MATHEMATICS

EIN EINHEITLICHES VERFAHREN ZUR DEFINITION VON ABSOLUT- UND BEDINGT-KONVERGENTEN INTEGRALEN. VIII *)

VON

J. RIDDER

(Communicated at the meeting of February 25, 1967)

Einleitung. In diesem Teile beschränken wir uns auf den Fall, in welchem in R_1 Φ und T für einzelne Punkte immer den Wert Null haben (Φ und T wie in Teil I, § 1), und in R_2 Φ und T für einzelne Punkte und endliche lineare Intervalle parallel zur x- und y-Achse immer gleich Null sind, daneben $T>0$ *für jedes zweidim. Intervall* (Φ und T definiert wie in Teil IV, § 20). Wir betrachten außerdem nur Maße und Integrale korrespondierend mit T.[137]) Die in beiden Räumen einzuführenden Integrale nennen wir *(D Li S)-Integrale in bezug auf T*, da sie auf Grundideeen von Denjoy, Lipschitz und Stieltjes zurückgehen; sie sind dazu gebildet das Problem der primitiven Funktionen in korrespondierenden Fällen zu lösen. Die Verhältnisse dieser Integrale zu den allgemeinen Riemann-Integralen i.b.a. T werden näher untersucht.

Das (D Li S)-Integral in bezug auf T in R_1.

§ 55. Definition. $\mathfrak{F}$ sei in i_0 und $\bar{i}_0$ endlichwertige Intervall- und Segment-funktion mit $\mathfrak{F}(i)=\mathfrak{F}(\bar{i})$ für jedes $i \subseteqq i_0$. Dann ist sie in einem Segment $\bar{i}_0^* \subset i_0$ *Lipschitz-stetig in bezug auf T* (T wie oben), falls es eine positive Konstante N gibt so daß für jedes $i \subseteqq i_0^*$:

$$|\mathfrak{F}(i)| \leqq N \cdot T(i);$$

wir nennen $\mathfrak{F}$ wohl auch *(T, N)-stetig in* $i_0^*(\bar{i}_0^*)$.

Mit der Definition des Burkill-Integrals in VI, § 43 folgt der

Satz: Ist $\mathfrak{F}$ in i_0^* (T, N)-stetig, und existiert das Burkill-Integral $\int_{i(\bar{i})}(B)\mathfrak{F}$ in i_0^*, so ist dieses Integral eine (T, N)-stetige, (beschränkt-) additive Intervall- und Segmentfunktion.

*) Bemerkungen zu VII$^{\text{bis}}$, §§ 52–54: 1. Mit Theorem 62 folgt daß dieses Theorem, bei auf der Hand liegender Erweiterung der Definition der $(PS)^{00}$-Integrale über i_0 i.b.a. T, auch gilt für in i_0 nur beschränkt vorausgesetzte Funktion f. 2. Der Satz von § 53 gilt auch für f nur beschränkt in i_0. (Vergl. VII$^{\text{bis}}$, § 50). 3. Korrektur. Der Wortlaut des Beweises von Theorem 63 (§ 54) bleibe ungeändert, jedoch bei Benutzung der unter 1. und 2. angegebenen Erweiterungen.

[137]) Für Übertragung auf Φ vergleiche insbes. Teil III.

Satz. Ist $\mathfrak{F}$ in i_0^* additiv und stetig [also mit $\lim\limits_{p\to q;\, p<q} \mathfrak{F}[(p, q)] = \lim\limits_{q\to p;\, p<q} \mathfrak{F}[(p, q)] = 0$; $[p, q] \subseteqq \bar{i}_0^*$], E eine perfekte Teilmenge von $\bar{i}_0^*$, mit $T[u(\xi)] \neq 0$ für $\xi \in E$, $u(\xi)$ Umgebung von ξ, und, bei $N > 0$, die zugehörige, aus $\mathfrak{F}$ hervorgehende Intervallfunktion $\mathfrak{F}_E$ [138]) (T, N)-stetig in $\bar{i}_0^*$,[138bis]) so existiert das Burkill-Integral $\int_{i_0^*}(B)\mathfrak{F}_E$, mit

$$\int_{i_0^*}(B)\,\mathfrak{F}_E = \int_E (LS) D_{T;x}\mathfrak{F} dm_T;$$

dabei ist $D_{T;x}\mathfrak{F}$ die in den Punkten von E, eine Teilmenge von m_T-Maß Null ausgenommen, existierende, gleichmäßig beschränkte Ableitung von $\mathfrak{F}$ nach T.[139])

Beweis. Neben $D_{T;x}\mathfrak{F}$ lassen sich einführen obere und untere Derivierte von $\mathfrak{F}$ nach T, $\bar{D}_{T;x}\mathfrak{F}$ bzw. $\underline{D}_{T;x}\mathfrak{F}$, in x.[139bis]) Da diese extremen Derivierten auf E gleichmäßig beschränkt sind ($\leqq N$), folgt aus dem auf den Fall von Derivierten nach T (allgemeiner Φ) erweiterten Denjoyschen Satz über die Derivierten von endlichwertigen Punktfunktionen einer Veränderlichen oder der zugehörigen Intervallfunktionen,[140]) daß in den Punkten von E, eine Teilmenge von m_T-Maße Null ausgenommen, die Ableitung $D_{T;x}\mathfrak{F}$ existiert. Zu $\varepsilon > 0$, $\eta > 0$ und der Menge E gibt es eine positive Zahl $\vartheta(\varepsilon, \eta)$ derart daß für die Punkte x von $E \cdot i_0^*$, diejenigen einer Teilmenge E' mit $m_T(E') < \eta$ ausgenommen,

$$\left| \frac{\mathfrak{F}[i(x)]}{T[i(x)]} - D_{T;x}\mathfrak{F} \right| < \varepsilon \tag{180}$$

ist, falls $i(x)$ ein x enthaltendes Teilintervall von i_0^* ist, mit Länge $|i(x)| < \vartheta(\varepsilon, \eta)$.

