ELSEVIER

Discrete Mathematics 247 (2002) 117–134

DISCRETE MATHEMATICS

www.elsevier.com/locate/disc

Rétractions, corétractions et enveloppe injective d'une algèbre de transitions

A. Hudry

Laboratoire de Probabilités, Combinatoire et Statistique (LaPCS), Université Claude Bernard Lyon 1, 43 Bd du 11 Novembre 1918, F-69622 Villeurbanne Cedex, France

Received 27 March 2000; revised 13 February 2001; accepted 26 February 2001

Abstract

The notions of retraction and injectivity have been useful in the study of many categories (category of modules over a ring, category of posets, category of metric spaces over an Heyting algebra ...).

In this article the category of Σ-transition algebras is considered, and in this frame, answers are given to the key questions related to these notions. For instance it is shown:

— how to construct all the retraction types of a given Σ-transition algebra.

— that the category of Σ-transition algebras has enough injective objects and an injective cogenerator.

— that every Σ-transition algebras has an injective envelope.

These allow to obtain results concerning the structure and the decomposition of a Σ-transition algebra.

Keywords: Transition algebras; Unary algebras; Semi-automata; Sate machines; Retractions; Coretractions; Injective envelops; Representations

0. Introduction

Les notions de rétraction, de corétraction, et d'injectivité ont montré leur utilité dans l'étude de nombreuses catégories (catégorie des modules sur un anneau, catégorie des ensembles ordonnés [3], catégorie des espaces métriques sur une algèbre de Heyting [10], etc.).

Les questions clés concernant ces notions dans une catégorie $\mathscr{C}$ sont les suivantes:

question 1. Parmi les épimorphismes de source un objet de $\mathscr{C}$, quels sont ceux qui sont des rétractions? Peut-on déterminer tous les types de rétractions d'un objet de $\mathscr{C}$?

question 2. Peut-on représenter ou décomposer un objet de $\mathscr{C}$ à l'aide de ses rétractions?

E-mail address: hudry@jonas.univ-lyon1.fr (A. Hudry).

0012-365X/02/$ - see front matter
PII: S0012-365X(01)00165-0

question 3. Quels sont les objets de $\mathscr{C}$ qui sont des rétractés absolus (i.e. ceux pour lesquels tous les monomorphismes, dont ils sont la source, sont des corétractions)?

question 4. $\mathscr{C}$ a-t-elle assez d'objets injectifs? $\mathscr{C}$ admet-elle un cogénérateur injectif? Quels sont les objets injectifs de $\mathscr{C}$?

question 5. Un objet de $\mathscr{C}$ admet-il une enveloppe injective?

Le but de ce qui suit est d'apporter une réponse à ces questions pour la catégorie des Σ-algèbres de transitions, appelées encore Σ-semi automates ou avec la terminologie des algèbres universelles, Σ-algèbres unaires (voir [5,7]) ; en particulier il est démontré que les questions 2, 4 et 5 ont une réponse affirmative pour cette catégorie, ce qui permet, et c'est là l'une des motivations de ce travail, d'obtenir des résultats concernant la structure et la décomposition des objets de cette catégorie. Les résultats suivants ont été exposés le 3 Juin 1999 au séminaire LMD de l'Université Lyon I.

1. Généralités sur les algèbres de transitions

Le 1.1 et le 1.2 qui suivent ne sont destinés qu'à fixer la terminologie; seul le 1.3 introduit un concept nouveau utile pour ce travail.

1.1.

Soit Σ un ensemble. On appelle Σ-algèbre de transitions [2] (ou Σ-algèbre unaire [7], ou Σ-semi automate [5,6,9], ou encore Σ-machine de transitions complète [8] un couple de la forme:

$$\mathscr{A} = (A, (\sigma^{\mathscr{A}})_{\sigma\in\Sigma})$$

où A est un ensemble non vide appelé ensemble des états de $\mathscr{A}$, et où pour tout $\sigma\in\Sigma$, $\sigma^{\mathscr{A}}$ est une application de $\mathscr{A}$ dans A.

L'application $\delta^{\mathscr{A}}: A\times\Sigma \to A : (x,\sigma) \mapsto (x,\sigma)\delta^{\mathscr{A}} = x\sigma^{\mathscr{A}}$ s'appelle la fonction de changement d'états de $\mathscr{A}$ et elle se prolonge en une application $\delta_*^{\mathscr{A}}$ de $A\times\Sigma^*$ dans A, où Σ^* désigne le monoïde libre de base Σ; si pour le mot vide 1 de Σ^*, $1^{\mathscr{A}}$ désigne l'application identique de A, et si pour le mot $u=\sigma_1\sigma_2\ldots\sigma_\ell$ de longueur ℓ de Σ^+, $u^{\mathscr{A}}$ désigne l'application de A dans A définie pour tout $x\in A$ par $xu^{\mathscr{A}} = x\sigma_1^{\mathscr{A}}\ldots\sigma_\ell^{\mathscr{A}}$, on a pour tout $x\in A$ et tout $u\in\Sigma^*, (x,u)\delta_*^{\mathscr{A}} = xu^{\mathscr{A}}$.

Conformément à la terminologie des algèbres universelles [7], une application f de l'ensemble des états A d'une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A}$ dans l'ensemble des états A' d'une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A}'$ s'appelle un homomorphisme de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}'$ si on a:

$$(x\sigma^{\mathscr{A}})f = xf\sigma^{\mathscr{A}'}$$

pour tout $\sigma\in\Sigma$ et tout $x\in A$.

Les Σ-algèbres de transitions s'organisent alors en une catégorie dont les morphismes sont les homomorphismes de Σ-algèbres de transitions.

1.2.

Une situation un peu plus générale que la précédente dans laquelle la fonction de changement d'états est seulement une application partielle, conduit à la notion de Σ-machines de transitions [8] permettant de modéliser diverses situations (en électronique, biologie, chimie, psycholinguistique … [8]). De manière plus précise une Σ-machine de transitions [8] (ou Σ-algèbre unaire partielle [7]) est un couple de la forme:

$$\mathscr{M} = (M, (\sigma^{\mathscr{M}})_{\sigma\in\Sigma})$$

où M est un ensemble non vide appelé ensemble des états de $\mathscr{M}$ et où pour tout $\sigma\in\Sigma$, $\sigma^{\mathscr{M}}$ est une application partielle de M dans M; si pour $\sigma\in\Sigma$, l'état x de $\mathscr{M}$ n'appartient pas à l'ensemble de définition de $\sigma^{\mathscr{M}}$, on convient d'écrire $x\sigma^{\mathscr{M}} = \emptyset$.

Conformément à la terminologie des algèbres universelles [7], une application f de l'ensemble des états M d'une Σ-machine de transitions $\mathscr{M}$, dans l'ensemble des états M' d'une Σ-machine de transitions $\mathscr{M}'$, s'appelle un homomorphisme de Σ-machines de transitions de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}'$ si pour tout $x\in M$ et tout $\sigma\in\Sigma$ tel que $x\sigma^{\mathscr{M}}$ soit défini, il en est de même pour $xf\sigma^{\mathscr{M}'}$ et $(x\sigma^{\mathscr{M}})f = xf\sigma^{\mathscr{M}'}$. Les Σ-machines de transitions s'organisent en une catégorie dont les morphismes sont les homomorphismes de Σ-machines de transitions; alors la catégorie des Σ-algèbres de transitions est une sous catégorie pleine de la catégorie des Σ-machines de transitions.

