ELSEVIER

Journal of Pure and Applied Algebra 125 (1998) 261–276

JOURNAL OF PURE AND APPLIED ALGEBRA

Algèbres de cochaînes quasi-commutatives et fibrations algébriques

Bitjong Ndombol

Chercheur Associé au CNRS, Laboratoire de Mathématiques, URA 168, Université de Nice Sophia-Antipolis, Faculté des Sciences BP 71, 06108 Nice cédex, France

Communicated by J.D. Stasheff; received 14 March 1995; revised 22 May 1996

Résumé

Soient k un corps commutatif de caractéristique p quelconque et k-*dga* la catégorie des k-algèbres de cochaînes connexes. Dans [3] Dupont et Hess définissent dans k-*dga* les notions d'extension tordue, fibration algébrique et de clôture acyclique. Dans ce papier nous donnons une définition de k-algèbres de cochaînes quasi-commutatives et des morphismes d'icelles. L'exemple canonique de telles algèbres étant les cochaînes singulières normalisées d'un espace topologique simplement connexe, et nous montrons que tout morphisme de k-algèbres de cochaînes quasi-commutatives est une fibration algébrique. Une conséquence immédiate de ce résultat est que de telles algèbres possèdent des clôtures acycliques. © 1998 Elsevier Science B.V.

Abstract

Let k be a field of any characteristic p and k-*dga* the category of connected cochain algebras. In [3] Dupont and Hess defined notions of twisted tensor product, twisted extension, algebraic fibration and acyclic closure. In this paper we define the notion of quasi-commutative cochain algebras and their morphisms and we prove that every morphism of quasi-commutative cochain algebras is an algebraic fibration. Consequently, every such a cochain algebra admits an acyclic closure. © 1998 Elsevier Science B.V.

1991 Math. Subj. Class.: 55P62; 55S05

1. Introduction

Dans leur contribution à l'étude des modèles algébriques des fibrations, Dupont et Hess [3] ont introduit un certain nombre de définitions que nous rappelons ici. Dans tout ce texte, toutes les structures que nous considérons ont pour corps de base k de caractéristique p quelconque. Notons que nos résultats sont valables pour $p = 0$, mais n'apportent rien de nouveau du point de vue des applications topologiques dans ce cas.

PII S0022-4049(96)00176-4

Définition 1.1. (a) Un produit tordu de (A, d_A) et (B, d_B) noté $(A \odot B, d)$ où (A, d_A) et (B, d_B) sont dans *k-dga* est un objet de *k-dga* vérifiant:

(1) comme espace vectoriel gradué, $A \odot B \cong A \otimes B$;

(2) pour tous $a \in A$, $b \in B$, $(a \otimes 1) \odot (1 \otimes b) - a \otimes b \in A^+ \otimes B^{<|b|}$, et $(1 \otimes b) \odot (a \otimes 1) = (-1)^{|a||b|} a \otimes b$ où $\odot$ désigne le produit dans $A \odot B$;

(3) la suite $0 \to (A, d_A) \xrightarrow{i} (A \odot B, d) \xrightarrow{\pi} (B, d_B) \to 0$ est une suite de morphismes d'algèbres de cochaînes exacte en (A, d_A) et (B, d_B);

on a $i(a) = a \otimes 1$ et $\pi(a \otimes b) = \varepsilon(a) \cdot b$. Le morphisme ε est l'augmentation.

(b) L'injection $i : (A, d_A) \hookrightarrow (A \odot B, d)$ est appelée extension tordue de A.

Définition 1.2. Soit $\phi : (R, d_R) \to (S, d_S)$ un morphisme de k-dga; on dit que ϕ est une fibration algébrique s'il existe un diagramme commutatif à homotopie près dans k-dga:

$$\begin{tikzcd}
(R, d_R) \arrow[r, "\phi"] & (S, d_S) \\
(U, d_U) \arrow[r] \arrow[u] \arrow[d] & (V, d_V) \arrow[u] \arrow[d] \\
(A, d_A) \arrow[r] & (A \odot B, d)
\end{tikzcd}$$

où $i : (A, d_A) \hookrightarrow (A \odot B, d)$ est une extension tordue et les flèches verticales sont des quasi-isomorphismes.

Définition 1.3. Soit (A, d_A) dans k-dga. S'il existe une extension tordue

$$i : (A, d_A) \hookrightarrow (A \odot B, d)$$

avec $(A \odot B, d)$ acyclique, on dit que (A, d_A) admet une clôture acyclique.

Quelles algèbres de cochaînes possèdent une clôture acyclique et quels morphismes d'algèbres de cochaînes sont des fibrations algébriques?

Le but de cet article est de donner une réponse partielle à ces questions en considérant des algèbres de cochaînes privilégiées que nous appelons dans la suite algèbres de cochaînes quasi-commutatives.

Nous démontrons en fait le théorème suivant:

Théoreme 1. *Soit* $f:(A,d_A)\to(B,d_B)$ *un morphisme d'algèbres de cochaînes quasi-commutatives, alors* f *est une fibration algébrique.*

Dans tout le texte qui suit, s désigne l'opérateur de suspension; il est de degré -1 alors que s^{-1} est la désuspension; c'est un opérateur de degré $+1$.

2. Algèbres de cochaînes quasi-commutatives

Définition 2.1. Une algèbre de cochaînes quasi-commutative est la donnée d'un triplet (A,d_A,μ_A) où (A,d_A) est une algèbre de cochaînes cohomologiquement 1-connexe de type fini et μ_A une classe d'homotopie de morphismes d'algèbres de cochaînes de $A\otimes A$ dans A qui prolonge la codiagonale $\nabla:A\coprod A\to A$ vérifiant:

(a) $[\mu_A\circ T]=\mu_A$ où μ_A désigne aussi un de ses représentants,

(b) $[\mu_A\circ(\mu_A\otimes 1)]=[\mu_A\circ(1\otimes\mu_A)]$,

où T est l'isomorphisme de transposition $T:A\otimes A\to A\otimes A$ défini par $T(a\otimes b)=(-1)^{|a||b|}b\otimes a$.

Définition 2.2. Soient (A,d_A,μ_A) et (B,d_B,μ_B) deux algèbres de cochaînes quasi-commutatives et $f:(A,d_A)\to(B,d_B)$ un morphisme d'algèbres de cochaînes. On dira que f est un morphisme d'algèbres de cochaînes quasi-commutatives si

$$[f\circ\mu_A]_{rel A\coprod A}=[\mu_B\circ f\otimes f]_{rel A\coprod A}.$$

Définition 2.3. (1) La catégorie formée des algèbres de cochaînes quasi-commutatives et des morphismes ad hoc sera notée $k-Qcdga_1^*$.

