeeman [24] que tout plongement différentiable de S^{n-1} dans S^{n+q-1} est isotope semi-différentiablement à l'inclusion pour $q > 2$, ainsi que le théorème de compression des immersions (cf. Hirsch [6], Th. 6.4).

Mais, avec ce que nous savons déjà, la démonstration de cet isomorphisme se ramènera à la vérification de la commutativité du diagramme suivant.

6.2. THÉORÈME. *Le diagramme suivant est commutatif au signe près*

$$\begin{array}{ccccccc} C_n^q & \longrightarrow & \mathrm{Im}^d(S^n, S^{n+q}) & \longrightarrow & \mathrm{Im}^{sd}(S^n, S^{n+q}) & \longrightarrow & C_{n-1}^q \\ \downarrow{\scriptstyle\psi} & & \downarrow{\scriptstyle\Phi} & & \downarrow{\scriptstyle\pi} & & \downarrow{\scriptstyle\psi} \\ \pi_{n+1}(G; SO, G_q) & \longrightarrow & \pi_n(SO, SO_q) & \longrightarrow & \pi_n(G, G_q) & \longrightarrow & \pi_n(G; SO, G_q) \end{array}$$

où Ψ *est l'homomorphisme défini dans* [4] *et* Φ *l'isomorphisme de Smale, la deuxième suite exacte étant celle de la triade* $(G; SO, G_q)$ (cf. [4] §4).

Pour $q > 2$*, la première suite exacte s'envoie isomorphiquement dans la seconde.*

Démonstration. Une fois la commutativité démontrée, le lemme des cinq impliquera que π est un isomorphisme, puisque Φ est un isomorphisme d'après Smale [19] et que Ψ est un ismorphisme pour $q > 2$, d'après [4].

La commutativité du dernier carré résulte immédiatement des définitions de π et ψ.

La construction suivante de l'homomorphisme Φ rendra évidente la commutativité du deuxième carré. Toute immersion différentiable de S^n dans S^{n+q} est régulièrement homotope à une immersion f telle que $f|D^n_-$ est l'inclusion et $f_+ = f|D^n_-$ est une immersion dans $D^n_- \times D^q \subset D^{n+q}_+$ telle que $f_+(x) = (x, 0)$ pour $x \in \partial D^n_-$. Dans $D^n_- \times D^{q+N}_+ \supset D^n_- \times D^q$, il existe une homotopie régulière, fixe sur ∂D^n_+, reliant f_+ à l'inclusion $i : x \to (x, 0)$. En partant d'un champ de repères $\varphi^+ = (\varphi_1^+, \dots, \varphi_{q+N}^+)$ normaux à f_+ tels que $\varphi_i^+ = (0, e_i)$ pour $i > q$, on obtient comme plus haut par extension de l'homotopie régulière un champ de repères orthonormaux $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_{q+N})$ le long de $D^n_+ \times 0$, tels que pour $x \in \partial D^n_+$, $\varphi_i(x) = (0, e_i)$ pour $i > q$.

Soit H l'application de $D^n_+ \times D^{q+N} \to D^{q+N}$ telle que pour tout $x \in D^n_+$, H_x est la rotation de D^{q+N}_+ appliquant le repère $\varphi_1, \dots, \varphi_{q+N}$ sur $e_1, \dots, e_{q+N}$; elle représente un élément de $\pi_n(SO, SO_q)$ qui est l'image par Φ de la classe d'immersion $[f]$ de f.

Quant à la commutativité du premier carré, elle se démontre en remarquant que c'est le plongement $\bar{f}: D^{n+1} \to D^{n+1} \times D^{q+N}$ (cf. [4], Th. 2.3) qui joue essentiellement le rôle d'une concordance reliant f_+ à l'inclusion i.

