MATHEMATICS

UNE NOTION DE COMPACITÉ DANS LA THÉORIE DES ESPACES VECTORIELS TOPOLOGIQUES

PAR

T. A. SPRINGER

(Communicated at the meeting of January 30, 1965)

Dans la théorie des espaces vectoriels topologiques localement convexes sur le corps des nombres réels ou complexes des conditions de compacité sont nécessaires dans les enoncés de certains résultats. Si on essaie d'étendre ces résultats aux espaces vectoriels topologiques localement convexes sur un corps valué non-archimédien, il apparaît que la compacité est parfois une condition trop restrictive. Dans cette note, on introduit une notion un peu plus faible, la "c-compacité", qui semble plus adéquate pour ces questions.

Des applications à la théorie de la dualité sont données dans [7].

1. Dans cette note, K désignera un corps valué complet, on suppose la valuation non-triviale. Dans le cas non-archimédien, nous désignerons par A l'anneau des entiers de K. Dans le cas archimédien, K est isomorphe à $\mathbf{R}$ où $\mathbf{C}$ (d'après un théorème bien connu d'Ostrowski), dans ce cas nous identifierons K à $\mathbf{R}$ où à $\mathbf{C}$.

Soit E un espace vectoriel sur K. Nous aurons besoin de la notion de *sous-ensemble convexe* de E. Dans le cas archimédien, c'est la notion usuelle. Dans le cas non-archimédien, nous utiliserons la définition suivante.

(1.1) (*Définition*) *Supposons la valuation de K non-archimédienne. Un sous-ensemble C de l'espace vectoriel E est dit convexe, lorsque $\lambda x+\mu y+\nu z \in C$ pour $x, y, z \in C$, $\lambda, \mu, \nu \in A$, $\lambda+\mu+\nu=1$.*

Il est facile de voir que cette définition est équivalente à celle de [6] (p. 532).

(1.2) *L'intersection d'une famille non-vide de sous-ensembles convexes d'un espace vectoriel sur K est un sous-ensemble convexe.*

(1.3) *Soient E, E' deux espaces vectoriels sur K; soit f une application linéaire de E dans E'. Si C est convexe dans E alors $f(C)$ est convexe dans E'; si C' est convexe dans E' alors f^{-1} (C') est convexe dans E.*

La vérification de (1.2) et (1.3) est immédiate.

(1.4) (*Définition*) *Soit X une partie de l'espace vectoriel E. Un filtre convexe $\mathscr{F}$ sur X est un filtre sur X qui possède une base formée de parties convexes de X. Une telle base est appelée base convexe du filtre convexe $\mathscr{F}$.*

Exemples:

(a) Supposons que E soit un espace vectoriel topologique sur K. Pour que la topologie de E soit localement K-convexe il faut et il suffit que pour tout $x \in E$ le filtre des voisinages de x soit un filtre convexe (voir [2], Chap. II, § 2, no. 1; pour le cas non-archimédien voir [7]).

(b) Supposons la valuation de K non-archimédienne. Soit E un espace *normé non-archimédien* sur K, cela veut dire que la norme vérifie l'inégalité ultramétrique $|x+y| \leqslant \operatorname{Max}(|x|, |y|)$.

Soit $(x_n)_{n \in \mathbf{N}}$ une suite "pseudo-convergente" dans E. Cela veut dire que $|x_{n+1}-x_n| < |x_n - x_{n-1}|$ $(n \geqslant 2)$. Soit $C_n = \{x \in E \mid |x-x_n| \leqslant |x_{n+1}-x_n|\}$. Il est aisé de voir (en utilisant l'inégalité ultramétrique) que $C_{n+1} \subset C_n$. Les C_n forment une base de filtre, le filtre engendré est évidemment convexe. Nous appelons *filtre convexe élémentaire* un tel filtre.

L'ordre de l'ensemble des filtres sur le sous-ensemble X de l'espace vectoriel E induit un ordre de l'ensemble des filtres convexes sur X. Nous appelons *filtre convexe maximal* un élément maximal de l'ensemble ordonné des filtres convexes sur X.

