JOURNAL OF FUNCTIONAL ANALYSIS 49, 315–334 (1982)

Symétrie et compacité dans les espaces de Sobolev

PIERRE-LOUIS LIONS

Ceremade, Université Paris IX-Dauphine, Place de Lattre de Tassigny, 75775 Paris Cedex 16, France

Communicated by P. Malliavin

Received May 1982

Dans cet article, on met en évidence divers résultats de compacité pour les sous-espaces d'espaces de Sobolev très généraux constitués par les fonctions ayant un certain nombre de symétries: symétrie sphérique, symétrie cylindrique, etc.

In this paper, we show several compactness results concerning the subspaces of general Sobolev spaces formed by the functions possessing some symmetry: spherical symmetry, cylindrical symmetry, etc.

INTRODUCTION

De nombreux problèmes nonlinéaires de la Physique Mathématique possèdent les caractéristiques suivantes: (i) ils sont posés sur des domaines non bornés de R^N (R^N, demi-espaces, bandes, infinies...); (ii) ils sont invariants par un certain nombre de transformations linéaires comme par exemple des rotations et donc possèdent des *symétries* (symétrie sphérique ou cylindrique...). La non bornitude du domaine empêche en général la résolution de ces problèmes par des méthodes générales d'Analyse non linéaire á cause du manque de *compacité*—provenant du fait par exemple que le théorème de Rellich n'est plus vrai dans R^N tout entier. Dans plusieurs problèmes très différents, il a été observé qu'en se restreignant, dans des espaces fonctionnels, aux sous-espaces formés des fonctions respectant les symétries du problème, on obtenait certaines formes de compacité (voir W. A. Strauss [19], H. Berestycki et P. L. Lions [1–3] dans le cas des équations de champ scalaires, E. H. Lieb [11] dans le cas des problèmes de Choquard, P. L. Lions [14, 15] dans le cas des problèmes d'étoiles en rotation ou des problèmes de Thomas–Fermi généralisés, H. Berestycki et P. L. Lions [5] dans le cas des problèmes d'anneaux-tourbillons, et M. J. Esteban [8] et M. J. Esteban et P. L. Lions [9] dans le cas de problèmes semilinéaires posés dans des bandes intervenant en Mécanique des Fluides).

Let but de cet article est de-mettre clairement en évidence les résultats de

0022-1236/82/150315–20$02.00/0

580/49/3-4

compacité que l'on peut obtenir en utilisant les symétries des fonctions. Donnons deux exemples simples de nos résultats:

EXEMPLE 1. Soient $s > 0$, $1 < p < \infty$; on note $W_r^{s,p}(R^N)$ le sous-espace de $W^{s,p}(R^N)$ formé des fonctions à symétrie sphérique. Soit p^* l'exposant de Sobolev associé ($p^* = NP/(N-sp)$ si $sp < N$, et on conviendra que $p^* = +\infty$ si $sp \geqslant N$). Alors, *la restriction á $W_r^{s,p}(R^N)$ de l'injection de Sobolev de $W^{s,p}(R^N)$ dans $L^q(R^N)$ est compacte pour $p < q < p^*$.*

EXEMPLE 2. Soient $m \geqslant 1$, $N_i \geqslant 2$ pour $i \in \{1,..., m\}$. On pose $N = \sum_{i=1}^m N_i$ et si $x \in R^N$, on note $x = (x_1,..., x_m)$ où $x_i \in R^{N_i}$. Soit H le sous-espace de $H^1(R^N)$ ($= W^{1,2}(R^N)$) formé des fonctions $u(x) = u(x_1,..., x_m)$ telles que u est à symétrie sphérique par rapport á x_i, pour tout i, i.e.: la fonctions partielle $(x_i \to u(x_1^0,..., x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0,..., x_m^0))$ est à symétrie sphérique sur R^{N_i} et ce pour tout $i \in \{1,..., m\}$ et pour tous $x_j^0 \in R^{N_j}$ $(1 \leqslant j \leqslant m)$. Soit 2^* l'exposant de Sobolev associé: $2^* = 2N/(N-2)$ (si $N > 2$, sinon on prendra $2^* = +\infty$). Alors, *la restriction à H de l'injection de Sobolev de $H^1(R^N)$ dans $L^q(R^N)$ est compacte pour* $2 < q < 2^*$.

Le cas $s = 1$, $p = 2$ de l'Exemple 1 (i.e., le cas $m = 1$ de l'Exemple 2) est contenu dans les articles de Strauss [19] et de S. Coleman, V. Glazer et A. Martin [7] et a été mis en évidence dans Berestycki et Lions [3, 4].

Nous revenons sur ce cas particulier dans la Section I, puis nous traitons dans la Section II les résultats de compacité décrits dans l'Exemple 1 ci-dessus; enfin dans la Section III, nous démontrons des résultats du type de ceux décrits dans l'Exemple 2 ci-dessus.

Les résultats de compacité présentés ici sont utilisés dans Esteban [8], Esteban et Lions [9], et Lions [14, 17] pour la résolution de divers problèmes non linéaires intervenant en Physique Mathématique.

I. RAPPELS

Dans cette section, nous rappelons deux résultats qui nous seront utiles dans ce qui suit: (i) nous rappelons et démontrons le résultat de compacité correspondant au cas $p = 2$, $s = 1$ de l'Exemple 1 (Section I.1), (ii) nous énonçons et démontrons un lemme standard sur les fonctions décroissantes de R_+ (Section I.2).

I.1 *Compacité dans $H_r^1(R^N)$*

Le résultat qui suit est dû à Strauss [19] (voir également Coleman, Glazer et Martin [7] et Berestycki et Lions [3, 4]):

PROPOSITION I.1. *Soit* $N > 2$; *on pose* $2^* = 2N/(N-2)$ *si* $N > 3$, $2^* = +\infty$ *si* $N = 2$. *Alors la restriction à* $H_r^1(R^N)$ *de l'injection de Sobolev de* $H^1(R^N)$ *dans* $L^q(R^N)$ *est compacte si* $2 < q < 2^*$.

Remarque I.1. Il est facile de voir que ce résultat n'est pas exact si $N = 1$, ou si $q = 2$ ou $q = 2^*$. Néanmoins; le Lemme I.1 ci-dessous permet de démontrer facilement que si $\alpha > 0$ est fixé alors $H_r^1(R^N)$ s'injecte dans $L^q(B^\alpha)$ où $B^\alpha = \{x \in R^N, |x| > \alpha\}$ pour $2 \leqslant q \leqslant +\infty$ et que cette injection est compacte si $q > 2$.

Rappelons la démonstration de la Proposition I.1: elle est basée sur le lemme suivant:

LEMME I.1. *Soient* $N \geqslant 2$, $u \in H_r^1(R^N)$ *alors on a*:

$$|u(x)| \leqslant C_N\{|u|_{L^2(R^N)}^{1/2} |\nabla u|_{L^2(R^N)}^{1/2}\} |x|^{-(N-1)/2} \qquad \text{p.p.} \quad x \in R^3. \tag{1}$$

Remarque I.2. En fait on peut identifier $u(x)$ à une fonction $\tilde{u}(|x|)$ où $\tilde{u} \in C^{0,1/2}(]0, +\infty[)$.

Remarque I.3. Nous verrons plus loin que l'on a également:

$$|u(x)| \leqslant C_N\{|u|_{L^2(R^N)}^{\alpha} |\nabla u|_{L^2(R^N)}^{1-\alpha}\} |x|^{-(\alpha+(N-2)/2)}, \tag{2}$$

où $0 \leqslant \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ si $N \geqslant 3$ et $0 < \alpha \leqslant \frac{1}{2}$ si $N = 2$. Bien sûr le cas $\alpha = \frac{1}{2}$ redonne (1). Indiquons également que (2) est optimal c'est-à-dire que (2) n'est pas vérifié si $\alpha \in]\frac{1}{2}, 1]$ (ou si $\alpha = 0$, $N = 2$).

