MATHEMATICS

INTÉGRATION NON-ARCHIMÉDIENNE, II

BY

A. F. MONNA AND T. A. SPRINGER

(Communicated by Prof. H. FREUDENTHAL at the meeting of May 25, 1963)

5. *Décomposition de X; fonctions et ensembles négligeables.*

Conservons les notations des numéros précédents.

Pour tout $\alpha > 0$ nous posons

$$X_\alpha = \{x \in X \mid N(x) \geqq \alpha\}.$$

En se rappelant la définition de $N(x)$, on voit que X_α est un ensemble *fermé* dans X; c'est donc un sous-espace localement compact de X. Posons

$$X_+ = \bigcup_{\alpha > 0} X_\alpha,\ X_0 = \{x \in X \mid N(x) = 0\},$$

alors

$$X = X_+ \cup X_0.$$

(5.1) Définition: *Une fonction f sur X à valeurs dans K est négligeable pour la mesure μ lorsque $N(f) = 0$. Un ensemble $A \subset X$ est négligeable (pour la mesure μ) lorsque sa fonction caractéristique φ_A est négligeable.*

(Rappeler qu'on a défini $N(f)$ au no. 4 pour un f *quelconque*).

(5.2) *Pour que la fonction f soit négligeable, il faut et il suffit que $N(x) = 0$ pour tout $x \in X$ avec $f(x) \neq 0$.*

Cela résulte de la définition de $N(f)$ (no. 4, formule (3)).

Comme conséquence de (5.2) mentionnons:

(a) pour qu'un ensemble A soit négligeable, il faut et il suffit que tous ses points soient des ensembles négligeables;

(b) il existe un ensemble négligeable maximal.

Ceci montre que la situation est plus simple que dans le cas de l'intégration classique.

Le résultat suivant implique une définition directe des ensembles négligeables.

(5.3) *Pour qu'un ensemble $A \subset X$ soit négligeable, il faut et il suffit que pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement spécial $\mathcal{U} = (U_i)$ tel que $|\mu(\varphi_V)| < \varepsilon$ pour tout ensemble ouvert compact V, contenu dans un quelconque des U_i et qui contient un élément de A.*

Supposons A négligeable. Alors pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un recouvrement spécial $\mathscr{U} = (U_i)$ de X tel que $N(\varphi_{U_i}) < \varepsilon$ lorsque U_i contient un point de A. Soit V ouvert compact, contenu dans un U_i et contenant un point de A. Alors (4.2) (a) et (4.4) montrent que

$$|\mu(\varphi_V)| \leqq N(\varphi_V) \leqq N(\varphi_{U_i}) < \varepsilon.$$

Inversement, supposons la condition de l'énoncé satisfaite. Alors, lorsque $U_i \cap A \neq \emptyset$, on voit, en utilisant la définition 4.1 de N, que $N(x) < \varepsilon$ pour $x \in U_i \cap A$. La définition de N (no. 4, formule (3)) montre alors qu'on a $N(\varphi_A) < \varepsilon$. ε étant arbitraire > 0, A est négligeable.

Le résultat suivant est une conséquence facile de la définition de N.

(5.4) *Soient f et g des fonctions sur X ; supposons g négligeable. Alors $N(f+g) = N(f)$.*

Nous utiliserons l'expression "presque partout" dans le sens usuel. f étant une fonction définie presque partout, (5.4) entraîne que $N(f)$ est défini.

Appelons *équivalentes* deux fonctions sur X dont la différence est négligeable. Alors nous pouvons définir N sur l'ensemble des classes d'équivalence.

Comme la situation est familière dans le cas classique, nous n'y insisterons pas.

6. *L'espace L^1.*

Continuant le no. 5, nous appelons $F(\mu)$ (ou simplement F) l'espace des classes de fonctions sur X sur lesquelles N est finie. C'est un espace vectoriel normé sur K, avec norme N. On vérifie sans peine (utilisant le fait que K est complet) que F est un espace de Banach.

