JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 88, 385–394 (1990)

Métriques d'Einstein–Kähler et exponentiel des fonctions admissibles

THIERRY AUBIN

Tour 46, 5ᵉ etage, Paris VI,
4 place Jussieu, Paris, 75005, France

Communicated by Paul Malliavin

Received March 1988

1. LE PROBLÈME

Étant donnée une variété kählérienne compacte (V_{2m}, g) de dimension complexe m, il est du plus grand intérêt de savoir s'il existe sur cette variété une métrique d'Einstein–Kähler. Ce problème a été abordé pour la première fois dans Aubin [1]. Ce problème est équivalent à la résolution de l'équation

$$\operatorname{Log} M(\varphi) = -\lambda\varphi + f \tag{1}$$

$\lambda \in \mathbb{R}$ et $f \in C^{\infty}(V)$ sont donnés et $M(\varphi) = |g'|\,|g|^{-1} = \det((\delta_{\lambda}^{\mu} + \nabla_{\lambda}^{\mu}\varphi))$ avec λ, $\mu = 1, 2, ..., m$.

On a introduit la métrique kählérienne g' dont les composantes dans un système de coordonnées sont $g'_{\lambda\bar{\mu}} = g_{\lambda\bar{\mu}} + \partial_{\lambda\bar{\mu}}\varphi$.

On dit qu'une fonction φ est admissible si g' est définie positive, on note $\mathscr{A}$ l'ensemble des fonctions C^2 admissibles. Il est aisé de vérifier qu'une solution C^2 de (1) est admissible.

2. RÉSOLUTION DU PROBLÈME

Soient $\omega = (i/2\pi)\, g_{\lambda\bar{\mu}}\, dz^{\lambda} \wedge dz^{\bar{\mu}}$ la forme fondamentale de la variété kählérienne $(V_{2m,g})$ et $\psi = (i/2\pi)\, R_{\lambda\bar{\mu}}\, dz^{\lambda} \wedge dz^{\bar{\mu}}$ la forme de Ricci.

Si $(V_{2m}, \tilde{g})$ est une variété d'Einstein–Kähler, il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $\tilde{\psi} = \lambda\tilde{g}$. D'où une condition nécessaire d'existence d'une métrique d'Einstein–Kähler est que la 1ère classe de Chern $C_1(V)$ soit positive négative ou nulle, cas qui correspondent à $\lambda > 0$, $\lambda < 0$ et $\lambda = 0$.

Le cas négatif a été résolu dans Aubin [2]. Des estimés a priori pour l'équation (1) sont nécessaires, et à cette époque, il ne manquait que l'estimé C^0 pour pouvoir résoudre (1) lorsque $\lambda \geqslant 0$.

0022-1236/90 \$3.00

Lorsque $\lambda = 0$ l'équation (1) est celle de la conjecture de Calabi [8]. Dans Yau [15] cette équation est résolue et dans Aubin [3] il est montré comment on peut obtenir l'estimé C^0 (dans le cas $\lambda = 0$).

Reste à résoudre le cas positif ($\lambda > 0$), c'est-à-dire celui où l'on suppose $C_1(V) > 0$. On sait que le problème n'a pas toujours de solution. D'autre part la méthode de continuité, qui permet de résoudre les deux premiers cas, semblait a priori inutilisable lorsque $\lambda > 0$.

Dans Aubin [5] il est montré comment on peut utiliser néanmoins la méthode de continuité, en considérant la famille d'équations

$$\operatorname{Log} M(\varphi) = -t\varphi + f. \tag{2}$$

A noter que comme $C_1(V) > 0$, on prend au départ $\omega \in C_1(V)$, ce qui fait que l'équation à résoudre (1) est celle avec $\lambda = 1$.

3. Le cas positif $C_1(V) > 0$ ($\lambda = 1$)

Comme il a été dit précédemment, seule l'estimé C^0 reste à établir. Plus précisemment il faut trouver une estimé uniforme pour les éventuelles solutions φ_t de l'équation (2) pour $t \in [\varepsilon, 1]$, quelque soit $\varepsilon > 0$.