Remarque. Un filtre convexe maximal n'est pas nécessairement un ultrafiltre!

(1.5) *Pour tout filtre convexe $\mathscr{F}$ sur le sous-ensemble X de l'espace vectoriel E il existe un filtre convexe maximal plus fin que $\mathscr{F}$.*

Cela se démontre comme le théorème sur l'existence d'ultrafiltres ([1], Chap. I, § 6, no. 4). Le point essentiel est que l'ensemble ordonné des filtres convexes sur X est inductif. Cela se voit en observant qu'un filtre convexe est complètement déterminé par les ensembles convexes qu'il contient.

(1.6) *Soit $\mathscr{F}$ un filtre convexe maximal sur la partie X de E. Si C est une partie convexe de X alors $C \in \mathscr{F}$ ou $C \cap D = \emptyset$ avec $D \in \mathscr{F}$.*

(1.7) *Soit $\mathscr{G}$ un système de générateurs convexes d'un filtre convexe sur la partie X de E. Si pour tout partie convexe C de X on a $C \in \mathscr{G}$ ou $C \cap D = \emptyset$ où $D \in \mathscr{G}$, alors $\mathscr{G}$ est la famille de tous les ensembles convexes contenus dans un filtre convexe maximal sur X.*

Démontrons (1.7). Soit $\mathscr{F}$ un filtre convexe sur X qui contient $\mathscr{G}$. Si $C \in \mathscr{F}$ est convexe, la condition de l'énoncé entraîne que $C \in \mathscr{G}$ ce qui démontre (1.7).

(1.8) *Soit $\mathscr{B}$ une base convexe d'un filtre convexe maximal sur la partie convexe X de l'espace vectoriel E. Soit f une application linéaire de E dans* *un espace vectoriel E'. Alors $f(\mathscr{B})$ est une base convexe d'un filtre convexe maximal sur $X' = f(X)$.*

Soits C' une partie convexe de X'. Alors $C = f^{-1}(C') \cap X$ est convexe dan$X$ (en vertu de (1.2) et (1.3), X étant convexe). Si C contient un ensemble D de $\mathscr{B}$, alors $f(C) = C'$ contient $f(D) \in f(\mathscr{B})$. Sinon (1.6) implique que $C \cap D = \emptyset$ pour un $D \in \mathscr{B}$. Alors $C' \cap f(D) = \emptyset$. Ceci montre que $f(\mathscr{B})$ vérifie la condition de (1.7) et (1.8) résulte de (1.7).

A partir de maintenant nous supposons que E est un espace vectoriel topologique *localement K-convexe et séparé.*

(1.9) *Pour qu'un filtre convexe maximal $\mathscr{M}$ sur la partie convexe X de E soit convergent vers un point $x \in X$, il faut et il suffit que x soit adhérent à $\mathscr{M}$.*

En effet, pour que x soit adhérent à $\mathscr{M}$ il faut et il suffit qu'il existe un filtre plus fin que $\mathscr{M}$ qui est plus fin que le filtre $\mathscr{F}$ des voisinages de x sur X ([1], Chap. I, § 7, no. 2). Or, $\mathscr{F}$ étant convexe et $\mathscr{M}$ étant convexe maximal, cette condition équivaut à: $\mathscr{M}$ contient $\mathscr{F}$. Cela implique (1.9).

(1.10) *(Définition) Une partie X de E est appelée c-compacte si la condition suivante est vérifiée:*

Tout filtre convexe sur X possède au moins un point adhérent dans X.

(1.11) *Soit X une partie c-compacte de E, soit Y une partie fermée de X. Alors Y est c-compacte.*

Cela résulte des définitions.

(1.12) *Toute partie convexe et c-compacte de E est fermée.*

Soit X une partie convexe et c-compacte, soit $x \in \bar{X}$. Le filtre V des voisinages de x dans E induit sur X un filtre V_X. E étant localement convexe et X étant convexe, V_X est un filtre convexe sur X, qui a donc un point adhérent $y \in X$. Or y est aussi adhérent à V, par conséquent $y = x$ et $x \in X$.