Démonstration du Lemme I.1. Par densité il suffit de démontrer le lemme pour $u \in H_r^1(R^N) \cap \mathscr{D}(R^N)$: on notera $u(x) = u(r)$ où $r = |x|$. En remarquant que: $(d/dr)(r^{N-1}u^2) \geqslant 2u(du/dr)\, r^{N-1}$, on obtient:

$$r^{N-1}u^2(r) \leqslant 2\int_r^\infty |u| \left|\frac{du}{dr}\right| s^{N-1}\, ds \leqslant C_N |u|_{L^2(R^N)}^{1/2} |\nabla u|_{L^2(R^N)}^{1/2}.$$

Démonstration de la Proposition I.1. C'est une conséquence immédiate du théorème de Rellich et de l'inégalité suivante découlant du Lemme I.1: si $R > 0$ et si $u \in H_r^1(R^N)$:

$$\int_{B^R} |u|^q\, dx \leqslant \{C_N \|u\|_{H^1(R^N)} R^{-\frac{N-1}{2}}\}^\alpha \int_{R^N} |u|^2\, dx,$$

où $\alpha = q - 2$. D'où on déduit:

$$\|u\|_{L^q(B^R)} \leqslant C_N \|u\|_{H^1(R^N)} R^{-\frac{(N-1)\alpha}{2}}, \qquad \forall R > 0, \forall u \in H_r^1(R^N).$$

1.2. *Un lemme sur les fonctions décroissantes de R_+*

Soit $X = L^p(R_+) \cap L^q(R_+)$ où $1 \leqslant p < q < +\infty$. On note K le cône convexe fermé défini par:

$$K = \{u \in X,\ u(t) \text{ est décroissante pour } t \geqslant 0\}.$$

LEMME I.2. *Tout sous-ensemble borné de K est relativement compact dans $L^\alpha(R_+)$ pour $\alpha \in \,]p, q[$.*

Démonstration. It suffit de montrer que de toute suite (u_n) bornée de K on peut extraire une sous-suite convergente dans $L^\alpha(R_+)$. Or on a

$$C \geqslant \int_0^t (u_n(s))^\beta\, ds \geqslant (u_n(t))^\beta t,$$

d'où

$$0 \leqslant u_n(t) \leqslant \frac{C}{t^{1/\beta}}$$

pour $\beta \in [p, q]$. De plus on a: $\forall \varepsilon > 0$

$$\|u_n\|_{BV(\varepsilon, 1/\varepsilon)} \leqslant C_\varepsilon \qquad \text{(ind. de } n > 1).$$

En effet:

$$\int_\varepsilon^{1/\varepsilon} d\,|u_n| = u_n(\varepsilon) - u_n\left(\frac{1}{\varepsilon}\right) \leqslant \frac{C}{\varepsilon^{1/p}}.$$

Donc il existe une sous-suite de u_n toujours notée u_n qui converge p.p. sur R_+ vers $u \in K$; et donc $u_n \to_n u$ dans $L^\alpha(0, R)$, $\forall R < \infty$.

On conclut en remarquant que:

$$\int_R^{+\infty} (u_n(s))^\alpha\, ds \leqslant \frac{C}{R^\gamma} \int_R^{+\infty} (u_n(s))^p\, ds,$$

où $\gamma = (\alpha - p)/p$.

II. ESPACES DE SOBOLEV ET FONCTIONS À SYMÉTRIE SPHÉRIQUE

II.1. *Espaces de Sobolev*

THÉORÈME II.1. *Soient $N \geqslant 2$, $s > 0$, $p \in [1, +\infty[$; on pose $p^* = Np/(N - sp)$ si $sp < N$ et $p^* = +\infty$ si $sp \geqslant N$. La restriction à*

$W_r^{s,p}(R^N)$ de l'injection de Sobolev de $W^{s,p}(R^N)$ dans $L^q(R^N)$ est compacte si $p < q < p^*$.

Remarque II.1. Comme dans la Remarque I.1, signalons que le résultat précédent n'est pas vérifié si $N = 1$ ou si $q = p, p^*$. Néanmoins, la démonstration du Théorème II.1 permet de voir que si $\alpha > 0$ est fixé alors $W_r^{s,p}(R^N)$ s'injecte dans $L^q(B^\alpha)$ pour $p \leqslant q \leqslant p/(1-ps)$ si $s < 1/p$, $p \leqslant q < \infty$ si $s = 1/p$ et $p \leqslant q \leqslant +\infty$ si $s > 1/p$; et que de plus cette injection est compacte si $p < q < p/(1-ps)$.

Nous allons tout d'abord démontrer le Théorème II.1 dans le cas $s = 1$: il suffit alors de démontrer le lemme suivant:

LEMME II.1. *Soient $N \geqslant 2$, $1 \leqslant p < +\infty$, $u \in W_r^{1,p}(R^N)$; alors on a l'inégalité suivante*:

$$|u(x)| \leqslant C(N, p)\{|u|_{L^p(R^N)}^{(p-1)/p} |\nabla u|_{L^p(R^N)}^{1/p}\} |x|^{-(N-1)/p} \qquad \text{p.p. } x \in \mathbb{R}^N. \quad (3)$$

Remarque II.2. En fait on peut identifier $u(x)$ à une fonction $\tilde{u}(|x|)$ où $\tilde{u} \in C^{0,(p-1)/p}(]0, +\infty[)$.

Remarque II.3. Nous verrons plus loin (Section II.2) que l'on a également:

$$|u(x)| \leqslant C(N, p, \alpha)\{|u|_{L^p(R^N)}^{1-\alpha} |\nabla u|_{L^p(R^N)}^{\alpha}\} |x|^{-\beta} \qquad \text{p.p.}, \quad (4)$$

où $1 > \alpha \geqslant 1/p$ si $p \geqslant N$, $1 \geqslant \alpha \geqslant 1/p$ si $p < N$ et où $\beta = N/p - \alpha$.

Le cas $\alpha = 1/p$ redonne bien sûr (3). Indiquons également que (4) est optimal c'est-à-dire que (4) n'est pas vérifiée si $\alpha \in [0, 1/p[$ (ou si $\alpha = 1$, $N \leqslant p$).

Démonstration du Lemme II.1. Par densité, il suffit de démontrer le lemme pour $u \in W_r^{1,p}(R^N) \cap \mathscr{D}(R^N)$: on notera $u(x) = u(r)$. Or on a:

$$\frac{d}{dr}(r^{N-1}|u|^p) = p|u|^{p-2}u\frac{du}{dr}r^{N-1} + |u|^p(N-1)r^{N-2}$$

d'où en intégrant entre r et $+\infty$:

$$r^{N-1}|u|^p \leqslant C\int_{R^N}|u|^{p-1}|\nabla u|\,dx \leqslant C|\nabla u|_{L^p(R^N)}|u|_{L^p(R^N)}^{(p-1)}$$

ce qui démontre (3).

On déduit du Lemme II.1, exactement comme dans la preuve de la Proposition I.1, que l'injection de $W_r^{1,p}(R^N)$ dans $L^q(R^N)$ est compacte si $p < q < p^*$. De plus si $s > 1$, comme $W_r^{s,p}(R^N) \subsetneq W_r^{1,p}(R^N)$, on déduit de la démonstration précédente que $W_r^{s,p}(R^N)$ s'injecte avec injection compacte dans $L^q(R^N)$ pour $q \in]p, \bar{p}^*[$ avec $\bar{p}^* = Np/(N-p)$ si $p < N$, $\bar{p}^* = +\infty$ si $p \geqslant N$. On en déduit le Théorème II.1 en utilisant les inégalités de Sobolev et les inégalités de Hölder.

Reste à considérer le cas $s \in]0, 1[$: on est alors amené à introduire quelques espaces: soit $p \in]1, +\infty[$, on note:

$$H^{s,p}(R^N) = \{u \in L^p(R^N), \mathscr{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathscr{F}u) \in L^p\},$$

où $\mathscr{F}$ désigne la transformation de Fourier et ξ est la variable duale $\xi = (\xi_1, ..., \xi_N)$ de $x = (x_1, ..., x_N) \in R^N$. On munit $H^{s,p}$ de la norme:

$$\|u\|_{H^{s,p}} = \|\mathscr{F}^{-1}((1 + |\xi|^2)^{s/2} \mathscr{F}u)\|_{L^p}.$$

Enfin on note

$$H_r^{s,p}(R^N) = \{u \in H^{s,p}(R^N), u \text{ est à symétrie sphèrique}\}.$$

Rappelons quelques résultats standards (voir par exemple J. L. Lions et E. Magenes [12] et E. Magenes [18]): (i) $W^{1,p}(R^N) = H^{1,p}(R^N)$ et donc $W_r^{1,p}(R^N) = H_r^{1,p}(R^N)$; (ii) $H^{s+\varepsilon,p}(R^N) \subsetneq H^{s-\varepsilon,p}(R^N)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall s > 0$ et donc $H_r^{s+\varepsilon,p}(R^N) \subsetneq W_r^{s,p} R^N) \subsetneq H_r^{s-\varepsilon,p}(R^N)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\forall s > 0$; (iii) $[L^p, W^{1,p}]_s = H^{s,p}(R^N)$ si $s \in]0, 1[$ et donc $[L_r^p, W_r^{1,p}]_s = H_r^{s,p}(R^N)$ (où $[\cdot, \cdot]_s$ désigne l'espace d'interpolation obtenu par la méthode complexe—cf., par exemple, Magenes [18]).