(2) Si (A,d_A,μ_A) est une algèbre de cochaînes quasi-commutative, tout représentant de μ_A est appelé quasi-multiplication.

Soit (A,d_A) cohomologiquemnent 1-connexe de type fini et soit $(T(V),d_V)$ son modèle libre minimal:

(a) si (A,d_A,μ_A) est quasi-commutative, il existe un morphisme d'algèbres de cochaînes $\mu_V:M(T(V)\otimes T(V))\to(T(V),d_V)$ qui prolonge la codiagonale $\nabla:T(V\oplus V')\to T(V)$ où $M(T(V)\otimes T(V))$ désigne le modèle libre minimal du produit tensoriel $(T(V)\otimes T(V),d_V\otimes d_V)$.

(b) Le morphisme μ_V est une quasi-multiplication.

Considérons (A,d_A,μ_A) et (B,d_B,μ_B) deux algèbres de cochaînes quasi-commutatives de modèles libres minimaux respectifs $(T(V),d_V)$ et $(T(U),d_U)$. Soit $f:(A,d_A)\to(B,d_B)$ un morphisme d'algèbres de cochaînes.

Notons encore $f:(T(V),d_V)\to(T(U),d_U)$ le morphisme induit au niveau des modèles libres minimaux; on a un morphisme:

$$F:M(T(V)\otimes T(V))\to M(T(U)\otimes T(U))$$

qui relève $f\otimes f:(T(V)\otimes T(V),d_V\otimes d_V)\to(T(U)\otimes T(U),d_U\otimes d_U)$.

Si f est un morphisme d'algèbres de cochaînes quasi-commutatives le diagramme suivant commute à homotopie près (relativement à $T(V \oplus V)$) dans la catégorie des algèbres de cochaînes:

$$\begin{tikzcd}
(T(V),d_V) \arrow[r, "f"] & (T(U),d_U) \\
M(T(V)\otimes T(V)) \arrow[u, "\mu_V"] \arrow[r, "F"] & M(T(U)\otimes T(U)) \arrow[u, "\mu_U"']
\end{tikzcd}$$

Lemme 2.4 (relèvement). *Dans la catégorie des algèbres de cochaînes cohomologiquement* 1*-connexes de type fini, considérons le diagramme commutatif suivant*:

$$\begin{tikzcd}
T(V) \arrow[r, "g"] \arrow[d, "i"'] & T(Y) \arrow[d, "\psi"] \\
T(V\oplus W) \arrow[ur, "h"] \arrow[r, "f"'] & T(U)
\end{tikzcd}$$

dans lequel i est une extension libre et ψ un quasi-isomorphisme.

Il existe un morphisme $h: T(V \oplus W) \to T(Y)$ tel que $h \circ i = g$ et $\psi \circ h$ homotope à f.

Le relèvement h est unique à homotopie près (relativement à $T(V)$).

Lemme 2.5. (1) *Soit X un espace topologique simplement connexe ayant le type d'homotopie d'un c.w. complexe de type fini. Notons $C^*(X)$ son algèbre de cochaînes singulières normalisées à coefficients dans k. Alors $C^*(X)$ est quasi-commutative.*

(2) *Si $f: X \to Y$ est une application continue entre espaces toplogiques simplement connexes, alors $f: C^*(X) \to C^*(Y)$ est un morphisme d'algèbres quasi-commutatives.*

Démonstration. Considérons la diagonale $\Delta: X \to X \times X$. Elle induit $C^*(\Delta)$: $C^*(X \times X) \to C^*(X)$.

On a le morphisme d'Eilenberg-Zilber: $EZ: C^*(X \times X) \to C^*(X) \otimes C^*(X)$ qui est un quasi-isomorphisme d'algèbres. En Prenant des modèles libres minimaux, on a le diagramme suivant:

$$\begin{tikzcd}
C^*(X\times X) \arrow[r, "C^*(\Delta)"] \arrow[d, "EZ"'] & C^*(X) \\
C^*(X)\otimes C^*(X) & T(V) \arrow[u, "\phi_V"'] \\
M(T(V)\otimes T(V)) \arrow[u, "\psi_V"] \arrow[ur, "\mu_V"] &
\end{tikzcd}$$

En appliquant deux fois le lemme de relèvement, on a un morphisme d'algèbres de cochaînes μ_V qui prolonge la codiagonale et rend le diagramme ci-dessus commutatif à homotopie près. Autrement dit $C^*(X)$ est une algèbre de cochaînes quasi-commutative.

Considérons $f : Y \to X$ une application continue entre espaces topologiques simplement connexes ayant le type d'homotopie de c.w. complexes de type fini, on a le diagramme commutatif à homotopie près, suivant:

$$\begin{tikzcd}
C^*(X\times X) \arrow[r, "C^*(\Delta)"] & C^*(X) \arrow[r, "f"] & C^*(Y) & C^*(Y\times Y) \arrow[l, "C^*(\Delta)"'] \\
 & T(V) \arrow[u, "\phi_V"] \arrow[r, "f"] & T(U) \arrow[u, "\phi_U"'] & \\
C^*(X\times X) \arrow[uu, "Id"] \arrow[dr, "EZ"] & M(T(V)\otimes T(V)) \arrow[l, "\eta_V"'] \arrow[u, "\mu_V"] \arrow[r, "F"] \arrow[d, "\psi_V"] & M(T(U)\otimes T(U)) \arrow[u, "\mu_U"'] \arrow[r, "\eta_U"] \arrow[d, "\psi_U"'] & C^*(Y\times Y) \arrow[uu, "Id"'] \arrow[dl, "EZ"'] \\
 & C^*(X)\otimes C^*(X) \arrow[r, "f\otimes f"] & C^*(Y)\otimes C^*(Y) &
\end{tikzcd}$$

dans lequel $(T(U), d_U)$ désigne le modèle libre minimal de Y, ϕ_V, ϕ_U, ψ_V, ψ_U, EZ, η_V, η_U sont des quasi-isomorphismes; η_V et η_U sont obtenus par le lemme de relèvement. Les morphismes $\mu_U \circ F$ et $f \circ \mu_V$ relèvent $\phi_U \circ f \circ \mu_V$ à homotopie près. D'après le lemme de relèvement, ces deux morphismes sont homotopes (rel. à $(T(V \oplus V))$.