Soit f un homomorphisme de Σ-machines de transitions de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}'$; suivant [7], f est dit plein, si pour tout $\sigma\in\Sigma$ et tout état x de $\mathscr{M}$ tel que $xf\sigma^{\mathscr{M}'}\in \mathrm{Im}(f)$, il existe un état x_0 de $\mathscr{M}$ tel que $x_0 f = xf$ avec $x_0\sigma^{\mathscr{M}}$ défini; suivant [7], f est dit fort si pour tout $\sigma\in\Sigma$ et tout état de x de $\mathscr{M}$ tel que $xf\sigma^{\mathscr{M}'}$ soit défini, il en est de même pour $x\sigma^{\mathscr{M}}$ (si $\mathscr{M}$ est complète, tout homomorphisme de Σ-machines de source $\mathscr{M}$ est fort donc plein; sinon cela n'est pas nécessairement le cas); la notion d'homomorphisme plein (resp. fort) n'est donc pertinente que pour les Σ-machines de transitions incomplètes. Si $\mathscr{M}$ est une Σ-machine de transitions dont l'ensemble des états est M, on désigne par $\mathscr{M}^{\square}$ la Σ-algèbre de transitions dont l'ensemble des états est M auquel on a adjoint un état supplémentaire noté $\square$ et dont les opérateurs de transitions $\sigma^{\mathscr{M}^{\square}}$ avec $\sigma\in\Sigma$ sont définis pour tout $x\in M\cup\{\square\}$ par:

$$x\sigma^{\mathscr{M}^{\square}} = \begin{cases} x\sigma^{\mathscr{M}} & \text{si } x\in M \quad \text{et} \quad x\sigma^{\mathscr{M}}\neq\emptyset \\ \square & \text{sinon.}\end{cases}$$

Si N est une partie non vide de l'ensemble M des états d'une Σ-machine de transitions, la Σ-machine de transitions obtenue par restriction de $\mathscr{M}$ à N est la Σ-machine de transitions:

$$\mathscr{M}|N = (N, (\sigma^{\mathscr{M}|N})_{\sigma\in\Sigma}),$$

avec pour tout $\sigma\in\Sigma$ et tout $x\in N$

$$x\sigma^{\mathscr{M}|N} = \begin{cases} x\sigma^{\mathscr{M}} & \text{si } x\sigma^{\mathscr{M}}\in N \\ \emptyset & \text{sinon.}\end{cases}$$

Même si $\mathscr{M}$ est une Σ-machine de transitions complète (i.e. une Σ-algèbre de transitions) en général $\mathscr{M}|N$ n'est pas complète. L'injection canonique de $\mathscr{M}|N$ dans $\mathscr{M}$ est un homomorphisme fort de Σ-machines si et seulement si on a:

$$N\sigma^{\mathscr{M}} \subset N \quad \text{pour tout } \sigma \in \Sigma.$$

Dans ce cas $\mathscr{M}|N$ s'appelle, conformément à la terminologie des algèbres universelles [7], une Σ-sous machine de transitions de $\mathscr{M}$, et si de plus $\mathscr{M}$ est une Σ-algèbre de transitions, $\mathscr{M}|N$ est dans ce cas une Σ-algèbre de transitions appelée sous Σ-algèbre de transitions de $\mathscr{M}$.

Si $\mathscr{M}$ est une Σ-machine (resp. algèbre) de transitions, x un état de $\mathscr{M}$, et T un ensemble d'états de $\mathscr{M}$, l'automate déterministe construit sur $\mathscr{M}$ dont l'état initial est x et l'ensemble des états terminaux T, est noté $(\mathscr{M}, x, T)$ et le comportement de cet automate, i.e. le langage reconnu par cet automate est conformément à [4]:

$$|(\mathscr{M}, x, T)| = \{u \in \Sigma^* | xu^{\mathscr{M}} \in T\};$$

si T est réduit au singleton $\{y\}$, on note $(\mathscr{M}, x, y)$ au lieu de $(\mathscr{M}, x, \{y\})$.

D'une manière générale la terminologie non explicitée ici, concernant les congruences sur une Σ-machine (resp. algèbre) de transitions, le quotient d'une Σ-machine (resp. algèbre) de transitions par une congruence, les produits directs ou sous directs de Σ-machines (resp. algèbre) de transitions, est celle des algèbres universelles partielles ou non [7]. Enfin ici, comme les applications sont écrites à droite de leurs arguments, la composée de deux applications f et g lorsqu'elle est définie est notée fg au lieu de gof [4].

1.3.

$\mathscr{M}$ étant une Σ-machine (resp. Σ-algèbre) de transitions dont l'ensemble des états est M, l'ensemble $\mathscr{F}_{\mathscr{M}}$ des parties N de M telles que $N\sigma^{\mathscr{M}} \subset N$ pour tout $\sigma \in \Sigma$ est l'ensemble des parties fermées d'une topologie sur M dite associée à $\mathscr{M}$; si $N \in \mathscr{F}_{\mathscr{M}}$, on dit que N est un ensemble d'états fermé de $\mathscr{M}$. On observe que pour toute partie X de M, l'adhérence de X pour la topologie précédente, est l'ensemble $X^{a\mathscr{M}}$ des états de $\mathscr{M}$ qui sont accessibles à partir de X i.e.,

$$X^{a\mathscr{M}} = \bigcup_{u \in \Sigma^*} Xu^{\mathscr{M}};$$

comme $X^{a\mathscr{M}} = \bigcup_{x \in X} \{x\}^{a\mathscr{M}}$, la topologie considérée est algébrique et de type V_S (pour la définition voir [1]). Si pour toute partie X de M, on note $X^{b\mathscr{M}}$ l'ensemble des états de $\mathscr{M}$ qui sont coaccessibles à partir de X i.e.,

$$X^{b\mathscr{M}} = \{y \in M | \{y\}^{a\mathscr{M}} \cap X \neq \emptyset\},$$

on observe qu'une partie X de M est ouverte pour la topologie associée à $\mathscr{M}$ si et seulement si on a, $X^{b\mathscr{M}} = X$. Il résulte de ceci que l'ensemble des voisinages d'un état x de $\mathscr{M}$ est le filtre principal des parties de M contenant $\{x\}^{b\mathscr{M}}$; les fermés non vides complétement $\bigcup$-irréductibles sont de la forme $\{x\}^{a\mathscr{M}}$ avec $x \in M$, et tout fermé non vide est réunion de fermés complétement $\bigcup$-irréductibles; les fermés distincts de M complétement $\bigcap$-irréductibles sont de la forme $\complement_M \{x\}^{b\mathscr{M}}$ avec $x \in M$, et tout fermé distinct de M est intersection de fermés de M distincts de M complétement $\bigcap$-irréductibles; bien sûr on a un résultat dual pour les ouverts.

Ici, en adaptant une idée de Rees concernant les idéaux d'un semi-groupe, on va associer à un ensemble d'états fermé N de M une congruence; pour cela on observe que l'équivalence $\mathscr{R}_N$ sur l'ensemble M des états de $\mathscr{M}$, identifiant les éléments de N et séparant les autres (formellement $(x,y) \in \mathscr{R}_N$ si et seulement si $x = y$ ou $x, y \in N$), est une congruence sur $\mathscr{M}$ appelée ici congruence de Rees associée au fermé N; la sous Σ-machine (resp. algèbre) de transitions $\mathscr{N} = \mathscr{M}|N$ de $\mathscr{M}$ et la Σ-machine (resp. algèbre) quotient $\mathscr{M}/\mathscr{R}_N$, que l'on peut qualifier de quotient de $\mathscr{M}$ par la sous Σ-machine (resp. algèbre) $\mathscr{N}$, permet alors d'obtenir (Proposition 2.2.3 et remarques 2.2.6 et 2.2.7) une décomposition de $\mathscr{M}$ au sens de [4].

2. Rétractions et corétractions d'une algèbre de transitions

2.1.

Dans la catégorie des Σ-machines de transitions, un morphisme r d'une Σ-machine de transitions $\mathscr{M} = (M, (\sigma^{\mathscr{M}})_{\sigma \in \Sigma})$ dans une Σ-machine de transitions $\mathscr{M}' = (M', (\sigma^{\mathscr{M}'})_{\sigma \in \Sigma})$ s'appelle une rétraction de $\mathscr{M}$ s'il existe un morphisme s de $\mathscr{M}'$ dans $\mathscr{M}$ tel que: $sr = id_{M'}$; s s'appelle alors une corétraction de $\mathscr{M}'$ associée à r. On remarque qu'une rétraction r d'une Σ-machine de transitions est un morphisme surjectif plein, et que toute corétraction associée est un monomorphisme fort. S'il existe une rétraction r de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{M}'$, $\mathscr{M}'$ est dite rétractée de $\mathscr{M}$.

Si r_1 (resp. r_2) est une rétraction d'une Σ-machine de transitions $\mathscr{M}$ sur une Σ-machine de transitions $\mathscr{M}'_1$ (resp. $\mathscr{M}'_2$), on dit que r_1 et r_2 sont équivalentes ou encore de même type, s'il existe un morphisme de Σ-machines de transitions t_1 (resp. t_2) de $\mathscr{M}'_1$ dans $\mathscr{M}'_2$ (resp. de $\mathscr{M}'_2$ dans $\mathscr{M}'_1$) de telle sorte que l'on ait:

$$r_1 t_1 = r_2 \quad \text{et} \quad r_2 t_2 = r_1;$$

dans cette situation t_1 et t_2 sont des isomorphismes de Σ-machines de transitions.