(6.1) Définition: *Soit $L^1(\mu)$ (ou L^1) l'adhérence dans $F(\mu)$ du sous-espace formé des classes des fonctions de $C(X)$. Une fonction sur X à valeurs dans K est dite intégrable, lorsque sa classe est dans L^1.*

Il résulte de (4.2) (a) qu'on peut prolonger la fonction linéaire μ sur $C(X)$ à une fonction linéaire *continue* sur L^1, que nous désignerons aussi par μ. Nous appelons $\mu(f)$ l'*intégrale* de la fonction intégrable f.

Un ensemble $A \subset X$ est dit *intégrable* lorsque sa fonction caractéristique φ_A l'est; nous définissons la *mesure* $\mu(A)$ de A par $\mu(A) = \mu(\varphi_A)$.

Nous voulons caractériser les fonctions intégrables sur X. Notons d'abord que toute classe de fonctions définit une fonction sur le sous-espace X_+ défini au no. 5: cela résulte de ce que les ensembles négligeables sont contenu dans CX_+.

(6.2) *Soit f une fonction intégrable sur X. Alors la restriction de f à tout $X_\alpha (\alpha > 0)$ est continue.*

Il existe une suite (f_n) avec $f_n \in C(X)$ dont les classes convergent vers la classe de f dans L^1. Ceci veut dire que $\lim N(f-f_n)=0$. Utilisant la formule (3) du no. 4 on voit que la suite (f_n) converge *uniformément* vers f sur tout compact $X_\alpha(\alpha>0)$. Par conséquent la restriction de f à tout $X_\alpha(\alpha>0)$ est continue.

Pour aller plus loin nous avons besoin de la définition suivante.

(6.3) Définition: *Une fonction f sur X à valeurs dans K est dite absolûment continue par rapport à N lorsqu'elle satisfait aux deux conditions suivantes:*

(a) *Pour tout $\varepsilon>0$ il existe $\delta>0$ tel que pour tout ouvert compact U avec $N(\varphi_U)<\delta$ on ait $N(f\varphi_U)<\varepsilon$;*

(b) $\lim N(f\varphi_V)=0$, *V parcourant le filtre des sections de l'ensemble des complémentaires des ensembles compacts de X.*

Une notion analogue est utilisée en intégration "ordinaire" dans la théorie des espaces fonctionnels, (voir [5] p. 156). Il convient d'observer qu'ici la condition d'être absolûment continue impose à une fonction f des limitations quant à la croissance de $f(x)$ lorsque x tend vers X_0 ou vers "l'infini".

(6.4) *Soit f une fonction intégrable sur X. Alors f est absolûment continue par rapport à N.*

Prenons d'abord $f\in C(X)$. Alors f est absolûment continue par rapport à N: (a) resulte de (4.2) (b) et (b) est évident, f ayant support compact.

Soit maintenant f une fonction intégrable quelconque.

Soit $\varepsilon>0$, prenons $g\in C(X)$ telle que $N(f-g)<\varepsilon$.

Soit $\delta>0$ tel que $N(g\varphi_U)<\varepsilon$ lorsque U est un ouvert compact avec $N(\varphi_U)<\delta$.

Alors
$$N(f\varphi_U)\leqq \text{Max}\,(N((f-g)\varphi_U),\, N(g\varphi_U)) < \varepsilon,$$
ce qui montre que f vérifie la condition (a) de (6.3). (b) se démontre de façon similaire.

Maintenant nous pouvons caractériser les fonctions intégrables.

(6.5) *Pour qu'une fonction f soit intégrable il faut et il suffit qu'elle satisfasse aux conditions suivantes:*

(a) *la restriction de f à tout $X_\alpha(\alpha>0)$ est continue,*

(b) *f est absolûment continue par rapport à N.*

Il resulte de (6.2) et (6.3) que les conditions sont nécessaires.

Supposons maintenant que f vérifie ces conditions. Soit $\varepsilon>0$. Nous allons établir qu'il existe $g\in C(X)$ telle que $N(f-g)<\varepsilon$. Ceci impliquera évidemment que $f\in L^1$.

f étant absolûment continue par rapport à N, il existe un ouvert compact S de X tel que $N(f\varphi_{CS})<\varepsilon$. Il suffit de déterminer $g\in C(X)$ telle que $N(f\varphi_S-g)<\varepsilon$.