3. Modèle libre minimal d'un produit tensoriel

Définition 3.1. Soit A une algèbre de cochaînes et M un A-bimodule. Une application linéaire $f : A \to M$ est une dérivation de degré r si:

$$\forall a, b \in A : f(a \cdot b) = f(a) \cdot b + (-1)^{r|a|} a \cdot f(b).$$

On se donne (A, d_A) et (B, d_B) deux algèbres de cochaînes connexes, cohomologiquement 1-connexes de type fini. Notons $(T(V), d_V)$ et $(T(U), d_U)$ leurs modèles libres minimaux respectifs.

Rappelons la construction du modèle libre minimal de $(A \otimes B, d_A \otimes d_B)$ [2].

Considérons l'algèbre tensorielle $T(V \oplus U \oplus s^{-1}(sV \otimes sU))$. Pour tout $u \in U$ on a une application linéaire:

$$\delta_u : V \to T(V \oplus U \oplus s^{-1}(sV \otimes sU))$$

qui à v associe $\delta_u(v) = v\#u = s^{-1}(sv \otimes su)$.

On prolonge δ_u en une dérivation sur $T(V)$ qu'on note encore δ_u

$$\delta_u : T(V) \to T(V \oplus U \oplus s^{-1}(sV \otimes sU)),$$

$$v_1 \otimes \cdots \otimes v_p \mapsto \delta_u(v_1 \otimes \cdots \otimes v_p) = (v_1 \otimes \cdots \otimes v_p)\#u$$

on a ainsi une application linéaire:

$$\delta : U \to Der(T(V), T(V \oplus U \oplus s^{-1}(sV \otimes sU))),$$

$$u \mapsto \delta_u.$$

Observons que $Der(T(V), T(V \oplus U \oplus s^{-1}(sV \otimes sU)))$ qui est l'espace vectoriel des dérivations définies sur $T(V)$ à valeurs dans $T(V \oplus U \oplus s^{-1}(sV \otimes sU))$ est un $T(U)$-bimodule. On prolonge alors δ par dérivation sur $T(U)$. Ce qui en fait nous donne une double dérivation δ définie sur $T(V) \otimes T(U)$ à valeurs dans $T(V \oplus U \oplus s^{-1}(sV \otimes sU))$, c'est-à-dire: $\delta \in Der(T(U), Der(T(V), T(V \oplus U \oplus s^{-1}(sV \otimes sU))))$.

Fixons une fois pour toutes les notations suivantes:

$$V\#U = s^{-1}(sV \otimes sU) \quad \text{et} \quad \forall a \in T(V),\ \forall b \in T(U),\ a\#b = \delta_b(a).$$

Définissons sur $T(V \oplus U \oplus V\#U)$ la dérivation $\tilde{D}$ de degré $+1$ suivante: on pose $\forall v \in V$, $\forall u \in U$

$$\tilde{D}v = d_V v, \qquad \tilde{D}u = d_U u,$$

$$\tilde{D}s^{-1}(sv \otimes su) = v \otimes u - (-1)^{|v||u|} u \otimes v - [d_V v\#u + (-1)^{|v|} v\#d_U u].$$

Il est facile de vérifier que pour tous $a \in T(V)$, $b \in T(U)$, on a la formule

$$\tilde{D}(a\#b) = a \otimes b - (-1)^{|a||b|} b \otimes a - [\tilde{D}a\#b + (-1)^{|a|} a\#\tilde{D}b].$$

On en déduit que $\tilde{D}^2 = 0$.

En considérant le morphisme d'algèbres de cochaînes:

$$\tilde{\psi} : (T(V \oplus U \oplus V\#U), \tilde{D}) \to (T(V) \otimes T(U), d_V \otimes d_U)$$

défini par: $\forall v \in V$, $\forall u \in U$, $\tilde{\psi}(v) = v \otimes 1$, $\tilde{\psi}(u) = 1 \otimes u$, $\tilde{\psi}(v\#u) = 0$, on a le modèle libre minimal du produit tensoriel $(A \otimes B, d_A \otimes d_B)$. Pour le voir, on peut reprendre mot pour mot la preuve du Lemme 4.1 ci-dessous.

4. Démonstration du théorème

Tout ce paragraphe est consacré à la démonstration du Théorème 1. Le procédé est fort simple et se résume de la manière suivante.

On se donne $f : (T(V), d_V) \to (T(U), d_U)$ un morphisme d'algèbres quasi-commutatives. On construit:

(1) une suite croissante d'espaces vectoriels gradués $(X_n)_{n \geq 0}$ telle que $T(V) \to T(V) \odot T(X_n)$ soit une extension tordue;

(2) une suite $\{f_n\}$ de morphismes d'algèbres de cochaînes telle que. $f_n : M(T(V) \odot T(X_n) \to T(U)$ étende f_{n-1}, où $M(T(V) \odot T(X_n))$ désigne le "modèle libre canonique" (voir Remarque 4.2) de $T(V) \odot T(X_n)$.

On montre, en notant X la limite inductive des X_n, qu'on a une extension tordue $T(V) \to T(V) \odot T(X)$ et un quasi-isomorphisme $\tilde{f} : M(T(V) \odot T(X)) \to T(U)$ d'algèbres de cochaînes.

Soit donc $f : (A, d_A) \to (B, d_B)$ un morphisme d'algèbres de cochaînes quasi-commutatives. Notons encore $f : (T(V), d_V) \to (T(U), d_U)$ le morphisme induit au niveau des modèles libres minimaux. Nous conservons toutes les notations du paragraphe précédent.

Posons

$$Y = s\, Ker\, H^* f \oplus CoKer\, H^*(f)$$

et considérons,

$$\sigma_o : Ker\, H^*(f) \to \mathscr{Z}(T(V)) \text{ une section.}$$

Comme dans la construction d'un modèle libre d'un produit tensoriel, on définit pour tout $y \in Y$, une application linéaire: $\bar{\delta}_y^o : V \to T(V \oplus Y)$ par:

$$\bar{\delta}_y^o(v) = \begin{cases} v\bar{\#}y = \mu_V(v\#\sigma_o s^{-1}y) & \text{si } y \in s\,Ker\,H^*(f), \\ v\bar{\#}y = 0 & \text{si } y \in CoKer\,H^*(f). \end{cases}$$

On prolonge $\bar{\delta}_y^o$ par dérivation sur $T(V)$ (On suppose que $\bar{\delta}_y^o$ s'annule sur les constantes), de sorte que l'on a une dérivation $\bar{\delta}_y^o$ définie sur $T(V)$ à valeurs dans $T(V\oplus Y)$. On a ainsi une application linéaire:

$$\bar{\delta}^o : Y \to Der(T(V), T(V \oplus Y)).$$

Comme $Der(T(V), T(V \oplus Y))$ est un $T(Y)$-bimodule, on prolonge $\bar{\delta}^o$ par dérivation sur $T(Y)$. Par conséquent, l'expression $a\bar{\#}b$ est bien définie dans $T(V \oplus Y)$ lorsque $a \in T(V)$ et $b \in T(Y)$.