On va démontrer que si $u(x) = u(r) \in W_r^{1,p}$ alors $r^{(N-1)/p} u(r) \in W^{1,p}(1, \infty)$:

Lemme II.2. *Soient $N \geqslant 2$, $p \in [1, +\infty[$; alors on a pour tout u dans $W_r^{1,p}(R^N)$:*

$$\|r^{(N-1)/p} u(\cdot)\|_{W^{1,p}(1,\infty)} \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(R^N)}. \tag{5}$$

Remarque II.4. Si $p < N$; alors on a en fait:

$$\|r^{(N-1)/p} u(\cdot)\|_{W^{1,p}(1,\infty)} \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(R^N)}. \tag{6}$$

En admettant provisoirement le Lemme II.2 et en remarquant que si $u \in L_r^p(R^N)$:

$$\|r^{(N-1)/p} u(\cdot)\|_{L^p(0,+\infty)} = C_N \|u\|_{L^p(R^N)};$$

on obtient immédiatement par interpolation: $\forall u \in W_r^{s,p}(R^N)$ $(0 < s < 1$, $1 < p < \infty)$:

$$\|r^{(N-1)/p} u(\cdot)\|_{H^{s,p}(1,+\infty)} \leqslant C \|u\|_{H_r^{s,p}(R^N)}.$$

On en déduit alors aisément l'existence de $q \in \,]p, p^*[$ tel que:

$$\|u\|_{L^q(R^N)} \leqslant C \|u\|_{W^{s,p}(R^N)}$$
$$\|r^{(N-1)/p} u(\cdot)\|_{L^q(1,\infty)} \leqslant C \|u\|_{W^{s,p}(R^N)}$$

pour tout $u \in W_r^{s,p}(R^N)$. Ceci permet alors de montrer la compacité de l'injection: $W_{r(R}^{s,pN)} \subsetneq L^q(R^N)$; puisque l'on a:

$$\int_{B^R} |u|^q \, dx = C_N \int_R^{+\infty} r^{N-1} |u|^q \, dr \leqslant \frac{C_N}{R^\delta} \int_R^{+\infty} r^{(N-1)(q/p)} |u|^q \, dr$$
$$\leqslant \frac{C}{R^\delta} \|u\|_{W^{s,p}(R^N)}$$

pour tous $u \in W_r^{s,p}(R^N)$, $R > 0$; où $\delta = (N-1)(q/p - 1)$.

On conclut aisément grâce aux inégalités de Hölder, ce qui prouve le Théorème II.1 dans le cas où $0 < s < 1$, $p > 1$. Reste le cas $p = 1$, que l'on traite en remarquant que d'après les inégalités de Sobolev: $W^{s,1}(R^N) \subsetneq W^{s-\varepsilon,p}(R^N)$ où $0 < \varepsilon < s$, $p < N/(N-\varepsilon)$; ce qui permet de se ramener au cas précédent.

Démonstration du Lemme II.2. If suffit de considérer le cas où $u \in W_r^{1,p}(R^N) \cap \mathscr{D}(R^N)$. En posant $v(\cdot) = r^{(N-1)/p} u(\cdot)$, on voit que:

$$\left|\frac{dv}{dr}\right| \leqslant \frac{C}{r} |v| + r^{(N-1)/p} \left|\frac{du}{dr}\right|.$$

Comme on a bien sûr: $\|v\|_{L^p(0,\infty)} = C_N \|u\|_{L^p(R^N)}$; on en déduit:

$$\left\|\frac{dv}{dr}\right\|_{L^p(1,\infty)} \leqslant C \|u\|_{L^p(R^N)} + \left\|r^{(N-1)/p} \frac{du}{dr}\right\|_{L^p(0,\infty)} \leqslant C \|u\|_{W^{1,p}(R^N)}.$$

Remarque II.5. Le démonstration du Théorème II.1 prouve plusieurs résultats supplémentaires: (i) l'injection de Sobolev de $H^{s,p}(R^N)$ dans $L^q(R^N)$ restreinte à $H_r^{s,p}(R^N)$ est compacte si $p < q < p^*$; (ii) Si $sp > 1$, alors $W_r^{s,p}(R^N) \subsetneq L^\infty(1, \infty; r^{(N-1)/p} \, dr)$. La même démonstration permet également de démontrer divers résultats de compacité pour les sous-espaces de fonctions à symétrie sphérique de divers espaces (par exemple espaces d'interpolation du type espaces de Besov $B^{s,p}(R^N)$...).

II.2. *Quelques inégalités*

Dans cette section on indique quelques généralisations de la Proposition I.1 et du Lemme I.1 à des espaces du type:

$$X = \{u \in L^p(R^N), \nabla u \in L^p(R^N)\},$$

où $N \geqslant 2$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$. On note $X_r = \{u \in X$, u est à symétrie sphérique$\}$.

PROPOSITION II.1. *Soient $N \geqslant 2$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$. Alors on a pour tout u dans X_r:*

$$|u(x)| \leqslant C\{|\nabla u|^{\alpha}_{L^p(R^N)} |u|^{1-\alpha}_{L^q(R^N)}\} |x|^{-(N-1)\alpha} \qquad \text{p.p. } x \in R^N, \tag{7}$$

où $\alpha = p'/(p'+q)$ et $p' = p/(p-1)$ (on convient que $\alpha = 1$ si $p = 1$, $\alpha = 0$ si $q = \infty$, $p' = 1$ si $p = \infty$); où C ne dépend que de N, p, q.

Remarque II.6. Si $p = 1$, il suffit de prendre: $X = \{u \in L^{N/(N-1)}(R^N), \nabla u \in L^1(R^N)\}$ muni de la norme $\|u\|_X = \|\nabla u\|_{L^1(R^N)}$ et on a:

$$|u(x)| \leqslant C \|\nabla u\|_{L^1(R^N)} |x|^{-(N-1)} \qquad \text{p.p.}, \forall u \in X_r.$$

Avant de démontrer la Proposition II.2 signalons quelques corollaires utiles: rappelons tout d'abord que si $1 \leqslant p < N$, la complétion de $\mathscr{D}(R^N)$ pour la norme $\|\nabla u\|_{L^p(R^N)}$ est l'espace $X = \{u \in L^{p^*}(R^N), \nabla u \in L^p(R^N)\}$ où $p^* = Np/(N-p)$.

COROLLAIRE II.1. *Soient N et p tels que $1 \leqslant p < N$, on pose $X = \{u \in L^{p^*}(R^N), \nabla u \in L^p(R^N)\}$ avec $p^* = Np/(N-p)$. Alors on a: $\forall u \in X_r$,*

$$|u(x)| \leqslant C \|\nabla u\|_{L^p(R^N)} |x|^{-(N-p)/p} \qquad \text{p.p. } x \in R^N, \tag{8}$$

où C ne dépend que de N et p.

En remarquant que si $u \in X = \{v \in L^q(R^N), \nabla v \in L^p(R^N)\}$ où $1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$; alors $u \in L^s(R^N)$ avec s compris entre q et $p^* = Np/(N-p)$ si $p < N$ et s compris entre q et $+\infty$ si $p \geqslant N$; on en déduit donc le

COROLLAIRE II.2. *Soient $N \geqslant 2$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$; on prend s compris entre q et p^* si $p < N$ et $s \in [q, +\infty[$ si $p \geqslant N$. Pour tout u dans X_r,* on *a*:

$$|u(x)| \leqslant C\{|\nabla u|^{\beta}_{L^p(R^N)} |u|^{1-\beta}_{L^q(R^N)}\} |x|^{-(N-1)\alpha} \qquad \text{p.p. } x \in R^N, \tag{9}$$

où $\alpha = p'/(p'+s)$, $\beta = 1 - \theta q/(p'+q)$ et $\theta \in [0, 1]$ vérifie: $\theta/q + (1-\theta)/p^* = 1/s$.

