Stochastic Processes and their Applications 48 (1993) 61–84
North-Holland

Propriété de Markov des équations stationnaires discrètes quasi-linéaires

C. Donati-Martin
Mathématiques, Université de Provence, Marseille, France

Received 13 May 1991
Revised 19 November 1992

In this paper, we consider the stochastic discrete equation $-\Delta U(x)+f(U(x))=A(x)$ where x runs over a finite domain Θ of $\mathbb{Z}^d$, Δ is a discretization of the Laplacian operator, $\{A(x)\}$ is a sequence of i.i.d. Gaussian variables, and we impose the Dirichlet condition $U(x)=0$ for $x\notin\Theta$. We prove existence and uniqueness of a solution assuming monotonicity condition on f, and we study the Markov property of the solution.

stochastic differential equation * equation with boundary condition * Markov field

1. Introduction

L'étude des équations différentielles stochastiques avec conditions au bord montre qu'en général, la solution n'est pas un champ markovien.

Rappelons les résultats obtenus dans ce sens. Dans [4], Nualart et Pardoux étudient une EDS du premier ordre quasi-linéaire du type

$$\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}+f(X_t)=\frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t},\quad 0\leqslant t\leqslant 1 \tag{1}$$

soumis à une condition au bord de la forme $h(X_0, X_1)=h_0$; $\{W_t\}$ est un mouvement brownien dans $\mathbb{R}^d$. Sous des hypothèses adéquates sur f et h, (1) admet une solution unique. Concernant la propriété de Markov de la solution, les auteurs obtiennent le résultat suivant: lorsque $d=1$, la solution X de (1) est un champ markovien si et seulement si f est affine. Dans [2], nous avons étudié le même problème dans le cas d'une EDS avec conditions au bord lorsque le coefficient de diffusion est linéaire. Nualart et Pardoux [5] obtiennent la même dichotomie pour des EDS du second ordre avec condition de Dirichlet du type

$$\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2X_t}{\mathrm{d}t^2}+f\left(X_t,\frac{\mathrm{d}X_t}{\mathrm{d}t}\right)=\frac{\mathrm{d}W_t}{\mathrm{d}t},\quad 0\leqslant t\leqslant 1,\ \{W_t\}\in\mathbb{R},\\ &X_0=a,\qquad X_1=b,\end{aligned} \tag{2}$$

Correspondence to: Dr. C. Donati-Martin, Institut Fourier, B.P. 74, 38402 St. Martin-d'Héres Cedex, France.
Ce travail a été réalisé en partie avec l'aide du contrat DRET 901636/A000/DRET/DS/SR.

à savoir: $(X_t, \mathrm{d}X_t/\mathrm{d}t)$ est un processus de Markov si f est affine et n'est pas un champ markovien sinon.

L'une des questions étudiées dans le présent article est la suivante: cette dichotomie se produit—elle uniquement pour des EDS en temps continu ou bien obtient—on un résultat analogue dans le cas des EDS en temps discret? Nous montrons que la dichotomie se produit également dans le cas des équations en temps discret.

Nous étudions aussi la propriété de Markov des solutions d'équations discrètes lorsqu'on ne se restreint plus à un paramètre de temps *unidimensionnel* $n \in \mathbb{N}$, mais où l'on considère plus généralement un paramètre $x \in \mathbb{Z}^d$. Plus précisément, nous étudions des équations de la forme

$$\begin{aligned} -\bar{\Delta} U(x) + f(U(x)) &= A(x), \quad x \in \Theta \text{ fini} \subset \mathbb{Z}^d, \\ U(x) &= 0, \qquad\qquad x \notin \Theta, \end{aligned} \tag{3}$$

où $\bar{\Delta}$ est une discrétisation du Laplacien, $\{A(x)\}_{x \in \Theta}$ est une famille de v.a. indépendantes de loi $\mathrm{N}(0,1)$.

Dans le cas continu, l'équation (3) est remplacée par une EDPS elliptique quasi-linéaire de la forme

$$\begin{aligned} -\Delta u(x) + f(u(x)) &= \dot{W}(x), \quad x \in D \text{ borné} \subset \mathbb{R}^d, \\ u|_{\partial D} &= 0, \end{aligned} \tag{4}$$

où $\dot{W}$ désigne le bruit blanc. Buckdahn et Pardoux [1] ont obtenu des résultats d'existence et unicité d'une solution de (4) sous des hypothèses de monotonie de f. A notre connaissance,[1] il n'existe pas de résultat sur la propriété de Markov sauf dans le cas linéaire gaussien (voir par exemple Rozanov [6]). Dans le cadre de l'équation (3), nous obtenons une quasi-caractérisation de la propriété de Markov.

Le plan de cet article est le suivant. Dans le paragraphe 2, nous étudions les équations discrètes (3) dans le cadre général d'un paramètre multidimensionnel $x \in \mathbb{Z}^d$. La section 2.1 est consacrée à l'existence et l'unicité d'une solution de (3) sous des hypothèses de monotonie de f; dans le cas continu, cette question est traitée dans [1]. Nous étudions dans la section 2.2 la propriété de Markov de la solution de (3). Notre principal résultat est le suivant: si la solution U_λ de

$$\begin{aligned} -\bar{\Delta} U_\lambda(x) + \lambda f(U_\lambda(x)) &= A(x), \quad x \in \Theta, \\ U_\lambda(x) &= 0 \qquad\qquad x \notin \Theta, \end{aligned}$$

est markovienne (dans un sens précisé ultérieurement) pour tout $\lambda \in [0, \lambda_0]$, alors f est affine. Il n'existe pas pour l'instant de résultat analogue pour les EDPS elliptiques (4).[1] Dans le cas particulier où $d = 1$, l'introduction du paramètre λ devient inutile et nous obtenons un résultat analogue à celui obtenu en temps continu par Nualart et Pardoux [5] pour l'équation (2).

Enfin, le troisième paragraphe montre que la dichotomie obtenue pour les EDS du premier ordre par Nualart et Pardoux [4] (voir aussi [2]) persiste pour des

[1] Des résultats ont été obtenus par l'auteur en [7] (voir aussi [8]).

équations discrètes: nous étudions donc ici des équations discrètes du premier ordre de la forme

$$X_{n+1} - X_n = f(X_n) + a_n, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1,$$

soumis à une condition au bord $h(X_0, X_N) = h_0$, où (a_n) est une suite de variables aléatoires i.i.d.

2. Equations stationnaires non linéaires sur $\mathbb{Z}^d$

On considère l'équation stationnaire avec condition au bord de type Dirichlet,

$$\text{(S)} \qquad \begin{cases} U(x) - \Pi U(x) + f(U(x)) = A(x) & \text{pour } x \in \Theta, \\ U(x) = 0 \quad \text{pour } x \in \Gamma, \end{cases}$$

où Θ est une partie finie de $\mathbb{Z}^d$, $\Gamma = \mathbb{Z}^d - \Theta$. $\{A(x)\}_{x \in \Theta}$ est une famille de variables N(0, 1) indépendantes. Π est la matrice de transition sur $\mathbb{Z}^d$ donnée par

$$\Pi(x, y) = \begin{cases} 1/(2d) & \text{si } |x-y| = 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5}$$

Nous faisons l'hypothèse suivante:

(H1) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction continue, croissante.

$2d(\Pi - I)$ est l'analogue discret du Laplacien.

Remarquons que l'existence d'une solution de (S) est équivalente à l'existence d'un vecteur $U = (U(x))$ de $\mathbb{R}^\Theta$ vérifiant

$$U - \tilde{\Pi} U + f(U) = A, \tag{6}$$

où l'on a noté $A = (A(x))_{x \in \Theta}$, $f(U) = (f(U(x)))_{x \in \Theta}$ et $\tilde{\Pi}$ la restriction de Π à Θ.

Pour simplifier, dans la suite, nous noterons encore Π la matrice sur $\mathbb{R}^\Theta$. On désignera par des lettres majuscules X, Y des vecteurs de $\mathbb{R}^\Theta$ et par x, y, z des éléments de Θ.

2.1. *Existence et unicité d'une solution*

Lemma 2.1. *La matrice $I - \Pi$ est définie positive. Par conséquent, il existe $\lambda > 0$ tel que*

$$\forall X \in \mathbb{R}^\Theta, \quad ((I - \Pi)X, X) \geqslant \lambda \|X\|^2. \tag{7}$$

Démonstration. Notons $(e_i)_{i=1,\dots,d}$ la base canonique de $\mathbb{Z}^d$. Soit $X \in \mathbb{R}^\Theta$,

$$2d((I-\Pi)X, X) = \sum_{i=1}^{d} \sum_{x\in\Theta} [2X(x) - X(x+e_i) - X(x-e_i)]X(x)$$

où, par convention, $X(x \pm e_i) = 0$ si $x \pm e_i \notin \Theta$.

$$\begin{aligned}
&\sum_{x\in\Theta} [2X(x) - X(x+e_i) - X(x-e_i)]X(x) \\
&\quad = \sum_{x\in\Theta} (X(x) - X(x+e_i))X(x) + \sum_{x\in\Theta - e_i} [X(x+e_i) - X(x)]X(x+e_i) \\
&\quad = \sum_{x\in\Theta\cap(\Theta - e_i)} [X(x) - X(x+e_i)]^2 + \sum_{x\in D_i} (X(x))^2 \geqslant 0
\end{aligned}$$

où $D_i = (\Theta \cap (\Theta - e_i)^c)$. On obtient donc $((I-\Pi)X, X) \geqslant 0$ et $((I-\Pi)X, X) = 0$ entraîne $X = 0$. $\square$

Proposition 2.1. *Notons ψ l'application continue de $\mathbb{R}^\Theta$ dans $\mathbb{R}^\Theta$ donnée par $\psi(X) = (I-\Pi)X + f(X)$; alors ψ est bijective.*

Démonstration. (i) Soient X_1, $X_2 \in \mathbb{R}^\Theta$ vérifiant $\psi(X_1) = \psi(X_2)$ alors

$$((I-\Pi)(X_1 - X_2), X_1 - X_2) + (f(X_1) - f(X_2), X_1 - X_2) = 0.$$

Le premier terme est positif d'après le lemme 2.1, le deuxième est positif d'après (H1). D'où $((I-\Pi)(X_1 - X_2), X_1 - X_2) = 0$ et $X_1 = X_2$.