La notion de rétraction envisagée ici dans la catégorie des Σ-machines de transitions (ou de manière analogue dans la catégorie des Σ-algèbres de transitions) a été étudiée dans diverses catégories (catégorie des ensembles ordonnés [3], des espaces métriques sur un semi-groupe [10], de certains graphes etc.). L'un des problèmes centraux qui se pose est la caractérisation des morphismes surjectifs qui sont des rétractions et la détermination des types de rétraction d'un objet dans une telle catégorie (question 1).

Une réponse à cette question dans la catégorie des Σ-machines de transitions (respectivement des Σ-algèbres de transitions) est basée sur les remarques suivantes:

Remarque 2.1.1. Si ρ est une congruence sur la Σ-machine de transitions $\mathscr{M}$, alors le morphisme canonique v_ρ de la Σ-machine de transitions $\mathscr{M}$ sur la Σ-machine de transitions $\mathscr{M}/\rho$ est une rétraction si et seulement si ρ admet un ensemble de représentants fidèle et fermé dans $\mathscr{M}$. (Un système de représentants N de ρ est dit fidèle si pour tout $\sigma \in \Sigma$, et tout $n \in N$, on a $n\sigma^{\mathscr{M}} \neq \emptyset$ si et seulement si $[n]_\rho \sigma^{\mathscr{M}} \neq \emptyset$; bien sûr, si $\mathscr{M}$ est une Σ-algèbre de transitions tout ensemble de représentants d'une congruence est fidèle).

Remarque 2.1.2. Si r est une rétraction d'une Σ-machine de transitions $\mathscr{M}$ sur une Σ-machine $\mathscr{M}'$ alors:

(a) la congruence $\mathrm{Ker}(r)$ sur $\mathscr{M}$ associée à r admet un ensemble de représentants fidèle et fermé dans $\mathscr{M}$
(b) l'application canonique de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{M}/\mathrm{Ker}(r)$ est une rétraction de $\mathscr{M}$ équivalente à r et en particulier $\mathscr{M}'$ est isomorphe à $\mathscr{M}/\mathrm{Ker}(r)$
(c) pour toute corétraction s de $\mathscr{M}'$ dans $\mathscr{M}$ associée à r, $g = rs$ est un endomorphisme idempotent de la Σ-machine $\mathscr{M}$ dont l'ensemble des points fixes est l'ensemble d'états fermé $N = M's$ de $\mathscr{M}$ et $\mathscr{M}|N$ est une Σ-sous machine de $\mathscr{M}$; le morphisme de Σ-machines de transitions de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{M}|N$ induit par g est une rétraction de $\mathscr{M}$ équivalente à r (en particulier $\mathscr{M}'$ est isomorphe à $\mathscr{M}|N$); de plus si r' est une rétraction de $\mathscr{M}$ équivalente à r, pour toute corétraction s' associée à r' l'endomorphisme idempotent $g' = r's'$ de $\mathscr{M}$ est $\mathscr{R}$-équivalent au sens de Green à g (i.e. dans le monoïde des endomorphismes de $\mathscr{M}$, l'idéal à droite engendré par g' est le même que celui engendré par g, ce qui équivaut à $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Ker}(g')$); l'ensemble N des points fixes de g et des points fixes N' de g' sont alors deux ensembles de représentants fidèles et fermés d'une même congruence sur $\mathscr{M}$.

Remarque 2.1.3. Etant donnée une Σ-machine de transitions $\mathscr{M}$ et une partie N de l'ensemble M des états de $\mathscr{M}$, les propriétés suivantes sont équivalentes:

(a) L'injection canonique de N dans M est une corétraction de Σ-machines de transitions de $\mathscr{M}|N$ dans $\mathscr{M}$;
(b) Il existe un endomorphisme idempotent g de $\mathscr{M}$ tel que $N = Im(g)$;
(c) N est un ensemble de représentants fidèle et fermé d'une congruence sur $\mathscr{M}$
(d) N est un ensemble transversal fermé et fidèle d'une partition de M compatible avec la structure de Σ-machine de transitions de $\mathscr{M}$.

Un ensemble d'états N de $\mathscr{M}$ vérifiant l'une des conditions équivalentes précédentes est appelé un ensemble fermé direct de $\mathscr{M}$.

Si N_1 et N_2 sont deux ensembles d'états de $\mathscr{M}$, les conditions suivantes sont équivalentes:

(a) N_1 et N_2 sont deux ensembles de représentants fermés et fidèles d'une même congruence sur $\mathscr{M}$;
(b) N_1 et N_2 sont les images de deux corétractions associées à une même rétraction de $\mathscr{M}$;

(c) N_1 et N_2 sont les images de deux corétractions associées à deux rétractions équivalentes de $\mathscr{M}$;
(d) N_1 et N_2 sont les images de deux endomorphismes idempotents de $\mathscr{M}$, $\mathscr{R}$-équivalents au sens de Green.

Il résulte des remarques précédentes les deux résultats suivants:

Proposition 2.1.4. *Dans la catégorie des Σ-machines de transitions les morphismes surjectifs qui sont des rétractions sont ceux qui sont pleins et pour lesquels la congruence associée admet un ensemble de représentants fermé et fidèle.*

Dans la catégorie des Σ-algèbres de transitions les morphismes surjectifs qui sont des rétractions sont ceux pour lesquels la congruence associée admet un ensemble de représentants fermé.

Proposition 2.1.5. *Soit $\mathscr{M}=(M,(\sigma^{\mathscr{M}})_{\sigma\in\Sigma})$ une Σ-machine de transitions. Il y a bijection entre*:

(a) *Les types de rétractions de $\mathscr{M}$*;
(b) *Les congruences sur $\mathscr{M}$ admettant un ensemble de représentants fermé et fidèle*;
(c) *Les partitions de M compatibles avec la structure $\mathscr{M}$ de Σ-machine de transitions et admettant un ensemble transversal fermé et fidèle*;
(d) *Les classes d'équivalences des fermés directs de $\mathscr{M}$*;
(e) *Les $\mathscr{R}$-classes d'équivalence des endomorphismes idempotents de $\mathscr{M}$.*

Si dans la proposition précédente $\mathscr{M}$ est une Σ-machine de transitions complète i.e. une Σ-algèbre de transitions, on peut supprimer dans l'énoncé (b) et (c) le mot fidèle.

Les deux résultats précédents donnent un procédé effectif pour déterminer tous les types de rétractions d'une Σ-machine (resp. Σ-algèbre) de transitions $\mathscr{M}$ admettant un nombre fini d'états et en particulier pour décider si un homomorphisme surjectif de Σ-machines (resp. Σ-algèbres) de transitions de source $\mathscr{M}$ est une rétraction de $\mathscr{M}$.

Exemple 2.1.6. Dans tout cet exemple $\Sigma=\{\sigma_1,\sigma_2\}$ et $\mathscr{A}$ est la Σ-algèbre de transitions dont l'ensemble des états est $A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ et dont les opérateurs de transitions sont donnés par:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5
$\sigma_1^{\mathscr{A}}$	x_2	x_3	x_3	x_2	x_3
$\sigma_2^{\mathscr{A}}$	x_3	x_1	x_2	x_3	x_4.

Les fermés non vides de $\mathscr{A}$ sont:

$$N_1=\{x_1,x_2,x_3\},\qquad N_2=\{x_1,x_2,x_3,x_4\}\quad \text{et}\quad N_3=A=\{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\};$$

N_1 et $N_3=A$ sont des fermés directs de $\mathscr{A}$ et N_2 est un fermé de $\mathscr{A}$ non direct; dans le monoïde $End(\mathscr{A})$, le seul idempotent $g=g^2$ différent de l'identité est donné par:

$$x_1g=x_4g=x_1, \quad x_2g=x_5g=x_2, \quad x_3g=x_3.$$

Il existe sept types d'homomorphismes surjectifs de Σ-algèbres de transitions de source $\mathscr{A}$:

$f_o:\mathscr{A}\to\mathscr{B}_o$, avec $\mathscr{B}_o$ la Σ-algèbre de transitions dont l'ensemble des états est le singleton $B_o=\{y_1\}$, et avec: $x_if_o=y_1$ pour $i\in\{1,2,3,4,5\}$, n'est pas une rétraction;

$f_1:\mathscr{A}\to\mathscr{B}_1$, avec $\mathscr{B}_1$ la Σ-algèbre de transitions dont l'ensemble des états est $B_1=\{y_1,y_2,y_3\}$ et les opérateurs transitions donnés par:

	y_1	y_2	y_3
$\sigma_1^{\mathscr{B}_1}$	y_2	y_3	y_3
$\sigma_2^{\mathscr{B}_1}$	y_3	y_1	y_2,

et avec: $x_1f_1=x_4f_1=y_1$, $x_2f_1=x_5f_1=y_2$, $x_3f_1=y_3$, est une rétraction car la congruence $\rho_1=\mathrm{Ker}(f_1)$ admet N_1 comme ensemble de représentants; une corétraction associée à f_1 est s_1 définie par, $y_is_1=x_i$, pour $i\in\{1,2,3\}$;

