Journal of Algebra **229**, 118–152 (2000)
doi:10.1006/jabr.2000.8302, available online at http://www.idealibrary.com on IDEAL®

Sous-groupes anormaux dans les groupes de rang de Morley fini résolubles

Olivier Frécon

Institut Girard Desargues, UPRES-A 5028 Mathématiques, Batiment 101 (mathématiques), Université Claude Bernard Lyon-1, 43 blvd du 11 novembre 1918, 69622 Villeurbanne Cedex, France
E-mail: frecon@desargues.univ-lyon1.fr

Communicated by G. Stroth

Received April 19, 1999

1. INTRODUCTION

La question centrale concernant les groupes de rang de Morley fini est la classification des groupes simples infinis de rang de Morley fini qui sont conjecturés être isomorphes à des groupes algébriques sur des corps algébriquement clos. Une difficulté rencontrée dans ce travail de classification est l'existence des mauvais corps (récemment montrée par B. Poizat). Les mauvais corps donnent l'existence de groupes de rang de Morley fini résolubles et non nilpotents qui ont des propriétés non algébriques, notamment de groupes de rang de Morley fini résolubles et non nilpotents sans torsion. Il est donc nécessaire de développer une théorie des groupes résolubles de rang de Morley fini indépendante des éléments d'ordre fini. C'est l'un des objectif de cet article. Nous pensons que cette approche sera fructueuse puisque certains résultats de cet article (et aussi ceux d'un article de F.O. Wagner sur le même sujet [20]) ont été utilisés dans [13] où E. Jaligot généralise certains résultats qui avaient été montrés sous l'hypothèse de la non interprétabilité des mauvais corps.

Un sous-groupe H d'un groupe G est dit *anormal* si, pour tout $g \in G$, $g \in \langle H, H^g \rangle$. Dans cet article on considère les sous-groupes anormaux des groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles. La notion de sous-groupe anormal a été utilisée par R. W. Carter dans [8] pour démontrer l'existence et la conjugaison des sous-groupes nilpotents autonormalisants dans les groupes résolubles finis. Les résultats de Carter sur les sous-groupes nilpotents autonormalisants, connus désormais comme les

0021-8693/00 $35.00

sous-groupes de Carter, ont largement contribué au développement de la théorie des groupes résolubles finis. F. Wagner a démontré des analogues de ces résultats pour certaines classes de groupes stables dont les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles (voir Faits 2.15 et 2.16).

L'un des buts de cet article est de montrer l'existence et la conjugaison des sous-groupes de Carter en partant de l'existence d'un sous-groupe anormal propre dans tout groupe de rang de Morley fini connexe, résoluble et non nilpotent (Proposition 3.6). Cela est fait dans les Sections 3, 4, et 5. Cette approche est distincte de celle de Wagner puisque lui montre directement l'existence d'un sous-groupe de Carter alors qu'ici nous démontrons d'abord les résultats pour les sous-groupes anormaux minimaux (Remarque 4.1 et Proposition 4.9) puis nous montrons qu'en fait ces sous-groupes sont exactement les sous-groupes de Carter. Les parties 3 et 4 donnent aussi des propriétés générales des sous-groupes anormaux d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, en particulier la connexité de tels sous-groupes (donc des sous-groupes de Carter). On verra par la suite d'autres familles de sous-groupes anormaux, par exemple les normalisateurs des sous-groupes de Hall. Cet exemple vient du Corollaire 7.15 qui donne l'anormalité de tels sous-groupes et déduit de ceci une généralisation du Fait 5.3. Les résultats des parties 3, 4, et 5 peuvent se résumer ainsi:

THÉORÈME 1.1. *Dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G les sous-groupes anormaux minimaux existent et sont conjugués.*

De plus, les conditions suivantes sont équivalentes pour tout sous-groupe H de G.

(i) *H est un sous-groupe anormal minimal de G;*

(ii) *H est un sous-groupe définissable, nilpotent, et d'indice fini dans son normalisateur;*

(iii) *Il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite $(A_i)_{i=0,\ldots,n}$ de sous-groupes de G tel que A_{i+1}/A_i soit (G/A_i)-minimal pour tout $i \in \{0,\ldots,n-1\}$ et tel que $A_0 = 1$, $A_n = G$ et H couvre un quotient de la forme A_{i+1}/A_i (pour $i \in \{0,\ldots,n-1\}$) si et seulement si A_{i+1}/A_i est central dans G/A_i.*

En particulier, les notions de sous-groupe anormal minimal et de sous-groupe de Carter sont équivalentes.

Dans la partie 6 on finit de prouver le Théorème 1.2 qui donne des caractérisations des sous-groupes anormaux et une sorte d'analogue du théorème de Jordan–Hölder.

Pour comprendre l'assertion (ii), notons qu'un sous-groupe H d'un groupe de rang de Morley fini G est *déf-anormal* dans G si $g \in d(H, H^g)$ pour tout $g \in G$:

THÉORÈME 1.2. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-groupe de G. Alors les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *H est anormal*;

(ii) *H est définissable et déf-anormal*;

(iii) *H contient un sous-groupe de Carter de G*;

(iv) *H est définissable et connexe et il existe $n \in \mathbb{N}$ et une suite décroissante $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ de sous-groupes de G tel que $H_0 = G$, $H_n = H$, et, pour tout $i = 1, \ldots, n$, H_i est un sous-groupe propre définissable et connexe maximal de H_{i-1} qui n'est pas normal dans H_{i-1}.*

De plus, si H est anormal, l'entier n de l'assertion (iv) *ne dépend pas de la suite $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ choisie.*

En particulier, ce théorème donne la connexité des sous-groupes de Carter dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble.

La preuve du Théorème 1.1 utilise deux notions introduites dans la partie 5: le *centralisateur généralisé* (Définition 5.15) et le *sous-groupe de Frattini*^{0} (Définition 5.6). Dans la partie 7 nous continuons de développer ces notions, par exemple nous montrons qu'il n'y a qu'on nombre fini de classes de conjugaisons de centralisateurs généralisés (Théorème 7.9). Cette notion permet aussi de généraliser les résultats sur l'existence et la conjugaison des sous-groupes de Carter aux sous-groupes définissables d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble (Théorème 7.16). Dans la partie 8 nous développons une *théorie des formations connexes* en partant de la notion de sous-groupe de Frattini^0 introduite dans la partie 5.