(ii) Soit $V \in \mathbb{R}^\Theta$, posons $\psi_V(X) = \psi(X) - V$.

$$\begin{aligned}
(\psi_V(X), X) &= ((I-\Pi)X, X) + (f(X) - f(0)\mathbf{1}, X) - (V - f(0)\mathbf{1}, X) \\
&\geqslant \lambda \|X\|^2 - (V - f(0)\mathbf{1}, X) \\
&\underset{\|X\|\to\infty}{\longrightarrow} \infty,
\end{aligned}$$

d'où l'existence de $\rho_V > 0$ tel que

$$\forall X \in \mathbb{R}^\Theta, \quad \|X\| = \rho_V \Rightarrow (\psi_V(X), X) \geqslant 0.$$

ψ_V est continue, d'après Lions [3, chap. 1, lemme 4.3], $\exists X_V \in \mathbb{R}^\Theta$ tel que

$$\psi_V(X_V) = 0, \quad \text{i.e. } \psi(X_V) = V. \qquad \square$$

Corollaire 2.1. *Le système* (S) (*ou de façon équivalente* (6)) *admet une unique solution* $U = \psi^{-1}(A)$. $\square$

Pour indiquer la dépendance en f de l'application ψ, nous noterons $X = S(V; f)$ l'unique solution de $\psi(X) = V$. Pour $f \equiv 0$, la solution $S(V; 0)$ est donnée par $X = GV$ où G est la matrice inverse de $(I - \Pi)$.

Afin d'étudier la propriété de Markov de la solution U de (S), nous donnons une expression de U en fonction de $S(\cdot\,;0)$. Soit T l'application de $\mathbb{R}^{\Theta}$ définie par

$$\begin{aligned} T:\ & \mathbb{R}^{\Theta} \to \mathbb{R}^{\Theta} \\ & X \mapsto X + f(GX). \end{aligned} \tag{8}$$

On a alors:

Proposition 2.2. *Sous* (H1), *T est bijective et la solution de* (S) *est donnée par*

$$U = S(A; f) = S(T^{-1}A; 0) = G(T^{-1}(A)). \tag{9}$$

Démonstration. Soit $V \in \mathbb{R}^{\Theta}$, $X = S(V; f)$ vérifie

$$X(x) - \Pi X(x) = V(x) - f(X(x)) = W(x)$$

d'où $X = GW$ et W vérifie $W = V - f(GW)$, i.e. $TW = V$, T est surjective.

Soient W_1, W_2 deux solutions de $TW = V$. Notons $X_1 = S(W_1; 0) = GW_1$, $X_2 = S(W_2; 0) = GW_2$, alors $X_1 = S(V; f)$ et $X_2 = S(V; f)$.

Par unicité des solutions, $X_1 = X_2$ et $W_1 = W_2$. T est donc bijective et $S(V; f) = G(T^{-1}V)$.

La solution de (S) est donc donnée par

$$U = G(T^{-1}(A)) \quad \text{où } A = (A(x))_{x\in\Theta}. \qquad \square$$

Dans toute la suite, nous notons U la solution de (S) et U_0 la solution de (S) pour $f \equiv 0$, i.e. $U_0 = G(A)$.

2.2. Etude de la propriété de Markov

Dans ce paragraphe, nous faisons l'hypothèse suivante:

(H2) f est une fonction de classe C^2.

Nous précisons d'abord la notion de propriété de Markov adaptée à notre problème.

Définition 2.1. Un processus $\{V(x), x \in \Theta\}$ est un *champ markovien germe d'ordre* k ($k \in \mathbb{N}^*$) si: pour tout $D \subset \Theta$; $D^+ = \Theta \setminus D$, pour toute variable bornée η $\mathcal{B}(D)$ mesurable,

$$E[\eta \mid \mathcal{B}(D^+)] = E[\eta \mid \mathcal{B}(D^+ \cap \mathcal{V}_k(D))] \tag{10}$$

où

$$\mathcal{V}_k(D) = \{y \in \Theta,\ \exists x \in D,\ |y - x| \leqslant k\} \tag{11}$$

et pour $\Lambda \subset \Theta$, $\mathcal{B}(\Lambda) = \sigma\{V(y),\ y \in \Lambda\}$.

Nous donnons une autre caractérisation de la propriété de Markov germe que nous utiliserons dans la suite.

Lemme 2.2. *Avec les notations de la définition* 2.1, $\{V(x), x\in\Theta\}$ *est un champ markovien germe d'ordre k si et seulement si il vérifie l'une des propriétés équivalentes suivantes*:

(i) *V satisfait* (10).

(ii) *Pour tout* $D\subset\Theta$, $D^+=\Theta\backslash D$, $D_1=\mathcal{V}_k(D^+)\cap D$, *les tribus* $\mathcal{F}^{\mathrm{e}}_V$, $\mathcal{F}^{\mathrm{i}}_V$ *et* $\mathcal{F}_V$ *définies par* $\mathcal{F}^{\mathrm{e}}_V=\mathcal{B}(D^+\cup D_1)$, $\mathcal{F}^{\mathrm{i}}_V=\mathcal{B}(D)$, $\mathcal{F}_V=\mathcal{B}(D_1)$ *satisfont*: $\mathcal{F}^{\mathrm{e}}_V$ *et* $\mathcal{F}^{\mathrm{i}}_V$ *sont conditionnellement indépendantes sachant* $\mathcal{F}_V$.

(iii) *Pour toute variable bornée* η $\mathcal{F}^{\mathrm{i}}_V$ *mesurable*,

$$E[\eta\,|\,\mathcal{F}^{\mathrm{e}}_V]=E[\eta\,|\,\mathcal{F}_V]. \qquad \square \tag{12}$$

Nous étudions d'abord la propriété de Markov du processus U_0.

Théorème 2.1. *Le processus* $(U_0(x),\ x\in\Theta)$ *solution de* (S) *pour* $f\equiv 0$ *est un champ markovien germe d'ordre* 2.

Démonstration. $(U_0(x))_{x\in\Theta}$ est un processus gaussien centré de covariance R,

$$\begin{aligned}R(x,y)&=E[U_0(x)U_0(y)]=E[GA(x)GA(y)]\\&=E\left[\left(\sum_{z\in\Theta}G(x,z)A(z)\right)\left(\sum_{z\in\Theta}G(y,z)A(z)\right)\right]\\&=\sum_{z\in\Theta}G(x,z)G(y,z)=G^2(x,y).\end{aligned}$$

La loi de $(U_0(x))_{x\in\Theta}$ est la loi gaussienne

$$\frac{(\det(R^{-1}))^{1/2}}{(\sqrt{2\pi})^{|\Theta|}}\exp(-\tfrac{1}{2}X'R^{-1}X)\,\mathrm{d}X,$$

avec $R^{-1}=(I-\Pi)^2$. La matrice R^{-1} vérifie

$$R^{-1}(x,y)=0 \quad \text{si } y\notin\mathcal{V}_2(\{x\}), \tag{13}$$

où $\mathcal{V}_2$ est défini en (11). Grâce à (13), on vérifie aisément que

$$E[U_0(x)\,|\,U_0(y),y\in\Theta\backslash\{x\}]=E[U_0(x)\,|\,U_0(y),y\in\mathcal{V}_2(x)\backslash\{x\}].$$

La loi conditionnelle de $U_0(x)$ sachant $\{U_0(y), y\neq x\}$ est une loi gaussienne d'espérance $\sigma\{U_0(y), y\in\mathcal{V}_2(x)\}$ mesurable et de variance déterministe. Le processus $(U_0(x))_{x\in\Theta}$ vérifie donc (10). $\square$

Nous allons voir que, sauf dans le cas linéaire, la solution U de (S) n'est pas un champ markovien germe. Notre résultat principal est le suivant:

Théorème 2.2. *Nous supposons f de classe* C^2, *avec* $f'>0$.

(a) *Si f est affine, U est un champ markovien germe d'ordre* 2.

(b) *Réciproquement, supposons qu'il existe* $\lambda_0 > 0$ *tel que pour tout* $\lambda \in [0, \lambda_0]$, *la solution* U_λ *de* (S_λ),

$$(\mathrm{S}_\lambda) \qquad \begin{cases} U_\lambda(x) - \Pi U_\lambda(x) + \lambda f(U_\lambda(x)) = A(x) & \textit{pour } x \in \Theta, \\ U_\lambda(x) = 0 \quad \textit{pour } x \in \Gamma, \end{cases}$$

est un champ markovien germe d'ordre 2, *alors* f *est affine.*

Nous plaçons sur l'espace canonique $\Omega = \mathbb{R}^\Theta$, P est la probabilité sur Ω définie par

$$\mathrm{d}P(X) = \prod_{x \in \Theta} \alpha(X(x))\, \mathrm{d}X \tag{14}$$

où α est la densité gaussienne centrée réduite. On note

$$\beta(X) = \prod_{x \in \Theta} \alpha(X(x)) \quad \text{pour } X \in \mathbb{R}^\Theta. \tag{15}$$

Ainsi le processus canonique $\{A(x)(X) = X(x), x \in \Theta\}$ sur Ω définit une famille de v.a. indépendantes $\mathrm{N}(0, 1)$.