$f_2:\mathscr{A}\to\mathscr{B}_2$, avec $\mathscr{B}_2$ la Σ-algèbre de transitions dont l'ensemble des états est $B_2=\{y_1,y_2\}$ et les opérateurs de transitions données par:

	y_1	y_2
$\sigma_1^{\mathscr{B}_2}$	y_1	y_1
$\sigma_2^{\mathscr{B}_2}$	y_1	y_1,

et avec: $x_1f_2=x_2f_2=x_3f_2=x_4f_2=y_1$, $x_5f_2=y_2$, n'est pas une rétraction;

$f_3:\mathscr{A}\to\mathscr{B}_3=\mathscr{B}_2$, avec: $x_1f_3=x_2f_3=x_3f_3=x_5f_3=y_1$, $x_4f_3=y_2$, n'est pas une rétraction;

$f_4:\mathscr{A}\to\mathscr{B}_4$, avec $\mathscr{B}_4$ la Σ-algèbre de transitions dont l'ensemble des états est $B_4=\{y_1,y_2,y_3,y_4\}$ et les opérateurs de transitions donnés par:

	y_1	y_2	y_3	y_4
$\sigma_1^{\mathscr{B}_4}$	y_2	y_3	y_3	y_3
$\sigma_2^{\mathscr{B}_4}$	y_3	y_1	y_2	y_1,

et avec: $x_1f_4=x_4f_4=y_1$, $x_2f_4=y_2$, $x_3f_4=y_3$, $x_5f_4=y_4$, n'est pas une rétraction;

$f_5 : \mathscr{A} \to \mathscr{B}_5$, avec $\mathscr{B}_5$ la Σ-algèbre de transitions dont l'ensemble des états est $B_5 = \{y_1, y_2, y_3\}$ et les opérateurs de transitions donnés par:

	y_1	y_2	y_3
$\sigma_1^{\mathscr{B}_5}$	y_1	y_1	y_1
$\sigma_2^{\mathscr{B}_5}$	y_1	y_1	y_2,

et avec: $x_1 f_5 = x_2 f_5 = x_3 f_5 = y_1$, $x_4 f_5 = y_2$, $x_5 f_5 = y_3$ n'est pas une rétraction ; $f_6 : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ avec $f_6 = 1^{\mathscr{A}}$ est la rétraction triviale.

2.2. Autour de la question 2

Si $\mathscr{M}$ est une Σ-machine (resp. algèbre) de transitions, la classe des Σ-machines (resp. algèbres) de transitions rétractées de $\mathscr{M}$ est notée $\underline{\mathscr{R}}(\mathscr{M})$. Conformément à [3] une famille $(\mathscr{M}_i)_{i\in I}$ de Σ-machines (resp. algèbres) de transitions est une $\underline{\mathscr{R}}$-représentation de $\mathscr{M}$ si on a:

$$\mathscr{M} \in \underline{\mathscr{R}}\left(\prod_{i\in I} \mathscr{M}_i\right) \quad \text{et} \quad \mathscr{M}_i \in \underline{\mathscr{R}}(\mathscr{M});$$

$\mathscr{M}$ est dite $\underline{\mathscr{R}}$-irréductible si pour toute $\underline{\mathscr{R}}$-représentation de $\mathscr{M}$ du type précédent, il existe $i_0 \in I$ tel que $\mathscr{M} \in \underline{\mathscr{R}}(\mathscr{M}_{i_0})$. En utilisant les mêmes idées que [3] développées dans le cadre des ensembles ordonnés, il est facile d'observer que l'on a:

Remarque 2.2.1. Toute Σ-machine (resp. algèbre) de transitions finie a une $\underline{\mathscr{R}}$-représentation à l'aide d'un nombre fini de Σ-machines (resp. algèbres) de transitions $\underline{\mathscr{R}}$-irréductibles.

Une conséquence immédiate de la proposition 2.1.5 est:

Corollaire 2.2.2. *Soit $\mathscr{M}$ une Σ-machine* (*resp. Σ-algèbre*) *de transitions. Si tout idempotent du monoïde* End($\mathscr{M}$) *différent de* $1^{\mathscr{M}}$ *est de rang* 1 (*i.e. n'a qu'un point fixe*), $\mathscr{M}$ *est $\underline{\mathscr{R}}$-irréductible* ; *ceci se produit en particulier si le seul idempotent de* End($\mathscr{M}$) *est* $1^{\mathscr{M}}$, *donc a fortiori si $\mathscr{M}$ est fortement connecté.*

($\mathscr{M}$ est dit fortement connecté si pour tout couple d'états (x, y) de $\mathscr{M}$, il existe $u \in \Sigma^*$ et $v \in \Sigma^*$ tels que $x = yu^{\mathscr{M}}$ et $y = xv^{\mathscr{M}}$). Dans l'exemple 2.1.6. précédent, $\mathscr{B}_1$ est $\underline{\mathscr{R}}$-irréductible car fortement connecté, $\mathscr{B}_5$ est $\underline{\mathscr{R}}$-irréductible (car le seul idempotent de End($\mathscr{B}_5$) distinct de $1^{\mathscr{B}_5}$ a pour image le puits $\{y_1\}$) mais $\mathscr{B}_5$ n'est pas fortement connecté (il est cependant connecté).

Le résultat suivant montre qu'à toute rétraction r d'une Σ-machine (resp. Σ-algèbre) de transitions est associée une décomposition de $\mathscr{M}$ comme produit sous direct de l'image de r et d'un quotient de Rees de $\mathscr{M}$; de manière plus précise $\mathscr{M}$ est produit sous direct de $\mathscr{M}' = \mathrm{Im}(r)$ par $\mathscr{M}'' = \mathscr{M}/\mathscr{R}_{\mathrm{Im}(s)}$ où s est une corétraction associée à r.

Proposition 2.2.3. *Soit N un ensemble d'états fermé direct d'une Σ-machine (resp. algèbre) de transitions $\mathscr{M}$. Alors il existe un monomorphisme fort de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}|N \times \mathscr{M}/\mathscr{R}_N$ représentant $\mathscr{M}$ comme produit sous direct du rétracté $\mathscr{M}|N$ de $\mathscr{M}$ par le quotient de Rees $\mathscr{M}/\mathscr{R}_N$ associé à N.*

Démonstration. Il existe un endomorphisme idempotent g de $\mathscr{M}$ tel que $N = Mg$, où M désigne l'ensemble des états de $\mathscr{M}$. On considère l'application $\mu : M \to N \times M/\mathscr{R}_N$ définie pour tout $m \in M$ par: $m\mu = (mg, m\nu_N)$ où ν_N désigne l'application canonique de M dans $M/\mathscr{R}_N$. On vérifie que μ est un monomorphisme fort de Σ-machines de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{P} = \mathscr{M}|N \times \mathscr{M}/\mathscr{R}_N$ de sorte que $\mathrm{Im}(\mu)$ est un fermé de l'ensemble des états de $\mathscr{P}$ et que $\mathscr{M}$ est isomorphe à $\mathscr{P}|\mathrm{Im}(\mu)$. La proposition résulte alors de ce que l'on a: $\mathrm{Ker}(g) \cap \mathscr{R}_N = \Delta_M$ où Δ_M désigne la diagonale de $M \times M$ i.e. l'identité de M.

Remarque 2.2.4. Avec les hypothèses et les notations de la proposition précédente, il est donc obtenu en particulier une simulation [9] de $\mathscr{M}$ à l'aide de la composition en parallèle de deux de ses quotients; l'homomorphisme canonique ν_N de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{M}/\mathscr{R}_N$ n'est pas en général une rétraction de $\mathscr{M}$ (ainsi dans l'exemple 2.1.6 $\mathscr{A}$ est produit sous direct de $\mathscr{A}|N_1 \simeq \mathscr{B}_1$ et de $\mathscr{A}/\mathscr{R}_{N_1} \simeq \mathscr{B}_5$ avec $\mathscr{A}|N_1$ rétracté de $\mathscr{A}$ mais $\mathscr{A}/\mathscr{R}_{N_1}$ non rétracté de $\mathscr{A}$; dans cet exemple $\mathscr{A}|N_1$ et $\mathscr{A}/\mathscr{R}_{N_1}$ sont $\underline{\mathscr{R}}$-irréductibles); si l'on désigne par V l'ouvert complémentaire de N dans M on obtient:

ν_N est une rétraction de $\mathscr{M}$ si et seulement si N contient un puits p tel que d'une part $V \cup \{p\}$ soit fermé et d'autre part on ait $p\sigma^{\mathscr{M}} \neq \emptyset$ dès que $N\sigma^{\mathscr{M}} \neq \emptyset$ (cette dernière condition étant toujours réalisée si $\mathscr{M}$ est une Σ-algèbre de transitions).