E läßt sich einschließen in endlich viele Segmente $\bar{i}_k \subset \bar{i}_0^*$, paarweise ohne gemeinsame innere Punkte, und von genügend kleiner Länge ($<\delta$), derartig daß

$$m_T\Big(\sum_{(k)} \bar{i}_k - E\Big) < \eta \tag{181}$$

ist. Die von den Segmenten $\bar{i}_k$ gebildete Menge läßt sich zerlegen in endlich viele Segmente, paarweise ohne gemeinsame innere Punkte, welche sich in zwei Gruppen teilen lassen: 1° die Segmente $\bar{u}_j$ der ersten Gruppe haben mindestens einen Randpunkt gehörend zu E, jedoch keine zu E gehörenden inneren Punkte; 2° die Segmente $\bar{v}_l$ der zweiten Gruppe

---

[138]) Siehe die zweite Definition in VI, § 43.

[138bis]) $\mathfrak{F}$ ist dadurch insbes. totalstetig um E (im Sinne von Denjoy).

[139]) Siehe die erste Definition in II$^{\text{bis}}$, § 10.

[139bis]) Ebenso wie die Ableitungen nach T werden die extremen Derivierten nach T in x als existierend, jedoch von unbestimmtem Werte betrachtet, falls es eine Umgebung von x mit $T[i(x)] = 0$ gibt, wobei dann auch immer $\mathfrak{F}[(i(x)] = 0$ sein soll.

[140]) Siehe unsere Arbeit: *Über PS- und DS-Integrationen*, Math. Ztschr. **40** (1935), S. 127–160, insbes. S. 134 (Satz III).

haben sowohl im Innern wie auf ihrem Rande Punkte mit E gemein, während die Länge (der Diameter) eines jeden Segmentes dieser Gruppe kleiner als $\vartheta(\varepsilon, \eta)$ ist. Da $\mathfrak{F}_E$ in i_0^* (T, N)-stetig ist, folgt die Existenz der LS-Integrale von $\bar{D}_{T;x}\mathfrak{F}$ und $\underline{D}_{T;x}\mathfrak{F}$ über E i.b.a. m_T, und es ist:

$$(182)\qquad \int_E (LS) D_{T;x}\mathfrak{F} dm_T - \sum_{(k)} \mathfrak{F}(\bar{i}_k) = \sum_{(l)} [\int_{E\cdot \bar{v}_l}(LS) D_{T;x}\mathfrak{F} dm_T - \\ - \mathfrak{F}_E(\bar{v}_l)] - \sum_{(j)} \mathfrak{F}_E(\bar{u}_j).$$

Mit (181) und $\mathfrak{F}_E$ (T, N)-stetig in i_0^* folgt:

$$(183)\qquad \left| \sum_{(j)} \mathfrak{F}_E(\bar{u}_j) \right| < N \cdot \eta.$$

Da sich für jedes Segment $\bar{v}_l$ schreiben läßt:

$$\int_{E\cdot \bar{v}_l}(LS) D_{T;x}\mathfrak{F} dm_T - \mathfrak{F}_E(\bar{v}_l) = \int_{E'\cdot \bar{v}_l}(LS) D_{T;x}\mathfrak{F} dm_T + \\ + \int_{(E-E')\cdot \bar{v}_l}(LS) \left(D_{T;x}\mathfrak{F} - \frac{\mathfrak{F}_E(\bar{v}_l)}{T(\bar{v}_l)} \right) dm_T - \frac{\mathfrak{F}_E(\bar{v}_l)}{T(\bar{v}_l)} \times m_T[\bar{v}_l - \bar{v}_l \cdot (E-E')],$$

folgert man aus $\mathfrak{F}_E$ (T, N)-stetig, (180) und (181), mit $m_T(E') < \eta$, daß die erste Summe des zweiten Gliedes von (182) in absolutem Werte kleiner ist als

$$N \cdot \eta + \varepsilon \cdot m_T(E) + N \cdot 2\eta.$$

Dies mit (182) und (183) liefert weiter:

$$\left| \int_E (LS) D_{T;x}\mathfrak{F} dm_T - \sum_{(k)} \mathfrak{F}_E(\bar{i}_k) \right| < 4N \cdot \eta + \varepsilon \cdot m_T(E).$$

Bei η und der Überdeckung von E durch die $\bar{i}_k$ fest, und $\varepsilon \to 0$ folgt

$$\left| \int_E (LS) D_{T;x}\mathfrak{F} dm_T - \sum_{(k)} \mathfrak{F}_E(\bar{i}_k) \right| \leqq 4N \cdot \eta.$$

Dieses führt zu der Behauptung des Satzes.

Definition des $D\ Li\ S$-Integrals i.b.a. T (T wie oben). *Ein unbestimmtes $D\ Li\ S$-Integral in bezug auf T der Funktion f in i_0* ist eine für die Intervalle $i \subseteqq i_0$ beschränkt additive, stetige Intervallfunktion $\mathfrak{F}(i) \equiv \int_i (DLiS) f\, dT$, für die: 1° zu jeder perfekten Teilmenge E von i_0 ein Stück ϖ, mit Endpunkten p, q, und eine zugehörige Zahl N_ϖ existiert derartig daß $\mathfrak{F}_\varpi$ (T, N_ϖ)-stetig ist in $\bar{i}_0^* \equiv [p, q]$; 2° f in denjenigen Punkten von ϖ, in welchen $D_{T;x}\mathfrak{F}$ existiert, eine Teilmenge von ϖ mit m_T-Maß Null ausgenommen, mit dieser Ableitung zusammenfällt, wodurch mit dem vorigen Satz für jedes $i \subseteqq i_0^*$ folgt:

$$\int_i (B)\, \mathfrak{F}_{\varpi \cdot i} = \int_{\varpi \cdot i}(LS)\, f\, dm_T.$$