Afin de prouver le théorème 2.2, nous allons introduire une nouvelle probabilité Q sur Ω, image de P par T^{-1} où T est défini par (8). Des relations $U = G(T^{-1}(A))$ et $U_0 = G(A)$, nous déduisons que la loi de U sous P est identique à la loi de U_0 sous Q. Notre problème se ramène donc à l'étude de la propriété de Markov de U_0 sous Q, problème que nous allons résoudre en explicitant la densité $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P$.

Avant de démontrer le théorème 2.2, nous présentons quelques lemmes préliminaires et quelques notations.

Pour D fixé $\subset \Theta$, $D^+ = \Theta \backslash D$, $D_1 = \mathscr{V}_2(D^+) \cap D$, on note

$$\begin{aligned} \mathscr{F}^{\mathrm{e}} &= \sigma\{U_0(x),\ x \in D^+ \cup D_1\}, \\ \mathscr{F}^{\mathrm{i}} &= \sigma\{U_0(x),\ x \in D\}, \\ \mathscr{F} &= \sigma\{U_0(x),\ x \in D_1\}. \end{aligned} \tag{16}$$

Lemme 2.3. *Soit* T *l'application définie par* (8) *et* Q *la probabilité sur* $\mathbb{R}^\Theta$ *telle que* $P = Q \circ T^{-1}$. *Alors,*

(i) P *et* Q *sont équivalentes et*

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}(X) = \det(I + F_X G)\, \frac{\beta(TX)}{\beta(X)} \tag{17}$$

où F_X *est la matrice diagonale de coordonnée* $F_X(x, x) = f'((GX)(x))$.

(ii) *La variable aléatoire* $\beta(TA)/\beta(A)$ *se factorise sous la forme* $K_\mathrm{i} K_\mathrm{e}$ *avec* $K_\mathrm{i} \in \mathscr{F}^{\mathrm{i}}$, $K_\mathrm{e} \in \mathscr{F}^{\mathrm{e}}$.

Démonstration. (i) Soit φ une fonction borélienne bornée sur $\mathbb{R}^{\Theta}$.

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^{\Theta}} \varphi(X)\,\mathrm{d}Q(X) &= \int_{\mathbb{R}^{\Theta}} \varphi(T^{-1}X)\,\mathrm{d}P(X) = \int_{\mathbb{R}^{\Theta}} \varphi(T^{-1}X)\beta(X)\,\mathrm{d}X \\ &= \int_{\mathbb{R}^{\Theta}} \varphi(Y)\beta(TY)|DJ_T(Y)|\,\mathrm{d}Y \\ &= \int_{\mathbb{R}^{\Theta}} \varphi(Y)\frac{\beta(TY)}{\beta(Y)}|DJ_T(Y)|\,\mathrm{d}P(Y)\end{aligned}$$

où DJ_T désigne le jacobien de T. $TX(x)=X(x)+f(\sum_{y\in\Theta} G(x,y)X(y))$, alors $DJ_T(X)=\det(I+F_XG)$ où F_X est la matrice diagonale de coordonnée $F_X(x,x)=f'((GX)(x))$. Par conséquent,

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}(X)=|\det(I+F_XG)|\frac{\beta(TX)}{\beta(X)}.$$

Il reste à vérifier que

$$DJ_T(X)>0. \tag{18}$$

En effet, $DJ_T(X)=(1/\det(I-\Pi))\det(I-\Pi+F_X)$. Or, d'après le lemme 2.1, la matrice $I-\Pi$ est définie positive; d'autre part F_X est diagonale à coefficients positifs d'où (18).

(ii) $\beta(A)=\prod_{x\in\Theta}\alpha(A(x))$.

Or,

$$A(x)=(I-\Pi)U_0(x)=U_0(x)-\frac{1}{2d}\sum_{i=1}^{d}(U_0(x+e_i)+U_0(x-e_i)).$$

$$\begin{aligned}\text{Si}\quad & x\in D^+, && A(x)\in\mathscr{F}^{\mathrm{e}},\\ & x\in\partial D, && A(x)\in\mathscr{F}^{\mathrm{e}} \text{ où } \partial D=\mathscr{V}_1(D^+)\cap D,\\ & x\in D^-, && A(x)\in\mathscr{F}^{\mathrm{i}} \text{ où } D^-=D\backslash\partial D,\end{aligned}$$

donc $\beta(A)=K_{\mathrm{i}}^1K_{\mathrm{e}}^1$ avec $K_{\mathrm{i}}^1\in\mathscr{F}^{\mathrm{i}}$ et $K_{\mathrm{e}}^1\in\mathscr{F}^{\mathrm{e}}$. $\beta(T(A))=\prod_{x\in\Theta}\alpha(A(x)+f(U_0(x)))=K_{\mathrm{i}}^2K_{\mathrm{e}}^2$ avec $K_{\mathrm{i}}^2\in\mathscr{F}^{\mathrm{i}}$, $K_{\mathrm{e}}^2\in\mathscr{F}^{\mathrm{e}}$, d'où $\beta(TA)/\beta(A)=K_{\mathrm{i}}K_{\mathrm{e}}$ avec $K_{\mathrm{i}}\in\mathscr{F}^{\mathrm{i}}$, $K_{\mathrm{e}}\in\mathscr{F}^{\mathrm{e}}$. □

Nous terminons ces préliminaires en présentant un lemme qui relie des propriétés de mesurabilité de v.a. à des conditions algébriques dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^{\Theta}$ par l'intermédiaire d'un opérateur de dérivation.

Lemme 2.4. *Soit $\{X_i, i\in I\}$ une famille finie de vecteurs de $\mathbb{R}^{\Theta}$ et $\mathscr{G}$ la tribu engendrée par la famille gaussienne $\{\sum_{x\in\Theta} X_i(x)A(x), i\in I\}$. On note H le sous espace de $\mathbb{R}^{\Theta}$ engendré par $\{X_i, i\in I\}$. Soit X une variable aléatoire mesurable par rapport à $\sigma\{A(x), x\in\Theta\}$, $X=h(A(x), x\in\Theta)$ avec h dérivable. Soit $B\in\mathscr{G}$, on suppose que la v.a. 1_BX est $\mathscr{G}$ mesurable, alors*

$$1_BD_{.}X\in H \quad p.s. \tag{19}$$

où D_x désigne la dérivée par rapport à $A(x)$, i.e.

$$D_xX=\frac{\partial h(A(y),\, y\in\Theta)}{\partial x}. \tag{20}$$

Démonstration. La démonstration de ce lemme dans le cas continu est donnée en [2]; rappelons que cette preuve utilise la dualité entre l'opérateur de dérivation D et l'intégrale de Skorohod δ. Les mêmes arguments s'adaptent au cas discret, l'intégrale de Skorohod d'un processus Y étant définie par

$$\delta(Y) = \sum_{x \in \Theta} Y(x)A(x) - \operatorname{Tr}(DY)$$

où $\operatorname{Tr}(DY) = \sum_{x \in \Theta} D_x Y(x)$. On a alors la formule

$$E[X\delta(Y)] = E\left[\sum_{x \in \Theta} D_x X Y(x)\right]$$

pour X v.a. régulière. □

Démonstration du théorème 2.2. (a) Soit Q la probabilité introduite dans le lemme 2.3, nous devons prouver que U_0 est un Q champ markovien.

Soit η une v.a. $\mathscr{F}^{\mathrm{i}}$ mesurable bornée (ou positive),

$$E_Q[\eta \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}] = \frac{E_P[\eta J \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}]}{E_P[J \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}]}$$

où $J = (\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P)(A) = \det(I + F_A G) K_{\mathrm{i}} K_{\mathrm{e}}$ d'après le lemme 2.3 avec $F_A(x, x) = f'(GA(x))$, $F_A(x, y) = 0$ si $x \neq y$; $K_{\mathrm{i}} \in \mathscr{F}^{\mathrm{i}}$, $K_{\mathrm{e}} \in \mathscr{F}^{\mathrm{e}}$. Si f est affine, F_A est déterministe, d'où

$$E_Q[\eta \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}] = \frac{E_P[\eta K_{\mathrm{i}} \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}]}{E_P[K_{\mathrm{i}} \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}]}$$

$$= \frac{E_P[\eta K_{\mathrm{i}} \mid \mathscr{F}]}{E_P[K_{\mathrm{i}} \mid \mathscr{F}]} \quad \text{d'après le théorème 2.1.}$$

Par conséquent, $E_Q[\eta \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}] = E_Q[\eta \mid \mathscr{F}]$ ce qui caractérise la propriété de champ markovien de U_0 sous Q.