2. PRÉLIMINAIRES

Pour des généralités sur le sujet on pourra se référer soit au livre de A. Borovik et A. Nesin [3], soit au livre de B. Poizat [18].

La notation est celle habituellement utilisée. Aussi, on note $G^1 = G^{(1)} = G'$ et, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, $G^{i+1} = [G, G^i]$ et $G^{(i+1)} = [G^{(i)}, G^{(i)}]$.

2.1. *Généralités*

Les deux faits suivants sont des corollaires du théorème des indécomposables de Zil'ber [22].

Fait 2.1 ([22], Zil'ber). Soit G un groupe de rang de Morley fini, alors un sous-groupe de G engendré par un ensemble de sous-groupes connexes et définissables de G est connexe et définissable.

Fait 2.2 ([22], Zil'ber). Soient G un groupe de rang de Morley fini, $H \leq G$ définissable et connexe et $X \subseteq G$, alors $[H, X]$ est définissable et connexe. En particulier, pour tout $i \in \mathbb{N}^*$, H^i et $H^{(i)}$ sont définissables et connexes.

Dans un groupe de rang de Morley fini G, la *clôture définissable* d'un sous-ensemble X de G est l'intersection des sous-groupes définissables de G qui contiennent X. On la note $d(X)$. Par condition de chaîne descendante sur les sous-groupes définissables de G, c'est un sous-groupe définissable de G.

Fait 2.3 ([3, Cor. 5.38, p. 90], Zil'ber). Soient G un groupe de rang de Morley fini et H un sous-groupe de G. Si H est résoluble (resp. nilpotent) de classe n alors $d(H)$ est aussi résoluble (resp. nilpotent) de classe exactement n.

Fait 2.4 ([16], Nesin). Soit G un groupe nilpotent de rang de Morley fini. Alors $G = D * C$, $D = T \times N$, où

D est définissable, connexe, caractéristique et divisible;

C est définissable et d'exposant borné;

T est la partie de torsion de D et est abélien et divisible;

N est un sous-groupe sans torsion.

De plus, si G est connexe, alors T est central dans G et C peut être choisi connexe et caractéristique.

Fait 2.5 [3, Ex. 8, p. 98]. Soient U un groupe de rang de Morley fini, connexe et nilpotent et ϕ un automorphisme définissable de U qui ne fixe aucun élément non trivial. Alors $U = \{u^{-1}\phi(u) : u \in U\}$.

Pour tout groupe G de rang de Morley fini, on note G^0 sa *composante connexe*, c'est-à-dire l'intersection de ses sous-groupes définissables d'indice fini. On étend cette notation aux sous-groupes des groupes de rang de Morley fini, en notant $H^0 = H \cap d(H)^0$ pour tout sous-groupe H d'un groupe de rang de Morley fini.

Si H est un sous-groupe d'un groupe de rang de Morley fini G, un sous-groupe *H-minimal* A de G est un sous-groupe définissable de G, normalisé par H, infini qui est minimal pour ces conditions. On remarque que, si G est résoluble, A est abélien.

Fait 2.6 ([2], Belegradek). Soit G un groupe de rang de Morley fini. Si H est un sous-groupe normal contenant un élément non central de G^0, alors H contient un sous-groupe G-minimal.

2.2. *Groupes résolubles*

Le *sous-groupe de Fitting* $F(G)$ d'un groupe G est le sous-groupe engendré par les sous-groupes normaux et nilpotents. Si G est de rang de Morley fini, ce sous-groupe est définissable et nilpotent (Belegradek [2] et Nesin [17]).

Fait 2.7 [15, Nesin]. Soit G un groupe de rang de Morley fini, connexe et résoluble. Alors $G/F(G)^0$ (et, donc, $G/F(G)$) est un groupe divisible et abélien.

Fait 2.8 ([19, Th. 5.2.10, p. 129], Hall). Si un groupe G a un sous-groupe normal et nilpotent N tel que G/N' soit nilpotent, alors G est nilpotent.

En particulier, on remarque qu'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G est nilpotent si et seulement si $G/G^{(2)}$ est nilpotent.

Nous allons avoir fréquemment besoin du fait 2.9 qui est un corollaire d'un théorème de Zil'ber [23].

Fait 2.9 ([23], Zil'ber). Soient G un groupe de rang de Morley fini, connexe et résoluble et A un sous-groupe G-minimal de G. Alors, pour tout $a \in A \setminus \{1\}$, $C_G(a) = C_G(A)$.

On rappelle les définitions des notions d'*anormalité* et de *déf-anormalité* qui ont été données dans l'introduction.

DÉFINITION 2.10. Soient G un groupe et H un sous-groupe de G. On dit que H est anormal dans G si, pour tout $g \in G$, g appartient à $\langle H, H^g \rangle$. Si G est de rang de Morley fini, on dit que H est déf-anormal dans G si, pour tout $g \in G$, g appartient à $d(H, H^g)$.

On remarque que les sous-groupes anormaux sont autonormalisants, passent au quotients, remontent les quotients et, aussi, contiennent l'hypercentre du groupe.

Fait 2.11 ([3, Lemme 9.14, p. 150], Nesin). Soit G un groupe de rang de Morley fini, connexe, résoluble, tel que $Z(G)$ soit fini et G' soit G-minimal. Alors $G = G' \rtimes T$ pour un sous-groupe abélien, divisible, définissable, connexe T qui contient $Z(G)$. De plus, deux compléments sont conjugués.