Mittels transfiniter Induktion folgt die eindeutige Bestimmtheit des $(DLiS)$-Integrals von f für die Teilintervalle von i_0; wohl auch daraus daß diese Integraldefinition sich als ein Spezialfall der Definition J_1^* von VI, § 44 betrachten läßt. Dadurch folgt, etwa mit Theorem 59^{bis} in VII, § 48, und dem letzten Satz:

Theorem 64. Jede in i_0 definierte Funktion f, welche ein unbestimmtes $DLiS$-Integral i.b.a. T (T wie oben) in i_0 hat, und daselbst somit endlich ist bis auf eine Teilmenge von m_T-Maß Null, hat auch ein allgemeines Riemann-Integral i.b.a. T in i_0 (gemäß Def. C^{bis} in II, § 7), wobei für $i \subseteqq i_0$:

$$\mathfrak{F}(i) \equiv \textstyle\int_i (DLiS)\, f\, dT = \int_i (\text{allg. } R)\, f\, dT;$$

dabei ist in den Punkten von i_0, eine Teilmenge von m_T-Maße Null ausgenommen,

$$D_{T;x}\mathfrak{F} = f = \text{endlich}.$$

Nicht jede in bezug auf T DS- oder (was dasselbe bedeutet) allgemein R-integrierbare Funktion in i_0 ist $DLiS$-integrierbar i.b.a. T. Es gibt sogar, bei $T(i) \equiv |i|$, nach Lebesgue integrierbare Funktionen, die kein $DLiS$-Integral i.b.a. $T(i) \equiv |i|$ haben, wie aus unserer Arbeit: *Über Denjoy–Perron Integration von Funktionen zweier Variablen*, C.R. Soc. Sci Varsovie, classe III, **28** (1935), S. 5–15, insbes. Fußn. 14 auf S. 15 (mit l.c. I. auf S. 8) hervorgeht.

§ 55^{bis}. Theorem 65. (Lösung des Problems der primitiven Funktionen i.b.a. T). Hat eine in i_0 stetige und beschränkt additive Intervallfunktion $\mathfrak{F}$ obere und untere Derivierte, $\overline{D}_{T;x}\mathfrak{F}$ bzw. $\underline{D}_{T;x}\mathfrak{F}$, welche nur in abzählbar vielen Punkten entweder $+\infty$ oder $-\infty$ [141]) sein können, so existiert $D_{T;x}\mathfrak{F}$ in den Punkten von $i_0 - H$, wobei $m_T(H) = 0$,[140]) und ist für die Teilintervalle (i) von i_0:

$$\mathfrak{F}(i) = \textstyle\int_i (DLiS) D_{T;x}\mathfrak{F}\, dT.^{142)}$$

Beweis. Aus $\mathfrak{F}$ und T stetig in i_0, und gleich Null in genügend kleinen Umgebungen von Punkten, in welchen $\overline{D}_{T;x}\mathfrak{F}$ und $\underline{D}_{T;x}\mathfrak{F}$ unbestimmt sind, und $T \neq 0$ in allen genügend kleinen Umgebungen von Punkten, in welchen $\overline{D}_{T;x}\mathfrak{F}$ und $\underline{D}_{T;x}\mathfrak{F}$ endlich sind, folgt daß i_0 sich, ausgenommen in abzählbar vielen Punkten, überdecken läßt durch abzählbar viele perfekte Teilmengen $\{\varpi_n\}$, jede enthalten in einem kleinsten Teilsegment $\bar{\imath}_n$ von i_0, und zu deren jeder eine positive Zahl N_n gehört derartig daß $\mathfrak{F}_{\varpi_n}$ in $\bar{\imath}_n$ (T, N_n)-stetig ist.[143]) Mittels transfiniter Induktion läßt dies sich in die unter 1° der Definition des $DLiS$-Integrals angegebene Form überführen.

Anwendung des der Definition vorangehenden Satzes liefert die Behauptungen von Theorem 64.

---

141) Bekanntlich braucht bei Nichtabzählbarkeit der Menge dieser Punkte $\mathfrak{F}$ nicht eindeutig durch die extremen Derivierten festgelegt zu sein, und ist also die Behauptung von Theorem 65 nicht beweisbar.

142) Erwähnt sei die Existenz, schon für $T(i) \equiv |i|$, von derartigen $\mathfrak{F}(i)$ mit $D_{T;x}\mathfrak{F}$ nicht LS-integrierbar i.b.a. m_T.

143) Zum Beweise vergleiche man z.B. Ridder, *Über Derivierte und Ableitungen*, C.R. Soc. Sci Varsovie, classe III, 23 (1930), S. 1–11, insbes. S. 3 (Beweis eines Lemmas).

§ 55ter. In Teil VII lieferte Theorem 59bis die Aequivalenz des allgemeinen Riemann-Integrals-, des PS-Integrals- und des DS-Integrals i.b.a. T bei in i_0 definierten Funktionen, die nur in den Punkten von Mengen von m_T-Maß Null unendlich werden können. Für den hier betrachteten Fall von T (also mit Wert Null für nur einen einzelnen Punkt enthaltende Mengen) geht die zu der PS-Integration gehörende Definition F (in III, § 13) über in die folgende Definition einer nur für Teilintervalle i und -segmente $\bar{\imath}$ von i_0 bzw. $\bar{\imath}_0$ zu betrachtenden T-Majorante Ψ_o: 1. Ψ_o ist eine additive, stetige Intervall- und Segmentfunktion; 2a. die untere T-Derivierte von Ψ_o existiert, $\neq -\infty$ in allen Punkten (x) von i_0, eine (ev. leere) abzählbare Menge von Punkten ausgenommen;[144] 2b. die untere T-Derivierte von Ψ_o ist $\geqq f(x)$ in allen Punkten (x) von i_0, eine Teilmenge von m_T-Maß Null ausgenommen.[145] Die zugehörigen Definitionen einer T-Minorante Ψ_u von f und des PS-Integrals von f i.b.a. ein derartiges T liegen auf der Hand.