(b) On note Q_λ la probabilité image de P par T_λ^{-1} où l'application T_λ est définie par (8) associée à l'application croissante $f_\lambda = \lambda f$. Nous supposons que pour tout $\lambda \in [0, \lambda_0]$, U_λ est un champ markovien germe d'ordre 2, c'est à dire que U_0 est un Q_λ champ markovien germe d'ordre 2. Alors pour toute v.a. ξ $\mathscr{F}^{\mathrm{i}}$ mesurable,

$$\forall \lambda \leq \lambda_0, \quad E_{Q_\lambda}[\xi \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}] = \frac{E_P((\mathrm{d}Q_\lambda/\mathrm{d}P)\xi \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}})}{E_P(\mathrm{d}Q_\lambda/\mathrm{d}P \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}})} \quad \text{est } \mathscr{F} \text{ mesurable.}$$

Pour simplifier, la matrice F_A définie ci-dessus sera désormais notée F.

$$\frac{\mathrm{d}Q_\lambda}{\mathrm{d}P} = \det(I + \lambda FG)\frac{\beta(T_\lambda A)}{\beta(A)} = \det(I + \lambda FG) K_\lambda^{\mathrm{i}} K_\lambda^{\mathrm{e}}$$

avec $K_\lambda^{\mathrm{i}} \in \mathscr{F}^{\mathrm{i}}$, $K_\lambda^{\mathrm{e}} \in \mathscr{F}^{\mathrm{e}}$, d'où

$$E_{Q_\lambda}[\xi \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}] = \frac{E_P(\det(I + \lambda FG) K_\lambda^{\mathrm{i}} \xi \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}})}{E_P(\det(I + \lambda FG) K_\lambda^{\mathrm{i}} \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}})}.$$

On notera pour simplifier E l'espérance sous P. En considérant $\xi = 1/K_\lambda^{\mathrm{i}}$ et $\xi = \eta/K_\lambda^{\mathrm{i}}$ avec η $\mathscr{F}^{\mathrm{i}}$ mesurable positive, on se ramène à la propriété suivante: pour toute variable η $\mathscr{F}^{\mathrm{i}}$ mesurable bornée (ou positive), pour tout $\lambda \in [0, \lambda_0]$,

$$R_\eta(\lambda) \triangleq \frac{E(\det(I+\lambda FG)\eta \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}})}{E(\det(I+\lambda FG) \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}})} \text{ est } \mathscr{F} \text{ mesurable.} \tag{21}$$

Notons $P(\lambda)$ le polynôme (à coefficients aléatoires) de degré $N = \operatorname{card} \Theta$: $P(\lambda) = \det(I+\lambda FG)$.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= \lambda^N \det\left(\frac{1}{\lambda} I + FG\right) \quad (\lambda \neq 0) \\ &\triangleq \lambda^N \sum_{i=0}^{N} a_i \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{N-i} \end{aligned}$$

$R_\eta(\lambda)$ est une fraction rationnelle en λ; d'après (21), $R'_\eta(0)$ et $R''_\eta(0)$ sont $\mathscr{F}$ mesurables. Or,

$$\begin{aligned} R'_\eta(0) &= E(\eta P'(0) \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}) - E(P'(0) \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}) E(\eta \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}), \\ R''_\eta(0) &= E(\eta P''(0) \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}) - E(P''(0) \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}) E(\eta \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}) \\ &\quad - 2E(P'(0) \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}) R'_\eta(0), \end{aligned}$$

avec

$$\begin{aligned} P'(0) &= \sum_{i=1}^{N} F_i G_{ii} \quad (F_i \triangleq F(i,i)), \\ P''(0) &= 2 \sum_{i<j} F_i F_j (G_{ii} G_{jj} - G_{ij}^2). \end{aligned}$$

En effet, $P'(0) = a_1$ et $P''(0) = 2a_2$.

$$\det\left(\frac{1}{\lambda} I + FG\right) = \sum_{\sigma \in \Sigma_N} (-1)^\sigma \prod_{i=1}^{N} \left(\frac{1}{\lambda} \delta_{i,\sigma(i)} + F_i G_{i,\sigma(i)}\right)$$

où Σ_N désigne l' ensemble des permutations de $\{1, \ldots, N\}$. Le terme en $(1/\lambda)^{N-1}$ est obtenu pour $\sigma = \mathrm{id}$ d'où

$$a_1 = \sum_{i=1}^{N} F_i G_{ii} = \operatorname{Tr}(FG). \tag{22}$$

Les termes en $(1/\lambda)^{N-2}$ apparaissent d'une part pour $\sigma = \mathrm{id}$ et pour toutes les transpositions $\tau_{i,j}$, $i \neq j$. On trouve alors

$$\begin{aligned} a_2 &= \sum_{i<j} F_i F_j G_{ii} G_{jj} - \sum_{i<j} F_i F_j G_{ij} G_{ji} \\ &= \sum_{i<j} F_i F_j (G_{ii} G_{jj} - G_{ij}^2). \qquad \square \end{aligned} \tag{23}$$

Choisissons le domaine D de Θ de la façon suivante:

• Soit $x_0 \in \Theta$, $D = \{x \in \Theta, |x - x_0| \leq 2\}$, $D^+ = \Theta \setminus D$ alors $D_1 = D \setminus \{x_0\}$. On numérote Θ en commençant par x_0 (i.e. $x_0 = 1$), alors

$$P'(0) = G_{11}F_1 + \sum_{i=2}^{N} F_i G_{ii} \triangleq G_{11}F_1 + H_e$$

avec $F_1 \in \mathscr{F}^i$, $H_e \in \mathscr{F}^e$,

$$P''(0) = 2F_1\left(\sum_{j=2}^{N} (G_{11}G_{jj} - G_{1j}^2)F_j\right) + 2\sum_{2 \leq i < j} F_i F_j (G_{11}G_{jj} - G_{1j}^2)$$

$$\triangleq F_1 L_e + K_e$$

avec L_e, $K_e \in \mathscr{F}^e$. On note

$$\bar{\xi} = E(\xi \mid \mathscr{F}^e) \text{ pour tout } \xi\ \mathscr{F}^i \text{ mesurable}$$

$$= E(\xi \mid \mathscr{F}) \text{ d'après la propriété de Markov germe de } U_0 \text{ sous } P,$$

alors,

$$R'_\eta(0) = G_{11}(\overline{F_1\eta} - \overline{F_1}\overline{\eta}),$$

$$R''_\eta(0) = L_e(\overline{F_1\eta} - \overline{F_1}\overline{\eta}) - 2(G_{11}\overline{F_1} + H_e)G_{11}(\overline{F_1\eta} - \overline{F_1}\overline{\eta}).$$

$R''_\eta(0)$ $\mathscr{F}$ mesurable entraîne

$$(L_e - 2G_{11}H_e)(\overline{F_1\eta} - \overline{F_1}\overline{\eta}) \text{ est } \mathscr{F} \text{ mesurable,}$$

ou encore

$$\left(\sum_{i=2}^{N} G_{1i}^2 F_i\right)(\overline{F_1\eta} - \overline{F_1}\overline{\eta}) \text{ est } \mathscr{F} \text{ mesurable.} \tag{24}$$

On choisit $\eta = 1/F_1$ où $F_1 = f'(U_0(x_0)) > 0$ par hypothèse, on définit l'ensemble $\mathscr{F}$ mesurable:

$$\Omega_1 = \{\overline{F_1\eta} = \overline{F_1}\overline{\eta}\} = \{(\overline{F_1})^{-1} = \overline{(1/F_1)}\}.$$

D' après l'inégalité stricte de Jensen, $\mathbf{1}_{\Omega_1}F_1$ est $\mathscr{F}$ mesurable. D'après (24),

$$\mathbf{1}_{\Omega_1^c}\left(\sum_{i=2}^{N} G_{1i}^2 F_i\right) \text{ est } \mathscr{F} \text{ mesurable.} \tag{25}$$

Soit H le sous espace de $\mathbb{R}^\Theta$ engendré par $\{G(x, \cdot), x \in D_1\}$. $\mathscr{F}$ est la tribu engendrée par la famille gaussienne $\{\sum_{y \in \Theta} G(x, y)A(y),\ x \in D_1\}$. Appliquons le lemme 2.4 à la tribu $\mathscr{G} = \mathscr{F}$, $X = F_1 = f'(U_0(x_0))$ et $B = \Omega_1$.

$$D_\cdot F_1 = f''(U_0(x_0))D_\cdot U_0(x_0) = f''(U_0(x_0))G(x_0, \cdot).$$

Or $x_0 \in D \setminus D_1$, donc $G(x_0, \cdot)$ n'est pas combinaison linéaire de $\{G(z, \cdot), z \in D_1\}$ (G est inversible). (19) entraîne $f''(U_0(x_0)) = 0$ p.s. sur Ω_1. Or si $P(\Omega_1) > 0$, ceci entraîne $f \equiv 0$ (la loi conditionnelle de $U_0(x_0)$ sachant $\mathscr{F}$ a pour support $\mathbb{R}$). Si $P(\Omega_1) = 0$, on applique le lemme 2.4 à la v.a. $X = (\sum_{i=2}^{N} G_{1i}^2 F_i)$. On obtient

$$G^2(1, y)f''(U_0(y)) = 0 \quad \text{p.s.} \quad \text{pour } y \in D^+. \tag{26}$$

Or, les coefficients de la matrice G sont strictement positifs. En effet, d'après (7), il existe $\mu < 1$ tel que

$$(\Pi X, X) \leq \mu \|X\|^2,$$

de même, il existe $\nu < 1$ tel que

$$(\Pi X, X) \geq -\nu \|X\|^2$$

(car $I+\Pi$ est définie positive). Ainsi la matrice Π vérifie $\|\Pi\| < 1$, donc $G = (I-\Pi)^{-1}$ a l'expression suivante $G = \sum_{n\geq 0} \Pi^n$ et pour n assez grand, Π^n est à coefficients strictement positifs. On déduit alors de (26) que $f'' \equiv 0$. □

2.3. Cas de la dimension 1

Nous reprenons l'étude de la propriété de Markov de la solution de (S) lorsque Θ est une partie de $\mathbb{Z}$. En effet, dans ce cas particulier, nous obtenons une formule explicite de la densité $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P$ introduite dans le lemme 2.3, ce qui nous permet d'améliorer le théorème 2.2.