Si $\mathscr{M}$ est une Σ-machine (resp. algèbre) de transitions finie, la proposition 2.2.3 montre que $\mathscr{M}$ peut être représentée comme produit sous direct d'un nombre fini de ses diviseurs qui sont des Σ-machines (resp. algèbres) de transitions directement indécomposables (i.e. n'admettant pas de rétractions propres).

Remarque 2.2.5. N étant un ensemble d'états fermé d'une Σ-machine de transitions $\mathscr{M}$, et V étant l'ouvert complémentaire de N dans M, il existe un homomorphisme bijectif de Σ-machines de transitions de $\mathscr{M}/\mathscr{R}_N$ sur $(\mathscr{M}|V)^{\square}$ qui est un isomorphisme si et seulement si $\mathscr{M}/\mathscr{R}_N$ est complète ce qui est le cas si $\mathscr{M}$ est une Σ-algèbre de transitions ; donc si dans l'énoncé de la proposition précédente $\mathscr{M}$ est une Σ-algèbre de transitions, il existe un monomorphisme de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}|N \times (\mathscr{M}|V)^{\square}$ représentant $\mathscr{M}$ comme produit sous direct de la Σ-sous algèbre rétractée $\mathscr{M}|N$ par la Σ-algèbre de transitions $(\mathscr{M}|V)^{\square}$ associée à l'ouvert $V = \complement_M N$.

Remarque 2.2.6. Si N est un fermé non vide de l'ensemble des états M d'une Σ-machine $\mathscr{M}$, qui n'est pas direct, la situation est plus complexe que dans la proposition précédente; si l'on note $\overline{\mathscr{M}|N}$ la Σ_N-machine de transitions avec Σ_N réunion disjointe de Σ et de N, telle que $\sigma^{\overline{\mathscr{M}|N}} = \sigma^{\mathscr{M}|N}$ pour tout $\sigma \in \Sigma$, et $n^{\overline{\mathscr{M}|N}}$ l'application de N dans N de valeur constante n pour tout $n \in N$, il est possible de démontrer qu'il existe, avec la terminologie habituelle [5], une connexion sans boucle ω de $\mathscr{M}/\mathscr{R}_N$

avec $\overline{\mathscr{M}|N}$ telle que $\mathscr{M}$ soit image homomorphe d'une sous Σ-machine de transitions de la Σ-machine de transition: $\overline{\mathscr{M}|N} \times_{\omega} \mathscr{M}/\mathscr{R}_N$ produit en cascade de $\mathscr{M}/\mathscr{R}_N$ et de $\overline{\mathscr{M}|N}$; en particulier $\mathscr{M}$ est simulé proprement par ce produit en cascade. Dans le cas où N est un fermé non vide minimal donc une composante de connexion forte de M, on peut remplacer dans le produit en cascade $\overline{\mathscr{M}|N}$ par $\mathscr{M}|N$ qui est alors une Σ-sous machine fortement connectée de $\mathscr{M}$.

Remarque 2.2.7. Si N est un ensemble d'états fermé d'une Σ-machine de transitions $\mathscr{M}$ qui est aussi ouvert i.e. si N est un of, on observe qu'il existe un monomorphisme fort de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}/\mathscr{R}_N \times \mathscr{M}/\mathscr{R}_{M-N}$ représentant $\mathscr{M}$ comme produit sous direct de $\mathscr{M}/\mathscr{R}_N$ par $\mathscr{M}/\mathscr{R}_{M-N}$; ce résultat se généralise pour une partition de l'ensemble des états M de $\mathscr{M}$ formée d'ofs. En effet, si $M = \bigcup_{i\in I} N_i$ est une partition de M en ofs, on obtient: $\Delta_M = \bigcap_{i\in I} \mathscr{R}_{M-N_i}$ (avec Δ_M diagonale de $M \times M$) ; ce qui prouve qu'il existe un monomorphisme fort de $\mathscr{M}$ dans $\prod_{i\in I} \mathscr{M}/\mathscr{R}_{M-N_i}$ représentant $\mathscr{M}$ comme produit sous direct de la famille $(\mathscr{M}/\mathscr{R}_{M-N_i})_{i\in I}$. Une telle partition de M existe toujours: deux états x et y de $\mathscr{M}$ sont dits connectés s'il existe $z_0, z_1, \ldots, z_\ell \in M$ avec $z_0 = x$, $z_\ell = y$ et $z_{i+1} \in \{z_i\}^{a\mathscr{M}} \cup \{z_i\}^{b\mathscr{M}}$ pour $i \in \{0, 1, \ldots, \ell - 1\}$; la relation binaire sur M associée est une équivalence et si $(C_i)_{i\in I}$ désigne la partition de M correspondante, C_i est pour tout $i \in I$ une composante connexe de M donc un of non vide minimal et $\mathscr{M}|C_i$ est une Σ-machine de transitions connectée. Pour une Σ-algèbre de transitions non connexe on obtient donc:

Proposition 2.2.8. *Soit $\mathscr{A}$ une Σ-algèbre de transitions et $(C_i)_{i\in I}$ les composantes connexes de l'ensemble des états de $\mathscr{A}$. Il existe un monomorphisme de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{A}$ dans $\prod_{i\in I} (\mathscr{A}|C_i)^{\square}$ représentant $\mathscr{A}$ comme produit sous direct des Σ-algèbres de transitions $(\mathscr{A}|C_i)^{\square}$ avec pour tout $i \in I$, $\mathscr{A}|C_i$ Σ-sous algèbre de transitions connectée de $\mathscr{A}$.*

3. Enveloppe injective d'une algèbre de transitions

3.1.

On désigne par $\mathscr{L}$ la Σ-algèbre de transitions dont l'ensemble des états est l'ensemble $\mathscr{P}(\Sigma^*)$ des langages sur l'alphabet Σ, et dont les opérateurs unaires $\sigma^{\mathscr{L}}$ avec $\sigma \in \Sigma$ sont définis par:

$$L\sigma^{\mathscr{L}} = L\dot{:}\sigma = \sigma^{-1}L = \{w \in \Sigma^* | \sigma w \in L\}, \text{ pour tout } L \in \mathscr{P}(\Sigma^*).$$

On va démontrer que $\mathscr{L} = (\mathscr{P}(\Sigma^*), (\sigma^{\mathscr{L}})_{\sigma\in\Sigma})$ est un cogénérateur injectif de la catégorie des Σ-algèbres de transitions.

Proposition 3.1.1. *Pour tout monomorphisme α d'une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A} = (A, (\sigma^{\mathscr{A}})_{\sigma\in\Sigma})$ dans une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{B} = (B, (\sigma^{\mathscr{B}})_{\sigma\in\Sigma})$ et tout homomorphisme f de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{L}$, il existe un homomorphisme*

g de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{B}$ dans $\mathscr{L}$ tel que $\alpha g = f$, i.e. $\mathscr{L}$ est un objet injectif de la catégorie des Σ-algèbres de transitions.

Sous les hypothèses de la proposition 3.1.1 ci-dessus, $A' = A\alpha$ est un ensemble fermé d'états de $\mathscr{B}$ et la Σ-sous algèbre $\mathscr{A}' = \mathscr{B}|A'$ de $\mathscr{B}$ est isomorphe à la Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A}$; la proposition ci-dessus résulte alors du lemme suivant:

Lemme 3.1.2. *Pour toute Σ-machine de transitions $\mathscr{M} = (M, (\sigma^{\mathscr{M}})_{\sigma\in\Sigma})$ et toute Σ-sous machine $\mathscr{N} = (N, (\sigma^{\mathscr{N}})_{\sigma\in\Sigma})$ de $\mathscr{M}$, tout homomorphisme de Σ-machines f de $\mathscr{N}$ dans $\mathscr{L}$ se prolonge en un homomorphisme g de Σ-machines de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{L}$.*

Démonstration du lemme. On considère l'application g de M dans $\mathscr{P}(\Sigma^*)$ définie pour tout $x \in M$ par:

$$xg = \bigcup_{y\in N} |(\mathscr{M}, x, y)|(yf)$$

où $|(\mathscr{M}, x, y)| = \{v \in \Sigma^* \mid xv^{\mathscr{M}} = y\}$ est le comportement de l'automate déterministe $(\mathscr{M}, x, y)$ admettant pour état initial x et pour état final y et dont la Σ-machine de transitions sous-jacente est $\mathscr{M}$. Soit $y_0 \in N$; pour tout $u \in y_o f$, on a:

$$u = 1u \in |(\mathscr{M}, y_o, y_o)|(y_o f),$$

avec 1 le mot vide de Σ^*, donc $u \in y_o g$, ce qui prouve l'inclusion: $y_o f \subset y_o g$.