(1.13) *Les propriétés suivantes d'un sous-ensemble convexe X de E sont équivalentes:*

(i) *X est c-compact,*

(ii) *tout filtre convexe maximal sur X est convergent,*

(iii) *toute famille d'ensembles fermés convexes, dont l'intersection est vide, contient une sous-famille finie, dont l'intersection est vide.*

(i) $\Rightarrow$ (ii) résulte de (1.10), (ii) $\Rightarrow$ (i) résulte de (1.5) et (1.9).

(i) $\Leftrightarrow$ (iii) se démontre comme le résultat correspondant sur les espaces topologiques compacts ([1], Chap. I, § 9, no. 1).

(1.14) *Soit f une application linéaire continue de E dans un espace vectoriel topologique localement K-convexe E'. Soit X un sous-ensemble convexe et c-compact de E. Alors $f(X)$ est c-compact.*

Soit $(F_i')_{i \in I}$ une famille de sous-ensembles convexes fermés de $f(X)$ dont l'intersection est vide. Posons $F_i = f^{-1}(F_i') \cap X$. Alors F_i est convexe ((1.2) et (1.3)) et fermé (X étant fermé par (1.12) et f étant continu). L'intersection de la famille (F_i) est vide. La propriété (iii) de (1.13) donne une sous-famille finie dont l'intersection est vide, l'intersection de la sous-famille correspondante de (F_i') est aussi vide.

(1.15) (*Définition*) *Une partie convexe X de E est relativement c-compacte, si X est contenue dans une partie convexe c-compacte de E.*

(1.16) *Pour que la partie convexe X de E soit relativement c-compacte, il faut et il suffit que l'adhérence $\bar{X}$ soit c-compacte.*

La suffisance est immédiate en remarquant que $\bar{X}$ est convexe si X l'est. La nécessité résulte de (1.11) et (1.12).

Soit $(E_i)_{i \in I}$ une famille d'espaces vectoriels topologiques localement K-convexes. Soit E l'espace produit, $E = \Pi_{i \in I} E_i$. C'est un espace vectoriel topologique localement K-convexe.

(1.17) (*"théorème de Tychonoff"*) *Soit X_i une partie convexe et c-compacte de E_i. Alors $X = \Pi_{i \in I} X_i$ est une partie convexe et c-compacte de $E = \Pi_{i \in I} E_i$.*

La convexité de X se vérifie aisément. Soit maintenant $\mathscr{M}$ un filtre convexe maximal sur X. D'après (1.8), pour tout $i \in I$ la projection $pr_i(\mathscr{M})$ est une base convexe d'un filtre convexe maximal sur $pr_i(X) = X_i$. D'après (1.13) (ii) ce filtre est convergent, il s'ensuit que $\mathscr{M}$ est convergent.

(1.18) *Pour qu'une partie convexe de $E = \Pi_{i \in I} E_i$ soit relativement c-compacte, il faut et il suffit que chacune de ses projections soit relativement c-compacte dans l'espace facteur correspondant.*

Cela résulte de (1.17).

Remarques.

(a) Une partie compacte de E est c-compacte,

(b) Un "théorème de Borel-Lebesgue" n'existe *pas* pour les ensembles c-compacts convexes dans un espace vectoriel topologique localement K-convexe E. Au no. 2 on verra qu'il peut se passer que le corps K lui-même est c-compact (comme espace vectoriel de dimension 1). Cela montrera qu'un ensemble c-compact n'est pas nécessairement borné. Bien entendu, ces corps ont une valuation non-archimédienne. Dans le cas archimédien, où $K = \mathbf{R}$ ou $K = \mathbf{C}$, il est aisé de voir que K n'est pas c-compact (dans $\mathbf{R}$ par exemple, les ensembles convexes fermés $x \geqslant n$ où $n \in \mathbf{N}$, ont une intersection vide, bien que toute intersection finie soit non-vide).