Définition du produit tordu $\odot$

Notons S la suite des commutateurs de $T(V \oplus Y)$ de la forme $[v_i, y_j]$ où $v_i \in V$, $y_j \in Y$ et I l'idéal engendré par S. Posons $[v_i, y_j]_\mu = [v_i, y_j] - (-1)^{|v_i|}(v_i\bar{\#}y_j)$; notons T la suite formée de tels éléments et J l'idéal engendré par T. Ordonnons les éléments de S et T de la manière suivante: un monôme qui commence par un élément de Y est strictement supérieur à tout monôme qui commence par un élément de V. Si deux monômes commencent par un élément de Y (resp. V), le plus grand est celui dont la composante dans Y (resp. dans V) a le degré le pus élevé. Pour chaque terme de chacune des suites prenons le monôme le plus grand. Puisque le degré de la composante de $(v_i\bar{\#}y_j)$ qui est dans Y est strictement inférieur au degré de y_i on obtient deux nouvelles suites qui sont identiques. Notons R la nouvelle suite ainsi obtenue et K l'idéal qu'elle engendre. Selon la terminologie de [1] la suite R est "combinatorially free" et d'après le Théorème 3.2 de [1], les suites S et T sont inertes ("strongly free") et de plus $T(V\oplus Y)/K, T(V\oplus Y)/I$ et $T(V\oplus Y)/J$ ont même série de Hilbert. Et comme ce sont des espaces vectoriels de dimensions finies en chaque degré, ils sont isomorphes. Mais $T(V \oplus Y)/I$ étant isomorphe à $T(V) \otimes T(Y)$, on a $T(V \oplus Y)/J \cong T(V) \otimes T(Y)$. On pose alors $T(V) \odot T(Y) = T(V \oplus Y)/J$ qui est une algèbre associative. On adopte le choix suivant pour écrire explicitement ce produit.

$$\forall a, a' \in T(V), \forall b, b' \in T(Y):$$

$$(a \otimes 1) \odot (a' \otimes 1) = a \cdot a' \otimes 1, \quad (1 \otimes b) \odot (1 \otimes b') = 1 \otimes b \cdot b',$$

$$\forall v \in V, \ \forall y \in Y,$$

$$(v \otimes 1) \odot (1 \otimes y) = v \otimes y + (-1)^{|v|} v\bar{\#}y, \quad (1 \otimes y) \odot (v \otimes 1) = (-1)^{|v||y|} v \otimes y.$$

On définit maintenant sur $T(V) \odot T(Y)$ un opérateur d_o de degré 1 de la manière suivante:

$$d_o(v \otimes 1) = d_V v \otimes 1 \quad \forall v \in V,$$

$$d_o(1 \otimes x) = \sigma_o s^{-1} x \otimes 1 \quad \forall x \in s\, Ker\, H^*(f),$$

$$d_o(1 \otimes y) = 0 \quad \forall y \in CoKer\, H^*(f).$$

On prolonge ensuite d_o sur $T(V) \odot T(Y)$ par dérivation. Il est alors évident que $d_o^2 = 0$; et $(T(V) \odot T(Y), d_o)$ est un produit tordu au sens de Dupont–Hess.

Considérons l'algèbre tensorielle $T(V \oplus Y \oplus V \# Y)$, où $V \# Y = s^{-1}(sV \otimes sY)$, on y définit une différentielle D_o à savoir:

$$D_o v = d_V v \quad \forall v \in V,$$

$$D_o y = \sigma_o s^{-1} y \quad \forall y \in s\, Ker\, H^*(f),$$

$$D_o y = 0 \quad \forall y \in CoKer\, H^*(f),$$

$D_o v \# y = v \otimes y - (-1)^{|y||v|} y \otimes v - (d_V v \# y) - (-1)^{|v|}(v \bar{\#} y)$ $\forall v \in V, \forall y \in s\, Ker\, H^*(f)$ (il faut bien se rappeler la différence entre # et $\bar{\#}$),

et $\forall v \in V$ et $\forall y \in CoKer\, H^*(f)$,

$$D_o(v \# y) = v \otimes y - (-1)^{|y||v|} y \otimes v - (d_V v \# y) \qquad \forall y \in CoKer\, H^*(f).$$

Il n'est pas difficile de se convaincre que $D_o^2 = 0$.

Soit le morphisme d'algèbres de cochaînes $\psi_o : (T(V \oplus Y \oplus V \# Y), D_o) \to (T(V) \odot T(Y), d_o)$ défini par $\forall v \in V$, $\forall x \in Y$:

$$\psi_o(v) = v \otimes 1, \quad \psi_o(y) = 1 \otimes y, \quad \psi_o(v \# y) = 0.$$

Pour montrer que ψ_o commute avec les différentielles, il suffit de vérifier que:

$$\psi_o(D_o v \# y) = 0.$$

En effet, soit $y \in s\, Ker\, H^*(f)$

$$\begin{aligned} \psi_o D_0(v \# y) &= \psi_o(v \otimes y - (-1)^{|y||v|} y \otimes v - (dv \# y) - (-1)^{|v|}(v \bar{\#} y)) \\ &= (v \otimes 1) \odot (1 \otimes y) - v \otimes y - (-1)^{|v|}(v \bar{\#} y) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Soit $y \in CoKer\, H^*(f)$

$$\begin{aligned} \psi_o D_0(v \# y) &= \psi_o[v \otimes y - (-1)^{|y||v|} y \otimes v - (dv \# y)] \\ &= 0. \end{aligned}$$

Lemme 4.1. *Le morphisme ψ_o est un quasi-isomorphisme.*

Démonstration. Il est clair que ψ_o est surjectif. Il suffit dès lors de montrer que $Ker\,\psi_o$ est acyclique. Remarquons que $Ker\,\psi_o$ est engendré par les éléments de la forme

$$v\otimes y-(-1)^{|y||v|}y\otimes v-(-1)^{|v|}v\bar{\#}y,\qquad v\otimes z-(-1)^{|v||z|}z\otimes v\quad et\ v\#x$$

avec $v\in V$, $y\in s\,Ker\,H^*(f)$, $z\in CoKer\,H^*(f)$ et $x\in Y$.