COROLLAIRE 2.12. *Sous les hypothèses du Fait* 2.11, *si H est un sous-groupe anormal ou définissable et déf-anormal de G, alors $H = G$ ou H est un complément de G' dans G. En particulier, H est définissable et connexe.*

Preuve. Comme $G'H$ est normal dans G, $G'H = G$. Alors $G' \cap H$ est normal dans G. Or $G' \cap Z(G) = 1$ d'après le Fait 2.11 donc, si H n'est pas un complément de G' dans G, $G' \cap H$ contient un sous-groupe G-minimal d'après le Fait 2.6. On en déduit que H contient G', donc $H = G$. ∎

2.3. *Sous-groupes de Carter*

DÉFINITION 2.13. Un *sous-groupe de Carter* d'un groupe est un sous-groupe nilpotent et autonormalisant.

Remarque 2.14. Un sous-groupe de Carter C d'un groupe de rang de Morley fini est définissable.

Preuve. D'après le Fait 2.3, $d(C)$ est nilpotent. La condition de normalisateur dans les groupes nilpotents donne le résultat. ∎

Nous donnons deux résultats de F. O. Wagner concernant les sous-groupes de Carter dans le contexte plus général des $\mathfrak{R}$-*groupes*. Les $\mathfrak{R}$-groupes sont des groupes stables sur lesquels, en général, il n'est pas possible de définir un rang, mais qui ont des propriétés proches de celles des groupes munis d'un rang. La notion de $\mathfrak{R}$-groupe a été inventée par F. O. Wagner, et généralise considérablement la notion de groupes de rang de Morley fini. En particulier, les deux résultats suivants montrent qu'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble a une unique classe de conjugaison de sous-groupes de Carter.

Fait 2.15 ([20], Wagner). Soient G un $\mathfrak{R}$-groupe et N un sous-groupe normal relativement définissable de G^Φ avec quotient résoluble $H = G^\Phi/N$. Alors H a un sous-groupe de Carter C. Si K est un sous-groupe type-définissable de H contenant C^0, alors $C \cap K$ est un sous-groupe de Carter de K. Si D est un sous-groupe nilpotent de K d'indice fini dans le normalisateur de sa composante connexe D^0, alors D^0 est conjugué à C^0 dans K. De plus $K = K'(C \cap K)$ et $C = N_H(C^0)$.

Fait 2.16 ([20], Wagner). Soient G un groupe stable menu et N un sous-groupe relativement définissable normal de G^Φ avec quotient résoluble $H = G^\Phi/N$. Supposons que C soit un sous-groupe de Carter de H. Si K est un sous-groupe type-définissable de H contenant C^0, alors tous les sous-groupes de Carter de K sont conjugués.

3. L'ANORMALITÉ

Remarque 3.1. Si un groupe G a un quotient nilpotent G/N, alors $G = NH$ pour tout sous-groupe anormal H de G. En particulier $G = G'H$.

Les Propositions 3.2 et 3.6 constituent des résultats de base pour tout ce qui va suivre.

PROPOSITION 3.2. *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble avec un sous-groupe H qui est anormal ou définissable et déf-anormal. Alors H est définissable et connexe.*

Preuve. Par induction sur le rang de G. Soit A un sous-groupe G-minimal. Alors HA/A est soit définissable et déf-anormal soit anormal. Par hypothèse d'induction HA/A, donc HA, est définissable et connexe. Donc l'hypothèse d'induction permet de supposer $G = HA$. Alors $H \cap A$ est normal dans G. Si A est central dans G alors A est contenu dans H et $G = H$, donc la proposition est triviale. Sinon $A \cap Z(G) = 1$ d'après le Fait 2.9 et on peut supposer $Z(G)$ fini. Si $A \cap H \neq 1$, $A \cap H$ contient un sous-groupe G-minimal d'après le Fait 2.6, donc $G = H$ et la proposition est triviale. On peut alors supposer $A \cap H = 1$. Si $G' = A$, le Corollaire 2.12 donne le résultat. Sinon $G' \cap H \neq 1$. G' étant connexe, $G' \cap H$ est infini, en particulier $G' \cap H$ n'est pas central dans G. Mais $G' \cap H$ est normal dans H et le Fait 2.7 dit que G' centralise A, donc $G' \cap H$ est normal dans G. D'après le Fait 2.6, $G' \cap H$ contient un sous-groupe G-minimal B. Alors H/B est anormal ou définissable et déf-anormal dans G/B et l'hypothèse d'induction donne le résultat. ∎

COROLLAIRE 3.3. *Les notions d'anormalité et de déf-anormalité sont équivalentes pour tout sous-groupe définissable d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G.*

Preuve. D'après la Proposition 3.2 il suffit de montrer qu'un sous-groupe définissable et déf-anormal H de G est anormal. Soit $g \in G$. Alors $\langle H, H^g \rangle$ est définissable et connexe d'après la Proposition 3.2 et le Théorème des indécomposables de Zil'ber (Fait 2.1), donc $g \in d(H, H^g) = \langle H, H^g \rangle$ et H est anormal. ∎

LEMME 3.4. *Si, dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G, un sous-groupe G-minimal A est non central et a un complément H, alors $G = \langle H, H^g \rangle$ pour tout $g \in G \setminus H$. En particulier, H est un sous-groupe anormal propre de G.*

Preuve. Remarquons d'abord que H est autonormalisant. Il faut montrer que $N_A(H) = 1$. Si $N_A(H) = C_A(H) \leq Z(G)$ n'était pas trivial, A serait central dans G d'après le Fait 2.9, ce qui n'est pas.