(c) L'introduction de la notion de c-compacité est motivée surtout par les applications dans le cas non-archimédien. Dans le cas archimédien la question se pose quelle est la relation avec la compacité. Est il vrai qu'une partie convexe c-compacte d'un espace vectoriel topologique localement convexe sur $\mathbf{R}$ ou $\mathbf{C}$ est compacte? On voit aisément qu'une telle partie est faiblement compacte.

2. Nous supposons dans ce numéro que la valuation de K est non-archimédienne.

Soit E un espace vectoriel normé non-archimédien sur K. Nous appelons *boule* dans E un ensemble $\{x|\ |x-a|\leqslant\varrho\}$ ou $\{x|\ |x-a|<\varrho\}$, où $a\in E$, $\varrho\in\mathbf{R}^+$.

Appelons *boule fermée* (resp. *ouverte*) une boule de la première (seconde) espèce. Toute boule est un sous-ensemble convexe, ouvert et fermé de E. L'inégalité ultramétrique implique que lorsque l'intersection de deux boules (ouvertes ou fermées) est non-vide, l'une des deux est contenue dans l'autre.

Rappelons que l'espace normé K est dit *sphériquement complet* lorsque toute famille de boules fermées, qui est totalement ordonnée par inclusion, a une intersection non-vide. Cette notion est introduite dans [3].

Dans le résultat suivant nous considérons K comme espace normé sur lui-même. Rappelons que A dénote l'anneau des entiers de K.

(2.1) *Les propriétés suivantes du corps K sont équivalentes:*

(i) *K est c-compact,*

(ii) *A est c-compact,*

(iii) *K est sphériquement complet,*

(iv) *tout filtre convexe élémentaire possède au moins un point adhérent.*

A étant fermé dans K, (i) entraîne (ii) par (1.11).

Supposons maintenant (ii) verifié. Alors, par homothétie, toute boule $B=\{x|\ |x|\leqslant\varrho\}$ est c-compacte. Soit maintenant $(B_i)_{i\in I}$ une famille de boules fermées qui est totalement ordonnée par inclusion. Prenons ϱ assez grand, afin que $B_i\subset B$ pour un $i\in I$. Alors $(B\cap B_i)_{i\in I}$ est une famille d'ensembles non-vides fermés convexes, contenus dans B, qui est totalement ordonnée par inclusion. B étant c-compact, il résulte de (1.13) (iii) que l'intersection de la famille est non-vide. Ainsi (ii) entraîne (iii). Pour démontrer (iii) $\Rightarrow$ (iv), remarquons que les ensembles C_n, qui entrent dans la définition des filtres convexes élémentaires (voir exemple (b) après (1.4)), sont des boules fermées. Il est alors clair que (iii) implique (iv).

Observons maintenant que tout sous-ensemble convexe de K, différent de K, est une boule. Supposons (iv) vérifié et soit (F_i) une famille de sous-ensembles fermés convexes de K dont l'intersection est vide. Supposons $F_i\cap F_j\neq\emptyset$ pour tout (i,j). Les F_i étant des boules, la famille (F_i) doit être totalement ordonnée par inclusion. On peut en extraire une famille (F_i'), finie ou dénombrable, strictement décroissante, dont l'intersection est vide. Prenons alors $x_n \in F_n' \cap \complement F'_{n+1}$. Alors $|x_{n+1} - x_n| < |x_n - x_{n-1}|$.

Donc (x_n) détermine un filtre convexe élémentaire, qui a un point d'adhérence d'après (iv). Ceci contredit $\bigcap_i F_i' = \emptyset$, par conséquent (iv) implique (i).

Les corps c-compacts ont d'autres propriétés intéressantes. Par exemple, le théorème de Hahn–Banach est valable dans les espaces de Banach sur un tel corps (voir [3]). Une caractérisation algébrique de ces corps est donnée par le résultat suivant.