Legt man nun außerdem Ψ_o die Bedingung auf daß in den Bestimmtheitspunkten von $\underline{D}_T \Psi_o$ und $\bar{D}_T \Psi_o$ „beide" endlich sind, eine abzählbare Menge von derartigen Punkten ausgenommen, und fordert man dasselbe für die extremen T-Derivierten eines Ψ_u, so erhält man eine (*spezielle*) *PS-Integration von f i.b.a. T, welche genau ebenso weit führt wie die DLiS-Integration* (von § 55).

Denn, da das unbestimmte DS-Integral einer Funktion f i.b.a. T in allen Punkten von i_0, eine Teilmenge von m_T-Maße Null ausgenommen, eine endliche T-Ableitung gleich f hat [Teil IIbis, § 10 (Th. 14)], gilt dasselbe für das aequivalente PS-Integral i.b.a. T, und umsomehr auch für das im vorigen Absatz betrachtete spezielle PS-Integral einer Funktion f i.b.a. T. Aus folgender Relation, in welcher $\mathfrak{F}$ diesmal das spezielle PS-Integral von f, Ψ_o und Ψ_u zugehörige Majorante und Minorante darstellen, und gültig in den Bestimmtheitspunkten (x) der extremen Derivierten:

$$\underline{D}_{T;x} \Psi_u \leqq \underline{D}_{T;x} \mathfrak{F} \leqq \bar{D}_{T;x} \mathfrak{F} \leqq \bar{D}_{T;x} \Psi_o$$

geht hervor daß auch $\underline{D}_{T;x} \mathfrak{F}$ und $\bar{D}_{T;x} \mathfrak{F}$ endlich sind in diesen Punkten, eine abzählbare Teilmenge ausgenommen. Mit Theorem 65 folgt daß f, welche in den Punkten von i_0, eine Teilmenge von m_T-Maß Null ausgenommen, mit $D_{T;x} \mathfrak{F}$ zusammenfällt, nun auch ein $DLiS$-Integral über i_0 hat, zusammenfallend mit ihrem speziellen PS-Integral.

Umgekehrt, hat f ein unbestimmtes allgemeines $DLiS$-Integral in i_0 i.b.a. T, so ist dieses Integral gleichzeitig spezielle Majorante und spezielle Minorante im oben angegebenen Sinne, und ist dadurch auch unbestimmtes

---

144) In einem Unbestimmtheitspunkte von $\underline{D}_{T;x} \Psi_o$ (Teil III, § 13) betrachten wir diese Bedingung als erfüllt.

145) Die Möglichkeit der in 2b angebrachten Modifikation der Majorantendefinition darf als allgemein bekannt betrachtet werden. Vergl. auch loc. cit. 140), S. 145 (Satz XVI).

spezielles PS-Integral; man beachte insbes. 1° in der Definition des $DLiS$-Integrals und die letzte Behauptung von Theorem 63.

Das (D Li S)*-Integral in bezug auf* T *in* R_2.

§ 56. Vorbereitung. Wir beschränken uns zu solchen T, die für lineare Intervalle und -Segmente parallel zur x- und y-Achse den Wert Null haben, daneben *mit positivem Werte für die zweidim. Intervalle und -Segmente.*

Definition. Ist Ψ eine in einer Umgebung von P definierte Intervallfunktion, so werden *in* P *obere und untere Derivierte von* Ψ *in bezug auf* T, $\bar{D}_{T;P}\Psi$ bzw. $\underline{D}_{T;P}\Psi$, definiert durch

$$\limsup_{i(P)\to P} \frac{\Psi[i(P)]}{T[i(P)]} \text{ bzw. } \liminf_{i(P)\to P} \frac{\Psi[i(P)]}{T[i(P)]};$$

sind die extremen Derivierten einander gleich, so definiert ihr gemeinsamer Wert *die Ableitung von* Ψ *i.b.a.* T *in* P, $D_{T;P}\Psi$.[146])

In dem von D. Rutovitz verfaßten ersten Teil einer gemeinsamen Arbeit von ihm und C. Y. Pauc: *Theory of Ward for cell functions*, Ann. di mat. (4) **47** (1959), S. 1–58, insbes. S. 3–33, werden Differentiationseigenschaften für additive Zell- oder Intervallfunktionen in einer abstrakten Menge und in bezug auf ein nicht-negatives Maß abgeleitet; die dabei angenommenen Axiome sind insbes. erfüllt durch die (zweidim.) Intervalle im eukl. Raum R_2. Dadurch erhält man als Spezialisierung von Theorem II von Rutovitz, l.c. S. 13, den

Satz: Ist m_T das aus einer Intervallfunktion T (wie oben) hervorgehende LS-Maß in R_2, und hat das System der Intervalle von R_2 die schwache Vitali-Eigenschaft [147]) und die Rutovitzsche Randeigenschaft,[147]) beide in bezug auf m_T, so wird eine in i_0 additive (endlichwertige) Intervall- und Segmentfunktion Ψ [$\Psi(i) = \Psi(\bar{i})$ für jedes $i \subseteqq i_0$] in den Punkten (P) von i_0, in welchen $\bar{D}_{T;P}\Psi$ und $\underline{D}_{T;P}\Psi$ endlich sind, die Punkte dieser Art einer Teilmenge E mit $m_T(E) = 0$ ausgenommen, auch eine Ableitung $D_{T;P}\Psi$ haben.