Ainsi, si $g \in G \setminus H$, $\langle H, H^g \rangle \cap A$ est un sous-groupe normal et non trivial de G. Donc, puisque $A \cap Z(G) = 1$ d'après le Fait 2.9, $\langle H, H^g \rangle \cap A$ contient un sous-groupe G-minimal d'après le Fait 2.6. A étant G-minimal, on a le résultat. ∎

PROPOSITION 3.5. *Tout groupe G de rang de Morley fini connexe, résoluble et non nilpotent a un sous-groupe normal, définissable et connexe W tel que $(G/W)'$ soit G/W-minimal et $Z(G/W)$ fini.*

Preuve. Par induction sur le rang de G. Comme $G^{(2)}$ est définissable et connexe d'après le théorème des indécomposables de Zil'ber (Fait 2.2) et comme $G/G^{(2)}$ n'est pas nilpotent d'après les Faits 2.7 et 2.8, l'hypothèse d'induction permet de supposer G 2-résoluble. D'après le théorème des indécomposables de Zil'ber, G^i est définissable et connexe pour tout $i \in \mathbb{N}$, donc il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $G^k = G^{k+1}$. G n'étant pas nilpotent il existe un sous-groupe normal, définissable et connexe A de G dans G^k tel que G^k/A soit G/A-minimal. Comme G/A n'est pas nilpotent, l'hypothèse d'induction permet de supposer G^k G-minimal. Aussi il existe $l \in \mathbb{N}$ tel que $Z_l(G)^0 = Z_{l+1}(G)^0$. Alors $G/Z_l(G)^0$ n'est pas nilpotent et a un centre fini donc, par hypothèse d'induction, on peut supposer le centre de G fini. Il suffit alors de montrer $G' = G^k$. Supposons que ce ne soit pas le cas. Alors il existe un sous-groupe B/G^k (G/G^k)-minimal dans G'/G^k. G n'étant pas nilpotent, il existe $g \in G \setminus C_G(G^k)$. Comme G est 2-résoluble et comme B est contenu dans G', $C_B(g)$ est normal dans G. Aussi

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_g \colon B &\to G^k \\ b &\mapsto [b, g] \end{aligned}$$

est un homomorphisme définissable et $C_B(g) = \mathrm{Ker}\, \mathrm{ad}_g$. Mais $C_{G^k}(g) = 1$ d'après le fait 2.9 et G/G^k centralise B/G^k, donc $[G, C_B(g)] \leq G^k \cap C_B(g) = 1$ et $C_B(g)$ est central dans G. En particulier $C_B(g)$ est fini et $\mathrm{rk}\, B = \mathrm{rk}\, B/C_B(g) \leq \mathrm{rk}\, G^k$, ce qui est absurde puisque B/G^k est infini. ∎

La proposition suivante est un corollaire des résultats de F. Wagner (Faits 2.15 et 2.16) puisqu'il est facile de voir qu'un sous-groupe de Carter est déf-anormal, donc anormal d'après le Corollaire 3.3. Pour nous, à l'inverse, il s'agira du point de départ de notre démonstration.

PROPOSITION 3.6. *Un groupe de rang de Morley fini G connexe, résoluble et non nilpotent a un sous-groupe anormal propre.*

Preuve. Soit W un sous-groupe de G comme dans la Proposition 3.5. G/W a un sous-groupe anormal propre H/W d'après le Fait 2.11 et le Lemme 3.4. H est alors un sous-groupe anormal propre de G. ∎

4. SOUS-GROUPES ANORMAUX MINIMAUX

Dans cette section nous commençons la preuve du Théorème 1.1.

Remarque 4.1. Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble alors, comme les sous-groupes anormaux de G sont définissables d'après la Proposition 3.2, tout sous-groupe anormal de G contient un sous-groupe anormal minimal.

LEMME 4.2. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, A un sous-groupe G-minimal non central de G et H un sous-groupe de G tel que $G = HA$. Alors H est anormal dans G. De plus, soit $G = H$, soit A intersecte trivialement H.*

Preuve. Si $A \cap H = 1$, le Lemme 3.4 permet de conclure. Sinon, comme A n'est pas central dans G, $A \cap Z(G) = 1$ d'après le Fait 2.9. Mais $A \cap H$ est normal dans G puisque $G = HA$, donc $A \cap H$ contient un sous-groupe G-minimal d'après le Fait 2.6. Alors A est contenu dans H et $G = H$. ∎

COROLLAIRE 4.3. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, A un sous-groupe G-minimal, et H un sous-groupe de G tel que $G = C_G(A)H$, $Z(G)^0 \leq H$ et tel que HA soit définissable et connexe. Alors H est anormal dans HA. De plus, soit A est contenu dans H, soit A intersecte trivialement H.*

Preuve. Si A est contenu dans H le fait est trivial. Sinon A n'est pas central dans G puisque $Z(G)^0 \leq H$. Alors A ne centralise pas H puisque $G = C_G(A)H$, donc A n'est pas central dans HA. Mais, comme $G = C_G(A)H$, A est HA-minimal. Alors le Lemme 4.2 donne le résultat. ∎

COROLLAIRE 4.4. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-groupe définissable, connexe et propre de G qui est maximal pour ces propriétés. Alors H est normal ou anormal dans G.*

Preuve. Par induction sur le rang de G. Soit A un sous-groupe G-minimal de G. Supposons que H ne soit pas normal dans G. Si A est contenu dans H, l'hypothèse d'induction donne le résultat. Sinon, comme $Z(G)^0$ est contenu dans H par maximalité de H, A n'est pas central dans G. Alors le Lemme 4.2 donne le résultat. ∎

DÉFINITION 4.5. Un sous-groupe H d'un groupe G est sous-anormal si il existe $n \in \mathbb{N}$ et des sous-groupes $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ de G tels que $H_0 = G$, $H_n = H$ et, pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, H_i est un sous-groupe anormal de H_{i-1}.

Pour prouver la Proposition 4.7, nous utilisons le fait suivant. Dans [19] il est donné pour les groupes finis, mais la même démonstration marche pour tous les groupes.

Fait 4.6 ([19, Lemme 9.2.12, p. 258], Taunt). Soient G un groupe, H un sous-groupe de G et N un sous-groupe normal de G. Si H est anormal dans HN et si HN est anormal dans G, alors H est anormal dans G.