Enfin de même que dans les sections précédentes on obtient le:

COROLLAIRE II.3. *Soient $N \geqslant 2$, $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$. On suppose que si $p \geqslant N$, alors $q \neq \infty$ et que si $p < N$ alors $q \neq p^* = Np/(N-p)$. Enfin on note I l'intervalle ouvert $]q, p^*[$ ou $]p^*, q[$. Alors la restriction à X_r de l'injection de X dans $L^s(R^N)$ est compacte pour $s \in I$.*

Remarque II.7. On peut combiner les résultats et méthodes des Sections II.1 et II.2 pour obtenir des résultats semblables dans des espaces du type Sobolev (plus compliqués).

Démonstration de la Proposition II.1. On ne fera la démonstration que dans le cas où $1 < p, q < +\infty$ (le cas général s'obtient par des modifications aisées de ce qui suit). Par densité, il suffit de considérer $u \in X_r \cap \mathscr{D}(R^N)$. On pose $\beta = 1/\alpha = (p' + q)/p'$. Comme on a:

$$\frac{d}{dr}\{r^{N-1}|u|^\beta\} \geqslant -\beta |u|^{\beta-1}\left|\frac{du}{dr}\right| r^{N-1},$$

on obtient aisément:

$$r^{N-1}|u(r)|^\beta \leqslant C \int_{R^N} |u|^{\beta-1}|\nabla u|\,dx \leqslant C\,\|\nabla u\|_{L^p(R^N)}\,\|u\|^{\beta-1}_{L^{(\beta-1)p'}(R^N)}$$

et

$$(\beta - 1)p' = q.$$

III. Symétrie Cylindrique et Compacité

III.1. *Le résultat principal*

Soient $m \geqslant 1$, $N_i \geqslant 2$ ($i \in \{1,..., m\}$). Posons $N = \sum_{i=1}^m N_i$; et introduisons le sous-espace de $H^1(R^N)$ défini par

$$H_s^1(R^N) = (u \in H^1(R^N), \forall i \in \{1,..., m\}, u \text{ est à symétrie sphérique par rapport à } x_i \in R^{N_i}\}$$

(c'est-à-dire: $\forall i \in \{1,..., m\}$, $\forall x_i^0 \in R^{N_i}$, la fonction définie par $R^{N_i} \ni x_i \to u(x_1^0,..., x_{i-1}^0, x_i, x_{i+1}^0,..., x_m^0)$ est à symètrie sphèrique).

Théorème III.1. *Le restriction à $H_s^1(R^N)$ de l'injection de Sobolev de $H^1(R^N)$ dans $L^q(R^N)$ est compacte si $2 < q < 2N/(N-2)$.*

Remarque III.1. Ce résultat contient évidemment la Proposition I.1 et de même que dans la Remarque I.1, on voit aisément que le résultat précédent n'est pas vérifié si $q = 2$ ou si $q = 2N/(N-2)$.

Remarque III.2. Dans la Section III.3, nous donnons diverses généralisations de ce résultat à des espaces plus généraux.

La démonstration du Théorème III.1 est donnée dans la section suivante (III.2): introduisons tout d'abord quelques notations et faisons quelques rappels. Si $u \in L^1(R^N)$, on désigne par $v = S_j u$ la symétrisée de u par rapport à x_j, i.e., v est l'unique élément de $L^1(R^N)$ à symétrie sphérique par rapport à $x_j \in R^{N_j}$ vérifiant:

$$\begin{aligned} &\forall t > 0,\ \operatorname{mes}_{R^{N_j}}\{|u(x_1^0,..., x_{j-1}^0, x_{j+1}^0,..., x_m^0)| > t\} \\ &\quad = \operatorname{mes}_{R^{N_j}}\{v(x_1^0,..., x_{j-1}^0, x_{j+1}^0,..., x_m^0) > t\} \\ &\quad \text{p.p. } x_1^0 \in R^{N_1},..., x_m^0 \in R^{N_m}; \end{aligned} \tag{10}$$

$$\begin{aligned} &v(x_1^0,..., x_{j-1}^0, x_j, x_{j+1}^0,..., x_n^0) \leqslant v(x_1^0,..., x_{j-1}^0, \bar{x}_j, x_{j+1}^0,..., x_m^0\} \\ &\forall x_1^0 \in R^{N_1},..., \forall x_j^0 \in R^{N_{j-1}}, \forall x_j, \bar{x}_j \in R^{N_j} \text{ tels que } \|x_j\| \geqslant \|\bar{x}_j\|, \\ &\forall x_{j+1}^0 \in R^{N_{j+1}},..., \forall x_m^0 \in R^{N_m} \end{aligned} \tag{11}$$

(pour la définition et les principales propriétés de la symétrisation ou réarrangement décroissant, nous renvoyons le lecteur à G. H. Hardy, J. E. Littlewood et G. Polya [10], H. J. Brascamp, E. H. Lieb et J. M. Luttinger [6], E. H. Lieb [11], and P. L. Lions [16]). Rappelons brièvement les principales propriétés de l'opérateur S_j: $S_j : L^p \to L^p$ si $1 \leqslant p \leqslant \infty$ et $S_j : W^{1,p} \to W^{1,p}$ si $1 \leqslant p \leqslant \infty$; de plus on a:

$$\left| \int_{R^{N_j}} |S_j u|^p \, dx_j \right|^{1/p} = \left| \int_{R^{N_j}} |u|^p \, dx_j \right|^{1/p} \qquad \text{p.p. } x_i \in R^{N_i} \ (i \neq j), \ \forall 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{12}$$

$$\left| \int_{R^{N_j}} |S_j u - S_j v \right|^{1/p} \leqslant \left| \int_{R^{N_j}} |u - v|^p \, dx_j \right|^{1/p} \qquad \text{p.p. } x_i \in R^{N_i} (i \neq j) \ \forall 1 \leqslant p \leqslant \infty, \tag{13}$$

$$\|\nabla(S_j u)\|_{L^p(R^N)} \leqslant \|\nabla u\|_{L^p(R^N)}, \qquad \forall 1 \leqslant p \leqslant \infty, \forall u \in W^{1,p}(R^N). \tag{14}$$

III.2. *Démonstration du Théorème* III.1

Il suffit de montrer que si $(u_n)_{n \geqslant 1}$ désigne une suite bornée dans $H_s^1(R^N)$, alors il existe une sous-suite convergente dans $L_q(R^N)$ pour $2 < q < 2N/(N-2)$. Sans restreindre la généralité on peut supposer qu'il existe $u \in H_s^1(R^N)$ tel que:

$$u_n \to_n u \text{ p.p. dans } R^N, \text{ faiblement dans } H^1(R^N) \text{ et donc dans} \tag{15}$$

$$L^q(R^N) \text{ pour } 2 = q = \frac{2N}{N-2}, \text{ fortement dans } L^q_{\text{loc}}(R^N) \text{ pour } 2 \leqslant q < \frac{2N}{N-2}.$$

On introduit $u_n^2 = S_m u_n$, $u_n^3 = S_{m-1} S_m u_n$,..., $u_n^m = (\prod_{j=2}^m S_j)\, u_n$; d'après (12)–(14) $(u_n^j)_{n \geqslant 1}$ est bornée dans $H_s^1(R^N)$ et donc sans restreindre la généralité on peut supposer que (15) a lieu pour u_n^j avec u remplacé par

$u^j \in H_s^1(R^N)$. Remarquons également que u_n^j $(j \geqslant 2)$ est nonnégative et décroissante par rapport à $|x_k|$ pour $k \geqslant m - j + 2$; en particulier u_n^m est décroissante par rapport à $|x_k|$ pour $k \geqslant 2$.

Le démonstration du Théorème III.1 est divisée en deux étapes:

(i) on montre que u_n^m converge dans $L^q(R^N)$ vers u^m;

(ii) on montre que $u^m = \prod_{j=2}^m S_j u$.