Aus Rutovitz, loc. cit. S. 28, 29 geht hervor daß die Voraussetzungen des vorigen Satzes bei der T-Funktion $T_e(i) \equiv |i|$ erfüllt sind. Somit folgt dadurch unmittelbar der

---

[146]) Diese Ableitung wird meistens starke Ableitung genannt; in der Theorie der unbestimmten L- und LS-Integrale ist sie nur in beschränktem Umfang anwendbar, und wird üblicherweise bei der Differentiation eine besondere Wahl der Intervalle getroffen.

[147]) Eine genaue Angabe dieser Eigenschaften findet sich in Rutovitz, loc. cit. S. 10 bzw. S. 8; es ist überflüssig sie hier zu reproduzieren, da wir im weiteren Verlauf nur die aus ihnen gemäß dem vorliegenden Satze hervorgehenden Folgerung, die wir Ru-Eigenschaft von T in i_0 nennen, zu benutzen haben.

Satz von A. J. Ward:[148]) Hat die in i_0 additive Intervall- und Segmentfunktion Ψ in den Punkten (P) einer Teilmenge H von i_0 endliche extreme Derivierte in bezug auf die spezielle Intervallfunktion $T_e(i) \equiv |i|$, so existiert eine Ableitung von Ψ in bezug auf T_e in den Punkten von $H-E$, wobei für die Teilmenge E von H $m_{T_e}(E)=0$.

Definition. *Eine Intervallfunktion T (gemäß dem ersten Absatz dieses Par.)* hat *die Ru-Eigenschaft in i_0*, falls für jede in i_0 additive (endlichwertige) Intervall- und Segmentfunktion zwischen Derivierten und Ableitungen i.b.a. T die im vorletzten Satz angegebene Relation besteht.

Aus dem letzten Satz geht hervor daß $T_e(i) \equiv |i|$ in jedem i_0 die *Ru*-Eigenschaft hat.

§ 57. Die hier folgende Integraldefinition in R_2 bezieht sich auf *Integration in bezug auf Intervallfunktionen T mit der Ru-Eigenschaft in i_0*. Die Betrachtungen lassen sich ohne Mühe auf den Fall eines R_n mit $n \geqq 3$ übertragen.

Die Beweisverfahren bleiben dieselben wie in R_1, wie insbes. schon aus Vergleich der Beweise des zweiten Satzes von § 55, und des Satzes in § 6 unserer Arbeit: *Über Denjoy–Perron Integration von Funktionen zweier Variablen*, C. R. Soc. Sci Varsovie, classe III, 28 (1935), S. 5–15, wo der Spezialfall $T_e(i) \equiv |i|$ behandelt wird, hervorgeht. Wir wollen uns darum hauptsächlich zur Angabe der Definitionen und Theoreme beschränken.

Für zweidim. Intervalle und Segmente, i bzw. $\bar{\imath}$ (mit $i \subset i_0$), lassen sich zugehörige Intervall- und Segmentfunktionen, mit $\mathfrak{F}(i)=\mathfrak{F}(\bar{\imath})$, definieren. Die Definition von *(T, N)-Stetigkeit* (T wie in der Einleitung angegeben) *von $\mathfrak{F}$ in $i_0{}^*(\bar{\imath}_0{}^*)$* (bei $\bar{\imath}_0{}^* \subset i_0$) sei wie in § 55, die Definition *des Burkill-Integrals* wie in VI, § 43 (mit „Diameter" statt „Länge").

Satz. Ist $\mathfrak{F}$ in $\bar{\imath}_0{}^*$ (T, N)-stetig, und existiert das Burkill-Integral $\int_{i(\bar{\imath})}(B)\mathfrak{F}$ in $\bar{\imath}_0{}^*$, so ist dieses Integral eine (T, N)-stetige, (beschränkt-) additive Intervall- und Segmentfunktion.

Satz. Ist $\mathfrak{F}$ in $\bar{\imath}_0{}^*$ additiv und stetig (d.h. zu $\varepsilon>0$ gibt es ein $\delta>0$ mit $|\mathfrak{F}(i)|<\varepsilon$ für $i \subset i_0{}^*$ und $|i|<\delta$), E eine perfekte Teilmenge von $\bar{\imath}_0{}^*$, und bei $N>0$ die zugehörige, aus E hervorgehende Intervallfunktion $\mathfrak{F}_E$ (T, N)-stetig in $\bar{\imath}_0{}^*$ (T mit der *Ru*-Eigenschaft), so existiert das Burkill-Integral $\int_{i_0{}^*}(B)\mathfrak{F}_E$, mit

$$\int_{i_0{}^*}(B)\mathfrak{F}_E = \int_E(LS)D_{T;P}\mathfrak{F}\,dm_T;$$

dabei ist $D_{T;P}\mathfrak{F}$ die in den Punkten von E, eine Teilmenge von m_T-Maß Null ausgenommen, existierende, gleichmäßig beschränkte Ableitung von $\mathfrak{F}$ nach T.

Der Beweis verläuft wie der des zweiten Satzes von § 55; man beachte nur daß hier die Existenz von $D_{T;P}\mathfrak{F}$ in den Punkten (P) von E, eine

148) Siehe auch S. Saks, *Theory of the integral* 1937, S. 141.

Teilmenge von m_T-Maß Null ausgenommen, eine Folge der Ru-Eigenschaft von T ist.