PROPOSITION 4.7. *Dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G, tout sous-groupe sous-anormal H est anormal.*

Preuve. On remarque qu'un sous-groupe sous-anormal est définissable et connexe d'après la Proposition 3.2. On suppose G contrexemple de rang minimal avec un sous-groupe sous-anormal et non anormal H de rang maximal. Alors H est anormal dans un sous-groupe anormal K de G. Par la Remarque 3.1, $G = G'K$ et $K = K'H$, donc $G = G'H$. Soit A un sous-groupe G-minimal de G. Alors le Fait 2.7 dit que $G = C_G(A)H$. Mais $Z(G)$ est contenu dans K, donc dans $Z(K)$, puisque K est anormal dans G. Aussi $Z(K)$ est contenu dans H et, ainsi, H contient $Z(G)$. Par le Corollaire 4.3, H est anormal dans HA. Mais HA/A est anormal dans KA/A qui est lui-même anormal dans G/A, donc HA/A est anormal dans G/A d'après la minimalité du rang de G. En conséquence HA est anormal dans G. Le Fait 4.6 permet de conclure. ∎

COROLLAIRE 4.8. *Un sous-groupe anormal minimal d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble est sous-anormal minimal et, donc, n'a pas de sous-groupe anormal propre. En particulier il est nilpotent, c'est un sous-groupe de Carter de G et* (i) *implique* (ii) *dans le Théorème* 1.1.

Preuve. Suit directement des Propositions 4.7 et 3.6. ∎

PROPOSITION 4.9. *Dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G, les sous-groupes anormaux minimaux sont conjugués.*

Preuve. Par induction sur le rang de G. Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes anormaux minimaux de G. H_1 et H_2 contiennent chacun $Z(G)$, et $H_1/Z(G)$ et $H_2/Z(G)$ sont anormaux et nilpotents dans $G/Z(G)$, donc anormaux minimaux d'après le Corollaire 4.8. Si $Z(G)$ est infini l'hypothèse d'induction donne le résultat, donc on peut supposer $Z(G)$ fini. Soit A un sous-groupe G-minimal de G. Alors H_1A/A et H_2A/A sont des sous-groupes anormaux et nilpotents de G/A, donc ce sont des sous-groupes anormaux minimaux de G/A. Par hypothèse d'induction ils sont conjugués et on peut supposer $H_1A = H_2A$. Aussi H_1 et H_2 sont des sous-groupes anormaux nilpotents de H_1A, donc des sous-groupes anormaux minimaux de H_1A. Par hypothèse d'induction on peut alors supposer $G = H_1A$. Comme H_1 est nilpotent et comme $Z(G)$ est fini, $C_{H_1}(A)$ est fini et, d'après le théorème des indécomposables de Zil'ber et le Fait 2.7, $G' = A$. Aussi les intersections $A \cap H_1$ et $A \cap H_2$ sont finies, donc centrales dans G. Le Fait 2.9 dit que $A \cap Z(G) = 1$. Ainsi $A \cap H_1 = A \cap H_2 = 1$ et le Fait 2.11 donne le résultat. ∎

DÉFINITION 4.10. Une section d'un groupe G est un groupe de la forme A/B où B est un sous-groupe de G et A un sous-groupe de $N_G(B)$. On dit qu'un sous-groupe H de G couvre une section A/B de G si $(A \cap H)B/B = A/B$ et on dit que H évite A/B si $A \cap H \leq B$.

Si G est de rang de Morley fini et si H est un sous-groupe de G, la section A/B est dite H-minimale si H normalise A et B et si A/B est définissable, infinie et ne contient pas proprement de section définissable et infinie normalisée par H.

PROPOSITION 4.11. *Dans le Théorème* 1.1, *les assertions* (i) *et* (iii) *sont équivalentes*.

Preuve. (1) (i) implique (iii).

On va montrer que H couvre une section G-minimale de G si et seulement si elle est centralisée par G. Soit A/B une section G-minimale de G centralisée par G. HB/B étant anormal dans G/B, HB/B contient A/B. Ainsi H couvre toutes les sections G-minimales centralisées par G. Supposons que H couvre une section G-minimale A/B non centralisée par G. Comme G' centralise A/B d'après le Fait 2.7 et comme $G = G'H$ d'après Remarque 3.1, A/B est H-minimale et n'est pas centralisée par H. Ceci contredit le fait que H soit anormal minimal puisqu'un sous-groupe anormal minimal est nilpotent d'après le Corollaire 4.8.

(2) (iii) implique (i).

Montrons que $G/A_i = C_{G/A_i}(A_{i+1}/A_i)HA_i/A_i$ pour tout $i \in \{0, \dots, n - 1\}$. On peut supposer $i = 0$. Supposons G distinct de $C_G(A_1)H$. Alors il existe un plus petit j tel que $A_j \leq C_G(A_1)H$ et $A_{j+1} \nleq C_G(A_1)H$. $C_G(A_1)H$ étant normal dans G d'après le Fait 2.7, $(C_G(A_1)H \cap A_{j+1})^0 = A_j$ d'après la minimalité de A_{j+1}/A_j. Ainsi $[G, A_{j+1}]$ est contenu dans A_j puisque contenu dans $G' \leq C_G(A_1)$. A_{j+1}/A_j est donc centrale dans G/A_j et, par conséquent, couverte par H, ce qui contredit le choix de j.

Montrons que H est nilpotent. Supposons le contraire. Alors il existe un plus grand $i \in \{0, \dots, n - 1\}$ tel que la section $(H \cap A_{i+1})A_i/A_i$ ne soit pas centralisée par H. En particulier G ne centralise pas A_{i+1}/A_i et $(H \cap A_{i+1})A_i/A_i < A_{i+1}/A_i$ d'après l'hypothèse faite sur H. Comme $G/A_i = C_{G/A_i}(A_{i+1}/A_i)HA_i/A_i$, $(H \cap A_{i+1})A_i/A_i$ est normal dans G/A_i Comme A_{i+1}/A_i est G/A_i-minimal, le Fait 2.6 donne une contradiction.

Il suffit alors de montrer que H est anormal. On va le montrer par induction sur le rang de G. Par hypothèse d'induction HA_1/A_1 est un sous-groupe anormal de G/A_1, donc HA_1 est définissable et connexe d'après la Proposition 3.2. Supposons A_1 central dans G. Alors A_1 est contenu dans H et $H = HA_1$ est anormal. Donc on peut supposer A_1 non central dans G. Comme $G = C_G(A_1)H$, A_1 n'est pas central dans HA_1. D'après le Lemme 4.2, H est anormal dans HA_1, donc sous-anormal dans G. La Proposition 4.7 permet de conclure. ∎

Pour finir la preuve du Théorème 1.1, il reste à prouver que (ii) implique (i). Cela se fera dans la Section 5.