Dans Aubin [5] il est montré comment cette estimé est obtenue si au préalable on a prouvé que les fonctions φ_t vérifient l'inégalité:

$$\int e^{-\varphi}\, dV \leqslant C \exp[\xi I(\varphi) - V^{-1} \int \varphi\, dV] \tag{3}$$

avec ξ assez petit. Ici $V = \int dV$, $I(\varphi) = \int \varphi[1 - M(\varphi)]\, dV$ et C, ξ sont des constantes. Posons $\xi_m = \inf(\xi \mid C$ existe dans (3) qui doit être vérifiée par les fonctions φ_t, $t \in [\varepsilon, 1])$.

Théorème 1 (Aubin [5]). *Soit (V_{2m}, g) une variété kählérienne compacte de dimension complexe m, de volume V et à 1^e classe de Chern $C_1(V) > 0$ (on prend $\omega \in C_1(V)$). Si $(m+1)\, \xi_m V < 1$, il existe une métrique d'Einstein–Kähler.*

Au lieu de l'inégalité (3) Tian [12] a considéré une inégalité différente pour la fonction exponentielle.

Théorème 2. *Étant donnée une variété kählérienne compacte M, il existe un réel $\alpha(M) > 0$ tel que pour tout $\lambda < \alpha(M)$ et tout $\varphi \in \mathscr{A}$*

$$\int e^{-\lambda\varphi}\, dV < C(\lambda) \exp\left[-\lambda V^{-1} \int \varphi\, dV\right]. \tag{4}$$

Il est aisé de constater (voir Ding [10] ou Aubin [6]) que l'égalité (4) entraîne l'inégalité (3) pour les fonctions φ_t avec $\xi = (1-\lambda)\, V^{-1}$. En effet, il existe une constante k telle que

$$-\left[\varphi_t - V^{-1}\int \varphi_t \, dV\right] < V^{-1} I(\varphi_t) + k.$$

Du Théorème 1 on déduit alors le

THÉORÈME 3. *Si $\alpha(M) > m/(m+1)$, il existe une métrique d'Einstein–Kähler.*

Preuve. L'inégalité $(m+1)\,\xi V < 1$ du théorème 1 sera vérifiée si $(m+1)$ $(1-\lambda) < 1$, c'est-à-dire si $\lambda > m/(m+1)$.

4. INÉGALITÉS CONCERNANT LA FONCTION EXPONENTIELLE

(a) *Remarque*

Pour démontrer le théorème 2 Tian utilise essentiellement un résultat de Hörmander [11].

Dans cet article nous allons faire une approche différente de l'inégalité (4). Tout d'abord nous allons faire son étude en dimension $m = 1$, puis nous montrerons comment par intégrations successives on passe aux dimensions supérieures.

(b) *La dimension $m = 1$*

THÉORÈME 4. *Soit V_2 une variété Riemannienne C^∞ compacte de dimension 2. Définissons*

$$\mathscr{E}\mu = \left\{\varphi \in C^2 \Big/ \int \varphi \, dV = 0 \text{ et } \int |\Delta\varphi| \, dV \leqslant 2\mu\right\}.$$

Étant donné $\alpha < 4\pi/\mu$, il existe une constante C, dépendant de V_2, α et μ, telle que tout $\varphi \in \mathscr{E}\mu$ vérifie

$$\int e^{-\alpha\varphi} \, dV \leqslant C. \tag{5}$$

Démonstration. Soit $G(P, Q)$ la fonction de Green du Laplacien Δ telle que $G(P, Q) \geqslant 0$. Écrivons $G(P, Q) = -(1/2\pi)$ Log $f(r) + F(P, Q)$ avec

$f(r)=r=d(P,Q)$ dans un voisinage de $r=0$, $f(r)$ croissante et $f(r)=\delta/2$ pour $r\geqslant\delta$ le rayon d'injectivité.

$$\varphi(P)=\int G(P,Q)\,\Delta\varphi(Q)\,dV(Q)$$

d'où

$$-\varphi(P)\leqslant-\int_{\Delta\varphi<0}G(P,Q)\,\Delta\varphi(Q)\,dV(Q).$$

Comme

$$-\int_{\Delta\varphi<0}\Delta\varphi\,dV=\int_{\Delta\varphi>0}\Delta\varphi\,dV,\qquad -\int_{\Delta\varphi<0}\Delta\varphi\,dV\leqslant\mu$$