Definition des $D\ Li\ S$-Integrals i.b.a. T (T mit der Ru-Eigenschaft). *Ein unbestimmtes $D\ Li\ S$-Integral in bezug auf T der Funktion f in i_0* ist eine für die Intervalle $i \subseteqq i_0$ beschränkt additive, stetige Intervallfunktion $\mathfrak{F}(i) \equiv \int_i (DLiS)\, f\, dT$, für die: 1° zu jeder perfekten Teilmenge E von i_0 ein Stück ϖ, enthalten im kleinsten Segment $\bar{i}_0 \equiv [p \leqq x \leqq q;\ r \leqq y \leqq s]$,[149] und eine zugehörige positive Zahl N_ϖ existiert derartig daß $\mathfrak{F}_\varpi$ (T, N_ϖ)-stetig ist in $\bar{i}_0{}^*$; 2° f in denjenigen Punkten von ϖ, in welchen $D_{T;P}\mathfrak{F}$ existiert, eine Teilmenge von ϖ mit m_T-Maß Null ausgenommen, mit dieser Ableitung zusammenfällt, wodurch mit dem vorigen Satz für jedes $i \subseteqq i_0{}^*$ folgt:

$$\int_i (B)\, \mathfrak{F}_{\varpi \cdot i} = \int_{\varpi \cdot i} (LS)\, f\, dm_T.$$

Mittels transfiniter Induktion folgt die eindeutige Bestimmtheit des $DLiS$-Integrals von f für die Teilintervalle von i_0.

§ 57[bis]. Theorem 66. [Lösung des Problems der primitiven Funktionen i.b.a. T (mit der Ru-Eigenschaft)]. Hat eine in i_0 stetige und beschränkt additive Intervallfunktion $\mathfrak{F}$ obere und untere Derivierte, $\overline{D}_{T;P}\mathfrak{F}$ bzw. $\underline{D}_{T;P}\mathfrak{F}$, welche nur in abzählbar vielen Punkten entweder $+\infty$ oder $-\infty$ sein können,[150] so existiert $D_{T;P}\mathfrak{F}$ in den Punkten von $i_0 - H$ mit $m_T(H) = 0$, und ist für die Teilintervalle (i) von i_0:

$$\mathfrak{F}(i) = \int_i (DLiS) D_{T;P}\mathfrak{F} dm_T.$$

Der Beweis, unter Anwendung von transfiniter Induktion, ist wie der des Theorems 65; man beachte daß T die Ru-Eigenschaft hat; daneben den Text bei 149).

§ 57[ter]. T, wie im ersten Absatz von § 56, besitze wieder die Ru-Eigenschaft in i_0.

Lemma. Hat eine in i_0 additive und stetige Intervall- und Segmentfunktion Ψ [mit $\Psi(i) = \Psi(\bar{i})$ bei $i \subseteqq i_0$] die Eigenschaften: 1. $\underline{D}_{T;P}\Psi = -\infty$ ist nur möglich in den Punkten (P) einer abzählbaren Teilmenge E von i_0; 2. in den Punkten (Q) von $i_0 - E$ ist $\underline{D}_{T;Q}\Psi \geqq 0$, so ist $\Psi(i) \geqq 0$ für jedes $i \subseteqq i_0$.

Beweis. Ist $\bar{i} \subset i_0$ mit $\bar{i} \cdot E \neq 0$, und H_n $(n = 1, 2, \ldots)$ die Vereinigungsmenge aller derjenigen Punkte von $\bar{i}$, welche zu Intervallen u gehören mit Diameter $< \dfrac{1}{n}$ und $\dfrac{\Psi(u)}{T(u)} < -n$, so ist $\bar{i} \cdot E$ Durchschnitt der in $\bar{i}$ offenen

149) Die Fälle $p = q$ oder $r = s$ können außer Betracht bleiben; die Relation der (T, N_ϖ)-Stetigkeit ist dann leer.

150) Bekanntlich braucht bei Nichtabzählbarkeit der Menge dieser Punkte, falls $T(i) \equiv |i|$, $\mathfrak{F}$ nicht eindeutig durch die extremen Derivierten festgelegt zu sein, und ist Theorem 66 somit nicht beweisbar. Siehe J. Ridder, Nieuw Archief, Amsterdam (2) **16**: 1 (1929), S. 60 (letzten Satz).

Mengen H_n. Also ist E eine innere Grenzmenge, und dadurch vermöge ihrer Abzählbarkeit nirgends dicht auf jeder perfekten Teilmenge von $\bar{\imath}$.

Ist A die perfekte Menge von Punkten in $\bar{\imath}$, in deren jeder Umgebung Intervalle u mit $\Psi(u)<0$ liegen, so existiert ein Teilsegment $\bar{\imath}_1$ von $\bar{\imath}$ mit $A\cdot i_1 \neq 0$, $A\cdot\bar{\imath}_1\cdot E=0$. In allen Punkten (P) von $\bar{\imath}_1$ ist somit $\underline{D}_{T;P}\Psi \geqq 0$.

Bei $\varepsilon>0$ und $\Psi_\varepsilon(i)\equiv\Psi(i)+\varepsilon\cdot T(i)$ ist in den Punkten (P) von $\bar{\imath}_1$ $\underline{D}_{T;P}\Psi_\varepsilon>0$. Aus der Existenz eines Teilintervalles u von i mit $\Psi_\varepsilon(u)<0$ würde bei fortgesetzter Vierteilung (Halbierung der Seiten) die Existenz eines Punktes $P_0\in\bar{u}$ folgen, in welchem $\underline{D}_T\Psi_\varepsilon\leqq 0$ wäre. Wir erhielten einen Widerspruch. Somit ist für jedes $u\subseteqq i_1$ $\Psi_\varepsilon(u)\geqq 0$, wodurch, mit $\varepsilon\to 0$, auch folgt $\Psi(u)\geqq 0$; A muß somit leer sein.

Definition A. Eine in i_0 additive, stetige Intervall- und Segmentfunktion Ψ_o, mit $\Psi_o(i)=\Psi_o(\bar{\imath})$ für jedes Intervall $i\subseteqq i_0$, ist *eine T-Majorante einer in i_0 definierten Punktfunktion f (T mit der Ru-Eigenschaft)*, falls: 1. $\underline{D}_{T;P}\Psi_o$ nur in abzählbar vielen Punkten (P) von i_0 gleich $-\infty$ sein kann; 2.[151]) in den übrigen Punkten (Q) von i_0 $\underline{D}_{T;Q}\Psi_o\geqq f$ ist.