Or la mesure μ sur X induit une mesure $\bar{\mu}$ sur l'ouvert compact S de la façon suivante: pour toute fonction continue f sur S, on a $\bar{\mu}(f)=\mu(\bar{f})$, où $\bar{f}\in C(X)$ est égale à f sur S et est nulle en dehors de S. Il suffit maintenant de considérer le problème correspondant pour S et $\bar{\mu}$. Autrement dit, nous pouvons supposer dès le commencement que X est *compact*.

Soit alors

$$\lambda = \sup_{x\in X} N(x),\ m = \sup_{x\in X} |f(x)|.$$

X étant compact, λ et m sont finis (quant à λ voir 3.1).

Prenons δ tel que $N(f\varphi_U)<\varepsilon$ pour tout ouvert compact U de X satisfaisant à $N(\varphi_U)<\delta$. Choisissons un sous-espace X_α (défini au no. 5) avec $\alpha<\min(\delta, m^{-1}\varepsilon)$. X_α est fermé, donc compact. Par hypothèse, f est continue sur X_α. Alors f est uniformément continue sur X_α. Par conséquent il existe une famille spéciale finie d'ouverts compacts $(U_i)_{1\leqq i\leqq n}$ de X telle que

(i) $|f(x)-f(y)| < \lambda^{-1}\varepsilon$ lorsque $x, y\in X_\alpha\cap U_i$,

(ii) $X_\alpha\subset\bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ X_\alpha\cap U_i\neq\emptyset$.

Soit φ_i la fonction caractéristique de U_i; prenons $x_i\in X_\alpha\cap U_i$.

Alors la fonction $g=\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\varphi_i$ est continue sur X et on a $|g(x)|\leqq m$ pour tout $x\in X$.

Or $|f(x)-g(x)|<\lambda^{-1}\varepsilon$ lorsque $x\in X_\alpha$, donc $|f(x)-g(x)|N(x)<\varepsilon$ lorsque $x\in X_\alpha$.

Mais lorsque $x\in\bigcup_{i=1}^{n} U_i,\ x\notin X_\alpha$ on a

$$|f(x)-g(x)|\leqq m,\ N(x)<\alpha<m^{-1}\varepsilon,$$

donc

$$|f(x)-g(x)|\,N(x)<\varepsilon,\ x\in\bigcup_i U_i.$$

D'autre part le complémentaire U de $\bigcup_i U_i$ est ouvert compact et $N(\varphi_U)<\alpha<\delta$, ce qui implique $N(f\varphi_U)<\varepsilon$, ce qui équivaut à

$$|f(x)-g(x)|\,N(x)<\varepsilon \text{ lorsque } x\notin\bigcup_i U_i.$$

Donc

$$N(f-g)=\sup_{x\in X}|f(x)-g(x)|\,N(x)<\varepsilon.$$

Comme nous avons observé au commencement de la démonstration ceci entraîne l'intégrabilité de f.

Mentionnons un cas particulier:

(6.6) *Pour qu'un sous-ensemble $A\subset X$ soit intégrable, il faut et il suffit qu'il satisfasse aux conditions suivantes:*

(a) *$A \cap X_\alpha$ est ouvert et fermé dans X_α pour tout $\alpha > 0$,*

(b) *pour tout $\varepsilon > 0$ il existe un compact S tel que*

$$N(\varphi_{A \cap CS}) < \varepsilon.$$

La démonstration de (6.6) est laissée au lecteur.

Remarque. — On voit de (6.2) et de la démonstration de (6.5) que toute fonction intégrable est limite d'une suite de fonctions continues en escalier et que la convergence est uniforme sur tout $X_\alpha (\alpha > 0)$. L'intégrale $\mu(f)$ s'obtient comme limite de sommes

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\, \mu(U_i) \qquad (x_i \in U_i)$$

(comparer la méthode de définir l'intégrale suivie dans [2]).