On considère le système:

$$(\mathrm{S}_1) \qquad \begin{cases} x_n - \frac{1}{2}(x_{n-1} + x_{n+1}) + f(x_n) = a_n, & 1 \leq n \leq N-1, \\ x_0 = \alpha, \quad x_N = \beta, \end{cases}$$

où $(a_n)_n$ est une suite de v.a. indépendantes de loi $\mathrm{N}(0,1)$; $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $N \geq 6$. On suppose f continue, croissante; d'après le paragraphe 2.1, (S_1) admet une unique solution donnée par $x_n = G(T^{-1}(\tilde{A}))_n$ où G est la matrice inverse de $I - \Pi$, T est définie en (8) et

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} a_1 + \frac{1}{2}\alpha \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{N-2} \\ a_{N-1} + \frac{1}{2}\beta \end{pmatrix}.$$

Proposition 2.3. *Soit y_n la solution de (S_1) pour $f \equiv 0$. Le processus $Y_n = (y_n, y_{n+1} - y_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ est un processus de Markov.*

Démonstration. On note $\mathscr{F}_n = \sigma(Y_p, p \leq n) = \sigma(y_p, p \leq n+1)$. D'après la propriété de Markov germe de y_n appliquée à $D = [p, N]$, pour toute variable aléatoire bornée $\sigma(y_p, \ldots, y_N)$ mesurable η,

$$E[\eta \mid y_1, \ldots, y_{p+1}] = E[\eta \mid y_p, y_{p+1}].$$

Pour $n \geq p$, choisissons $\eta = \varphi(y_n, y_{n+1} - y_n)$ avcec φ borélienne bornée sur $\mathbb{R}^2$. L'égalité précédente entraîne

$$E[\varphi(Y_n) \mid \mathscr{F}_p] = E[\varphi(Y_n) \mid Y_p]. \qquad \square$$

Nous reprenons maintenant l'étude de la propriété de Markov de x_n solution de (S_1) pour f quelconque. Nous supposons pour simplifier $\alpha=\beta=0$; nous gardons les notations du paragraphe 2.2. On note pour $p \leq N-1$,

$$X_n = (x_n, x_{n+1}-x_n) \quad \text{où } x_n \text{ est la solution de } (S_1)$$

et

$$Y_n = (y_n, y_{n+1}-y_n) \quad \text{où } y_n \text{ est la solution de } (S_1) \text{ pour } f \equiv 0.$$

Théorème 2.3. (a) *Si f est affine, X est un processus de Markov.*

(b) *Supposons f de classe C^2 et $N \geq 6$, alors X est un champ markovien germe d'ordre 1 entraîne que f est affine.*

Remarque. Nous nous intéressons ici à la propriété de Markov du couple $(x_n, x_{n+1} - x_n)$, qui correspond dans le cas continu à la propriété de Markov du couple $(X_t, \mathrm{d}X_t/\mathrm{d}t)$ (voir [5]). La même démonstration prouve que $(x_n)_n$ est un champ markovien germe d'ordre 2 si et seulement si f est affine.

La démonstration du théorème 2.3 suit la même démarche que celle du théorème 2.2 i.e. nous introduisons Q image de P par T^{-1}; la loi de $(X_n)_n$ sous P est alors identique à la loi de $(Y_n)_n$ sous Q. Nous présentons dans le lemme suivant l'expression de la densité $\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P$. Notons $F_n = f'(y_n)$, $0 \leq n \leq N$.

Lemme 2.5. *Soit Q la probabilité image de P par T^{-1}, alors*

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \frac{\alpha_{N-1}}{N} \frac{\beta(TA)}{\beta(A)} \tag{27}$$

où β est défini en (15) et α_{N-1} est le terme d'indice $N-1$ de la suite $(\alpha_n, 0 \leq n \leq N-1)$ définie par la relation de récurrence

$$\begin{aligned} &\tfrac{1}{2}\alpha_{n+1} + \tfrac{1}{2}\alpha_{n-1} - (1+F_{n+1})\alpha_n = 0, \quad 1 \leq n \leq N-2, \\ &\alpha_0 = 1, \qquad \alpha_1 = 2(1+F_1). \end{aligned} \tag{28}$$

La suite de v.a. (α_n) définie ci-dessus est strictement croissante p.s.

Démonstration. D'après le lemme 2.3,

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P} = \det(I+FG)\frac{\beta(TA)}{\beta(A)},$$

$G^{-1} = I - \Pi$, d'où $\det(I+FG) = (1/\det(I-\Pi))\det(I-\Pi+F)$.

$$\det(I-\Pi+F)=\begin{vmatrix} 1+F_1 & -\frac{1}{2} & 0 & \cdots & & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1+F_2 & -\frac{1}{2} & & & \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ \vdots & & & & & \vdots \\ & & & & \ddots & 0 \\ & & & \ddots & \ddots & -\frac{1}{2} \\ 0 & & \cdots & 0 & -\frac{1}{2} & 1+F_{N-1} \end{vmatrix}.$$

Notons $M_{N-1}(F_1,\ldots,F_{N-1})$ ce déterminant; en développant suivant la dernière ligne, on obtient

$$\begin{aligned} M_{N-1}(F_1,\ldots,F_{N-1}) &= (1+F_{N-1})M_{N-2}(F_1,\ldots,F_{N-2}) \\ &\quad +\tfrac{1}{2}\times(-\tfrac{1}{2})M_{N-3}(F_1,\ldots,F_{N-3}). \end{aligned} \tag{29}$$

Grâce à la relation de récurrence (29); on obtient

$$M_{N-1}(0,\ldots,0)=\det(I-\Pi)=N(\tfrac{1}{2})^{N-1}.$$

Notons $\alpha_n=M_n(F_1,\ldots,F_n)2^n$, $1\leqslant n\leqslant N-1$; la suite α_n est solution de (28) et

$$\det(I+FG)=\alpha_{N-1}/N. \tag{30}$$

La suite (α_n) vérifie $0<\alpha_0<\alpha_1$. On vérifie alors par récurrence que (α_n) est une suite strictement croissante en utilisant la positivité des coefficients F_n. □

Soit $p<N$, on définit les tribus suivantes

$$\mathscr{F}_p=\sigma(Y_k,k\leqslant p),\qquad \mathscr{F}^p=\sigma(Y_k,k\geqslant p),\qquad \mathscr{F}_0^p=\mathscr{F}^p\vee\sigma(Y_0).$$

Nous allons maintenant établir une décomposition de la variable aléatoire α_{N-1} en v.a. mesurables par rapport aux tribus $\mathscr{F}_p$ et $\mathscr{F}^p$.

Lemme 2.6. *Soit M_n la matrice*

$$M_n=\begin{pmatrix} -2F_{n+2} & -1 \\ -2F_{n+2} & 0 \end{pmatrix},\quad 0\leqslant n\leqslant N-2,$$

et

$$\Phi_n=\begin{pmatrix} \beta_n \\ \gamma_n \end{pmatrix},\quad 0\leqslant n\leqslant N-1,$$

la solution du système

$$\begin{aligned} &\Phi_{n+1}-\Phi_n=M_n\Phi_{n+1},\quad 0\leqslant n\leqslant N-2, \\ &\Phi_{N-1}=\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{31}$$

alors,

(i) *β_p et γ_p sont $\mathscr{F}^p$ mesurables pour $p<N$; $\gamma_p>0$ pour $p<N$ et $\beta_p>0$ pour $p<N-1$.*

$$\text{(ii)} \quad \forall p<N, \quad \alpha_{N-1}=\beta_p(\alpha_{p+1}-\alpha_p)+\gamma_p\alpha_p \tag{32}$$

et les variables $(\alpha_{p+1}-\alpha_p)$ et α_p sont $\mathscr{F}_p$ mesurables.

Démonstration. (i) $\Phi_n=(I-M_n)\Phi_{n+1}$, d'où

$$\Phi_p=(I-M_p)(I-M_{p+1})\cdots(I-M_{N-2})\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Par conséquent, β_p et γ_p sont $\sigma(y_{p+2},\ldots,y_N)$ mesurables donc $\mathscr{F}^p$ mesurables. $\gamma_p>0$ pour $p<N$ et $\beta_p>0$ pour $p<N-1$ résultent de la positivité des coefficients des matrices $I-M_k$, $0\leq k\leq N-2$.

(ii) Notons u_p la suite

$$u_p=\beta_p(\alpha_{p+1}-\alpha_p)+\gamma_p\alpha_p, \quad 0\leq p\leq N-1,$$

$$\begin{aligned}u_{p+1}-u_p&=\beta_{p+1}(\alpha_{p+2}-\alpha_{p+1})+\gamma_{p+1}\alpha_{p+1}-\beta_p(\alpha_{p+1}-\alpha_p)-\gamma_p\alpha_p\\&=\beta_{p+1}(\alpha_{p+2}+\alpha_p-2\alpha_{p+1})+(\beta_{p+1}-\beta_p)(\alpha_{p+1}-\alpha_p)\\&\quad+(\gamma_{p+1}-\gamma_p)\alpha_{p+1}+\gamma_p(\alpha_{p+1}-\alpha_p)\\&=(2F_{p+2}\beta_{p+1}+\gamma_{p+1}-\gamma_p)\alpha_{p+1}+(\beta_{p+1}-\beta_p+\gamma_p)(\alpha_{p+1}-\alpha_p)\end{aligned}$$

d'après (28). Or, d'après (31),

$$\beta_{p+1}-\beta_p=-2F_{p+2}\beta_{p+1}-\gamma_{p+1},$$

$$\gamma_{p+1}-\gamma_p=-2F_{p+2}\beta_{p+1},$$

qui entraîne

$$\beta_{p+1}-\beta_p=-\gamma_p,$$

$$\gamma_{p+1}-\gamma_p=-2F_{p+2}\beta_{p+1},$$

d'où $u_{p+1}-u_p=0$. La suite (u_p) est donc stationnaire, d'où $u_p=u_{N-1}=\alpha_{N-1}$ ce qui prouve (32). La suite (α_n) définie par (28) est $\sigma(y_1,\ldots,y_n)$ mesurable pour $1\leqslant n\leqslant N-1$ donc α_p, α_{p+1} sond $\mathscr{F}_p$ mesurables. □