Definition B. *Eine T-Minorante* Ψ_u ist additiv und stetig in i_0 mit: 1. $\overline{D}_{T;P}\Psi_u$ nur in abzählbar vielen Punkten (P) von i_0 gleich $+\infty$; 2.[151]) in den übrigen Punkten (Q) von i_0 $\overline{D}_{T;Q}\Psi_u\leqq f$.

Mit dem Lemma folgt für zwei Funktionen Ψ_o, Ψ_u daß ihre Differenz $\Psi_o-\Psi_u$ in i_0 eine nicht-negative Intervall- und Segmentfunktion ist. Die Definition *einer zugehörigen (PS)-Integration von f i.b.a. T über die Teilintervalle und -segmente von $\bar{\imath}_0$, $\int_{i(\bar{\imath})}(PS)\,f\,dT$,* wird klar sein.

Legt man außerdem Ψ_o die Bedingung auf daß in den Punkten von i_0 $\underline{D}_T\Psi_o$ und $\overline{D}_T\Psi_o$ „beide" endlich sind, eine abzählbare Menge von derartigen Punkten ausgenommen (Def. A*), *und fordert man dasselbe für die extremen T-Derivierten eines Ψ_u* (Def. B*), *so erhält man eine (spezialisierte) PS-Integration von f i.b.a. T, $\int_{i(\bar{\imath})}(PS)_{\rm sp}\,f\,dT$, welche genau ebenso weit führt wie die DLiS-Integration* (von § 57).

Aus der Ru-Eigenschaft von T folgt für die spezialisierten Ψ_o und Ψ_u und das spezialisierte (PS)-Integral i.b.a. T von f, daß sie (starke) endliche Ableitungen i.b.a. T in den Punkten von i_0, mit Ausnahme einer Teilmenge von m_T-Maß Null, haben; auch daß die zugehörigen extremen Derivierten des Integrals in den Punkten von i_0, eine abzählbare Teilmenge ausgenommen, endlich sind (vergl. § 55[ter]). Sowohl f wie $D_T[\int_i(PS)_{\rm sp}\,f\,dT]$ liegen, für je zwei spezialisierte Ψ_o und Ψ_u, zwischen $\underline{D}_T\Psi_o$ und $\overline{D}_T\Psi_u$ in den Punkten von i_0, eine Teilmenge von m_T-Maß Null ausgenommen. Daraus folgt nach einem bekannten Verfahren,[152])

---

[151]) Hier darf auch eine Ausnahmemenge von m_T-Maß Null zugelassen werden. Im Lemma genügt schon unter 2. die Annahme: in $i_0 - M$, mit $m_T(M) = 0$, ist $\underline{D}_T\Psi \geqq 0$ (zum Beweise vergl. loc. cit. 150), S. 59 (Beweis in § 8)). Vergl. Fußn. 145.

[152]) Siehe J. Ridder, Fund. Math. 21 (1933), S. 5–6.

unter Anwendung eines Lemmas (Vitalischer Überdeckungssatz für das Maß m_T),[153]) die Gleichheit von f und $D_T[\int_i(PS)_{\text{sp}} f\, dT]$ in den Punkten von i_0, eine Teilmenge von m_T-Maß Null ausgenommen. Mit Theorem 66 folgt die Existenz des $(DLiS)$-Integrals von f nach m_T in i_0, mit

$$\int_i (PS)_{\text{sp}} f\, dT = \int_i (DLiS)\, f\, dm_T.$$

Umgekehrt, hat f ein unbestimmtes $DLiS$-Integral in i_0 i.b.a. T, so ist dieses Integral gleichzeitig spezialisierte Majorante und spezialisierte Minorante im oben angegebenen Sinne,[151]) und ist dadurch auch unbestimmtes $(PS)_{\text{sp}}$-Integral von f; man beachte die Definition des $DLiS$-Integrals und den vorangehenden Satz (§ 57).

§ 58. Zur Erhaltung eines Analogons von Theorem 64 (in R_1) ist es wünschenswert[154]) die Definitionen des $DLiS$-Integrals von f i.b.a. T (mit der Ru-Eigenschaft) (§ 57), und der PS-Integrale von f i.b.a. diese T (§ 57$^{\text{ter}}$) dadurch einzuschränken daß man: 1° in der Definition des ersten Integrals die Forderung aufnimmt, daß die extremen Derivierten des Integrals nach T in allen Punkten von i_0 endlich sind;[155]) 2° in den Definitionen A, B der Majoranten und Minoranten, gehörend zu $\int_i(PS)\, f\, dT$, und ebenso in den Definitionen A*, B* der Majoranten und Minoranten, gehörend zu $\int_i(PS)_{\text{sp}} f\, dT$, die zugelassenen abzählbaren Mengen von Ausnahmepunkten fallen läßt. Schreiben wir diese Integrale bzw. als $\int_i(DLiS)^* f\, dT$, $\int_i(PS)^* f\, dT$ und $\int_i(PS)^*_{\text{sp}} f\, dT$, so folgt:

Aus der Existenz von $\int_i(DLiS)^* f\, dT$ *in* i_0 *folgt die von* $\int_i(PS)^*_{\text{sp}} f\, dT$, *und umgekehrt, zusammen mit ihrer Gleichheit* (T mit der Ru-Eigenschaft).

Das $(DLiS)^*$-Integral gibt schon eine Lösung des Problems der primitiven Funktionen in dem Falle, in welchem in jedem Punkte von i_0 die extremen Derivierten nach T endlich sind (vergleiche Theorem 66).