5. SOUS-GROUPE DE FRATTINI^0 ET CENTRALISATEURS GÉNÉRALISÉS

Dans cette section nous finissons la preuve du Théorème 1.1. Pour cela nous introduisons une nouvelle classe de sous-groupes anormaux dans les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles: les *centralisateurs généralisés*. Pour pouvoir développer une théorie à ce sujet, nous avons besoin d'introduire la notion de *sous-groupe de Frattini*^{0}. Notons que cette notion permettra une *théorie des formations connexes* dans les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles (voir partie 8).

La preuve de la Proposition 5.10 nécessite certains résultats sur les sous-groupes localement fini. Donc nous commençons cette partie par quelques faits.

5.1. *Les p-sous-groupes*

Le fait 5.1 est bien connu, mais la seule référence que l'on a trouvée est un exercice.

Fait 5.1 [3, Ex. 10, p. 5]. Soit G un groupe résoluble. Alors G est localement fini si et seulement si il est de torsion.

Preuve. Il suffit de montrer qu'un groupe résoluble de torsion est localement fini. Par induction sur la classe de résolubilité de G. Alors G' est localement fini par hypothèse d'induction. G/G' étant abélien, G/G' est aussi localement fini. Le Lemme 1.A.2, p. 2 de [14] dit que les extensions des groupes localement fini par des groupes localement fini par des groupes localement fini sont localement fini, ce qui permet de conclure. ∎

Fait 5.2 [6, Borovik & Poizat]. Soient p un entier premier et P un p-sous-groupe localement fini d'un groupe G de rang de Morley fini. Alors P^0 est nilpotent.

Pour tout ensemble π d'entiers premiers et pour tout groupe localement résoluble G, on appelle *π-sous-groupe de Hall* un π-sous-groupe maximal de G.

Fait 5.3 ([4], Borovik & Nesin). Soient G un groupe de rang de Morley fini, connexe et résoluble, p un entier premier et π un ensemble de nombres premiers. Alors les p-sous-groupes de Sylow de G et les π-sous-groupes de Hall normaux de G sont connexes.

Fait 5.4 ([1], Altınel, Cherlin, Corredor & Nesin). Soit π un ensemble de nombres premiers. Alors deux π-sous-groupes de Hall d'un groupe résoluble de rang de Morley fini sont conjugués.

Fait 5.5 ([1], Altınel, Cherlin, Corredor & Nesin). Soient G un groupe résoluble de rang de Morley fini, N un sous-groupe normal et définissable de G et H un π-sous-groupe de Hall de G pour un ensemble π de nombres premiers. Alors HN/N est un π-sous-groupe de Hall de G/N, et tous les π-sous-groupes de Hall de G/N sont de cette forme.

5.2. *Sous-groupe de Frattini^0*

DÉFINITION 5.6. On définit le *sous-groupe de Frattini^0* $\mathrm{Fratc}(G)$ d'un groupe de rang de Morley fini connexe G comme l'intersection de ses sous-groupes propres, définissables et connexes maximaux.

Les lemmes suivants montrent que, si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, $\mathrm{Fratc}(G)$ vérifie les propriétés de bases du sous-groupe de Frattini d'un groupe fini. Notons que le Lemme 5.12 ne sert pas pour la suite, mais il montre une propriété du sous-groupe de Frattini^0. Les résultats de cette sous-section ont souvent un analogue dans le cas des groupes finis (cf. [19, Section 5.2]). On peut remarquer qu'ici, plusieurs preuves utilisent la théorie des sous-groupes anormaux là où la théorie des groupes finis se sert de la théorie de Sylow.

LEMME 5.7. *Dans un groupe de rang de Morley fini connexe G, pour tout sous-groupe définissable H de G, l'égalité $G = \mathrm{Fratc}(G)H$ implique $G = H$.*

Preuve. Supposons $H \neq G$. H^0 est contenu dans un sous-groupe K propre, définissable et connexe maximal de G. En particulier K contient $\mathrm{Fratc}(G)$ et on a $G = \mathrm{Fratc}(G)K = K$, ce qui est contradictoire. ∎

LEMME 5.8. *Soient G est un groupe de rang de Morley fini connexe et N un sous-groupe définissable et normal de G. Si N est contenu dans* $\mathrm{Fratc}(G)$, *alors* $\mathrm{Fratc}(G/N) = \mathrm{Fratc}(G)/N$.

Preuve. Si K/N (resp. U) est un sous-groupe propre, définissable et connexe maximal de G/N (resp. G), alors il en est de même pour K^0 (resp. U/N) dans G (resp. G/N). ∎

LEMME 5.9. *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors G est nilpotent si et seulement si $G/\mathrm{Fratc}(G)$ est nilpotent.*

Preuve. Il suffit de montrer que, si $G/Fratc(G)$ est nilpotent, alors G est nilpotent. Si ce n'est pas le cas, G a un sous-groupe anormal propre H (proposition 3.6) et $G = Fratc(G)H$ d'après la remarque 3.1. Ainsi $G = H$ d'après le lemme 5.7 et le choix de H est contredit. ∎

DÉFINITION 5.10. *Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe, on note $F\,Fratc(G)$ le sous-groupe qui vérifie $F\,Fratc(G)/Fratc(G) = F(G/Fratc(G))$.*

PROPOSITION 5.11. *Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, $F\,\mathrm{Fratc}(G) = F(G)$.*

Preuve. Montrons d'abord que $(F\,\mathrm{Fratc}(G))^0$ est nilpotent. Soit C un sous-groupe anormal minimal de $(F\,\mathrm{Fratc}(G))^0$ (il existe d'après la Remarque 4.1). Comme le quotient $(F\,\mathrm{Fratc}(G))^0/(\mathrm{Fratc}(G))^0$ est nilpotent, la Remarque 3.1 dit que $(F\,\mathrm{Fratc}(G))^0 = (\mathrm{Fratc}(G))^0C$. Ainsi, d'après la Proposition 4.9 et l'argument de Frattini, $G = \mathrm{Fratc}(G)N_G(C)$. Le Lemme 5.7 dit alors que C est normal dans G, en particulier dans $(F\,\mathrm{Fratc}(G))^0$. C étant anormal dans $(F\,\mathrm{Fratc}(G))^0$, $C = (F\,\mathrm{Fratc}(G))^0$ et $(F\,\mathrm{Fratc}(G))^0$ est nilpotent puisque C l'est d'après la Proposition 3.6.