$(P,Q)\to F(P,Q)$ est une fonction continue sur $V\times V$, d'où $|F(P,Q)|<a$ une constante. On peut écrire

$$e^{-\alpha\varphi}\leqslant e^{\alpha a\mu}\exp\int_{\Delta\varphi<0}\left(\frac{-\alpha\mu}{2\pi}\right)\operatorname{Log}f(r)\left(-\frac{\Delta\varphi}{\mu}\right)dV$$

$$e^{-\alpha\varphi}\leqslant e^{\alpha a\mu}\int_{\Delta\varphi<0}[f(r)]^{-\alpha\mu/2\pi}[-\Delta\varphi/\mu]\,dV.$$

Si on prend $\alpha<4\pi/\mu$, $e^{-\alpha\varphi}$ est intégrable et

$$\int e^{-\alpha\varphi}\,dV\leqslant e^{\alpha a\mu}\sup_{P\in V}\int[f(r)]^{-\alpha\mu/2\pi}\,dV(Q)<\text{Const.}$$

COROLLAIRE 1. *Sous les hypothèses du théorème* 4, *une fonction* $\varphi\in L_1$ *d'intégrale nulle, dont le laplacien au sens des distributions satisfait à* $\int|\Delta\varphi|\,dV\leqslant2\mu$, *vérifie* (5).

COROLLAIRE 2. *Soient* V_2 *une variété riemannienne* C^∞ *compacte de dimension* 2 *et* G *un groupe d'isométries tel que chaque orbite admette au moins* $k>1$ *points distincts. Définissons comme au théorème* 4

$$\mathscr{E}\mu=\left\{\varphi\in C^2\Big/\int\varphi\,dV=0\ et\ \int|\Delta\varphi|\,dV\leqslant2\mu\right\}.$$

Les fonctions $\varphi\in\mathscr{E}\mu$ *invariantes par* G *vérifient*

$$\int e^{-\beta\varphi}\,dV\leqslant\text{Const}\qquad si\quad \beta<4\pi k/\mu.$$

Démonstration. Soit $\nu > 0$ un réel tel que dans chaque orbite il y ait k points dont les distances mutuelles soient supérieures à 2δ. Reprenant la démonstration du théorème 4:

$$-\varphi(P) \leqslant (1/2\pi) \int_{B_P(\nu) \cap \{\Delta\varphi < 0\}} \operatorname{Log} f(r)\, \Delta\varphi(Q)\, dV(Q) + \text{Const.}$$

Vues les hypothèses $-\int_{B_P(\nu) \cap \{\Delta\varphi < 0\}} \Delta\varphi\, dV \leqslant \mu/k$ d'où le résultat.

COROLLAIRE 3. *Sous les hypothèses du théorème* 4, *une fonction* $\varphi \in C^2$ *satisfaisant à* $\int \varphi\, dV = 0$ *et* $\Delta\varphi \leqslant 2m$ *vérifie* (5) *avec* $\mu = 2mV$, V *étant le volume de la variété.*

(c) *Cas particulier de la sphère* S_2

Soit S_2 munie de sa métrique canonique g_s de courbure égale à 1, son volume est $V = 4\pi$. Considérée comme une variété kählérienne, une fonction φ est admissible si son laplacien réel vérifie $\Delta\varphi < 2$. Posons

$$\tilde{\varphi} = \varphi - \int \varphi\, dV_s/4\pi \tag{6}$$

$\tilde{\varphi}$ vérifie (5) si $\alpha < \frac{1}{2}$ (ici $\mu = 8\pi$). Plus généralement.

THÉORÈME 5. *Soit* S_2 *munie d'une métrique* g', V' *son volume. Une fonction* φ *admissible pour* g' *vérifie, si* $\beta < 2\pi/V'$,

$$\int e^{-\beta\tilde{\varphi}}\, dV_s \leqslant \text{Const} \tag{7}$$

où la constante ne dépend que de β *et de* V'.