On définit une nouvelle graduation sur $Ker\,\psi_o$ en posant

$$\|v\|=|v|+1,\quad \|y\|=|y|,\quad \|z\|=|z|,\quad \|v\#x\|=|v|+|x|+1.$$

Posons $F_nKer\,\psi_o=\{t\in Ker\,\psi_o/\|t\|\geq n\}, n\geq 0$, on a $D_oF_n\subset F_n$ et $\{F_n\}_{n\geq 0}$ est une filtration décroissante qui donne une suite spectrale convergeant vers $H^*Ker\,\psi$. Le terme E^1 de cette suite spectrale est $H^*Ker\,\psi$ lorsque $d_V=0$. Et lorsque $d_V=0$, $Ker\,\psi_o$ est acyclique car la suite des $[v,y]-(-1)^{|v|}(v\bar{\#}y)$ est inerte dans $T(V\oplus Y)$ et par conséquent $H^*(T(V\oplus Y\oplus V\#Y),D_0)=H^*(T(V)\odot T(Y),d_0)$ où $D_0(v\#y)=[v,y]-(-1)^{|v|}(v\bar{\#}y)$, d'où le lemme.

Rappelons que le morphisme $f:(T(V),d_V)\to(T(U),d_U)$ induit

$$F:(T(V\oplus V'\oplus V\#V'),\tilde{D}_V)\to(T(U\oplus U'\oplus U\#U'),\tilde{D}_U),$$

$$v\#v'\mapsto f(v)\#f(v')$$

et $f\mu_V$ est homotope à μ_UF relativement à $T(V\oplus V')$. C'est-à-dire qu'on a le diagramme commutatif:

$$\begin{tikzcd}
T(V\oplus V'\oplus V\#V') \arrow[d, "j''"'] \arrow[dr, "\mu_U F"] & \\
\mathscr{H} \arrow[r, "H_0"'] & T(U) \\
(T(\bar{V}\oplus\bar{V}'\oplus\overline{V\#V'}),\tilde{D}_V) \arrow[u, "j'"] \arrow[ur, "f\mu_V"'] &
\end{tikzcd}$$

où: $\mathscr{H}=(T(V\oplus V'\oplus V\#V'\oplus\bar{V}\oplus\bar{V}'\oplus\overline{V\#V'}\oplus sV\oplus sV'\oplus sV\otimes sV'),\delta)$ est le cylindre sur $T(V\oplus V'\oplus V\#V')$ et $H_osV=H_osV'=0$.

Considérons $f_o:(T(V\oplus Y\oplus V\# Y),D_o)\to(T(U),D_U)$ défini par: $f_o(v)=f(v),\forall v\in V$ soit $y\in s\,Ker\,H^*(f)$; on a $f(\sigma_o s^{-1}y)=d_U\beta_y$ on pose alors $f_o(y)=\beta_y$ et $f_o(v\# y)=\mu_U(f(v)\# f_o(y))-(-1)^{|v|}H_oS(v\#\sigma_o s^{-1}y)$, où H_0 est l'homotopie choisie entre $f\mu_V$ et $\mu_U F$ et $S:T^+(X)\to T(X\oplus X'\oplus sX)$ est la $(j-j')$ dérivation de degré -1 qui prolonge l'identité de X sur sX. La différentielle d sur $T(X\oplus X'\oplus sX)$ est donnée par: $dsx=x'-x-S(d_Xx)$. Considérons $\tau:CoKer\,H^*(f)\to\mathscr{Z}(T(U))$ une section. soit $z\in CoKer\,H^*(f)$, on pose $f_o(z)=\tau z$ et $f_o(v\# z)=\mu_U(f_o(v)\# f_o(z))\ \forall v\in V$.

Montrons que f_o commute aux différentielles. Il suffit de montrer que f_o commute aux différentielles sur $V\# Y$. En effet:

soit $z\in CoKer\,H^*(f)$:

$$\begin{aligned}f_oD_o(v\# z)&=f_o(v)\otimes f_o(z)-(-1)^{|v||z|}f_o(z)\otimes f_o(v)-\mu_U(f_o(d_Vv)\# f_o(z)).\\&=d_U\mu_U(f_o(v)\# f_o(z))\\&=d_Uf_o(v\# z)\end{aligned}$$

soit $y\in s\,KerH^*(f)$ et $v\in V$:

$$\begin{aligned}f_oD_o(v\# y)&=f_o(v)\otimes f_o(y)-(-1)^{|y||v|}f_o(y)\otimes f_o(v)-\mu_U(f_o(d_Vv)\# f_o(y))\\&\quad-(-1)^{|v|}H_oS(d_Vv\#\sigma_os^{-1}y)-(-1)^{|v|}f_o\mu_V(v\#\sigma_os^{-1}y),\\ d_Uf_o(v\# y)&=f_o(v)\otimes f_o(y)-(-1)^{|y||v|}f_o(y)\otimes f_o(v)-\mu_U(f_o(d_Vv)\# f_o(y))\\&\quad-(-1)^{|v|}\mu_U(f_o(v)\# f_o\sigma_os^{-1}y)+(-1)^{|v|}\mu_U(f_o(v)\# f_o\sigma_os^{-1}y)\\&\quad-(-1)^{|v|}f_o\mu_V(v\#\sigma_os^{-1}y)-(-1)^{|v|}H_oS(dv\#\sigma_os^{-1}y).\end{aligned}$$

Ce qui veut dire que f_o commute aux différentielles.

Nous construisons maintenant un modèle libre de $(T(V)\otimes T(V\oplus Y\oplus V\# Y),d_V\otimes D_0)$. Notons pour éviter toute confusion $\#'$ le $\#$ issu du produit tensoriel et considérons l'algèbre tensorielle $M_0=(T(V\oplus V'\oplus Y\oplus V\# Y\oplus V\#'V\oplus V\#'Y\oplus V\#'(V\# Y)),\tilde{D}_o)$ où la différentielle $\tilde{D}_o$ est D_o sur $T(V\oplus V'\oplus Y\oplus V\# Y)$, et $\tilde{D}_o(x\#'y)=x\cdot y-(-1)^{|x||y|}y\cdot x-(D_ox\# y+(-1)^{|x|}x\#'D_oy)$.

Soit $\tilde{\psi}_o:M_o\to(T(V)\otimes T(V\oplus Y\oplus V\# Y),d_V\otimes D_0)$ le morphisme qui envoie V sur $V\otimes k$, $(V'\oplus Y\oplus V\# Y)$ sur $k\otimes[V\oplus Y\oplus V\# Y]$ et $V\#'(V\oplus Y\oplus V\# Y)$ sur zéro.

On montre, en reprenant exactement la démonstration du Lemme 4.1 que $\hat{\psi}_o$ est un quasi-isomorphisme et donc que M_o est un modèle libre de $(T(V)\otimes T(V\oplus Y\oplus V\# Y),d_V\otimes D_0)$.