Ceci permet de conclure car on a alors d'après (12):

$$\int_{R^N} |u_n|^q \, dx = \int_{R^N} |u_n^m|^q \, dx \xrightarrow[n]{} \int_{R^N} |u^m|^q \, dx = \int_R |u|^q \, dx$$

pour $2 < q < 2N/(N-2)$, ce qui montre que: $u_n \to_n u$ dans $L^q(R^N)$.

Étape 1: *Convergence de* u_n^m. Pour simplifier les notations, on posera $v_n = u_n^m$, $v = u^m$; on veut montrer que $v_n \to v$ dans $L^q(R^N)$. On va pour cela utiliser un argument dû à Lions [14] (qui est en quelque sorte une combinaison de la Proposition I.1 et du Lemme I.2): on démontre tout d'abord le

LEMME III.1. *Si* $\tilde{u} \in H_s^1(R^n)$ *et si* $\tilde{u}$ *est décroissante par rapport à* $|x_j|$ *pour* $j \geqslant 2$, *on a*:

$$0 \leqslant \tilde{u}(x) \leqslant C\{|\tilde{u}|_{L^2(R^N)}^{1/2} |\nabla_{x_1} \tilde{u}|_{L^2(R^N)}^{1/2}\} \times |x_1|^{-(N_1-1)/2} |x_2|^{-N_2/2} \cdots |x_m|^{-N_m/2} \quad \text{p.p.} \tag{16}$$

Démonstration du Lemme III.1. On identifie $\tilde{u}$ à une fonction $\bar{u}(x_1, |x_2|, \ldots, |x_m|)$ et on pose pour $|x_2|, \ldots, |x_m| > 0$ fixés:

$$w = \int_0^{|x_2|} \cdots \int_0^{|x_m|} \bar{u}(x_1, t_2, \ldots, t_m) \, t_2^{N_2-1} \cdots t_2^{N_m-1} \, dt_2 \cdots dt_m.$$

On vérifie aisément que $w \in H_r^1(R^{N_1})$ et que:

$$|w|_{L^2(R^{N_1})} \leqslant C_N \prod_{j=2}^m |x_j|^{N_j/2} |\tilde{u}|_{L^2(R^N)},$$

$$|\nabla w|_{L^2(R^{N_1})} \leqslant C_N \prod_{j=2}^m |x_j|^{N_j/2} |\nabla_{x_1} \tilde{u}|_{L^2(R^N)}.$$

On déduit donc du Lemme I.1 l'inégalité suivante:

$$0 \leqslant w(x_1) \leqslant C\{|\tilde{u}|_{L^2(R^N)}^{1/2} |\nabla_{x_1} \tilde{u}|_{L^2(R^N)}^{1/2}\} |x_1|^{-(N_1-1)/2} |x_2|^{N_2/2} \cdots |x_m|^{N_m/2}.$$

On en déduit (16) en remarquant que:

$$w(x_1) \geqslant \tilde{u}(x_1, |x_2|, \ldots, |x_m|) \frac{|x_2|^{N_2}}{N_2} \cdots \frac{|x_m|^{N_m}}{N_m} \quad \text{p.p.}$$

Remarque III.3. On n'utilise pas en fait que $\nabla u \in L^2(R^N)$ mais seulement $\nabla_{x_1} u \in L^2(R^N)$.

On déduit du Lemme III.1 l'inégalité suivante:

$$0 \leqslant v_n(x) \leqslant C |x_1|^{-(N_1-1)/2} |x_2|^{-N_2/2} \cdots |x_m|^{-N_m/2} \quad \text{p.p.} \tag{17}$$

Cette inégalité permet de montrer que: $v_n \to^n v$ dans $L^q(Q_1)$ où $Q_1 = \{x \in R^N, |x_i| \geqslant 1, \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}\}$ et où $2 < q < 2N/(N-2)$. On sait déjà que: $v_n \to_n v$ dans $L^q(Q_2)$ où $2 \leqslant q < 2N/(N-2)$ et $Q_2 = \{x \in R^N, |x_i| \leqslant 1, \ \forall i \in \{1, \ldots, m\}\}$. Il reste donc à démontrer la convergence de v_n vers v dans L^q pour des domaines dont la forme typique est:

$$Q = \{x \in R^N; |x_1| \leqslant 1, \ldots, |x_p| \leqslant 1, |x_{p+1}| \geqslant 1, \ldots, |x_m| \geqslant 1\},$$

où $1 \leqslant p \leqslant m-1$ (on ne restreint pas la généralité en ne considérant que des domaines de cette forme car la démonstration qui suit utilise (17) mais sans utiliser la forme précise des exposants des $|x_i|$). De l'inégalité (17) on déduit aisément comme dans la Section I que si $B = \{(x_1, \ldots, x_p) \in R^{N_1} \times \cdots \times R^{N_p}, |x_i| \leqslant 1, \ \forall i \in \{1, \ldots, p\}\}$ alors:

$$\text{p.p.} \qquad B = \int_{|x_{p+1}| \geqslant 1} \cdots \int_{|x_m| \geqslant 1} v_n^q(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m)\, dx_{p+1} \cdots dx_m$$

$$\xrightarrow[n]{} \int_{|x_{p+1}| \geqslant 1} \cdots \int_{|x_m| \geqslant 1} v^q(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m)\, dx_{p+1} \cdots dx_m$$

pour $2 < q < 2N/(N-2)$. On note alors $y = (x_1, \ldots, x_p) \in R^{N_1} \times \cdots \times R^{N_p}$ et on pose:

$$\varphi_n(y) = \int_{|x_{p+1}| \geqslant 1} \cdots \int_{|x_m| \geqslant 1} v_n^q(x_1, \ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_m)\, dx_{p+1} \cdots dx_m.$$

Bien sûr φ_n est bornée dans $L^1(B)$ et $\varphi_n \to_n \varphi$ p.p. où φ est obtenue à partir de v comme φ_n l'est à partir de v_n.

De plus $\varphi_n \in W^{1,1}(B)$ si q est tel que $2(q-1) \leqslant 2N/(N-2)$, $q \in \,]2, 2N/(N-2)[$—un tel choix est évidemment toujours possible—en effet on a:

$$\|\nabla \varphi_n\|_{L^1(B)} \leqslant C \int_{R^N} v_n^{q-1} |\nabla_y v_n|\, dx \leqslant C\, |\nabla v_n|_{L^2}^{1/2}\, |v_n|_{L^{2(q-1)}}^{q-1}$$

donc $(\varphi_n)_{n>1}$ est bornée dans $W^{1,1}(B)$. Comme $\varphi_n \to_n \varphi$ p.p. dans B, on conclut: $\varphi_n \to_n \varphi$ dans $L^1(B)$. Ceci permet donc de montrer que si $q \in\,]2, 2N/(N-2)[$ et si $q \leqslant N/(N-2)+1$, alors:

$$\int_{R^N} |v_n|^q \, dx \xrightarrow[n]{} \int_{R^N} |v|^q \, dx,$$

d'où $v_n \to_n v$ dans $L^q(R^N)$. On en déduit la convergence dans $L^q(R^N)$ pour tout $q \in\,]2, 2N/(N-2)[$ par les inégalités de Hölder.