(2.2) *Pour qu'un corps K soit c-compact il faut et il suffit qu'il soit maximalement complet.*

Rappelons qu'un corps K est dit maximalement complet, lorsqu'il n'existe pas d'extension valuée de K qui a même groupe de valeurs et même corps résiduel que K. (2.2) est un résultat connu (dû à Ostrowski). On trouve une démonstration dans [4].

Du reste, la partie "il faut" de (2.2) se déduit rapidement à l'aide de quelques résultats sur les espaces de Banach, démontrés par Monna ([5]). En effet, supposons K c-compact. Soit L une extension valuée de K avec le même groupe de valeurs et le même corps résiduel. On peut supposer L complet. Les propriétés de L s'expriment de la manière suivante: pour tout $x \in L$ il existe $\lambda \in K$ tel que $|\lambda x - 1| < 1$ (on a alors $|\lambda x| = 1$). D'autre part, K étant c-compact (donc sphériquement complet d'après (2.1)), toute droite D de l'espace de Banach L sur K possède un supplémentaire orthogonal H, c'est-à-dire un hyperplan fermé H tel que $L = D + H$, $|x+y| = \mathrm{Max}\,(|x|, |y|)$ pour $x \in D, y \in H$ (voir [5]). En appliquant ceci à la droite K dans L, on voit que $H = 0$, donc que $L = K$.

3. *Espaces localement c-compacts*

Nous supposerons la valuation de K non-archimédienne. Soit E un espace localement K-convexe.

(3.1) (*Définition*) *E est dit localement c-compact, lorsqu'il existe un voisinage de* 0 *dans E qui est convexe et c-compact.*

Le résultat suivant est analogue à un théorème bien connu.

(3.2) *Soit E un espace normé non-archimédien sur K qui est localement c-compact. Alors K est c-compact et la dimension de E est finie.*

Soit $|\cdot|$ la norme sur E, soit $B = \{x \in E \mid |x| \leqslant 1\}$. B est c-compacte lorsque E est localement c-compact. En plongeant E dans sa complétion, on voit, utilisant (2.1) (iv), que B est complet. Donc E est complet; c'est un espace de Banach.

D'autre part, toute droite dans E est fermée et est isomorphe à K comme espace vectoriel. E étant localement c-compact, K l'est aussi. Par (2.1), K est c-compact.

On dit qu'une famille $(x_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est *orthogonale* lorsque

$$\Big|\sum_{i\in S}\lambda_i x_i\Big| = \operatorname*{Max}_{i\in S}|\lambda_i x_i|.$$

pour toute sous-famille finie S de I et toute famille $(\lambda_i)_{i\in S}$ d'éléments de K.

Maintenant nous utilisons le lemme suivant.

Lemme. *Sous les hypothèses de* (3.2), *toute famille orthogonale de vecteurs de E est finie.*

Démonstration du lemme. Soit $(x_i)_{i\in I}$ une telle famille. On peut supposer que $0<c<x_i\leqslant 1$, où c est une constante convenable. Pour tout sous-ensemble fini S de I désignons par F_S l'ensemble des vecteurs x de E de la forme suivante

$$x=\sum_{i\notin S}\lambda_i x_i \text{ avec } |x|\leqslant 1,\ \sum_{i\notin S}\lambda_i=1$$

où (λ_i) tend vers 0 suivant le filtre des complémentaires des parties finies de I. On voit aisément qu'alors les sommes ont un sens. L'ensemble des éléments x de E de la forme $x=\sum_{i\in I}\lambda_i x_i$ avec $\lim\lambda_i=0$ est un sous-espace complet (donc fermé) de E.

F_S est un sous-ensemble non-vide convexe, fermé de B et il est clair que l'intersection de tous les F_S est vide. B étant c-compact, l'un des F_S doit être vide, ce qui n'est possible que si I est finie.

Pour terminer la démonstration de (3.2), nous appliquons un résultat de Monna ([5], un cas particulier a déjà été utilisé au no. 2), qui dit que dans un espace de Banach E sur un corps c-compact K tout sous-espace F de dimension finie possède un supplémentaire fermé orthogonal G, c'est-à-dire tel que $E=F+G$, $|x+y|=\text{Max}(|x|, |y|)$ pour $x\in F$, $y\in G$.