Remarque 4.2. (1) Un tel modèle sera appelé par la suite modèle libre canonique de $(T(V)\otimes T(V\oplus Y\oplus V\# Y),d_V\otimes D_0)$.

(2) Le modèle du Lemme 4.1 est aussi appelé modèle libre canonique de $T(V)\odot T(Y)$.

Lemme 4.3. (1) *Il existe* $\mu_0 : M_0 \to (T(V \oplus Y \oplus V \# Y), D_0)$ *morphisme d'algèbres de cochaînes qui identifie les deux copies de* V *et qui est* μ_V *sur* $V \#' V$.

(2) *Notons* $M(T(V) \otimes T(V) \otimes T(V \oplus Y \oplus V \# Y), d_V \otimes d_V \otimes D_0)$ *le modèle libre canonique de* $(T(V) \otimes T(V) \otimes T(V \oplus Y \oplus V \# Y), d_V \otimes d_V \otimes D_0)$ *et* $\mu_0(1 \otimes \mu_0), \mu_0(\mu_0 \otimes 1)$ *les morphismes induits au niveau des modèles libres; alors* $\mu_0(1 \otimes \mu_0)$ *est homotope à* $\mu_0(\mu_0 \otimes 1)$ *relativement à* $M(T(V) \otimes T(V \oplus Y \oplus V \# Y), d_V \otimes D_0)$.

Démonstration. (1) On pose

$$\mu_0(v \#' u) = \mu_V(v \#' u) \quad \forall v, u \in V;$$

$$\mu_0(v \#' x) = v \# x \quad \forall v \in V \ \forall x \in Y;$$

$$\mu_0(v \#' (u \# x)) = (-1)^{|v|} \mu_0(v \#' u) \# x + (-1)^{|u|} KS(v \#' (u \#' D_0 x))$$

où K est une homotopie fixée entre $\mu_V(1 \otimes \mu_V)$ et $\mu_V(\mu_V \otimes 1)$ relativement à $M(T(V) \otimes T(V), d_V \otimes d_V)$.

Il est facile de voir que μ_0 commute aux différentielles pour les deux premières égalités.

Par un calcul direct on a:

$$\begin{aligned} d_U(\mu_0(v \#' (u \# x))) = {} & (-1)^{|v|} \mu_0(v \#' u) \otimes x + (-1)^a x \otimes \mu_0(v \#' u) + v \otimes (u \# x) \\ & + (-1)^b (v \# x) \otimes u - (-1)^c u \otimes (v \# x) - (-1)^c (u \# x) \otimes v \\ & - (-1)^{|v|} \mu_0(d_V v \#' u) \# x + \mu_0(v \#' d_V u) \# x \\ & + (-1)^{|v|+|u|} \mu_0(v \#' \mu_0(u \#' D_0 x) \\ & - (-1)^{|u|} KS(d_V v \#' (u \#' D_0 x) \\ & - (-1)^{|v|+|u|} KS(v \#' (d_V u \#' D_0 x) \\ = {} & \mu_0 \tilde{D}_0(v \#' u \#' x) \end{aligned}$$

où $a = |v||x| + |u||x| + |v| + |x|; b = |u||x| + |v|; c = |v||u| + |v| + |x|; d = |v||x| + |v||u| + |v|$.

(2) Il faut construire morphisme d'algèbres de cochaînes K_0 du cylindre sur $M(T(V) \otimes T(V) \otimes T(V \oplus Y \oplus V \# Y), d_V \otimes d_V \otimes D_0)$ à valeurs dans $(T(U), d_U)$ qui soit une homotopie entre $\mu_0(1 \otimes \mu_0)$ et $\mu_0(\mu_0 \otimes 1)$. On pose

$$K_0 s((v \#' y) = 0 \quad \forall v \in V, \forall y \in V \oplus Y \oplus V \# Y;$$

$$K_0 s(v_1 \#' v_2 \#' v_3) = K s(v_1 \#' v_2 \#' v_3), \quad v_i \in V \text{ et } K_0 \text{ commute aux différentielles};$$

$$K_0 s(v_1 \#' v_2 \#' y) = 0, \quad v_i \in V, y \in Y \oplus V \# Y.$$

Pour se convaincre que K_0 commute aux différentielles, on raisonne par récurrence sur le degré de $v_1 \#' v_2$ et cela ce fait sans difficulté.

Le morphisme $f_0:(T(V\oplus Y\oplus V\#Y),D_0)\to(T(U),d_U)$ induit $F_0:M_0\to(T(U\oplus U'\oplus U\#U),\tilde{D}_U)$ défini par $F_0/_{T(V\oplus V'\oplus Y\oplus V\#Y)}=f_0, F_0(v\#'y)=f_0(v)\#f_0(y)$.

Lemme 4.4. *Les morphismes d'algèbres de cochaînes $\mu_U F_0$ et $f_0\mu_0$ sont homotopes relativement à $T(V\oplus V'\oplus Y\oplus V\#Y)$.*

Démonstration. Il s'agit de construire morphisme d'algèbres de cochaînes T_0 sur le cylindre sur M_0 qui soit une homotopie entre $\mu_U F_0$ et $f_0\mu_0$. On pose évidemment $T_0=0$ sur la suspension de l'espace vectoriel des générateurs de $T(V\oplus V'\oplus Y\oplus V\#Y)$ et $T_0=H_0$ sur $V\#'V$ où H_0 est une homotopie fixée entre $\mu_U F$ et $f\mu_V$. En faisant un raisonnement par récurrence sur le degré de v on montre qu'on peut poser $T_0 s(v\#'y)$=0 $\forall y\in Y\oplus V\#Y$.

Posons maintenant $X_0=Y$. Supposons qu'on ait construit $\forall i\geq 0$

(1) une algèbre de cochaînes $(T(V\oplus X_i\oplus V\#X_i),D_i)$;

(2) un produit tordu $(T(V)\odot T(X_i),d_i)$ tel que le morphisme d'algèbres de cochaînes $\psi_i:(T(V\oplus X_i\oplus V\#X_i),D_i)\to(T(V)\odot T(X_i),d_i)$ défini par $\psi_i(v)=v\otimes 1;\psi_i(x)=1\otimes x;\psi_i(v\#x)=0$ soit un quasi-isomorphisme;

(3) un morphisme d'algèbres de cochaînes $\mu_i:M_i\to(T(V\oplus X_i\oplus V\#X_i),D_i)$ où M_i est le modèle libre canonique de $T(V)\otimes T(V\oplus Y\oplus V\#X_i),d_V\otimes D_i)$ et un morphisme d'algèbres de cochaînes $f_i:(T(V\oplus X_i\oplus V\#X_i),D_i)\to(T(U),d_U)$ tels f_i étende f_{i-1} et $\mu_U F_i$ soit homotope à $f_i\mu_i$ relativement à $T(V\oplus V'\oplus X_i\oplus V\#X_i)$.