Pour prouver le lemme il suffit de montrer que $F\,\mathrm{Fratc}(G)$ est nilpotent. Supposons le contraire. D'après ce qui précède, $F\,\mathrm{Fratc}(G)/F(G)$ est fini et il existe un entier p premier qui divise l'ordre de ce quotient. Soit S un p-sous-groupe de Sylow de $F\,\mathrm{Fratc}(G)$. D'après le fait 5.5, $S\,\mathrm{Fratc}(G)/\mathrm{Fratc}(G)$ est le p-sous-groupe de Sylow de $F\,\mathrm{Fratc}(G)/\mathrm{Fratc}(G)$. S étant nilpotent (Faits 5.1, 5.2, et 5.3), $d(S)$ normalise S. Mais les p-sous-groupes de Sylow de $d(S)\mathrm{Fratc}(G)$ sont conjugués dans $d(S)\mathrm{Fratc}(G)$ par le Fait 5.4. L'argument de Frattini montre qu'alors $G = \mathrm{Fratc}(G)N_G(S)$. Mais $N_G(S)$ est définissable puisque S est nilpotent, donc le Lemme 5.7 dit que S est normal dans G. On en déduit que S est contenu dans $F(G)$ puisque S est nilpotent. Mais ceci contredit le Fait 5.5. ∎

LEMME 5.12. *Soit G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors $F(G)' \leq \mathrm{Fratc}(G)$. En particulier $G/\mathrm{Fratc}(G)$ est 2-résoluble et $F(G/G^{(2)}) = F(G)/G^{(2)}$.*

Preuve. Soit H un sous-groupe propre, définissable, et connexe maximal de G. Si H est normal dans G, G' est contenu dans H, donc on peut supposer H anormal d'après le Corollaire 4.4. Alors $G = F(G)H$ d'après la Remarque 3.1 et le Fait 2.7, donc $H \cap F(G)$ est d'indice infini dans $F(G)$. H est donc un sous-groupe propre de $N_{F(G)}(H \cap F(G))^0H$ et la maximalité de H dans G montre que $H \cap F(G)$ est normal dans G et, en particulier, dans $F(G)$. Soit U le sous-groupe de G tel que $U/(H \cap F(G)) = Z(F(G)/(H \cap F(G))$. Alors le groupe $U/(H \cap F(G))$ est infini et $UH = G$ par maximalité de H. Ainsi $F(G) = U(H \cap F(G)) = U$ et le résultat suit de cette égalité. ∎

5.3. *Centralisateurs généralisés*

Si x et y sont deux éléments d'un groupe G, on note $[x,_0 y] = x$ et $[x,_{n+1} y] = [[x,_n y], y]$ pour tout entier n.

DÉFINITION 5.13. Un élément g d'un groupe G est Engel gauche si $[x,_n g] = 1$ pour tout x dans G, où n peut dépendre de x. Si n peut être choisi indépendemment de x, alors g est appelé n-Engel gauche, ou Engel gauche borné.

On appelle $\mathscr{M}_c$*-groupe* un groupe qui vérifie la condition de chaîne descendante sur ses centralisateurs. Le fait dont nous allons nous servir est le suivant. Notons que, dans [12], il n'est pas énoncé sous cette forme. Cet énoncé est de Wagner et peut être trouvé dans [21, p. 90, Lemme 1.4.1].

Fait 5.14 [12, Gruenberg]. Les éléments Engel gauche bornés d'un $\mathscr{M}_c$-groupe résoluble forment le sous-groupe de Fitting.

DÉFINITION 5.15. Soient G un groupe et A un sous-groupe de G. Nous définissons le centralisateur généralisé $E_A(g)$ d'un élément g de $N_G(A)$ par $E_A(g) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathrm{ad}_g)^{-n}(1)$ où ad_g désigne l'application

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_g\colon A &\to A \\ x &\mapsto [x, g] \end{aligned}$$

Le centralisateur généralisé $E_A(X)$ d'un sous-ensemble X de $N_G(A)$ est l'intersection des $E_A(x)$ pour $x \in X$.

Nous allons voir que, si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, ses centralisateurs généralisés sont nécessairement des sous-groupes définissables.

PROPOSITION 5.16. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et g un élément de G. Alors $E_G(g)$ est un sous-groupe définissable et connexe de G et il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que* $(\mathrm{ad}_g)^k(E_G(g)) = 1$.

Preuve. Par induction sur le rang de G. Si g appartient à $F(G)$, c'est trivial. Sinon $g(\mathrm{Fratc}(G))^0$ n'est pas contenu dans $F(G/(\mathrm{Fratc}(G))^0)$ d'après la Proposition 5.10, donc on peut supposer $\mathrm{Fratc}(G)$ fini d'après l'hypothèse d'induction. Soit A un sous-groupe G-minimal de G. Par hypothèse d'induction on peut supposer $E_{G/A}(gA) = G/A$. Mais il existe un sous-groupe définissable et connexe propre maximal U de G qui ne contient pas A puisque $(\mathrm{Fratc}(G))^0$ est trivial. Alors $G = AU$ et $A \cap U$ est fini, donc central par G-minimalité de A. Si g centralise A, la proposition est triviale. Sinon $C_A(g) = 1$ et $A \cap U$ est trivial d'après le Fait 2.9. Or $g = au$ pour un élément a de A et un élément u de U. Comme $C_A(g) = 1$, $C_A(u)$ est trivial et $A = \{[b, u^{-1}] : b \in A\}$ d'après le Fait 2.5. Donc il existe $b \in A$ tel que $g = [b, u^{-1}]u = u^b \in U^b$ et on peut supposer $U = U^b$. Comme $E_{G/A}(gA) = G/A$, U est contenu dans $E_G(g)$. Si $G' \neq A$, U contient un sous-groupe G-minimal B et l'hypothèse d'induction donne le résultat dans G/B, donc dans G. Sinon $G' = A$ et g centralise U. Comme $G = A \rtimes U$ et comme $C_A(g) = 1$, $U = C_G(g)$. Soit $x \in G$ tel que $[x, g] \in C_G(g)$. Alors $[x, g] \in C_A(g) = 1$ et x centralise g. Donc $E_G(g) = C_G(g)$, d'où le résultat. ∎