Démonstration. Il existe un réel $k > 0$ et une fonction $\psi \in C^\infty$ tels que dans un système de coordonnées locales:

$$g'_{\lambda\bar{\mu}} = k g_{\lambda\bar{\mu}} + \partial_{\lambda\bar{\mu}}\psi$$

$g_s = ((g_{\lambda\bar{\mu}}))$ et nous prenons ψ telle que $\int \psi\, dV_s = 0$.

Si φ est admissible pour g', $(\varphi + \psi)\, k^{-1}$ est admissible pour g_s et d'après le corollaire 3, si $\alpha < \frac{1}{2}$,

$$\int e^{-(\alpha/k)(\tilde{\varphi} + \psi)}\, dV_s \leqslant \text{Const.}$$

ψ/k est admissible pour g_s d'où

$$\psi(P) = \int G_s(P, Q)\, \Delta\psi(Q)\, dV(Q) \leqslant 2k \int G_s(P, Q)\, dV(Q) = k$$

d'autre part comme $V'=4\pi k$, $\tilde{\varphi}$ vérifie (7) avec $\beta=\alpha/k<2\pi/V'$. En effet

$$\int e^{-\beta\tilde{\varphi}}\,dV_s \leqslant e^{\beta k}\int e^{-\beta(\tilde{\varphi}+\psi)}\,dV_s \leqslant \text{Const.}$$

D'autre part nous avons

$$\int e^{-\beta\tilde{\varphi}}\,dV' \leqslant \text{Const.}\sup[V'/2\pi-\Delta\psi].$$

(d) *Cas du projectif complexe $P_m(\mathbb{C})$*

THÉORÈME 6. *Soit $P_m(\mathbb{C})$ le projectif complexe muni de sa métrique canonique g_p (celle pour laquelle $\omega\in C_1$). Toute fonction admissible φ d'intégrale nulle sur $P_m(\mathbb{C})$ vérifie*

$$\int_{P_m(\mathbb{C})} e^{-\alpha\varphi}\,dV \leqslant \text{Const} \qquad si \quad \alpha<1/(m+1). \tag{8}$$

Si $P_m(\mathbb{C})$ est muni d'une métrique g' telle que $\omega'\sim k\omega$ une fonction admissible φ pour g', d'intégrale nulle, vérifie

$$\int e^{-\beta\varphi}\,dV' \leqslant \text{Const} \qquad si \quad \beta<1/k(m+1).$$

Démonstration. On procède par récurrence. On suppose avoir montré que toute fonction admissible ψ sur $(P_{m-1}(\mathbb{C}), g_p)$ d'intégrale nulle vérifie

$$\int_{P_{m-1}(\mathbb{C})} e^{-\beta\psi}\,dV \leqslant \text{Const} \qquad \text{lorsque } \beta<1/m, \tag{9}$$

la constante ne dépendant que de m.

Si Z_λ $(0\leqslant\lambda\leqslant m)$ est un système de coordonnées homogènes pour $P_m(\mathbb{C})$, sur l'ouvert $U\subset P_m(\mathbb{C})$ où $Z_0\neq 0$ nous considérerons le système de coordonnées $z^\lambda=Z_\lambda/Z_0$ $(1\leqslant\lambda\leqslant m)$. Les composantes de la métrique g_p sont

$$g_{\lambda\bar{\mu}}=(m+1)\,\partial_{\lambda\bar{\mu}}\operatorname{Log}(1+r^2+\rho^2)$$

où nous avons posé $r^2=|z^1|^2$ et $\rho^2=\sum_{\lambda=2}^m|z^\lambda|^2$.

Écrivons

$$g_{1\bar{1}}(r,\rho)=(m+1)\,\partial_{1\bar{1}}\operatorname{Log}(1+r^2)+\partial_{1\bar{1}}f \tag{10}$$

avec

$$f=(m+1)\operatorname{Log}[(1+r^2+\rho^2)/(1+r^2)].$$

Les sphères $\rho=Cte$ ont toutes le même volume $V'=2\pi(m+1)$.