Nous faisons les mêmes constructions à l'ordre $i+1$.

(1) *L'algèbre de cochaînes* $(T(V\oplus X_{i+1}\oplus V\#X_{i+1}),D_{i+1})$. Posons $X_{i+1}=X_i\oplus skerH^*(f_i)$. Soit $\sigma_i:ker\,H^*(f_i)\to\mathscr{Z}(T(V\oplus X_i\oplus V\#X_i))$ une section et considérons pour tout $x\in X_{i+1}$ l'application linéaire $\bar{\delta}^x_{i+1}:V\to T(V\oplus X_{i+1})$ définie par $\bar{\delta}^x_{i+1}(v)=\bar{\delta}^x_i(v)$ si $x\in X_i$ et $\bar{\delta}^x_{i+1}(v)=v\bar{\#}x=\mu_i(v\#\sigma_i s^{-1}x)$ si $x\in sker\,H^*(f_i)$.

On prolonge $\bar{\delta}^x_{i+1}$ par dérivation sur $T(V)$; on a ainsi une dérivation $\bar{\delta}^x_{i+1}$ sur $T(V)$ à valeurs dans $T(V\oplus X_{i+1})$. On a en fait une application linéaire $\bar{\delta}_{i+1}:X_{i+1}\to Der(T(V),T(V\oplus X_{i+1}))$. Comme $Der(T(V),T(V\oplus X_{i+1}))$ est un $T(X_{i+1})$-bimodule, on prolonge $\bar{\delta}_{i+1}$ sur $T(X_{i+1})$ par dérivation. De sorte que l'expression $a\bar{\#}b$ a un sens précis si $a\in T(V)$ et $b\in T(X_{i+1})$.

Définissons sur $T(V\oplus X_{i+1}\oplus V\#X_{i+1})$ l'opérateur D_{i+1} de degré 1 suivant:

$$D_{i+1}v=d_V v=D_i\quad v\forall v\in V;\qquad D_{i+1}x=D_i x\quad \text{si } x\in X_i;$$

$$D_{i+1}x=\sigma_i s^{-1}x\quad \text{si } x\in sker\,H^*(f_i)\quad \text{et}\quad D_{i+1}(v\#x)=D_i(v\#x)\quad \text{si } x\in X_i;$$

$$D_{i+1}(v\#x)=v\otimes x-(-1)^{|v||x|}x\otimes v-(d_V v\#x)-(-1)^{|v|}(v\bar{\#}x)\quad \text{si } x\in sker\,H^*(f_i).$$

On vérifie, en appliquant la formule

$$D_{i+1}(a\#b)=a\otimes b-(-1)^{|a||b|}b\otimes a-(D_{i+1}v\#x)-(-1)^{|a|}(a\bar{\#}b)\quad \text{que } D^2_{i+1}=0.$$

(2) *Le produit tordu* $(T(V)\odot T(X_{i+1}),d_{i+1})$. L'algèbre $T(V)\odot T(X_{i+1})$ est le quotient de $T(V\oplus X_{i+1})$ par l'idéal engendré par la suite inerte formée des éléments $v\otimes x-(-1)^{|v||x|}x\otimes v-(-1)^{|v|}(v\bar{\#}x)$ où $v\in V$ et $x\in X_{i+1}$.

Considérons le morphisme d'algèbres $\psi_{i+1} : T(V \oplus X_{i+1} \oplus V\#X_{i+1}) \to T(V) \odot T(X_{i+1})$ défini par $\psi_{i+1}(v) = v \otimes 1; \psi_{i+1}(x) = 1 \otimes x$ et $\psi_{i+1}(v\#x) = 0$. Si on pose $d_{i+1}v = d_V v$ et $d_{i+1}x = \psi_{i+1}(D_{i+1}x)$, on a directement les faits suivants: $d_{i+1}^2 = 0$ et ψ_{i+1} commute aux différentielles. En reprenant mot pour mot la preuve du Lemme 4.1, on montre que ψ_{i+1} est un quasi-isomorphisme surjectif.

(3) *Le morphisme* μ_{i+1}. Soit M_{i+1} le modèle libre canonique de $(T(V) \otimes T(V \oplus X_{i+1} \oplus V\#X_{i+1}), d_V \otimes D_{i+1})$, on a le lemme suivant.

Lemme 4.5. (1) *Il existe* $\mu_{i+1} : M_{i+1} \to (T(V \oplus X_{i+1} \oplus V\#X_{i+1}), D_{i+1})$ *morphisme d'algèbres de cochaînes qui étend* μ_i.

(2) *Notons* $M(T(V) \otimes T(V) \otimes T(V \oplus X_{i+1} \oplus V\#X_{i+1}), d_V \otimes d_V \otimes D_{i+1})$ *le modèle libre canonique de* $(T(V) \otimes T(V) \otimes T(V \oplus X_{i+1} \oplus V\#X_{i+1}), d_V \otimes d_V \otimes D_{i+1})$ *et* $\mu_{i+1}(1 \otimes \mu_{i+1}), \mu_{i+1}(\mu_{i+1} \otimes 1)$ *les morphismes induits au niveau des modèles libres; alors* $\mu_{i+1}(1 \otimes \mu_{i+1})$ *est homotope à* $\mu_{i+1}(\mu_{i+1} \otimes 1)$ *relativement à* $M(T(V) \otimes T(V \oplus X_{i+1} \oplus V\#X_{i+1}), d_V \otimes D_{i+1})$.

Démonstration. (1) On pose

$$\mu_{i+1}(v\#'x) = v\#x \quad \forall v \in V \ \forall x \in X_{i+1};$$

$$\mu_{i+1}(v\#'(u\#x) = -(-1)^{|v|}\mu_{i+1}(v\#'u)\#x + (-1)^{|u|}K_i S(v\#'(u\#'D_{i+1}x)$$

où K_i est une homotopie fixée entre $\mu_i(1 \otimes \mu_i)$ et $\mu_i(\mu_i \otimes 1)$ relativement à $M(T(V) \otimes T(V \oplus X_i \oplus V\#X_i), d_V \otimes D_i)$.

Le point (2) se ramène au cas du Lemme 4.3.

Rappelons que par hypothèse $\mu_U F_i$ est homotope à $f_i\mu_i$; fixons-nous une homotopie T_i. Nous construisons un morphisme $f_{i+1} : (T(V \oplus X_{i+1} \oplus V\#X_{i+1}), D_{i+1}) \to (T(U), d_U)$ en posant $\forall v \in V$: $f_{i+1}(v) = f_i(v); f_{i+1}(x) = f_i(x) \forall x \in X_i$.