Rappelons la définition (4.1) de $N(f)$ pour $f \in C(X)$. Ensuite nous avons étendu la définition de $N(f)$ aux fonctions quelconques sur X à valeurs dans K au moyen de la formule (3) de (4.5). Cependant, pour les fonctions intégrables la formule (4.1) reste vraie. On a

(6.7) *Pour tout $f \in L^1$ on a*

$$N(f) = \sup_{g \neq 0} \|g\|^{-1} |\mu(fg)| \qquad (g \in C(X)).$$

Il existe une suite (f_n) avec $f_n \in C(X)$ dont les classes convergent vers la classe de f dans L^1. On a

$$N(f) = \lim N(f_n).$$

Il s'ensuit

$$N(f_n) \geqq \|g\|^{-1} |\mu(f_n g)|$$

pour tout n et tout $g \in C(X)$. Puisque

$$\mu(f_n g) \to \mu(fg)$$

on en tire

$$N(f) \geqq \sup_{g \neq 0} \|g\|^{-1} |\mu(fg)|.$$

Pour montrer l'inégalité opposée, soit $\alpha > 0$ tel que

$$|\mu(fg)| \leqq \alpha \|g\|$$

pour tout $g \in C(X)$. Etant donné $\varepsilon > 0$ il existe une fonction $f_\varepsilon \in C(X)$ telle que

$$N(f - f_\varepsilon) < \varepsilon.$$

On a

$$|\mu(f_\varepsilon g)| \leqq \text{Max}\,(|\mu(fg)|, |\mu(f - f_\varepsilon) g|).$$

Il s'ensuit

$$|\mu(f_\varepsilon g)| \leqq \text{Max}\,(\alpha, \varepsilon) \cdot \|g\|.$$

Donc

$$N(f_\varepsilon) \leqq \text{Max}\,(\alpha, \varepsilon).$$

Par l'inégalité triangulaire on obtient

$$N(f) \leqq \text{Max}\,(N(f_\varepsilon), N(f-f_\varepsilon)) \leqq \text{Max}\,(\alpha, \varepsilon)$$

et, ε étant arbitraire

$$N(f) \leqq \alpha.$$

Il s'ensuit

$$N(f) \leqq \sup_{g \neq 0} \|g\|^{-1}\,|\mu(fg)|.$$

Mentionnons les conséquences suivantes:

(a) *pour tout* $f \in L^1$, $g \in C(X)$ *on a*

$$N(fg) \leqq N(f)\cdot\|g\|.$$

C'est une généralisation de l'inégalité de Hölder (voir (4.2) (b)).

(b) *Soit* f *une fonction intégrable telle que* $\mu(fg)=0$ *pour tout* $g \in C(X)$. *Alors* f *est nulle presque partout.*

Au no. 3 nous avons donné quelques exemples de mesures. A titre d'exercice nous donnerons quelques résultats relatifs à ces exemples. Nous renvoyons au no. 3 pour les notations.

(a) On a

$$\begin{cases} N(x) = 0 \text{ pour } x \neq x_i \\ N(x) = |\alpha_i| \text{ pour } x = x_i, \end{cases}$$

donc

$$N(f) = \sup_i |f(x_i)|\,|\alpha_i|.$$

Une fonction est négligeable lorsqu'elle s'annule dans tous les x_i. Les fonctions intégrables sur X sont toutes les fonctions sur X telles que $\sum_i f(x_i)\alpha_i$ converge, et alors

$$\mu(f) = \sum_i f(x_i)\alpha_i.$$

(b) Les résultats sont analogues:
on a

$$N(f) = \sup_{d \in D} |\alpha(d)|\,|f(d)|$$

et une fonction sur X est intégrable lorsque $\sum_{d \in D} f(d)\alpha(d)$ converge.

(c) Supposons maintenant, comme dans l'exemple (c) au no. 3, que G soit un groupe topologique (localement compact, de dimension 0, dénombrable à l'infini), possédant une mesure de Haar μ à valeurs dans K.

Alors l'invariance de μ sous les translations à gauche implique évidemment que $N(g)$ est *constant.* Il en résulte que

$$N(f) = \alpha \sup_{g \in G} |f(g)|.$$

Ceci implique que $X_+ = X$ et que L^1 est l'espace formé des fonctions continues f, telles que $\lim N(\varphi_V) = 0$, V parcourant le filtre des sections de l'ensemble des complémentaires des sous-ensembles compacts. Lorsque X est *compact* on voit que $L^1 = C(X)$, donc toute fonction intégrable est continue (un résultat analogue est donné dans [2]).

Les démonstrations sont laissées au lecteur.