Étape 2: *Identification des u^j*. Nous avons vu que pour conclure il suffit de montrer que $v = u^m$ est donné par: $u^m = (\prod_{j=2}^m S_j)u$. Nous allons en fait montrer que $u^m = S_2 u^{m-1}$, $u^{m-1} = S_3 u^{m-2}, \ldots, u^2 = S_m u$. Montrons donc que $u^m = S_2 u^{m-1}$. Soit $R > 0$ fixé: on note $Q_R = \{x \in R^N$ tel que $|x_1| \leqslant R$, $x_2 \in R^{N_2}$, $|x_3| \leqslant R, \ldots, |x_m| \leqslant R\}$. D'après le Lemme III.2 qui suit on a:

$$u_n^{m-1} \xrightarrow[L^q(Q_R)]{n} u^{m-1} \qquad \text{pour } 2 < q < \frac{2N}{N-2}, \qquad \forall R < \infty,$$

D'après (13), on a:

$$\|u_n^m - S_2 u^{m-1}\|_{L^q(Q_R)} \leqslant \|u_n^{m-1} - u^{m-1}\|_{L^q(Q_R)}$$

et comme $u_n^m \to_n u^m$ dans $L^q(R^n)$, on en déduit:

$$u^m = S_2 u^{m-1} \qquad \text{sur } Q_R, \qquad \forall R < +\infty.$$

Comme on a:

$$\int_{R^N} |u_n^{m-1}|^q \, dx = \int_{R^N} |u_n^m|^q \, dx \xrightarrow[n]{} \int_{R^N} |u^m|^q \, dx = \int_{R^N} |u^{m-1}|^q \, dx$$

on en déduit que: $u_n^{m-1} \to_n u^{m-1}$ dans $L^q(R^N)$ $(2 < q < 2N/(N-2))$. De même montre-t-on: $u^{m-1} = S_3 u^{m-2}$, $u_n^{m-2} \to_n u^{m-2}$ dans $L^q, \ldots, u^2 = S_m u$, $u_n \to_n u$ dans L^q. On conclut donc avec le

LEMME III.2. *Soient Ω un domaine borné de R^N, de frontière Lipschitzienne, p un entier $\geqslant 2$. On note $H_s^1(\Omega \times R^p) = \{u \in H^1(\Omega \times R^p)$, $\forall x \in \Omega$, $(y \to u(x, y))$ est à symétrie sphérique sur $R^p\}$ et $N = n + p$.*

La restriction à $H_s^1(\Omega \times R^p)$ de l'injection de Sobolev de $H^1(\Omega \times R^p)$ dans $L^q(\Omega \times R^p)$ est compacte si $2 < q < 2N/(N-2)$.

Démonstration du Lemme III.2. Il suffit de démontrer le résultat pour la restriction à $X_r = \{u \in H_0^1(B_R \times R^p)$, u est à symétrie sphèrique par rapport à $y \in R^p\}$ de l'injection de $H^1(R^n \times R^p)$ dans $L^q(R^n \times R^p)$; où $B_R = \{x \in R^n, |x| < R\}$, $B_R \supset \bar{\Omega}$, et où on convient que si $u \in H_0^1(B_R \times R^p)$

alors $u \in H^1(R^n \times R^p)$ (en prolongeant u par 0 sur $(R^n - \bar{B}_R) \times R^p$). On note S l'opération de symmétrisation par rapport à x ($\in R^n$) de sorte que si $u \in X_r$ alors $Su \in X_r$ et Su est décroissant par rapport à $|x|$. Alors si $(u_n)_{n>1}$ est une suite bornée de X_r, (Su_n) est également bornée et on peut supposer sans restreindre la généralité que:

$$u_n \xrightarrow[n]{} u \text{ p.p. } B_R \times R^p, \text{ faiblement dans } H_0^1(B_R \times R^p) \text{ et}$$
$$\text{fortement dans } L^q(B_R \times B_K) \text{ où } K > 0,\ 2 \leqslant q < \frac{2N}{N-2}$$

en notant $B_K = \{y \in R^p, |y| < K\}$.

Exactement comme dans l'Étape 1 ci-dessus, on peut montrer que $Su_n \to_n v \in H_0^1(B_R \times R^p)$ et la convergence a lieu dans $L^q(B_R \times R^p)$ (ou $L^q(R^N)$ pour $2 < q < 2N/(N-2)$). Il suffit donc pour conclure de montrer que $v = Su$. Or pour tout $K > 0$, on a d'après (13):

$$\int_{R^n \times B_K} |Su - Su_n|^q \, dx \leqslant \int_{R^n \times B_K} |u - u_n|^q \, dx$$
$$= \int_{B_R \times B_K} |u - u_n|^q \, dx \xrightarrow[n]{} 0$$

et donc: $v = Su$.

III.3. *Quelques extensions*

Dans cette section nous donnons diverses extensions du Théorème III.1 qui se démontrent par la même méthode.

Le première concerne encore des sous-espaces de $H^1(R^N)$ mais d'une structure plus générale que H_s^1. Soient n, m, p des entiers $\geqslant 0$; soit Ω un domaine borné de R^N dans le cas où $n \geqslant 1$; soient $N_1, \ldots, N_m$ des entiers $\geqslant 2$ dans le cas où $m \geqslant 1$. On pose:

$$N = n + \sum_{i=1}^{m} N_i + p \quad \text{et} \quad N_s = \frac{2N}{N-2} \text{ si } N \geqslant 3, \quad N_s = +\infty \text{ si } N \leqslant 2.$$

On introduit K le cône convexe fermé de $H_0^1(\Omega \times R^{\bar{N}} \times R^p)$ (où $\bar{N} = \sum_{i=1}^m N_i$) défini par: K est l'ensemble des éléments u de $H_0^1(\Omega \times R^{\bar{N}} \times R^p)$ vérifiant:

(i) si $m \geqslant 1$, u est à symétrie sphérique par rapport à $y_1 \in R^{N_i}$, pour tout $i \in \{1, \ldots, m\}$.

(ii) si $p \geqslant 1$, u est décroissante par rapport à $z_i \in R_+$, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$ et croissant par rapport à $z_i \in R_-$, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

Si $p = 0$, on convient que $K = H_s^1(\Omega \times R^{\bar{N}})$; si $n = 0$, K est le cône inclus dans $H^1(R^{\bar{N}} \times R^p)$ formé des fonctions satisfaisant (i), (ii); si $m = 0$, K est le cône inclus dans $H_0^1(\Omega \times R^p)$ formé des fonctions satisfaisant (ii); et enfin on utilise des conventions similaires si deux des trois entiers m, p, n sont nuls: on supposera que $n+m+p \geqslant 1$.

THÉORÈME III.2. *Avec les notations précédentes, la restriction à K de l'injection de Sobolev de* $H_0^1(\Omega \times R^{\bar{N}} \times R^p)$ *dans* $L^q(\Omega \times R^{\bar{N}} \times R^p)$ *transforme les bornés en ensembles relativement compacts de* L_q, *si* $2 < q < N_s$.

Ce résultat se démontre exactement comme le Théorème III.1: aussi ne donnerons-nous pas la preuve.

Remarque III.4. On peut remplacer l'hypothèse que Ω est borné par l'hypothèse moins restrictive que l'injection de $H_0^1(\Omega)$ dans $L^2(\Omega)$ est compacte.

Remarque III.5. Le cas $p=0$, $m=1$ est démontré dans Esteban et Lions [9].

La deuxième généralisation concerne des espaces de Sobolev plus généraux que $H^1(R^N)$: on reprend les notations de la Section III.1, i.e. $N=\sum_{i=1}^m N_i$ avec $N_i \geqslant 2$. Soient de plus $\tau > 0$, $1 \leqslant p < \infty$; on considère $W_s^{\tau,p}(R^N) = \{u \in W^{\tau,p}(R^N),\ u$ est à symétrie sphérique par rapport à $x_i \in R^{N_i}\}$. On rappelle que $p^* = NP/(N-\tau p)$ si $\tau p < N$, $p^* = +\infty$ si $\tau p > N$.

THÉORÈME III.3. *Le restriction à* $W_s^{\tau,p}(R^N)$ *de l'injection de Sobolev de* $W^{\tau,p}(R^N)$ *dans* $L^q(R^N)$ *est compacte pour q tel que*: $p < q < p^*$.

Enfin une troisième généralization concerne des espaces du type suivant: $X = \{u \in L^q(R^N), \nabla u \in L^p(R^N)\}$ où $1 \leqslant p \leqslant \infty$, $1 \leqslant q \leqslant +\infty$. On prend toujours $N = \sum_{i=1}^m N_i$ avec $N_i \geqslant 2$ et on note $X_s = \{u \in X,\ u$ est à symétrie sphèrique par rapport à $x_i \in R^{N_i}\}$. On suppose que $q \neq p^* = NP/(N-p)$ si $p < N$, $q < +\infty$ si $p \geqslant N$; et on note I l'intervalle ouvert dont les bornes sont q et p^*. Alors on a:

THÉORÈME III.4. *Soient p, q vérifiant*: $1 \leqslant p, q \leqslant +\infty$; $q \neq p^*$. *Alors la restriction à* X_s *de l'injection de X dans* $L^\alpha(R^N)$ *est compacte si* $\alpha \in I$.