Soit $x \in sker\, H^*(f_i)$ on a $f_i(\sigma_i s^{-1}x) = d_U z$. On pose alors $f_{i+1}(x) = z$ et $f_{i+1}(v\#x) = \mu_U(f_{i+1}(v)\# f_{i+1}(x)) - (-1)^{|v|}T_i S(v\#'D_{i+1}x)$. Vérifions que f_{i+1} commute aux différentielles. Il suffit pour ce faire de montrer que

$$f_{i+1}(D_{i+1}(v\#x)) = d_U f_{i+1}(v\#x) \quad \forall x \in sker H^*(f_i);$$

$$\begin{aligned} d_U f_{i+1}(v\#x) &= f_{i+1}(v) \otimes f_{i+1}(x) - (-1)^{|v||x|} f_{i+1}(x) \otimes f_{i+1}(v) \\ &\quad -\mu_U(f_{i+1}(d_V v)\# f_{i+1}(x)) - (-1)^{|v|}\mu_U(f_{i+1}(v)\# f_i(D_{i+1}x)) \\ &\quad +(-1)^{|v|}\mu_U(f_{i+1}(v)\# f_i(D_{i+1}x)) \\ &\quad -(-1)^{|v|} f_i\mu_i(v\#'D_{i+1}x) - (-1)^{|v|}T_i S(d_V v\#'D_{i+1}x) \\ &= f_{i+1}(D_{i+1}(v\#x)). \end{aligned}$$

Le morphisme $f_{i+1}:(T(V\oplus X_{i+1}\oplus V\#X_{i+1}),D_{i+1})\to(T(U),d_U)$ induit $F_{i+1}:M_{i+1}\to(T(U\oplus U'\oplus U\#U),\tilde{D}_U)$ défini par $F_{i+1}/_{T(V\oplus V'\oplus X_{i+1}\oplus V\#X_{i+1})}=f_{i+1},F_{i+1}(v\#'x)=f_{i+1}(v)\#f_{i+1}(x)$.

Lemme 4.6. *Les morphismes d'algèbres de cochaînes $\mu_U F_{i+1}$ et $f_{i+1}\mu_{i+1}$ sont homotopes relativement à $T(V\oplus V'\oplus X_{i+1}\oplus V\#X_{i+1})$.*

Démonstration. Il s'agit de construire un morphisme d'algèbres de cochaînes T_{i+1} sur le cylindre sur M_{i+1} qui soit une homotopie entre $\mu_U F_{i+1}$ et $f_{i+1}\mu_{i+1}$. On pose évidemment $T_{i+1}=T_i$ sur le cylindre sur M_i et $T_{i+1}(sv\#'x)=0$, $\forall x\in s\ker H^*(f_i)$.

Observons que les X_i forment une suite croissante d'espaces vectoriels gradués et posons X égal à la limite inductive des X_i. On a de manière évidente:

(a) un produit tordu $(T(V)\odot T(X),d)$;
(b) un quasi-isomorphisme $\psi:(T(V\oplus X\oplus V\#X),D)\to(T(V)\odot T(X),d)$;
(c) un morphisme $\tilde{f}:(T(V\oplus X\oplus V\#X),D)\to(T(U),d_U)$ qui étend f.

Démonstration du Théorème 1. On suppose que $(A,d_A)=(T(V),d_V)$ et $(B,d_B)=(T(U),d_U)$, il nous suffit dès lors de montrer que le morphisme $\tilde{f}$ construit ci-dessus est un quasi-isomorphisme. Comme $CoKer\,H^*(f)$ est contenu dans X, $\tilde{f}$ est surjective en cohomologie. Soit z un cycle de $T(V\oplus X\oplus V\#X)$ tel que $\tilde{f}(z)=d_U\beta$. Il existe n tel que $z\in T(V\oplus X_n\oplus V\#X_n)$; si la classe de z est nulle dans $H^*(T(V\oplus X_n\oplus V\#X_n))$, il n'y a rien à dire, sinon il existe $t\in X_{n+1}$ tel que $D_{n+1}t=z$ et donc $[z]=0$.

Corrollaire 4.7. *Toute algèbre de cochaînes quasi-commutative possède une clôture acyclique.*

Démonstration. On applique le Théorème 1 à l'augmentation:

$$\varepsilon:(A,d_A)\to k$$

pour avoir le résultat.

Remarque 4.8. Lorsque $k=Q$, il est bien connu qu'un modèle de Sullivan d'une application f détermine le type d'homotopie rationnelle de la fibre homotopique de f. Par contre, un modèle tensoriel de f (l'analogue non commutatif du modèle de Sullivan) ne détermine même pas l'algèbre de cohomologie de la fibre homotopique de f en général. Un exemple est donné par la fibration des chemins $P(\Sigma CP(2))\to\Sigma CP(2)$ dont le modèle tensoriel est le même que celui de la fibration des chemins $P(S^5\vee S^3)\to S^5\vee S^3$ mais on sait que $H_*(\Omega(S^5\vee S^3);Z/2Z)$ est primitivement engendré alors que $H_*(\Omega(\Sigma CP(2));Z/2Z)$ ne l'est pas.

D'où la question: que devons-nous savoir du modèle tensoriel de f pour en déduire un modèle de la fibre homotopique?

Nous avons ici construit un modèle codant de plus les diagonales topologiques; est-ce suffisant? Nous ne le savons pas mais nous espérons revenir sur cette question dans un prochain travail.

References

[1] D.J. Anick, Non-commutative graded algebras and their Hilbert series, J. Algebra 78 (1982) 120–140.
[2] Bitjong Ndombol, Sur la catégorie de Lusternick-Schnirelmann des algèbres de cochaînes, Ann. Inst. Fourier 41 (1991) 937–987.
[3] E.H. Brown, Twisted tensor products, I, Ann. Math. 69 (1959) 223–246.
[4] N. Dupont and K. Hess, Twisted tensor models for fibrations, J. Pure Appl. Algebra 91 (1994) 109–120.
[5] Y. Felix, S. Halperin and J.C. Thomas, Adam's cobar equivalence, Trans. Amer. Math. Soc. 329 (1992) 539–549.
[6] S. Halperin and J.M. Lemaire, Notions of category in differential graded algebras, Lecture Notes in Math., Vol. 1318 (Springer, Berlin, 1988) 138–154.
[7] D. Tanre, Homotopie rationnelle, modèles de Chen, Quillen, Sullivan, Lecture Notes in Math., Vol. 1025 (Springer, Berlin, 1983).