7. *Fonctions measurables.*

La définition suivante des fonctions mesurables est inspirée sur celle de Bourbaki (voir [1] p. 180). Les notations restent toujours les mêmes.

(7.1) Définition: *Une fonction f sur X est μ-mesurable lorsque pour tout compact $S \subset X$ et tout nombre $\varepsilon > 0$ il existe un compact $S_1 \subset S$ tel que $N(S \cap CS_1) < \varepsilon$ et que la restriction de f à S_1 soit continue.*

Dans notre cas on a la caractérisation suivante des fonctions mesurables:

(7.2) *Pour qu'une fonction f sur X soit mesurable, il faut et il suffit que la restriction de f à tout $X_\alpha (\alpha > 0)$ soit continue.*

Supposons f mesurable. Soit $x \in X_\varepsilon (\varepsilon > 0)$ et soit S un ouvert compact de X contenant x. Soit alors S_1 un compact possédant la propriété de (7.1). Comme $N(S \cap CS_1) < \varepsilon$, on a $S \cap X_\varepsilon \subset S_1$. Or $S \cap X_\varepsilon$ est fermé dans S_1 et, S étant ouvert, contient un voisinage de x dans X_ε. La continuité de f sur S_1 entraîne donc la continuité de la restriction de f à X_ε au point x. Ceci démontre la continuité de f sur tout $X_\varepsilon (\varepsilon > 0)$.

Réciproquement, supposons que f satisfait à la condition de (7.2) et démontrons que f est mesurable. Soit S un compact de X et soit $\varepsilon > 0$. Alors l'ensemble $S_1 = X_\varepsilon \cap S$ possède les propriétés requises.

Comme cas particulier de (7.2) on a

(7.3) *Pour qu'un sous-ensemble A de X soit mesurable, il faut et il suffit que $A \cap X_\alpha$ soit ouvert et fermé dans X_α pour tout $\alpha > 0$.*

Il résulte facilement de (7.2) que les fonctions mesurables sur X forment un anneau.

D'autre part, contrairement au cas classique, la limite d'une suite convergente de fonctions mesurables n'est plus nécessairement mesurable. Cela tient à ce que dans notre cas la convergence en tout point (où presque partout) n'est pas le "bon" type de convergence. Mais en utilisant la convergence "selon Egoroff", définie plus bas, nous pouvons restaurer l'analogie au cas classique. Le théorème d'Egoroff, qui dit que la convergence presque partout et la convergence selon Egoroff sont équivalentes dans le cas classique, n'est plus valable dans le cas non-archimédien.

(7.4) Définition: *La suite* (f_n) *de fonctions mesurables sur* X *converge selon Egoroff lorsque pour tout compact* S *et tout* $\varepsilon > 0$ *il existe un sous-espace compact* S_1 *de* S *tel que* $N(S \cap CS_1) < \varepsilon$ *et que la suite* (f_n) *converge uniformément sur* S_1.

Alors nous avons la caractérisation suivante:

(7.5) *Pour que la suite* (f_n) *converge selon Egoroff il faut et il suffit qu'elle converge uniformément sur tout* $X_\alpha (\alpha > 0)$.

La démonstration est analogue à celle de (7.2).

Maintenant on voit, vu (7.2) et (7.5), qu'une suite (f_n) de fonctions mesurables qui converge selon Egoroff, converge presque partout et que la limite est presque partout égale à une fonction mesurable.

Nous pouvons aussi énoncer le théorème de convergence de Lebesgue, sous une forme qui vaut aussi dans le cas classique.

(7.6) *Soit* (f_n) *une suite de fonctions intégrables sur* X *qui converge selon Egoroff. Supposons qu'il existe une fonction intégrable* g *telle que* $|f_n(x)| \leqq |g(x)|$ *pour tout* $x \in X$. *Alors la limite de la suite est définie presque partout et est égale presque partout à une fonction intégrable* f *telle que* $\mu(f) = \lim \mu(f_n)$.

La première partie de l'enoncé résulte de ce qui précède, la dernière partie est une conséquence de $\lim N(f - f_n) = 0$, ce qu'on verifie sans peine.