Soient φ une fonction admissible d'intégrale nulle sur $P_m(\mathbb{C})$, et $\gamma(z^1)$ sa trace sur l'une de ces sphères $\rho = Cte$ (on a fixé z^λ pour $\lambda \geqslant 2$). γ est admissible pour la métrique $g_{1\bar{1}}(r, \rho)$, voir (10). On peut appliquer le théorème 5:

$$\int_{S_2} e^{-\alpha\gamma}\, dV_s \leqslant Cte \exp\left[(-\alpha/4\pi) \int_{S_2} \gamma\, dV_s\right] \qquad \text{pour} \quad \alpha < 1/(m+1). \tag{11}$$

Posons

$$\tilde{\varphi}(z^2, ..., z^m) = \frac{i}{2\pi} \int_{S_2} \varphi(z^1, z^2, ..., z^m) \frac{dz^1 \wedge d\bar{z}^1}{(1+r^2)^2}$$

$$\tilde{g}_{\lambda\bar{\mu}}(z^2, ..., z^m) = \frac{i}{2\pi} \int_{S_2} g_{\lambda\bar{\mu}}(z^1, z^2, ..., z^m) \frac{dz^1 \wedge d\bar{z}^1}{(1+r^2)^2} \qquad \text{pour} \quad \lambda, \mu > 1.$$

φ étant admissible pour g_p, $\tilde{\varphi}$ est admissible pour $\tilde{g}$ sur $P_{m-1}(\mathbb{C})$. Comme

$$\int_0^\infty \operatorname{Log}(1+r^2+p^2) \frac{dr^2}{(1+r^2)^2}$$

$$= \operatorname{Log}[1+\rho^2] + \frac{1}{\rho^2} \left| \operatorname{Log}\left[\frac{1+r^2}{1+r^2+\rho^2}\right]\right|_0^\infty$$

$$\tilde{g}_{\lambda\bar{\mu}} = (m+1)\, \partial_{\lambda\bar{\mu}} \operatorname{Log}(1+\rho^2) + \partial_{\lambda\bar{\mu}} h$$

avec $h = (m+1)\, \rho^{-2} \operatorname{Log}(1+\rho^2)$. $\tilde{g}_{\lambda\bar{\mu}}\, dz^\lambda \wedge dz^{\bar{\mu}}$ est homologue à $(m+1)/m$ fois la forme fondamentale sur $P_{m-1}(\mathbb{C})$ muni de g_p. Comme $\tilde{\varphi}$ est admissible pour $\tilde{g}$, $(m/(m+1))(\tilde{\varphi}+h)$ est admissible pour g_p et d'après (9)

$$\int_{P_{m-1}(\mathbb{C})} e^{-\alpha(\tilde{\varphi}+h)}\, dV \leqslant Cte \exp\left[\frac{-\alpha}{w_{m-1}} \int_{P_{m-1}(\mathbb{C})} (\tilde{\varphi}+h)\, dV\right] \tag{12}$$

lorsque $\alpha < 1/(m+1)$, w_{m-1} étant le volume de $P_{m-1}(\mathbb{C})$. Comme h est compris entre 0 et 1 (12) donne

$$\int_{P_{m-1}(\mathbb{C})} e^{-\alpha\tilde{\varphi}}\, dV$$

$$\leqslant Cte \exp\left[\frac{-\alpha}{w_{m-1}} \int_{P_{m-1}(\mathbb{C})} \tilde{\varphi}\, dV\right] \qquad \text{lorsque}\ \alpha < 1/(m+1). \tag{13}$$

Cette inégalité et (11) entraînent

$$\int_{P_{m-1}(\mathbb{C})} (1+\rho^2)^{-m}\, i^m\, dz^2 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^m \int_{S_2} (1+r^2)^{-2} e^{-\alpha\varphi}\, dz^1 \wedge d\bar{z}^1$$

$$\leqslant Cte \exp\left[(-\alpha/w_{m-1}) \int_{P_{m-1}(\mathbb{C})} \tilde{\varphi}\, dV\right]. \tag{14}$$