Réciproquement soit $u \in y_o g$; alors il existe $y \in N$ tel que:

$$u \in |(\mathscr{M}, y_o, y)|(yf);$$

et on a, $u = vw$ avec $v \in |(\mathscr{M}, y_o, y)|$ et $w \in yf$; comme $y = y_o v^{\mathscr{M}} = y_o v^{\mathscr{N}}$ (car N est un ensemble d'états fermé de $\mathscr{M}$), on obtient:

$$yf = (y_o v^{\mathscr{N}})f = y_o f v^{\mathscr{L}} = y_o f \cdot\!\!\cdot\, v,$$

ce qui implique: $u = vw \in y_o f$, ce qui prouve l'inclusion: $y_o g \subset y_o f$.

Finalement pour tout $y_o \in N$, on a $y_o f = y_o g$, i.e. g prolonge f.

Démontrons que g est un homomorphisme de Σ-machines de transition ; pour tout $x_1, x_2 \in M$ et tout $\sigma \in \Sigma$ tel que $x_2 = x_1\sigma^{\mathscr{M}}$, comparons $(x_1 g)\sigma^{\mathscr{L}} = x_1 g \cdot\!\!\cdot\, \sigma$ et $x_2 g = (x_1\sigma^{\mathscr{M}})g$; soit $u \in x_2 g$; il existe $y \in N$ tel que l'on ait:

$$u \in |(\mathscr{M}, x_2, y)|(yf);$$

et on a, $u = vw$ avec $v \in |(\mathscr{M}, x_2, y)|$ et $w \in yf$; il en résulte, $\sigma u = \sigma vw \in |(\mathscr{M}, x_1, y)|(yf)$, donc on obtient $\sigma u \in x_1 g$ i.e. $u \in x_1 g \cdot\!\!\cdot\, \sigma = (x_1 g)\sigma^{\mathscr{L}}$ ce qui prouve l'inclusion: $x_2 g \subset (x_1 g)\sigma^{\mathscr{L}}$; réciproquement, soit $u \in (x_1 g)\sigma^{\mathscr{L}}$; alors il existe $y \in N$ tel que l'on ait:

$$\sigma u \in |(\mathscr{M}, x_1, y)|(yf);$$

et on a, $\sigma u = vw$ avec $v \in |(\mathscr{M}, x_1, y)|$ et $w \in yf$; si $v = 1$, il vient $x_1 = y \in N$ et $\sigma u = w \in yf$; comme N est un ensemble d'états de $\mathscr{M}$ fermé, on a: $x_2 = x_1\sigma^{\mathscr{M}} \in N$, donc $x_2g=x_2f=(x_1\sigma^{\mathscr{M}})f=(x_1f)\sigma^{\mathscr{L}}=(x_1g)\sigma^{\mathscr{L}}$ et $u\in x_2g$; si $v\neq 1$, on a compte tenu de l'égalité $\sigma u=vw$, l'existence de $v'\in|(\mathscr{M},x_2,y)|$ tel que $v=\sigma v'$; on obtient donc: $u=v'w\in|(\mathscr{M},x_2,y)|(yf)$, d'où $u\in x_2g$, ce qui prouve l'inclusion: $(x_1g)\sigma^{\mathscr{L}}\subset x_2g$. Finalement $x_2g=(x_1\sigma^{\mathscr{M}})g=(x_1g)\sigma^{\mathscr{L}}$ et g est un homomorphisme de Σ-machines de transitions.

Remarque 3.1.3. Une Σ-machine de transitions $\mathscr{E}$ est dite injective pour les monomorphismes forts ou encore (s)-injective, si pour tout monomorphisme fort i d'une Σ-machine de transitions $\mathscr{N}$ dans une Σ-machine de transitions $\mathscr{M}$, et tout homomorphisme f de Σ-machines de $\mathscr{N}$, dans $\mathscr{E}$, il existe un homomorphisme de Σ-machines g de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{E}$ tel que: $ig=f$. Le lemme précédent prouve que $\mathscr{L}$ est (s)-injective dans la catégorie des Σ-machines; il en résulte que toute Σ-machine de transitions rétractée d'un produit quelconque de copies de $\mathscr{L}$ est une Σ-algèbre de transitions (s)-injective dans la catégorie des Σ-machines de transitions; il est clair que toute Σ-algèbre de transitions (s)-injective dans la catégorie des Σ-machines de transitions est injective dans la catégorie des Σ-algèbres de transitions; ce qui est remarquable comme cela sera montré plus loin c'est que la réciproque est vraie.

Si α est un monomorphisme d'une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A}=(A,(\sigma^{\mathscr{A}})_{\sigma\in\Sigma})$ dans une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{B}=(B,(\sigma^{\mathscr{B}})_{\sigma\in\Sigma}),\alpha$ préserve le comportement de tout Σ-automate construit sur $\mathscr{A}$, i.e. pour tout $x,y\in A$, on a:

$$|(\mathscr{A},x,y)|=|(\mathscr{B},x\alpha,y\alpha)|.$$

Pour les Σ-machines de transitions la situation est plus complexe, car un monomorphisme de Σ-machines ne préserve pas nécessairement le comportement d'un automate construit sur une telle Σ-machine; dans le cas où cela se produit un tel monomorphisme est dit comportemental (avec la terminologie de [10], il ne s'agit pas d'isométrie de $\mathscr{P}(\Sigma)$ espace mais d'isométrie de $\mathscr{P}(\Sigma^*)$ espace); pour caractériser un tel monomorphisme, on considère sur l'ensemble des états M d'une Σ-machine $\mathscr{M}$ de transition la fermeture algébrique $c_{\mathscr{M}}$ définie pour tout $X\in\mathscr{P}(M)$ par $X^{c_{\mathscr{M}}}=X^{a_{\mathscr{M}}}\bigcap X^{b_{\mathscr{M}}}$ ($c_{\mathscr{M}}$ n'est pas en général l'adhérence d'une topologie sur M, mais d'une prétopologie de type VI [1]). Alors un morphisme μ d'une Σ-machine de transitions $\mathscr{M}$ dans une Σ-machine de transitions $\mathscr{M}'$ est un monomorphisme comportemental de Σ-machines de transitions si et seulement si d'une part μ induit isomorphisme de Σ-machines de $\mathscr{M}$ sur $\mathscr{M}_{|\mathrm{Im}(\mu)}$ (i.e. avec la terminologie de [7], μ est une immersion relative de $\mathscr{M}$ dans $\mathscr{M}'$) et d'autre part $(\mathrm{Im}(\mu))^{c_{\mathscr{M}'}}=\mathrm{Im}(\mu)$. Le lemme 3.1.5 suivant montre que pour toute Σ-machine de transitions $\mathscr{M}$, il existe un monomorphisme comportemental de $\mathscr{M}$ dans la Σ-algèbre de transitions $\mathscr{L}^M$ où M désigne l'ensemble des états de $\mathscr{M}$ ce qui implique:

Proposition 3.1.4. *Il existe un monomorphisme de Σ-algèbres de transitions de toute Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A}=(A,(\sigma^{\mathscr{A}})_{\sigma\in\Sigma})$ dans la Σ-algèbre de transitions injective $\mathscr{L}^A$.*

La démonstration du résultat précédent est une conséquence du lemme suivant.

Lemme 3.1.5. *Soit* $\mathscr{M}=(M,(\sigma^{\mathscr{M}})_{\sigma\in\Sigma})$ *une* Σ*-machine de transitions; il existe un monomorphisme comportemental* μ *de* Σ*-machines de transitions de* $\mathscr{M}$ *dans* $\mathscr{L}^M$.