Pour terminer, remarquons que le théorème de Radon–Nikodym ne reste plus valable dans le cas non-archimédien. En effet, soit G un groupe topologique compact, de dimension 0, qui possède une mesure de Haar μ à valeurs dans K. Soit ν la mesure sur G définie par $\nu(f) = f(e)$, e désignant l'élément neutre de G. Alors un ensemble μ-négligeable est vide, donc est certainement ν-négligeable. D'autre part, si le théorème de Radon–Nikodym était vrai, on aurait $\nu(f) = \mu(fg)$, où g est une fonction μ-intégrable, donc continue sur G (voir l'exemple (c) au no. 6).

Donc
$$f(e) = \mu(fg).$$
Ceci implique que
$$N(fg) = \sup_{h \neq 0} \|h\|^{-1} |\mu(fgh)| = |f(e)|.$$
Selon le no. 4, formule (3), ceci donne
$$|f(e)| = \sup_{x \in G} |f(x)|\, |g(x)|\, N(x).$$
Lorsque $f(e) = 0$, on aurait $f(x)\, g(x) = 0$ ($N(x)$ étant constant). Comme il y a des fonctions continues f avec $f(e) = 0$, $f(x) \neq 0$ dans un x donné distinct de e, cela entraînerait $g(x) = 0$ pour tout $x \neq e$; g étant continue, on aurait $g = 0$, ce qui est une contradiction.

Remarque. — Le fait que le théorème de Radon–Nikodym est en défaut dans le cas non-archimédien est lié à la propriété connue qu'aucun espace normé non-archimédien de dimension infinie sur un corps complet sphérique ne peut être réflexif [7]. Supposons que X est compact. Considérons le cas où $X_+ = X$ (comparer le no. 6, exemple (c)). Rappelons qu'on a alors $L^1 = C(X)$. Soit donnée une mesure fixe μ sur X. Supposons que pour toute mesure ν sur X il existait $g \in C(X)$ telle que

$$\nu(f) = \mu(fg)$$

pour tout $f \in C(X)$.

Cette relation définit une application $\nu \to g$ du dual $C'(X)$ de $C(X)$ sur sur $C(X)$. On voit que c'est un isomorphisme (voir (6.7) (b)). C'est une application isométrique puisqu'on voit sans peine qu'on a

$$N(g) = \|\nu\|.$$

Or, ceci est impossible si K est complet sphérique et $C(X)$ est de dimension infinie puisque $C(X)$ ne peut être réflexif.

8. *Produits de mesures.*

Soient X et Y des espaces localement compacts, de dimension 0 et dénombrables à l'infini. Soient μ et ν des mesures sur X et Y. Désignons pour $f \in C(X)$, $g \in C(Y)$ par $f \otimes g$ la fonction sur l'espace produit $X \times Y$, définie par

$$(f \otimes g)\,(x, y) = f(x)\,g(y).$$

(8.1) *Il existe sur $X \times Y$ une mesure $\mu \otimes \nu$ et une seule telle que pour $f \in C(X)$, $g \in C(Y)$ on ait*

$$(\mu \otimes \nu)\,(f \otimes g) = \mu(f)\,\nu(g).$$

La démonstration du résultat classique correspondant (voir [1] Chap. III, § 5) se transpose sans peine. Notons qu'on doit y utiliser le théorème de Stone–Weierstrasz (cité au no. 1).

Introduisons maintenant les semi-normes, N_μ, N_ν, $N_{\mu \otimes \nu}$, correspondantes aux mesures μ, ν et $\mu \otimes \nu$.

Lorsque f est une fonction sur $X \times Y$, à valeurs dans K, nous désignons par f_y la fonction $x \to f(x, y)$ sur X.

(8.2) (a) *Soit $x \in X$, $y \in Y$. Alors*

$$N_{\mu \otimes \nu}((x, y)) = N_\mu(x)\,N_\nu(y);$$

(b) *Soit f une fonction arbitraire sur $X \times Y$, à valeurs dans K. Alors*

$$N_{\mu \otimes \nu}(f) \geqq \sup_{y \in Y}\,(N_\mu(f_y)\,N_\nu(y)).$$

Par définition on a

$$N_{\mu \otimes \nu}((x, y)) = \inf N_{\mu \otimes \nu}(\varphi_W),$$

W parcourant les voisinages ouverts compacts de (x, y) dans $X \times Y$.