Démonstration du théorème 2.3. La loi de X sous P est identique à la loi de Y sous Q. Soit η une v.a. Q intégrable,

$$E_Q[\eta\mid\mathscr{F}_p]=\frac{E_P[(\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P)\eta\mid\mathscr{F}_p]}{E_P[\mathrm{d}Q/\mathrm{d}P\mid\mathscr{F}_p]}$$

D'après le lemme 2.5,

$$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}P}=\frac{\alpha_{N-1}}{N}\frac{\beta(TA)}{\beta(A)}.$$

Or, $\beta(TA)/\beta(A)$ se factorise sous la forme K_pK^p avec K_p (resp. K^p) $\mathscr{F}_p$ (resp. $\mathscr{F}^p$) mesurable. Donc,

$$E_Q[\eta\,|\,\mathscr{F}_p]=\frac{E_P[\eta K^p\alpha_{N-1}\,|\,\mathscr{F}_p]}{E_P[K^p\alpha_{N-1}\,|\,\mathscr{F}_p]} \tag{33}$$

(a) Si f est affine, α_{N-1} est déterministe. Dans ce cas pour toute v.a. η $\mathscr{F}^p$ mesurable,

$$E_Q[\eta\,|\,\mathscr{F}_p]=\frac{E_P[\eta K^p\,|\,\mathscr{F}_p]}{E_P[K^p\,|\,\mathscr{F}_p]}$$

est $\sigma(Y_p)$ mesurable d'après la proposition 2.3.

(b) Nous supposons que X est un champ markovien. La propriété de champ markovien appliquée à $D=\{0, p, \ldots, N\}$ entraîne que pour tout $0\leqslant p<N$, pour toute variable η $\mathscr{F}_0^p$ mesurable positive (ou Q intégrable),

$$E_Q(\eta\,|\,\mathscr{F}_p)\in\mathscr{G}_p=\sigma(Y_0, Y_p)=\sigma(y_1, y_p, y_{p+1}).$$

Dans la suite, on note Λ_η la v.a. $E_Q[\eta\,|\,\mathscr{F}_p]$ et pour toute v.a. K, $\bar{K}$ désigne la v.a. $E_P(K\,|\,\mathscr{G}_p)$. Soit η $\mathscr{F}_0^p$ mesurable, en utilisant la décomposition (32) de α_{N-1} et la propriété de markov de Y sous P, l'expression (33) s'écrit

$$\Lambda_\eta=\frac{(\alpha_{p+1}-\alpha_p)\overline{\eta\beta_pK^p}+\alpha_p\overline{\eta\gamma_pK^p}}{(\alpha_{p+1}-\alpha_p)\overline{\beta_pK^p}+\alpha_p\overline{\gamma_pK^p}}. \tag{34}$$

Nous obtenons donc l'équation suivante

$$(\Lambda_\eta\overline{\beta_pK^p}-\overline{\eta\beta_pK^p})(\alpha_{p+1}-\alpha_p)+(\Lambda_\eta\overline{\gamma_pK^p}-\overline{\eta\gamma_pK^p})\alpha_p=0 \tag{35}$$

où, par hypothèse, Λ_η est $\mathscr{G}_p$ mesurable pour toute v.a. η $\mathscr{F}_0^p$ mesurable positive (ou Q intégrable). Nous choisissons deux variables particulières: soit $p<N-1$,

$$\eta_1=\frac{1}{\beta_pK^p}\in\mathscr{F}_0^p,\qquad \eta_2=\frac{1}{\gamma_pK^p}\in\mathscr{F}_0^p$$

(β_p, $\gamma_p>0$ pour $p<N-1$). Définissons

$$\bar{\Omega}=\{\Lambda_{\eta_1}\overline{\beta_pK^p}=\overline{\eta_1\beta_pK^p}\}\cap\{\Lambda_{\eta_2}\overline{\beta_pK^p}=\overline{\eta_2\beta_pK^p}\},$$

$\bar{\Omega}\in\mathscr{G}_p$. Sur $\bar{\Omega}$, nous obtenons en utilisant l'équation (35) et $\alpha_p\neq 0$,

$$\Lambda_{\eta_1}=\frac{\overline{\eta_1\gamma_pK^p}}{\overline{\gamma_pK^p}}=\frac{\overline{\eta_1\beta_pK^p}}{\overline{\beta_pK^p}},\qquad \Lambda_{\eta_2}=\frac{\overline{\eta_2\gamma_pK^p}}{\overline{\gamma_pK^p}}=\frac{\overline{\eta_2\beta_pK^p}}{\overline{\beta_pK^p}},$$

c'est à dire, sur $\bar{\Omega}$,

$$1/\overline{\beta_pK^p}=\overline{\beta_p^{-1}\gamma_p}/\overline{\gamma_pK^p},$$

$$\overline{\beta_p\gamma_p^{-1}}/\overline{\beta_pK^p}=1/\overline{\gamma_pK^p},$$

d'où $\overline{\beta_p \gamma_p^{-1}} = (\overline{\beta_p^{-1} \gamma_p})^{-1}$ sur $\bar{\Omega}$. Par l'inégalité stricte de Jensen, $\mathbf{1}_{\bar{\Omega}} \beta_p / \gamma_p$ est $\mathcal{G}_p$ mesurable.

Sur $\bar{\Omega}^c$, nous obtenons d'après la relation (35) que la v.a. $(\alpha_{p+1} - \alpha_p)/\alpha_p$ est $\mathcal{G}_p$ mesurable. D'après le lemme 2.4,

$$\begin{aligned} &1_{\bar{\Omega}} D.(\beta_p/\gamma_p) \in H, \\ &1_{\bar{\Omega}^c} D.(\alpha_{p+1}/\alpha_p) \in H, \end{aligned} \tag{36}$$

où $D. = \partial/\partial a.$ et

$$H = \text{e.v.}\{D.y_1, D.y_p, D.y_{p+1}\} = \text{e.v.}\{G(1, \cdot), G(p, \cdot), G(p+1, \cdot)\}.$$

Il nous reste à expliciter $D(\beta_p/\gamma_p)$ et $D(\alpha_{p+1}/\alpha_p)$. Notons $u_p = \alpha_{p+1}/\alpha_p$ et $v_p = \beta_p/\gamma_p$. D'après les relations de récurrence (28) et (31),

$$u_{p+1} = -1/u_p + 2(1 + F_{p+2}), \qquad u_0 = 2(1 + F_1), \tag{37}$$

$$v_p = 1 + \frac{v_{p+1}}{2F_{p+2} v_{p+1} + 1}, \qquad v_{N-1} = 0. \tag{38}$$

Soit $k \in \{1, \ldots, N-1\}$ fixé, appliquons l'opérateur D_k aux équations (37) et (38) pour obtenir

$$D_k u_{p+1} = \frac{1}{u_p^2} D_k u_p + 2 D_k F_{p+2}, \qquad D_k u_0 = 2 D_k F_1,$$

$$D_k v_p = \frac{D_k v_{p+1}}{(1 + 2F_{p+2} v_{p+1})^2} - 2 \frac{v_{p+1}^2}{(1 + 2F_{p+2} v_{p+1})^2} D_k F_{p+2}, \qquad D_k v_{N-1} = 0,$$

d'où

$$D_k u_p = 2 \sum_{j=0}^{p} \left(\prod_{i=j}^{p-1} \frac{1}{u_i^2} \right) D_k F_{j+1},$$

$$\begin{aligned} D_k v_p &= -2 \sum_{j=p}^{N-2} \left(\prod_{i=p}^{j-1} \frac{1}{(1 + 2F_{i+2} v_{i+1})^2} \right) \frac{v_{j+1}^2}{(1 + 2F_{j+2} v_{j+1})^2} D_k F_{j+2} \\ &= -2 \sum_{j=p}^{N-3} \left(\prod_{i=p}^{j-1} \frac{1}{(1 + 2F_{i+2} v_{i+1})^2} \right) \frac{v_{j+1}^2}{(1 + 2F_{j+2} v_{j+1})^2} D_k F_{j+2} \end{aligned}$$

car $v_{N-1} = 0$. C'est à dire

$$D. u_p = 2 \sum_{j=0}^{p} \left(\prod_{i=j}^{p-1} \frac{1}{u_i^2} \right) f''(y_{j+1}) G(j+1, \cdot),$$

$$\begin{aligned} D. v_p = -2 \sum_{j=p}^{N-3} &\left(\prod_{i=p}^{j-1} \frac{1}{(1 + 2F_{i+2} v_{i+1})^2} \right) \frac{v_{j+1}^2}{(1 + 2F_{j+2} v_{j+1})^2} \\ &\times f''(y_{j+2}) G(j+2, \cdot). \end{aligned}$$

Choisissons $2 < p < N-2$, la condition (36) entraîne

$$f''(y_{j+1}) = 0 \quad \text{p.s. sur } \bar{\Omega}^c \quad \text{pour } 1 \leq j \leq p-2,$$

$$f''(y_j) = 0 \quad \text{p.s. sur } \bar{\Omega} \quad \text{pour } p+2 \leq j \leq N-1,$$

d'où $f'' \equiv 0$. $\square$

Remarque. Dans le cas particulier de la dimension 1, on peut donner une formule explicite de la solution de (S_1) pour $f \equiv 0$:

$$y_n = \frac{N-n}{N}\alpha + \frac{n}{N}\beta + \frac{2}{N}\left[\sum_{k=1}^{n-1} k(N-n)a_k + n\sum_{k=n}^{N-1}(N-k)a_k\right]$$

d'où l'expression de la matrice G,

$$G_{ij} = \frac{2}{N}\inf(i,j)(N - \sup(i,j)). \tag{39}$$

Nous avons volontairement calculé $\det(I+FG)$ sans utiliser l'expression explicite (39) des coefficients de G, dans l'espoir de généraliser ces calculs en dimension supérieure.