Le théorème 6 sera démontré lorsque nous aurons établi que

$$-\int_{P_{m-1}(\mathbb{C})} \tilde{\varphi}\, dV < Cte. \tag{15}$$

En effet appelons $U_0 = \{Z \in P_m(\mathbb{C})/|Z_1| < |Z_0|\}$ et $U_1 = \{Z \in P_m(\mathbb{C})/|Z_0| < |Z_1|\}$. Sur U_0 $(1+r^2+\rho^2)^{-(m+1)} \leqslant 4(1+r^2)^{-2}(1+\rho^2)^{-m}$ car $r<1$. D'où $i^m \int_{U_0} e^{-\alpha\varphi}(1+r^2+\rho^2)^{-(m+1)}\, dz^1 \wedge d\bar{z}^1 \wedge \cdots \wedge d\bar{z}^m \leqslant 4$ fois le premier membre de (14). Même résultat sur U_1 en considérant les coordonnées $z^1 = Z_0/Z_1$ et $z^\lambda = Z_\lambda/Z_1$ pour $\lambda > 1$.

Combinant (14) et (15) avec ces deux derniers résultats on trouve (8). Démontrons maintenant (15). Écrivons que $[2/(m+1)](f+\varphi)$ est admissible pour g_s; en utilisant la fonction de Green du laplacien il vient:

$$(f+\varphi)(z^1, z^2, ..., z^m) \leqslant \frac{i}{2\pi}\int_{S_2} (f+\varphi)(z^1, z^2, ..., z^m)\frac{dz^1 \wedge d\bar{z}^1}{(1+r^2)^2} + k_1$$

les $k_i > 0$ étant des constantes.

Nous nous plaçons en un point $(z^1, z^2, ..., z^m)$ où $f+\varphi$ prend la valeur moyenne

$$m(i/2\pi)(1+\rho^2)^m \int_{S_2} (f+\varphi)(1+r^2+\rho^2)^{-(m+1)}\, dz^1 \wedge d\bar{z}^1$$

et nous intégrons sur $P_{m-1}(\mathbb{C})$. On obtient

$$\int_{P_m(\mathbb{C})} (f+\varphi)\, dV \leqslant k_2 \int_{P_{m-1}(\mathbb{C})} \left[\tilde{\varphi} + \int_0^\infty f(1+r^2)^{-2}\, dr^2\right] dV + k_3.$$

Comme φ est à intégrale nulle sur $P_m(\mathbb{C})$ et $f \geqslant 0$:

$$-\int_{P_{m-1}(\mathbb{C})} \tilde{\varphi}\, dV \leqslant k_4 + k_5 \underbrace{\int_0^\infty \cdots \int_0^\infty}_{m \text{ fois}} \mathrm{Log}[1+\rho^2/(1+r^2)]$$

$$\times (1+r^2)^{-2}(1+\rho^2)^{-m}\, d|z^1|^2 \cdots d|z^m|^2$$

$$-\int_{P_{m-1}(\mathbb{C})} \tilde{\varphi}\, dV \leqslant k_6\left[1 + \int_{P_{m-1}(\mathbb{C})} \mathrm{Log}(1+\rho^2)\, dV\right] \leqslant k_7.$$

COROLLAIRE. *Soit la variété produit (W, g) de deux exemplaires de $P_m(\mathbb{C})$ munis de la métrique g_p, g étant la métrique produit.*

Toute fonction admissible φ sur W d'intégrale nulle vérifie

$$\int_W e^{-\alpha\varphi}\, dV \leqslant \text{Const} \qquad si \quad \alpha < 1/(m+1).$$

Si W est muni d'une métrique g' telle que $\omega' \sim k\omega$ une fonction φ admissible pour g', d'intégrale nulle vérifie

$$\int_W e^{-\beta\varphi}\, dV' \leqslant \text{Const} \qquad si \quad \beta < 1/k(m+1).$$

(e) PROPOSITION. *Soient V_2 une variété Riemannienne C^∞ compacte de dimension 2, k et m deux réels positifs donnés. Il existe $\alpha > 0$ tel que toute fonction $\varphi \in C^2$, d'intégrale nulle, satisfaisant à $\Delta\varphi \leqslant m$ et $\|\nabla\varphi\|_2^2 \leqslant k$ vérifie*

$$\int e^{\alpha\varphi^2}\, dV \leqslant \text{Const}. \tag{16}$$

Ceci est un cas particulier d'un résultat bien connu de Trüdinger [14].