Il suffit de faire parcourir W les voisinages de la forme $W = U \times V$, U et V étant des voisinages ouverts compacts de x et y dans X resp. Y.

Or, d'après (8.1),

$$N_{\mu \otimes \nu}(\varphi_{U \times V}) = N_{\mu \otimes \nu}(\varphi_U \otimes \varphi_V) = N_\mu(\varphi_U)\, N_\nu(\varphi_V).$$

Ceci implique (a).

Quant à (b), d'après la définition de N et (a) on a

$$N_{\mu \otimes \nu}(f) = \sup_{x,y} |f(x, y)|\, N_\mu(x)\, N_\nu(y) \geqq \sup_y \,(\sup_x |f(x, y)|\, N_\mu(x))\, N_\nu(y) = \\ = \sup_y \,(N_\mu(f_y)\, N_\nu(y)).$$

Démontrons maintenant le théorème de Lebesgue–Fubini.

(8.3) *Soit f une fonction $\mu \otimes \nu$-intégrable sur $X \times Y$, à valeurs dans K. Alors f_y est μ-intégrable pour presque tout $y \in Y$, la fonction $y \to \mu(f_y)$ est ν-intégrable et on a*

$$(\mu \otimes \nu)(f) = \nu(\mu(f_y)).$$

f étant intégrable, il existe une suite $({}_nf)$ de fonctions de $C(X \times Y)$ telle que $\lim_{n \to \infty} N_{\mu \otimes \nu}(f - f_n) = 0$. Fixons $y \in Y$ avec $N_\nu(y) \neq 0$.

Alors, d'après (8.2) (b), on a

$$\lim_{m,n \to \infty} N_\mu({}_mf_y - {}_nf_y) = 0,$$

ce qui implique qu'il existe une fonction intégrable g_y sur X telle que

$$\lim_{n \to \infty} N_\mu(g_y - {}_nf_y) = 0.$$

D'autre part, (6.5) et la définition de $N_{\mu \otimes \nu}$ montrent que la suite ${}_nf(x, y)$ converge presque partout sur X d'une part vers $f(x, y)$, d'autre part vers $g_y(x)$, (y étant toujours fixé). Ceci établit le premier point. f_y étant maintenant μ-intégrable, nous avons

$$|\mu(f_y)| \leqq N_\mu(f_y),$$

et (8.2) (b) implique

$$N_{\mu \otimes \nu}(f) \geqq N_\nu(\mu(f_y)).$$

Maintenant on vérifie sans peine que $\mu(f_y)$ est ν-intégrable. Pour démontrer la formule, prenons d'abord f dans $C(X \times Y)$. Alors l'égalité voulue est vraie: c'est une conséquence de (8.1) et du théorème de Stone–Weierstrasz.

Par conséquent les mesures $f \to (\mu \otimes \nu)\,(f)$ et $f \to \nu(\mu(f_y))$ sont identiques, ce qui implique l'égalité pour toute fonction $\mu \otimes \nu$-intégrable.

Nous nous bornerons à ces résultats relatifs aux produits.

Mathematisch Instituut der
Rijksuniversiteit te Utrecht.

REFERENCES

1. BOURBAKI, N., Intégration, Act. Sci. et ind. 1175 (1952).
2. BRUHAT, F., Intégration p-adique. Séminaire Bourbaki, 14e année, 1961/62, no. 229.
3. HUREWICZ, W. and H. WALLMAN, Dimension Theory, Princeton, 1948.
4. KAPLANSKY, I., The Weierstrasz theorem in fields with valuations. Proc. Am. math. Soc. **1**, 356–357 (1950).
5. LUXEMBURG, W. A. J. and A. C. ZAANEN, Compactness of integral-operators in Banach function spaces. Math. Annalen **149**, 150–180 (1963).
6. MONNA, A. F., Over de integraal van een functie, waarvan de waarden elementen zijn van een niet-archimedisch gewaardeerd lichaam. Proc. Ned. Akad. v. Wetensch. **53**, 385–399 (1944).
7. ————, Sur les espaces normés non-archimédiens IV. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. **60**, 472 (1957).
8. PONTRJAGIN, L., Topologische Gruppen, Teil 1 (Leipzig, 1957).