Remarque III.6. On peut également démontrer par des techniques analogues diverses combinaisons entre les Théorèmes III.1, III.2, III.3, III.4. On peut de plus dans le Théorème III.4 considérer des espaces comme, par exemple:

$$X = \{u \in L^\alpha(R^N) \cap L^\beta(R^N),\ D_{x_i} u \in L^{\gamma_i}(R^N),\ \forall i \in \{1,..., m\}\},$$

où $1 \leqslant \alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty$, $1 \leqslant \gamma_i \leqslant +\infty$, $\forall i \in \{1,..., m\}$.

Signalons á titre d'exemple le résultat suivant (fondamental pour l'étude du problème classique d'étoiles en rotation dans le cas $m=1$, $N_1=2$, $p=1$—cf. Lions [14]):

EXEMPLE III.1. On prend encore $\bar{N}=\sum_{i=1}^m N_i$, avec $N_i \geqslant 2$ et $N=\bar{N}+p$ où $p \geqslant 1$. Enfin on introduit $K=\{u \in L^\alpha(R^N) \cap L^\beta(R^N)$, $D_{x_i} u \in L^{\gamma_i}(R^N)$, $\forall i \in \{1,..., m\}\}$, u vérifie:

(i) u est à symétrie sphérique par rapport à $x_i \in R^{N_i}$,

(ii) $\forall x \in R^N$, $\forall h \in \{1,..., p\}$, $u(x, y)$ est décroissante par rapport à y_j pour $y_j \geqslant 0$ et croissante par rapport à y_j pour $y_j \leqslant 0$;

où $1<\alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty$, $1 \leqslant \gamma_i \leqslant +\infty$. Alors, l'injection de $L^\alpha \cap L^\beta$ dans $L^\gamma(R^N)$ transforme les bornés de K en ensembles relativement compacts pour $\gamma \in]\alpha, \beta[$.

Le démonstration du Théorème III.4 est semblable à celle du Théorème III.1 à une modification près de la fin de la preuve de l'Étape 1: expliquons cette modification sur un exemple: soit $(v_n)_{n \geqslant 1}$ une suite vérifiant: (v_n) est bornée dans $L^\alpha(R^N) \cap L^\beta(R^N)$ (avec $1<\alpha \leqslant \beta \leqslant +\infty$), (∇v_n) est bornée dans $L^\gamma(R^N)$ (avec $1 \leqslant \gamma \leqslant +\infty$) et v_n satisfait:

$$0 \leqslant v_n(x) \leqslant C|x_1|^{-\delta_1} \cdots |x_m|^{-\delta_m},$$

où $\delta_1,..., \delta_m>0$. On veut montrer que pour $q \in]\alpha, \beta[$, il existe une sous-suite de v_n convergeant dans $L^q(R^N)$. Sans restreindre la généralité on peut supposer que v_n converge p.p. sur R^N et dans $L^q_{\mathrm{loc}}(R^N)$ vers v $(\in L^\alpha(R^N) \cap L^\beta(R^N)$, $\nabla v \in L^\gamma(R^N))$. De plus de par l'inégalité ci-dessus: $v_n \to_n v$ dans $L_q(Q_1)$ où $Q_1=\{x \in R^N, |x_1| \geqslant 1,..., |x_m| \geqslant 1\}$. Comme dans la preuve du Théorème III.1, il nous suffit de montrer: $\int_Q |v_n|^q \, dx \to_n \int_Q |v|^q \, dx$ où $Q=\{x \in R^N, |x_1| \leqslant 1,..., |x_p| \leqslant 1,\ |x_{p+1}| \geqslant 1,..., |x_m| \geqslant 1\}$ et où $1 \leqslant p \leqslant m-1$. Remarquons que l'on sait déjà par le lemme de Fatou:

$$\liminf \int_Q |v_n|^q \, dx \geqslant \int_Q |v|^q \, dx.$$

De plus si $y=(x_1,..., x_p) \in B=\{(x_1,..., x_p) \in R^{N_1} \times \cdots \times R^{N_p},\ |x_i| \leqslant 1$ $\forall i \in \{1,..., p\}\}$, en posant:

$$w_n(y)=\int_{|x_{p+1}| \geqslant 1} \cdots \int_{|x_m| \geqslant 1} v_n^q(x_1,..., x_p, x_{p+1},..., x_m) \, dx_{p+1} \cdots dx_m,$$

$$w(y)=\int_{|x_{p+1}| \geqslant 1} \cdots \int_{|x_m| \geqslant 1} v^q(x_1,..., x_p, x_{p+1},..., x_m) \, dx_{p+1} \cdots dx_m$$

on voit que w_n est bornée dans $L^1(B)$ et $w_n \to_n w$ p.p. sur B.

Le seul point nouveau est que l'on ne peut trouver $q \in]\alpha, \beta[$ tel que $(\nabla_y w_n)$ soit bornée dans $L^1(B)$ (i.e., trouver $q \in]\alpha, \beta[$ satisfaisant $(q-1)\gamma' \in [\alpha, \beta]$ où $\gamma' = \gamma/(\gamma - 1)$). Cette difficulté est résolue par la remarque suivante qui montre que l'on peut toujours prendre $\beta = +\infty$ et donc le choix de q devient trivialement possible: en effet si $M > 0$, on pose $\tilde{v}_n = v_n \wedge M$; bien sûr $\tilde{v}_n$ satisfait les mêmes propriétés que v_n avec $\beta = +\infty$. Si on montre que pour $q \in]\alpha, \beta[$, $\tilde{v}_n \to_n v = v \wedge M$ dans $L^q(R^N)$ alors on peut conclure car on a en choisissant $\varepsilon > 0$ tel que $q + \varepsilon \leqslant \beta$.

$$C \geqslant \int_{R^N} v_n^{q+\varepsilon}\, dx \geqslant M^\varepsilon \int_{(v_n \geqslant M)} v_n^q\, dx,$$

$$\int_{R^N} v_n^q\, dx \leqslant \int_{R^N} \tilde{v}_n^q\, dx + \int_{(v_n \geqslant M)} v_n^q\, dx \leqslant \int_{R^N} \tilde{v}_n^q\, dx + \frac{C}{M^\varepsilon}$$

d'où on déduit:

$$\limsup \int_{R^n} v_n^q\, dx \leqslant \int_{R^N} \tilde{v}^q\, dx + \frac{C}{M^\varepsilon} \leqslant \int_{R^N} v^q\, dx + \frac{C}{M^\varepsilon}$$

et on conclut en faisant tendre M vers $+\infty$.

Pour conclure on remarque que si $\bar{q} \in]\alpha, +\infty[$, vérifie: $(\bar{q}-1)\gamma' \in [\alpha, +\infty]$ alors $\tilde{w}_n$ (obtenu à partir de $\tilde{v}_n$ comme w_n l'est à partir de v_n) converge dans $L^1(B)$ vers $\tilde{w}$ et donc $\tilde{v}_n$ converge dans $L^{\bar{q}}(R^N)$ vers $\tilde{v}$. On en déduit que $\tilde{v}_n$ converge dans $L^q(R^N)$ vers $\tilde{v}$ pour $q \in]\alpha, \beta[$ grâce aux inégalités de Hölder. Et finalement le raisonnement ci-dessus montre que: v_n converge vers v dans $L^q(R^N)$ pour $q \in]\alpha, \beta[$.

III.4. *Quelques inégalités*

Dans cette section nous démontrons quelques inégalités sur des fonction à symétrie sphérique par rapport à un groupe de variables et "décroissantes" par rapport à un autre groupe de variables. Ces inégalités complètent (et sont à la base) des résultats de compacité des sections précédentes.

Soient n, p deux entiers: on suppose $n \geqslant 2$, $p \geqslant 1$. On notera x un point générique de R^n et y un point générique de R^p de composantes $y = (y_1, \ldots, y_p)$. Soient $\alpha, \beta \in [1, +\infty]$. On pose $N = n + p$. On introduit $K = \{u \in L^\alpha(R^N), \nabla_x u \in L^\beta(R^N)\}$ et u vérifie:

(i) $u(x, y)$ est pour tout y à symétrie sphérique par rapport à $x \in R^N$;

(ii) $u(x, y)$ est pour tout x décroissant par rapport à y_i si $y_i \geqslant 0$, croissant par rapport à y_i si $y_i \leqslant 0$, pour tout $i \in \{1, \ldots, p\}$.