Démonstration. Soit μ l'application de M dans $\mathscr{L}^M$ définie pour tout $x\in M$ par:

$$x\mu=(|(\mathscr{M},x,z)|)_{z\in M}.$$

Pour tout $x,y\in M$, on a:

$$|(\mathscr{L}^M,x\mu,y\mu)|=\bigcap_{z\in M}|(\mathscr{L},|(\mathscr{M},x,z)|,|(\mathscr{M},y,z)|)|,$$

avec:

$$|(\mathscr{L},|(\mathscr{M},x,z)|,|(\mathscr{M},y,z)|)|=\{u\in\Sigma^*\,||(\mathscr{M},x,z)|\cdot u=|(\mathscr{M},y,z)|\}.$$

Soit $u\in|(\mathscr{M},x,y)|$; pour tout $z\in M$, on vérifie que l'on a:

$$|(\mathscr{M},x,z)|\cdot u=|(\mathscr{M},y,z)|,$$

ce qui prouve, compte tenu de ce qui précède: $u\in|(\mathscr{L}^M,x\mu,y\mu)|$. Réciproquement si $u\in|(\mathscr{L}^M,x\mu,y\mu)|$, on a pour tout $z\in M:|(\mathscr{M},x,z)|\cdot u=|(\mathscr{M},y,z)|$ donc en particulier, $|(\mathscr{M},x,y)|\cdot u=|(\mathscr{M},y,y)|$ ce qui implique $u\in|(\mathscr{M},x,y)|$.

Finalement pour tout $x,y\in M$ on obtient: $|(\mathscr{M},x,y)|=|(\mathscr{L}^M,x\mu,y\mu)|$ ce qui implique que μ est un monomorphisme comportemental de Σ-machines.

Remarque 3.1.6. Si dans la situation du lemme précédent $\mathscr{M}$ n'est pas une Σ-machine de transitions complète i.e. une Σ-algèbre de transitions, le plus petit ensemble d'états fermé de $\mathscr{L}^M$ contenant $M\mu$ est $M\mu\cup\{\omega\}$ où ω désigne l'élément de $\mathscr{P}(\Sigma^*)^M$ dont toutes les composantes coïncident avec le langage vide; de plus pour tout $m\in M$ et tout $\sigma\in\Sigma$, on a $(m\mu)\sigma^{\mathscr{L}^M}=\omega$ si et seulement si $m\sigma^{\mathscr{M}}=\emptyset$; la complétion de $\mathscr{M}$ est alors isomorphe à $\mathscr{L}^M|M\mu\cup\{\omega\}$.

Il résulte de la proposition précédente et de la remarque 3.1.3 suivant la proposition 3.1.1, la caractérisation suivante des Σ-algèbres de transitions injectives.

Théorème 3.1.7. *Soit* $\mathscr{E}=(E,(\sigma^{\mathscr{E}})_{\sigma\in\Sigma})$, *une* Σ*-algèbre de transitions. Les propriétés suivantes sont équivalentes*:

(i) $\mathscr{E}$ *est une* Σ*-algèbre de transitions injective*;
(ii) $\mathscr{E}$ *est une* Σ*-algèbre de transitions rétractée de la* Σ*-algèbre de transitions* $\mathscr{L}^E$;
(iii) $\mathscr{E}$ *est* (s)*-injective dans la catégorie des* Σ*-machines de transitions*;
(iv) $\mathscr{E}$ *est un rétracté absolu dans la catégorie des* Σ*-algèbres de transitions* (*i.e. tout monomorphisme de source* $\mathscr{E}$ *est une corétraction*)

Les résultats précédents 3.1.1, 3.1.4 et 3.1.7. répondent donc aux questions 3 et 4 de l'introduction.

3.2.

Conformément à la terminologie habituelle de la théorie des catégories, un monomorphisme i d'une Σ-algèbre de transition $\mathscr{E}=(E,(\sigma^{\mathscr{E}})_{\sigma\in\Sigma})$, dans une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A}=(A,(\sigma^{\mathscr{A}})_{\sigma\in\Sigma})$ est dit essentiel si tout homomorphisme α de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{A}$ dans une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{B}$ tel que $i\alpha$ soit un monomorphisme de Σ-algèbres de transitions, est un monomorphisme de Σ-algèbres de transitions.

Le lemme suivant caractérise cette situation.

Lemme 3.2.1. *Soit i un monomorphisme d'une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{E}=(E,(\sigma^{\mathscr{E}})_{\sigma\in\Sigma})$ dans une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A}=(A,(\sigma^{\mathscr{A}})_{\sigma\in\Sigma})$; les trois conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *i est un monomorphisme essentiel de Σ-algèbres*;
(ii) *pour toute congruence ϱ sur $\mathscr{A}$, la condition $\varrho\cap(\mathrm{Im}(i)\times\mathrm{Im}(i))=\Delta_{\mathrm{Im}(i)}$ implique $\varrho=\Delta_A$* (i.e. *ϱ est l'égalité sur A*);
(iii) *pour toute congruence ϱ sur $\mathscr{A}$ distincte de l'égalité, il existe deux états distincts de* $\mathrm{Im}(i)$ *appartenant à une même classe d'équivalence de ϱ*.

Un ensemble d'états fermé N d'une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A}=(A,(\sigma^{\mathscr{A}})_{\sigma\in\Sigma})$ est dit essentiel dans $\mathscr{A}$ si l'injection canonique de N dans A est un monomorphisme essentiel de la sous Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A}|N$ de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{A}$. (Avec les notations de l'exemple 2.1.6, N_1 n'est pas essentiel dans $\mathscr{A}$ mais N_2 est essentiel dans $\mathscr{A}$).

Remarque 3.2.2. Si N' et N'' sont deux fermés de $\mathscr{A}$ avec $N'\subset N''$, alors N' est essentiel dans $\mathscr{A}$ si et seulement si N' est essentiel dans la Σ-sous algèbre de transitions $\mathscr{A}|N''$ de $\mathscr{A}$ et N'' est essentiel dans $\mathscr{A}$.

Remarque 3.2.3. Si N est un fermé de $\mathscr{A}$ avec N essentiel dans $\mathscr{A}$ et $N\neq A$, on a:

(a) Tout $p\in A$ tel que $\{p\}^{a_{\mathscr{A}}}\cap N=\emptyset$ est un puits et si un tel puits existe, c'est le seul puits de $\mathscr{A}$.
(b) $N^{b_{\mathscr{A}}}$ contient tous les états de $\mathscr{A}$ à l'exception peut-être d'un puits, i.e. tous les états de $\mathscr{A}$ à l'exception peut-être d'un puits sont coaccessibles à partir de N.

Remarque 3.2.4. Si N est un fermé non vide de $\mathscr{A}$, inclus strictement dans A et tel que pour tout $(x,y)\in A^2-\Delta_A$ il existe $u\in\Sigma^*$ vérifiant $(xu^{\mathscr{A}},yu^{\mathscr{A}})\in N^2-\Delta_N$, alors N est essentiel dans $\mathscr{A}$ et $A=N^{b_{\mathscr{A}}}$.

Remarque 3.2.5. La notion d'essentialité, le lemme 3.2.1 et les remarques précédentes s'étendent à la catégorie des Σ-machines; cela n'a pas été explicité ici car le résultat principal de cette section n'a été établi que pour la catégorie des Σ-algèbres de transitions. On rappelle que l'enveloppe injective d'un objet $\mathscr{A}$ d'une catégorie est un monomorphisme essentiel i de $\mathscr{A}$ dans un objet injectif $\mathscr{E}$. Il est important de savoir pour une catégorie si tout objet admet une enveloppe injective car alors on peut obtenir des résultats concernant la structure et la décomposition algébrique de ces objets ; cela a été fait pour la catégorie des modules sur un anneau ou plus généralement pour une catégorie de Grothendieck. Le résultat suivant montre que dans la catégorie des Σ-algèbres de transitions, toute Σ-algèbre de transitions admet une enveloppe injective unique à un isomorphisme près; on obtient donc une réponse affirmative à la question 5.

Théorème 3.2.6. *Pour toute Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A}$, il existe un monomorphisme essentiel i de $\mathscr{A}$ dans une Σ-algèbre de transitions injective $\mathscr{E}$, et si i' est un autre monomorphisme essentiel de $\mathscr{A}$ dans une Σ-algèbre injective $\mathscr{E}'$, il existe un isomorphisme θ de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}'$ tel que $i\theta = i'$.*

La démonstration de ce résultat repose en partie sur le lemme suivant:

Lemme 3.2.7. *Une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{E}$ est injective si et seulement si elle n'admet pas d'extension essentielle propre* (*i.e. si et seulement si tout monomorphisme essentiel de source $\mathscr{E}$ est un isomorphisme*).