Cependant, nous avons obtenu $\det(I+FG)$ comme la valeur terminale de la solution d'une équation du $2^{\text{ème}}$ ordre avec condition initiale (cf. (28) et (30)) et nous ne voyons pas quel pourrait être le résultat analogue pour $d > 1$.

3. Equation du 1er ordre sur $\mathbb{Z}$

On considère l'équation discrète avec condition au bord:

$$\begin{aligned} &X_{n+1} = X_n + f(X_n) + a_n, \quad 0 \leqslant n \leqslant N-1, \ N \in \mathbb{N}^*, \\ &h(X_0, X_N) = h_0, \end{aligned} \tag{40}$$

où $(a_n)_{0 \leqslant n \leqslant N-1}$ est une suite de variables i.i.d., f une application de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $h_0 \in \mathbb{R}$.

La propriété de Markov qui nous intéresse ici est la propriété de champ markovien germe d'ordre 1 que nous désignerons simplement par champ markovien.

3.1. Existence et unicité d'une solution

On note Y_n la solution de (40) pour $f \equiv 0$,

$$Y_n = Y_{n-1} + a_{n-1} = Y_0 + \sum_{k=0}^{n-1} a_k,$$

et

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} a_k \quad \text{pour } n \geqslant 1, \qquad S_0 = 0. \tag{41}$$

On suppose:

• (H1) Pour tout $y \in \mathbb{R}$, il existe un unique z, noté $g(y)$, tel que $h(z, z+y) = h_0$.

Sous (H1), (40) avec $f \equiv 0$ admet une unique solution donnée par

$$Y_n = g(S_N) + S_n = \psi(S)_n$$

où ψ est l'application de $\mathbb{R}_0^{N+1} = \{(y_n)_{0 \leqslant n \leqslant N},\ y_0 = 0\}$ dans $\Sigma = \{(y_n)_{0 \leqslant n \leqslant N}$ avec $h(y_0, y_N) = h_0\}$ définie par

$$\psi(y)_n = g(y_N) + y_n. \tag{42}$$

On définit l'application T par

$$T:\mathbb{R}_0^{N+1}\to\mathbb{R}_0^{N+1}$$
$$(y_n)_n\mapsto\left(y_n-\sum_{k=0}^{n-1}f(\psi(y)_k)\right)_n. \tag{43}$$

Lemme 3.1. *Si T est bijective, alors* (40) *admet une unique solution donnée par $X=\psi(T^{-1}(S))$ où S est défini en* (41). □

La démonstration est semblable au cas continu [2].
Nous donnons maintenant des conditions assurant la bijectivité de T.

Proposition 3.1. *Sous l'hypothèse suivante:*
(H2) *f lipschitzienne de rapport K, g dérivable à dérivée bornée par M avec $K(M+1)N<1$,*
T est bijective.

La démonstration est très voisine des résultats obtenus dans le cas continu (cf. [2]). Nous indiquons seulement les deux étapes de la preuve:
(i) Soit τ l'application définie par $\tau(y)=T(y)-y$, et pour $y\in\mathbb{R}_0^{N+1}$,

$$\phi_y:\mathbb{R}_0^{N+1}\to\mathbb{R}_0^{N+1}$$
$$h\mapsto-\tau(h+y).$$

Sous (H2), ϕ_y est contractante, pour tout $y\in\mathbb{R}_0^{N+1}$, ($\mathbb{R}_0^{N+1}$ est muni de la norme $\|h\|=\sum_{k=0}^{N-1}(h_{k+1}-h_k)^2$).
(ii) ϕ_y contractante pour tout $y\in\mathbb{R}_0^{N+1}$ entraîne T bijective. □

3.2. Etude de la propriété de Markov

Nous supposons l'hypothèse (H1) vérifiée ainsi que l'hypothèse:

(H3) Les variables (a_k) ont une loi à densité $\alpha(x)>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

Proposition 3.2. *Soit Y_n la solution de* (40) *pour $f\equiv0$, alors Y_n est un champ markovien i.e. pour tout $0\leq p<n\leq N$,*

$$E[\phi(Y_k,\ p\leq k\leq n)\,|\,Y_j,\ j\in[0,p]\cup[n,N]]=E[\phi(Y_k,p\leq k\leq n)\,|\,Y_p,\ Y_n]$$

pour toute fonction ϕ borélienne bornée.

$$T(x)_n = x_n - \sum_{k=0}^{n-1} f(g(x_N)+x_k) \quad (x_0=0),$$

$$DJ_T(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & F_0(x)g'(x_N) \\ F_1(x) & 1 & 0 & \cdots & 0 & (F_0+F_1)(x)g'(x_N) \\ F_1(x) & F_2(x) & 1 & \ddots & \vdots & (F_0+F_1+F_2)(x)g'(x_N) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ F_1(x) & F_2(x) & \cdots & \cdots & F_{N-1}(x) & 1+(F_0+\cdots+F_{N-1})(x)g'(x_N) \end{vmatrix},$$

où $F_i(x) = -f'(g(x_N)+x_i)$. En soustrayant à la dernière colonne la somme des $N-1$ premières colonnes multipliée par le facteur $g'(x_N)$,

$$DJ_T(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & (F_0(x)-1)g'(x_N) \\ F_1(x) & 1 & 0 & \cdots & 0 & (F_0(x)-1)g'(x_N) \\ F_1(x) & F_2(x) & 1 & \ddots & \vdots & (F_0(x)-1)g'(x_N) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ F_1(x) & F_2(x) & \cdots & \cdots & F_{N-1}(x) & 1+F_0(x)g'(x_N) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & (F_0(x)-1)g'(x_N) \\ F_1(x)-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ F_1(x)-1 & F_2(x) & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ F_1(x)-1 & F_2(x) & \cdots & \cdots & F_{N-1}(x) & 1+g'(x_N) \end{vmatrix}$$

$$= (1+g'(x_N)) + (-1)^{N+1} g'(x_N)(1-F_0(x))$$

$$\times \begin{vmatrix} F_1(x)-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ F_1(x)-1 & F_2(x) & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ F_1(x)-1 & F_2(x) & \cdots & \cdots & F_{N-1}(x) \end{vmatrix}$$

$$= (1+g'(x_N)) - g'(x_N)(1-F_0(x))\cdots(1-F_{N-1}(x)).$$

Soit $0 \leqslant p < n \leqslant N$, notons $\mathscr{F}^{\mathrm{i}} = \sigma(Y_k, k \in [p, n])$, $\mathscr{F}^{\mathrm{e}} = \sigma(Y_k, k \in [0, p] \cup [n, N])$ et $\mathscr{F} = \sigma(Y_p, Y_n)$.

Soit $\eta \in \mathscr{F}^{\mathrm{i}}$,

$$E_Q[\eta \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}] = \frac{E_P[\eta J \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}]}{E_P[J \mid \mathscr{F}^{\mathrm{e}}]} \quad \text{où } J = \frac{\beta(T(S))}{\beta(S)} DJ_T(S).$$

$\beta(T(S))/\beta(S)$ s'écrit $\bar{K}_{\mathrm{i}}\bar{K}_{\mathrm{e}}$ avec $\bar{K}_{\mathrm{i}} \in \mathscr{F}^{\mathrm{i}}$, $\bar{K}_{\mathrm{e}} \in \mathscr{F}^{\mathrm{e}}$.

$$DJ_T(S) = (1+g'(S_N)) - g'(S_N)\bar{H}_{\mathrm{i}}\bar{H}_{\mathrm{e}}$$

$$T(x)_n = x_n - \sum_{k=0}^{n-1} f(g(x_N)+x_k) \quad (x_0=0),$$

$$DJ_T(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & F_0(x)g'(x_N) \\ F_1(x) & 1 & 0 & \cdots & 0 & (F_0+F_1)(x)g'(x_N) \\ F_1(x) & F_2(x) & 1 & \ddots & \vdots & (F_0+F_1+F_2)(x)g'(x_N) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ F_1(x) & F_2(x) & \cdots & \cdots & F_{N-1}(x) & 1+(F_0+\cdots+F_{N-1})(x)g'(x_N) \end{vmatrix},$$

où $F_i(x) = -f'(g(x_N)+x_i)$. En soustrayant à la dernière colonne la somme des $N-1$ premières colonnes multipliée par le facteur $g'(x_N)$,

$$DJ_T(x) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & (F_0(x)-1)g'(x_N) \\ F_1(x) & 1 & 0 & \cdots & 0 & (F_0(x)-1)g'(x_N) \\ F_1(x) & F_2(x) & 1 & \ddots & \vdots & (F_0(x)-1)g'(x_N) \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \vdots \\ F_1(x) & F_2(x) & \cdots & \cdots & F_{N-1}(x) & 1+F_0(x)g'(x_N) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & \cdots & 0 & (F_0(x)-1)g'(x_N) \\ F_1(x)-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ F_1(x)-1 & F_2(x) & 1 & \ddots & \vdots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & & \\ F_1(x)-1 & F_2(x) & \cdots & \cdots & F_{N-1}(x) & 1+g'(x_N) \end{vmatrix}$$

$$= (1+g'(x_N)) + (-1)^{N+1} g'(x_N)(1-F_0(x))$$

$$\times \begin{vmatrix} F_1(x)-1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ F_1(x)-1 & F_2(x) & 1 & & 0 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & & & \\ F_1(x)-1 & F_2(x) & \cdots & \cdots & F_{N-1}(x) \end{vmatrix}$$

$$= (1+g'(x_N)) - g'(x_N)(1-F_0(x))\cdots(1-F_{N-1}(x)).$$

Soit $0 \leqslant p < n \leqslant N$, notons $\mathcal{F}^{\mathrm{i}} = \sigma(Y_k,\ k \in [p, n])$, $\mathcal{F}^{\mathrm{e}} = \sigma(Y_k,\ k \in [0, p] \cup [n, N])$ et $\mathcal{F} = \sigma(Y_p, Y_n)$.