THÉORÈME III.5. *Soient $n \geqslant 2$, $p \geqslant 1$ deux entiers; soient α, β vérifiant: $1 \leqslant \alpha \leqslant +\infty$, $1 \leqslant \beta \leqslant +\infty$. Alors on a, pour tout u de K:*

$$0 \leqslant u(x, y) \leqslant C\{\|\nabla_x u\|_{L^\beta(R^N)}^\theta \|u\|_{L^\alpha(R^N)}^{1-\theta}\} |x|^{-(n-1)\theta} |y_1|^{-\theta} \cdots |y_p|^{-\theta}, \quad (19)$$

où C ne dépend que de α, β, n, p et $\theta = \beta'/(\beta' + \alpha)$, $\beta' = \beta/(\beta - 1)$.

Remarque III.7. La démonstration donnée ci-dessous repose sur la Proposition II.1. On peut également appliquer le Corollaire II.2 et obtenir ainsi d'autres inégalités du même type que nous ne donnerons pas ici.

Remarque III.8. Si on impose de plus aux éléments de K d'être à symétrie sphèrique par rapport à $y \in R^p$, on a alors:

$$0 \leqslant u(x, y) \leqslant C\{\|\nabla_x u\|_{L^\beta(R^N)}^\theta \|u\|_{L^\alpha(R^N)}^{1-\theta}\} |x|^{-(n-1)\theta} |y|^{-p\theta}. \quad (19)$$

Démonstration du Théorème III.5. La preuve copie celle du Lemme III.1. Démontrons (18) par exemple pour $y_i > 0$, $\forall i \in \{1,..., p\}$. On introduit: $v(x) = \int_0^{y_1} \cdots \int_0^{y_p} u(x, z)\, dz$. On vérifie aisément que:

$$\|v\|_{L^\alpha(R^N)} \leqslant (y_1 \cdots y_p)^{1/\alpha'} \|u\|_{L^\alpha(R^N)},$$
$$\|\nabla v\|_{L^\beta(R^N)} \leqslant (y_1 \cdots y_p)^{1/\beta'} \|\nabla_x u\|_{L^\beta(R^N)}.$$

On conclut alors aisément en appliquant la Proposition II.1 (puisque v est à symétrie sphèrique) et en remarquant que:

$$v(x) \geqslant (y_1 \cdots y_p)\, u(x, y) \geqslant 0.$$

APPENDICE: UNE REMARQUE SUR LA COMPACITÉ

Dans cet appendice nous donnons un résultat élémentaire de compacité qui permet en quelque sorte d'étendre "la zone de compacité" dans les résultats précédents.

PROPOSITION. *Soient α, β, γ trois réels satisfaisant: $1 \leqslant \alpha < \beta < \gamma < +\infty$. Soit C un ensemble borné dans $L^\alpha(R^N) \cap L^\gamma(R^N)$, relativement compact dans $L^\beta(R^N)$. Enfin soit $f \in C(R, R)$ vérifiant:*

$$|f(t)| = o(|t|^\alpha), \qquad \text{quand } t \to 0; \quad (20)$$

$$|f(t)| = o(|t|^\gamma), \qquad \text{quand } |t| \to +\infty. \quad (21)$$

Alors l'ensemble des fonctions $f(u)$, pour $u \in C$, est relativement compact dans $L^1(R^N)$.

Démonstration. Il suffit de considérer une suite u_n de C, convergente dans $L^\beta(R^N)$ vers un élément u de $L^\alpha(R^N) \cap L^\gamma(R^N)$ et de montrer que: $f(u_n) \to f(u)$ dans $L^1(R^N)$. De (21) on déduit aisément que: $\int_{B_R} |f(u) - f(u_n)|\, dx \to_{n\to\infty} 0$, pour tout $R < \infty$ où $B_R = \{x \in R^N, |x| \leqslant R\}$. De plus si $\varepsilon > 0$ est fixé, il existe C_ε tel que: $|f(t)| \leqslant \varepsilon(|t|^\alpha + |t|^\gamma) + C_\varepsilon |t|^\beta$, $\forall t \in R$. Enfin il existe $R < \infty$ tel que:

$$\int_{B^R} |u_n|^\beta + |u|^\beta\, dx \leqslant \frac{\varepsilon}{C_\varepsilon}, \qquad \forall n \geqslant 1,$$

où $B^R = \{x \in R^N, |x| \geqslant R\}$. D'où on déduit:

$$\begin{aligned}
&\int_{R^N} |f(u_n) - f(u)|\, dx \\
&\quad \leqslant \int_{B_R} |f(u_n) - f(u)|\, dx + \int_{B^R} |f(u_n)| + |f(u)|\, dx \\
&\quad \leqslant \int_{B_R} |f(u_n) - f(u)|\, dx + \varepsilon + \varepsilon \int_{B^R} |u_n|^\alpha + |u_n|^\gamma + |u|^\alpha + |u|^\gamma dx \\
&\quad \leqslant C\varepsilon + \int_{B_R} |f(u_n) - f(u)|\, dx
\end{aligned}$$

et on conclut.

REFERENCES

1. H. BERESTYCKI ET P. L. LIONS, Existence d'ondes solitaires dans des problèmes non linéaires du type Klein–Gordon, *C.R. Acad. Sci. Paris* **287** (1978), 503–506.
2. H. BERESTYCKI ET P. L. LIONS, Existence d'ondes solitaires dans des problèmes non linéaires du type Klein–Gordon, *C.R. Acad. Sci. Paris* **288** (1979), 395–398.
3. H. BERESTYCKI ET P. L. LIONS, Non linear scalar fields equations, I and II, à paraître dans *Arch. Rat. Mech. Anal.*
4. H. BERESTYCKI ET P. L. LIONS, Existence of a ground state in nonlinear equations of the type Klein–Gordon, *in* "Variational Inequalities and Complementarity Theory and Applications" (R. W. Cottle *et al.*, Eds.), Wiley, New York, 1979.
5. H. BERESTYCKI ET P. L. LIONS, travail en préparation.
6. H. J. BRASCAMP, E. H. LIEB, ET J. M. LUTTINGER, A general rearrangement inequality for multiple integrals, *J. Funct. Anal.* **17** (1974), 227–237.
7. S. COLEMAN, V. GLAZER, ET A. MARTIN, Action minima among solutions to a class of Euclidean scalar field equations, *Comm. Math. Phys.* **58** (1978), 211–221.
8. M. J. ESTEBAN, à paraître dans *Nonlinear Anal T.M.A.*
9. M. J. ESTEBAN ET P. L. LIONS, A compactness lemma, à paraître dans *Nonlinear Anal. T.M.A.*
10. G. H. HARDY, J. E. LITTLEWOOD, ET G. POLYA, "Inqualities," Cambridge Univ. Press, London/New York, 1952.

11. E. H. LIEB, Existence and uniqueness of the minimizing solution of Choquard's nonlinear equation, *Stud. Appl. Math.* **57** (1977), 93–105.
12. J. L. LIONS ET E. MAGENES, "Problèmes aux limites non homogènes et applications," Vol. 1, Dunod, Paris, 1968.
13. P. L. LIONS, The Choquard equation and related questions, *Nonlinear Anal. T.M.A.* **4** (1980), 1063–1073.
14. P. L. LIONS, Minimization problems in $L^1(R^N)$, *J. Funct. Anal.* **41** (1981), 236–275.
15. P. L. LIONS, A minimization problem in L^1 arising in astrophysics, *in* "Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications," Collège de France seminar, Vol. II, Pitman, London 1982.
16. P. L. LIONS, Quelques remarques sur la symétrisation de Schwarz, *in* "Nonlinear Partial Differential Equations and Their Applications," Collège de France seminar, Vol. I, Pitman, London 1981.
17. P. L. LIONS, travail en préparation.
18. E. MAGENES, Spazi di interpolazione ed equazioni a derivate parziali, *in* "Atti del VII Congresso del'Unione Matematica Italiana," Genova, 1963.
19. W. A. STRAUSS, Existence of solitary waves in higher dimensions, *Comm. Math. Phys.* **55** (1977), 149–162.