§ 58$^{\text{bis}}$. Definition A^0. Eine in i_0 additive, stetige Intervall- und Segmentfunktion $\Psi_o{}^0$, mit $\Psi_o{}^0(i) = \Psi_o{}^0(\bar{i})$ für jedes Intervall $i \subseteqq i_0$, ist *eine besondere T-Majorante einer in* i_0 *„endlichwertigen" Punktfunktion* f (T mit der Ru-Eigenschaft), wenn es eine mit $\Psi_o{}^0$ korrespondierende Riemann-Klasse $\mathfrak{A}[i_0]$ (siehe IV, § 20, Def.) gibt, so daß bei $P \in i_0$, $P \in u \subseteqq i(P) \cdot i_0$, mit $i(P) \in \mathfrak{A}[i_0]$, immer

$$\Psi_o{}^0[u] \geqq f(P) \cdot T[u]$$

ist.

---

153) Siehe RIDDER, Nieuw Archief, Amsterdam (2) **21**: 1 (1941), S. 34 (Lemma 1). Vergl. S. SAKS, loc. cit. 148), S. 149–151.

154) Die für R_1 in VII, Fußn. 117 gemachte Bemerkung [siehe auch E. KAMKE, *Das Lebesgue-Stieltjes Integral* 1956, S. 206, (k)] läßt sich vorläufig nicht auf R_2 übertragen.

155) Sonst ist dies in einer höchstens abzählbaren nicht-leeren Teilmenge von i_0 nicht der Fall.

Definition B^0 *einer besonderen T-Minorante einer in i_0 „endlichwertigen" Punktfunktion f* liegt nun auf der Hand, ebenso wie die Definition *des besonderen PS-Integrals i.b.a. T,* $\int_i (PS)^0 f\, dT$, *in* i_0.

Wie in einem analogen Fall in VII, § 47 (Satz) folgt hier:

Satz. Bei in i_0 „endlichwertiger" Funktion f führen die Definitionen der Integrale $\int_i (PS)^* f\, dT$ (§ 58) und $\int_i (PS)^0 f\, dT$ genau ebenso weit.

Die Betrachtungen, welche in VII, § 47 zu Hilfssatz B nebst Folgerung führten, sind hier unmittelbar anwendbar, und liefern den

Satz: Bei in i_0 „endlichwertiger" Funktion f folgt aus der Existenz des Integrals $\int_i (PS)^0 f\, dT$ auch die des allgemeinen R-Integrals von f i.b.a. T (T mit der Ru-Eigenschaft); ihre Werte sind dieselben.

Aus § 58 und den beiden vorigen Sätzen folgt nun:

Satz. Bei in i_0 „endlichwertiger" Funktion f folgt aus der Existenz von $\int_i (DLiS)^* f\, dT$ auch die des allgemeinen R-Integrals $\int_i$ (allg. R) $f\, dT$; beide haben denselben Wert.

Theorem 67. Jede in i_0 definierte Funktion f, welche ein unbestimmtes $(DLiS)^*$-Integral i.b.a. T in i_0 hat (T mit der Ru-Eigenschaft), und daselbst somit endlich ist bis auf eine Teilmenge von m_T-Maß Null, hat auch ein allgemeines Riemann-Integral i.b.a. T in i_0 (gemäß Def. c^{bis} in IV, § 26), wobei für $i \subseteqq i_0$:

$$\mathfrak{F}(i) \equiv \int_i (DLiS)^* f\, dT = \int_i (\text{allg. } R)\, f\, dT;$$

in den Punkten von i_0, eine Teilmenge von m_T-Maß Null ausgenommen, ist

$$D_{T;P}\, \mathfrak{F}(i) = f(P).$$

Beweis. Die letzte Behauptung folgt aus den Definitionen des $(DLiS)^*$-Integrals (§ 58) und des $DLiS$-Integrals (§ 57), und dem der letzten Definition vorangehenden Satze.

Ist f^0 eine in i_0 endlichwertige Funktion, welche in den Punkten von i_0, in welchen f endlich ist, mit f zusammenfällt, und der in den übrigen Punkten von i_0 willkürliche endliche Werte beigelegt sind, so folgt für jedes $i \subseteqq i_0$:

$$\int_i (DLiS)^* f\, dT = \int_i (DLiS)^* f^0\, dT. \tag{184}$$

Aus dem letzten Satz folgt:

$$\int_i (DLiS)^* f^0\, dT = \int_i (\text{allg. } R)\, f^0\, dT, \tag{185}$$

während Def. c^{bis} in IV, § 26 liefert:

$$\int_i (\text{allg. } R)\, f^0\, dT = \int_i (\text{allg. } R)\, f\, dT. \tag{186}$$

Aus (184), (185) und (186) folgt die erste Behauptung des Theorems.

B e m e r k u n g. In R_2 ist die Klasse der $(DLiS)^*$-integrierbaren Funktionen i.b.a. $T(i) \equiv |i|$ eine echte Teilklasse der nach $T(i) \equiv |i|$ allgemein R-integrierbaren Funktionen, ebenso wie die Klasse der LS-integrierbaren Funktionen nach dem Lebesgueschen Maß m. Beide Teilklassen sind voneinander verschieden, da das in i_0 unbestimmte $(DLiS)^*$-Integral i.b.a. $T(i) \equiv |i|$ immer eine starke Ableitung nach T, ausgenommen in den Punkten einer Menge von Lebesgueschem m-Maß Null, hat, auch bei bedingter Konvergenz, während jedes LS-Integral nach m absolut konvergiert, dennoch nicht immer eine starke Ableitung in fast allen Punkten von i_0 hat.[156])

---

[156]) Siehe ein Beispiel in H. BUSEMANN u. W. FELLER, *Differentiation der L-Integrale*, Fund. Math. 22 (1934), S. 226–256, insbes. S. 255, 256.