On peut démontrer cette proposition en appliquant la même démonstration que pour le théorème 4

$$\varphi^2(P) = \frac{1}{V}\int \varphi^2\, dV + \int G(P, Q)\, \Delta\varphi^2(Q)\, dV(Q).$$

Comme $\int \varphi\, dV = 0$, $\int \varphi^2\, dV \leqslant (1/\lambda_1)\|\nabla\varphi\|_2^2$. λ_1 étant la 1ère valeur propre du laplacien. D'autre part

$$\Delta\varphi^2 = 2[\varphi\, \Delta\varphi - |\nabla\varphi|^2] \leqslant 2\varphi\, \Delta\varphi$$

et

$$-\int_{(\varphi\Delta\varphi) < 0} \varphi\, \Delta\varphi\, dV \leqslant m\int_{\varphi < 0} (-\varphi)\, dV + Cm\int_{\Delta\varphi < 0} (-\Delta\varphi)\, dV$$

$$= (m/2)\left[\int |\varphi|\, dV + a\int |\Delta\varphi|\, dV\right]$$

où $a = \int G(P, Q)\, dV(Q)$. On en déduit

$$\int_{(\varphi\Delta\varphi) > 0} \varphi\Delta\varphi\, dV \leqslant k + 2m^2 Va = b$$

$$\varphi^2(P) \leqslant k/\lambda_1 V + \int_{(\varphi\Delta\varphi) > 0} bG(P, Q)\left(\frac{\varphi\Delta\varphi}{b}\right) dV.$$

Si $\alpha < 4\pi/b$, φ vérifie (16).

BIBLIOGRAPHIE

1. T. AUBIN, Métriques riemanniennes et courbure, *J. Differential Geom.* **4** (1970), 383–424.
2. T. AUBIN, Equations du type Monge–Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. A* **283** (1976), 119.

3. T. Aubin, Equations du type Monge–Ampère sur les variétés kählériennes compactes, *Bull. Sci. Math.* **102** (1978), 63–95.
4. T. Aubin, "Nonlinear Analysis on Manifolds. Monge–Ampère Equations," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1982.
5. T. Aubin, Réduction du cas positif de l'équation de Monge–Ampère sur les variétés kählériennes compactes à la démonstration d'une inégalité, *J. Funct. Anal.* **57** (1984), 143–153.
6. T. Aubin, Métriques d'Einstein–Kähler. Differential Geometry, Peñiscola 1988 (A. M. Naveira, Ed.), Lecture Notes in Mathematics. Springer-Verlag, New York/Berlin, 1988.
7. S. Bando et T. Mabuchi, Uniqueness of Einstein–Kähler metrics modulo connected group actions, *Adv. Studies in Pure Math.* **10** (1987) Kinokuniya, Tokyo and North-Holland.
8. E. Calabi, The space of Kähler metrics, *Proc. Internat. Congress Math. Amsterdam* **2** (1954), 206–207.
9. E. Calabi, On Kähler manifolds with vanishing canonical class, "Algebraic Geometry and Topology. A Symposium in Honor of S. Lefschetz," pp. 78–79, Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1955.
10. W. Y. Ding, Remarks on the existence problem of positive Kähler–Einstein metrics, preprint.
11. L. Hörmander, "An Introduction to Complex Analysis in Several Variables," North-Holland, Amsterdam/London, 1973.
12. G. Tian, On Kähler–Einstein metrics on certain Kähler manifolds with $C_1(M) > 0$, *Invent. Math.* **89** (1987), 225–246.
13. G. Tian et S-T. Yau, Kähler–Einstein metrics on complex surfaces with $C_1 > 0$, *Comm. Math. Phys.* **112** (1987), 175–203.
14. N. Trüdinger, On imbedding into Orlitz spaces and some applications, *J. Math. Phys.* **17** (1967), 473–484.
15. S-T. Yau, On the Ricci curvature of a compact Kähler manifold and the complex Monge–Ampère equations, I., *Comm. Pure Appl. Math.* **31** (1978), 339–411.