Vérifions que Φ est bien équivalent à l'isomorphisme défini par Smale dans [19]. Identifions D^n_+ à D^n. Cet isomorphisme fait correspondre à la classe de f l'élément α de $\pi_n(V_{n+q,n})$ représenté par l'image du champ trivial $e_1, \dots, e_n$ tangent à D^n par la différentielle de f_+. En complétant ce champ par les vecteurs $(0, e_{q+1}), \dots, (0, e_{q+N})$, on obtient la suspension de α. Par l'intermédiaire de l'homotopie régulière reliant f_+ à i, cet élément est aussi représenté par le champ $(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), \varphi_{q+1}, \dots, \varphi_{q+N}$. Finalement, le champ de repères $(e_1, 0), \dots, (e_n, 0), \varphi_1, \dots, \varphi_{q+N}$ représente au signe près l'image de cet èlément par l'isomorphisme de $\pi_n(V_{N+n+q,N+n})$ sur $\pi_n(SO_{N+n+q}, SO_q) = \pi_n(SO, SO_q)$; il représente aussi Φ ($[f]$) au signe près.

BIBLIOGRAPHIE

1. H. Cartan: *Séminaire 1956/57*, Ecole Normale Supérieure, Paris, Exposés 1, 3 et 4.
2. J. Cerf: La nullité du groupe Γ_4. *Séminaire H. Cartan*, Ecole Normale Supérieure, Paris, 1962/63.
3. A. Haefliger et V. Poénaru: La classification des immersions combinatoires, *Publs Math. Inst. Ht. Étud. Scient.* **23** (1964), 75–91.
4. A. Haefliger: Differentiable embeddings of S^n in S^{n+q} for $q > 2$, *Ann. Math.* **83** (1966), 402–436.
5. A. Haefliger: Knotted $(4k - 1)$-spheres in $6k$-space, *Ann. Math.* **75** (1962), 452–466.
6. M. W. Hirsch: Immersions of manifolds, *Trans. Am. Math. Soc.* **93** (1959), 242–276.
7. M. W. Hirsch: Obstruction theories for smoothing manifolds and maps, *Bull. Am. Math. Soc.* **69** (1963), 352–356.
8. M. W. Hirsch and B. Mazur: Smoothing of piecewise linear manifolds, mimeo. Notes, Cambridge University, 1964.
9. J. F. P. Hudson and E. C. Zeeman: On combinatorial isotopy, *Publs Math. Inst. Ht. Étud. Scient.* **19** (1964), 69–94.
10. J. P. Hudson: Extending piecewise linear isotopies, mimeo. notes, Cambridge University.
11. J. F. P. Hudson and E. C. Zeeman: On regular neighbourhoods, *Proc. Lond. Math. Soc.* **14** (1964), 719–745.
12. M. A. Kervaire and J. Milnor: Groups of homotopy spheres I, *Ann. Math.* **77** (1963), 504–537.
13. R. Lashof and M. Rothenberg: Microbundles and smoothing, *Topology* **3** (1965), 357–388.
14. J. Levine: A classification of differentiable knots, *Ann. Math.* **82** (1965), 15–50.
15. J. Levine: Unknotting spheres in codimension 2, *Topology* **4** (1965), 9–16.
16. J. Munkrès: Elementary differential topology, *Ann. Math. Stud. No. 54*, Princeton, 1963.
17. J. Munkrès: Obstructions to the smoothing of piecewise differentiable homeomorphisms, *Ann. Math.* **72**, (1960), 521–524.
18. J. Munkrès: Higher obstructions to smoothing, *Topology* **4** (1965), 27–45.
19. S. Smale: The classification of immersions of spheres in euclidean spaces, *Ann. Math.* **69** (1959), 327–344.
20. S. Smale: On the structure of manifolds, *Am. J. Math.* **84** (1962), 387–399.

21. C. T. C. WALL: Locally flat Pl-submanifolds with codimension two, to appear.
22. J. H. C. WHITEHEAD: On C^1-complexes, *Ann. Math.* **41** (1940), 809–814.
23. E. C. ZEEMAN: Seminar on combinatorial topology (mimeo. notes), Inst. Ht. Études Scient. Bures-s-Yvette, 1963.
24. E. C. ZEEMAN: Unknotting combinatorial balls, *Ann. Math.* **78** (1863), 501–526.
25. E. C. ZEEMAN and A. HAEFLIGER: à rédiger†.

Geneva University

† *Added to proofs:* Les auteurs ont renonce à publier à travail cas la plupart de leurs résultats sont des cas particuliers de aux démontrés par C. P. ROURKE et B. J. SANDERSON: Block bundles, I, *Ann. Math.* á paraître.