Si la dimension de E était infinie, on pourrait construire par récurrence, en appliquant le résultat cité, une famille dénombrable orthogonale, ce qui contredit le lemme. Donc la dimension de E doit être finie.

Remarques.

(a) Contrairement à ce qui se passe dans le cas archimédien, (3.2) ne reste plus vrai si on suppose seulement que E est un espace vectoriel topologique localement K-convexe. Un contre-exemple est donné par tout produit K^I, où I est un ensemble infini. D'après (1.17) cet espace est c-compact lorsque K l'est.

(b) J'ignore si (3.2) reste vrai dans le cas archimédien. Cela résulterait d'une réponse affirmative à la question soulevée à la fin du no. 1 (remarque (c)).

Pour les espaces non-normés on a le résultat suivant.

(3.3) *Soit E un espace vectoriel topologique localement K-convexe et localement c-compact sur K. Alors E est c-compact.*

Dans la démonstration de (3.3) nous utiliserons quelques résultats sur les semi-normes continues sur E, qu'on peut trouver dans [7]. Le fait que E est localement c-compact entraîne qu'il existe une semi-norme continue p sur E telle que

$$U = \{x \in E |\ p(x) \leqslant 1\}$$

soit c-compact.

Soit F l'ensemble des $x \in E$ avec $p(x) = 0$. F est un sous-espace fermé de E, contenu dans U. U étant c-compact, F l'est aussi (d'après (1.11)). D'autre part, p induit une norme sur le quotient E/F et l'application linéaire canonique de E sur E/F, muni de la topologie déterminée par cette norme, est continue. D'après (1.14) l'image de U, qui est un voisinage de 0 dans E/F, est c-compact. Alors (3.2) implique que la dimension de E/F est finie. En outre, K est c-compact.

Pour terminer la démonstration de (3.3) il faut encore montrer ceci: soit F un sous-espace c-compact de E de codimension finie, alors E est c-compact. Par récurrence sur la codimension de F, on voit qu'il suffit de considérer le cas où F est un hyperplan. Prenons alors $a \notin F$ et définissons une application linéaire continue f de $K \times F$ sur E par $f((\lambda, x)) = \lambda a + x$. (1.14) montre maintenant que E est c-compact.

Dans certains cas, on peut donner des précisions sur la structure d'un espace E localement K-convexe et c-compact. Lorsque E est normé et c-compact, il est évidemment aussi localement c-compact et (3.2) montre que E est de dimension finie.

Un autre cas est celui où E est un espace de Fréchet (c'est-à-dire métrisable et complet). Alors on peut montrer que la c-compacité de E implique ou bien que E est de dimension finie ou bien que E est isomorphe comme espace vectoriel topologique à l'espace $K^{\mathbf{N}}$, produit d'un nombre dénombrable de copies de K. Remarquons aussi qu'un espace E c-compact est linéairement compact.

Mathematisch Instituut der
Rijksuniversiteit, Utrecht

REFERENCES

1. BOURBAKI, N., Topologie générale, Chap. I et II, 3e éd., Paris 1961.
2. ————, Espaces vectoriels topologiques, Chap. I et II, Paris 1953.
3. INGLETON, A. W., The Hahn–Banach theorem for non-Archimedean valued fields, Proc. Cambridge Phil. Soc.**48**, 41–45 (1952).
4. LAZARD, M., Les zéros d'une fonction analytique d'une variable sur un corps valué complet, Publ. Math. IHES, no. 14, Bures-sur-Yvette, 1962.
5. MONNA, A. F., Sur les espaces normés non-archimédiens I, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. **A 59**, 475–483 (1956).
6. ————, Ensembles convexes dans les espaces vectoriels sur un corps valué ibid, **A 61**, 528–539 (1958).
7. TIEL, J. VAN, Espaces localement K-convexes, Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wet. **A 68**, 249–258, 259–272, 273–289 (1965).