Démonstration. Soit $\mathscr{E} = (E, (\sigma^{\mathscr{E}})_{\sigma\in\Sigma})$ une Σ-algèbre de transitions injective. Pour tout monomorphisme essentiel i de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{E}$ dans une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A} = (A, (\sigma^{\mathscr{A}})_{\sigma\in\Sigma})$, $E' = Ei$ est un ensemble fermé d'états de $\mathscr{A}$ et $\mathscr{E}' = \mathscr{A}|E'$ est une sous Σ-algèbre de $\mathscr{A}$; i induit un isomorphisme i_0 de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{E}'$. Puisque $\mathscr{E}$ est une Σ-algèbre de transitions injective, il existe un homomorphisme α de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{E}$ tel que $\varepsilon'\alpha = i_0^{-1}$ où ε' désigne l'injection canonique de $\mathscr{E}'$ dans $\mathscr{A}$. D'où: $i_0\varepsilon'\alpha = i_0 i_0^{-1} = id_E = i\alpha$; puisque i est essentiel, α est un monomorphisme de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{A}$ dans $\mathscr{E}$, et comme $i\alpha = id_E$ implique la surjectivité de α, il en résulte que α est un isomorphisme de Σ-algèbres de transitions dont l'isomorphisme réciproque est i ; il en résulte que $\mathscr{E}$ n'admet pas d'extension essentielle propre.

Réciproquement, soit $\mathscr{E} = (E, (\sigma^{\mathscr{E}})_{\sigma\in\Sigma})$ une Σ-algèbre de transitions n'admettant pas d'extension essentielle propre dans la catégorie des Σ-algèbres de transitions. On considère un monomorphisme quelconque α de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{E}$ dans une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A} = (A, (\sigma^{\mathscr{A}})_{\sigma\in\Sigma})$. L'ensemble Γ des congruences ϱ sur $\mathscr{A}$ telle que $\varrho \cap \mathrm{Im}(\alpha) \times \mathrm{Im}(\alpha) = \Delta_{\mathrm{Im}(\alpha)}$, ordonné par inclusion est inductif et admet donc un élément maximal ϱ_0. La surjection canonique v_{ϱ_0} de $\mathscr{A}$ sur la Σ-algèbre de transitions quotient $\mathscr{A}/\varrho_0$ est un homomorphisme surjectif de Σ-algèbres de transitions. Comme $\varrho_0 \cap \mathrm{Im}(\alpha) \times \mathrm{Im}(\alpha) = \Delta_{\mathrm{Im}(\alpha)}$, l'homomorphisme $i = \alpha v_{\varrho_0}$ de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{A}/\varrho_0$ est un monomorphisme. La maximalité de ϱ_0 dans Γ implique que le fermé $\mathrm{Im}(i)$ de $\mathscr{A}/\varrho_0$ est essentiel dans $\mathscr{A}/\varrho_0$ et par suite i est un monomorphisme essentiel de Σ-algèbres de transitions. D'après l'hypothèse i est donc un isomorphisme de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{E}$ sur $\mathscr{A}/\varrho_0$ et on a $\alpha v_{\varrho_0} i^{-1} = ii^{-1} = id_E$ ce qui prouve que α est une corétraction de la Σ-algèbre de transitions de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{A}$. Il en résulte que $\mathscr{E}$ est un rétracté absolu dans la catégorie des Σ-algèbres de transitions; il résulte alors du théorème 3.1.7 que $\mathscr{E}$ est une Σ-algèbre de transitions injective.

Démonstration du théorème 3.2.6. Soit $\mathscr{A}=(A,(\sigma^{\mathscr{A}})_{\sigma\in\Sigma})$ une Σ-algèbre de transitions; d'après la proposition 3.1.4, il existe un monomorphisme μ de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{A}$ dans la Σ-algèbre de transitions injective $\mathscr{L}^A$; $A'=A\mu$ est un ensemble d'états fermé de $\mathscr{L}^A$ et μ induit un isomorphisme μ' de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{A}$ sur la Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A}'=\mathscr{L}^A|A'$ de $\mathscr{L}^A$. L'ensemble Φ des fermés N de $\mathscr{L}^A$ tels que A' soit essentiel dans $\mathscr{N}=\mathscr{L}^A|N$ est inductif pour l'inclusion ; soit E un élément maximal de Φ et $\mathscr{E}=\mathscr{L}^A|E$; l'inclusion canonique ε de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{L}^A$ est un monomorphisme de Σ-algèbres de transitions. Compte tenu de l'injectivité de $\mathscr{L}^A$, pour tout monomorphisme essentiel φ de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{E}$ dans une Σ-algèbre de transitions $\mathscr{F}=(F,(\sigma^{\mathscr{F}})_{\sigma\in\Sigma})$, il existe un monomorphisme $\tilde{\varepsilon}$ de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{F}$ dans $\mathscr{L}^A$ tel que $\varepsilon=\varphi\tilde{\varepsilon}$; $F'=F\tilde{\varepsilon}$ est un fermé dans $\mathscr{L}^A$ contenant E; si ϱ' est une congruence sur la Σ-sous algèbre de transitions $\mathscr{F}'=\mathscr{L}^A|F'$ de $\mathscr{L}^A$ telle que $\varrho'\cap E\times E=\Delta_E$, alors

$$\varrho=\{(x_1,x_2)\in F^2 \mid (x_1\tilde{\varepsilon},x_2\tilde{\varepsilon})\in\varrho'\},$$

est une congruence sur $\mathscr{F}$ telle que $\varrho\cap\mathrm{Im}(\varphi)\times\mathrm{Im}(\varphi)=\Delta_{\mathrm{Im}(\varphi)}$, ce qui implique $\varrho=\Delta_F$ et $\varrho'=\Delta_{F'}$; ceci prouve que E est essentiel dans $\mathscr{F}'$; comme A' est essentiel dans $\mathscr{E}$, il en résulte que A' est essentiel dans $\mathscr{F}'$; la maximalité de E dans Φ implique $E=F'$; $\tilde{\varepsilon}$ induit un isomorphisme de la Σ-algèbre de transitions $\mathscr{F}$ sur $\mathscr{E}$ dont l'isomorphisme réciproque est φ. D'après le lemme 3.2.7, $\mathscr{E}$ est une Σ-algèbre injective ; si μ'' désigne l'injection canonique de $\mathscr{A}'$ dans $\mathscr{E}$, $i=\mu'\mu''$ est un monomorphisme essentiel de la Σ-algèbre de transitions $\mathscr{A}$ dans la Σ-algèbre de transitions injective $\mathscr{E}$. Soit i' un autre monomorphisme essentiel de la Σ-algèbre transitions de $\mathscr{A}$ dans une Σ-algèbre de transitions injective $\mathscr{E}'$. Il existe un homomorphisme θ de Σ-algèbres de transitions de $\mathscr{E}$ dans $\mathscr{E}'$ tel que $i\theta=i'$. Comme i est essentiel, θ est un monomorphisme de Σ-algèbres de transitions; on remarque que θ est un monomorphisme essentiel; il résulte du lemme 3.2.7 que θ est un isomorphisme de Σ-algèbres de transitions.

Une conséquence du résultat précédent est:

Corollaire 3.2.8. *Toute Σ-algèbre de transitions injective admet une $\underline{\mathscr{R}}$-représentation à l'aide d'enveloppes injectives de Σ-algèbres de transitions avec deux générateurs. De plus toute Σ-algèbre de transitions, enveloppe injective d'une Σ-algèbre de transitions finie à n états admet une $\underline{\mathscr{R}}$-représentation à l'aide de n^2 enveloppes injectives de Σ-algèbres de transitions finies avec deux générateurs.*

References

[1] Z. Belmandt, Manuel de prétopologie, Hermés, Paris, 1993.
[2] J.R. Büchi, Finite Automata their Algebras and Grammars, Springer, Berlin, 1989.

[3] D. Dufus, J. Rival, A structure theory for ordered sets, Discrete Math. 35 (1981) 53–118.
[4] S. Eilenberg, Automata, Languages and Machines, Vols. A and B, Academic Press, New York, 1974 and 1976.
[5] F. Gécseg, Products of Automata, Springer, Berlin, 1986.
[6] A. Ginzburg, Algebraic Theory of Automata, Academic Press, New York, 1968.
[7] G. Grätzer, Universal Algebra, Van Nostrand, Princeton, NJ, 1968.
[8] W.M.L. Holcombe, Algebraic automata theory, Cambridge University Press, Cambridge, 1982.
[9] R. Lidl, G. Pilz, Applied Abstract Algebra, Springer, Berlin, 1984.
[10] M. Pouzet, I.G. Rosenberg, General metrics and contracting operations, Discrete Math. 130 (1994) 103–169.