Soit $\eta \in \mathcal{F}^{\mathrm{i}}$,

$$E_Q[\eta \mid \mathcal{F}^{\mathrm{e}}] = \frac{E_P[\eta J \mid \mathcal{F}^{\mathrm{e}}]}{E_P[J \mid \mathcal{F}^{\mathrm{e}}]} \quad \text{où } J = \frac{\beta(T(S))}{\beta(S)} DJ_T(S).$$

$\beta(T(S))/\beta(S)$ s'écrit $\bar{K}_{\mathrm{i}}\bar{K}_{\mathrm{e}}$ avec $\bar{K}_{\mathrm{i}} \in \mathcal{F}^{\mathrm{i}}$, $\bar{K}_{\mathrm{e}} \in \mathcal{F}^{\mathrm{e}}$.

$$DJ_T(S) = (1+g'(S_N)) - g'(S_N)\bar{H}_{\mathrm{i}}\bar{H}_{\mathrm{e}}$$

avec

$$\bar{H}_i = \prod_{k\in]p,n[} (1+f'(Y_k)) \in \mathscr{F}^i, \qquad \bar{H}_e = \prod_{k\notin]p,n[} (1+f'(Y_k)) \in \mathscr{F}^e,$$

et $g'(S_N) \in \mathscr{F}^e$.

(i) Si f est affine, $\bar{H}_i$ et $\bar{H}_e$ sont constants et

$$E_Q[\eta \mid \mathscr{F}_e] = \frac{E_P[\bar{K}_i \eta \mid \mathscr{F}^e]}{E_P[\bar{K}_i \mid \mathscr{F}^e]} = \frac{E_P[\bar{K}_i \eta \mid \mathscr{F}]}{E_P[\bar{K}_i \mid \mathscr{F}]}$$

d'après la proposition 3.2.

(ii) On note $H_i = (\bar{H}_i)^{-1}$, $H_e = (\bar{H}_e)^{-1} (\bar{H}_i, \bar{H}_e > 0)$ et $K_i = \bar{H}_i \bar{K}_i$, $K_e = \bar{H}_e \bar{K}_e$; alors

$$J = [(1+g'(S_N))H_i H_e - g'(S_N)] K_i K_e$$

et

$$E_Q[\eta \mid \mathscr{F}^e] = \frac{(1+g'(S_N))H_e E_P[H_i K_i \eta \mid \mathscr{F}] - g'(S_N) E_P[K_i \eta \mid \mathscr{F}]}{(1+g'(S_N))H_e E_P[K_i H_i \mid \mathscr{F}] - g'(S_N) E_P[K_i \mid \mathscr{F}]}. \tag{45}$$

Supposons que X est un champ markovien i.e.

$$\Lambda_\eta \triangleq E_Q[\eta \mid \mathscr{F}^e] \in \mathscr{F} \quad \text{pour tout } \eta \in \mathscr{F}^i.$$

Prenons $\eta_1 = 1/K_i$ et $\eta_2 = 1/(K_i H_i) \in \mathscr{F}^i$, on montre alors, comme dans la démonstration du théorème 2.3:

- $1_A H_i$ est $\mathscr{F}$ mesurable, (46)
- $1_{A^c \cap \{g'(S_N) \neq 0\}} \dfrac{1+g'(S_N)}{g'(S_N)} H_e$ est $\mathscr{F}$ mesurable, (47)

où

$$A = \bigcap_{k\in\{1,2\}} \{E_P[K_i \eta_k \mid \mathscr{F}] = E_P[K_i \mid \mathscr{F}] \Lambda_{\eta_k}\} \in \mathscr{F},$$

et

$$A^c \cap \{g'(S_N) \neq 0\} = \bigcup_{k\in\{1,2\}} (A^c \cap \{E_P[K_i H_i \eta_k \mid \mathscr{F}] \neq E_P[K_i H_i \mid \mathscr{F}] \Lambda_{\eta_k}\}) \in \mathscr{F}.$$

La dernière égalité résulte de l'expression de Λ_η donnée par (45).

Soit

$$\tilde{\mathscr{F}} = \sigma(Y_p, Y_n, Y_N) \supset \mathscr{F},$$

et

$$H = \text{e.v.}(D.Y_p, D.Y_n, D.Y_N),$$

où D_i désigne la dérivée par rapport à a_i, $i \in \{0, \ldots, N-1\}$,

$$D_i Y_j = 1_{i<j} + g'(S_N).$$

H est déterministe, $H = \text{e.v.}\{e_p, e_n, e_N\}$ où e_k est le vecteur de $\mathbb{R}^{N-1}$ dont les $k-1$ premières composantes sont égales à 1, les autres sont nulles. D'après le lemme 2.4, $DH_i \in H$ p.s. sur A. Prenons par exemple $n = p+2$, alors

$$H_i = \frac{1}{1+f'(Y_{p+1})} \quad \text{et} \quad D.H_i = \frac{-f''(Y_{p+1})}{(1+f'(Y_{p+1}))^2} D.Y_{p+1}.$$

Or $D.Y_{p+1} \notin H$ p.s., d'où $f''(Y_{p+1}) = 0$ p.s. sur A.

• Si $P(A) > 0$, on en déduit $f'' \equiv 0$ (la loi conditionnelle de Y_{p+1} sachant $\mathcal{F}$ a pour support $\mathbb{R}$).

• Si $P(A) = 0$, (alors $P(A^c) = 1$) on utilise (47), on obtient

$$f''(Y_k) = 0 \quad \text{p.s. sur } A^c \cap \{g'(S_N) \neq 0\}$$
$$\text{pour } k \in \{1, p-1\} \cup \{n+1, N-1\}.$$

Or $P(A^c \cap \{g'(S_N) \neq 0\}) > 0$ (car $g' \not\equiv 0$), d'où $f'' \equiv 0$. $\square$

Remarque. Considérons le cas particulier où les variables (a_i) sont des gaussiennes centrées réduites.

$$T(S)_n = S_n + \sum_{k=0}^{n-1} K_k(S) \quad \text{où } K_k = -f(Y_k) = -f(g(S_N) + S_k)$$

On note DK la matrice $(D_j K_i)_{0 \leq i \leq N-1, 0 \leq j \leq N-1} = (\partial K_i / \partial a_j)$.

Si $d_c(-DK)$ désigne le déterminant de Carleman Fredholm de DK, on a

$$d_c(-DK) = \det(I + DK) \exp(\operatorname{Tr}(-DK))$$
$$= DJ_T(S) \exp\left[\left(\sum_{k=0}^{N-1} f'(Y_k)\right) g'(S_N)\right].$$

La densité J s'écrit alors

$$J = d_c(-DK) \exp\left[-\sum_{k=0}^{N-1} K_k a_k - g'(S_N) \sum_{k=0}^{N-1} f'(Y_k) - \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{N-1} (f(Y_k))^2\right].$$

On retrouve une formule analogue au cas continu: les deux premiers termes de l'exponentielle représentent l'intégrale de Skorohod de K.

Pour un processus $X = (X_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ régulier, $\sigma(a_i, 0 \leq i \leq N-1)$ mesurable, l'intégrale de Skorohod $\delta(X)$ est définie par

$$\delta(X) = \sum_{k=0}^{N-1} X_k a_k - \operatorname{Tr}(DX)$$

(si X est prévisible, $\delta(X) = \sum X_k a_k$). $\delta(X)$ vérifie

$$E[F\delta(X)] = E\left[\sum_{k=0}^{N-1} X_k D_k F\right],$$

pour F, X régulières.

Remerciements

Je remercie E. Pardoux pour ses conseils tout au long de l'élaboration de cet article.

Références

[1] R. Buckdahn et E. Pardoux, Monotonicity methods for white noise driven quasi-linear SPDEs, in: M. Pinsky, ed., Diffusion Processes and Related Problems in Analysis, Vol. I (Birkhäuser, Basel, 1990) pp. 219-233.

[2] C. Donati-Martin, Equations différentielles stochastiques dans $\mathbb{R}$ avec conditions aux bords, Stochastics 35 (1991) 143-173.

[3] J.L. Lions, Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires (Dunod, Paris, 1969).

[4] D. Nualart et E. Pardoux, Boundary value problems for stochastic differential equations, Ann. Probab. 19 (1991) 1118-1144.

[5] D. Nualart et E. Pardoux, Second order stochastic differential equations with Dirichlet boundary conditions, Stochastic Process. Appl. 39 (1991) 1-24.

[6] Yu.A. Rozanov, Random Markov Fields (Springer, Berlin, 1982).

[7] C. Donati-Martin, Quasi-linear elliptic stochastic partial differential equations. Markov property, Stochastics 41 (1992) 219-240.

[8] C. Donati-Martin et D. Nualart, Markov property for elliptic stochastic partial differential equations, à paraître dans Stochastics (1993).