COROLLAIRE 5.17. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-ensemble de G qui engendre un sous-groupe localement nilpotent. Alors $E_G(H) = E_G(d(H))$ est définissable et connexe et H est contenu dans $F(E_G(H))$. En particulier $d(H)$ est nilpotent et l'ensemble des sous-groupes nilpotents de G est inductif.*

Preuve. Par induction sur le rang de G. Si H est contenu dans $F(G)$, $E_G(H) = G = E_G(d(H))$ et le résultat est trivial. Sinon il existe $h \in H \setminus F(G)$. Mais h est un élément Engel gauche bornée de $E_G(h)$ d'après la Proposition 5.16 et $h \in F(E_G(h))$ d'après le fait 5.14. Donc $E_G(h) < G$ et, comme $H \subseteq E_G(h)$ puisque H engendre un sous-groupe localement nilpotent, l'hypothèse d'induction s'applique à $E_G(h)$ du fait que $E_G(h)$ est connexe d'après la Proposition 5.16. ∎

COROLLAIRE 5.18. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, A un sous-groupe définissable de G et H un sous-ensemble de $N_G(A)$ qui engendre un sous-groupe localement nilpotent. Alors $E_A(H) = E_A(d(H))$ est un sous-groupe définissable de A et, si $H \leq A$, H est contenu dans $F(E_A(H))$.*

Preuve. Suit directement du Corollaire 5.17 et du Fait 5.14. ∎

COROLLAIRE 5.19. *Dans le Théorème* 1.1, (ii) *implique* (i).

Preuve. Par induction sur le rang de G. $E_G(H)$ est définissable et connexe et H est contenu dans $F(E_G(H))$ d'après le Corollaire 5.17. On en déduit que $E_G(H)$ est nilpotent et égal à H. En particulier H est connexe et autonormalisant. Soient $g \in G$ et $K = \langle H, H^g \rangle$. K est définissable et connexe d'après le théorème des indécomposables de Zil'ber. Si $K = G$, g appartient à K. Sinon, d'après l'hypothèse d'induction et la Proposition 4.9, il existe $k \in K$ tel que $H^k = H^g$, c'est-à-dire $gk^{-1} \in N_G(H) = H$ et $g \in K$. On en déduit l'anormalité de H. ∎

La Remarque 4.1, les Corollaires 4.7 et 5.19, et les Propositions 4.9 et 4.11 donnent le Théorème 1.1.

Dans la Section 7 nous continuerons l'étude des centralisateurs généralisés.

Nous finissons avec un corollaire qui montre que les résultats d'existence et de conjugaison des sous-groupes de Carter se généralisent à tous les quotients des groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles.

COROLLAIRE 5.20. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, C un sous-groupe de Carter de G et N un sous-groupe normal* (*non nécessairement définissable*) *de G. Alors CN/N est un sous-groupe de Carter de G/N et tous les sous-groupes de Carter de G/N sont de cette forme. En particulier les sous groupes de Carter de G/N sont conjugués.*

Preuve. D'après le théorème 1.1, CN est anormal, donc autonormalisant. Alors CN/N est aussi autonormalisant. Mais CN/N est nilpotent donc CN/N est un sous-groupe de Carter de G/N.

Montrons, par induction sur le rang de G, que tout sous-groupe de Carter de G/N est de cette forme. Si N est central, c'est trivial. Sinon N contient un sous-groupe G-minimal A d'après le Fait 2.6. Soit K/N un sous-groupe de Carter de G/N. Alors $(K/A)/(N/A)$ est un sous-groupe de Carter de $(G/A)/(N/A)$ et, par hypothèse d'induction, $K/A = (L/A)/(N/A)$ pour un sous-groupe de Carter L/A de G/A. D'après le Théorème 1.1, L est anormal dans G et contient un sous-groupe anormal minimal C de G. $L = AC$ d'après la Remarque 3.1, donc $K = LN = CN$.

La conjugaison des sous-groupes de Carter de G/N se déduit de ce qui précède et de la conjugaison des sous-groupes de Carter de G qui est donnée par le Théorème 1.1. ∎

6. FIN DE LA PREUVE DU THÉORÈME 1.2

6.1. *Équivalence de* (i), (ii), (iii), *et* (iv)

PROPOSITION 6.1. *Dans le Théorème* 1.2, *les assertions* (i) *et* (iv) *sont équivalentes.*

Preuve. Le fait que (iv) implique (i) suit du Lemme 4.4 et de la Proposition 4.7.

Montrons la réciproque. Supposons que l'on ait une suite strictement décroissante $G = H_0 > H_1 > \cdots > H_n = H$ $(n \in \mathbb{N})$ de sous-groupes de G. Alors, pour tout $i = 1, \ldots, n$, H_i est anormal dans H_{i-1}, en particulier H_i, n'est pas normal dans H_{i-1}. Aussi la Proposition 3.2 montre que H_i est définissable et connexe pour tout $i = 0, \ldots, n$. Par finitude du rang de G on peut supposer n maximal, ce qui prouve (iv). ∎

Le Théorème 1.1 montre que les assertions (i) et (iii) sont équivalentes. Donc, avec le Corollaire 3.3 et la Proposition 6.1, on a obtenu l'équivalence de (i), (ii), (iii), et (iv).

6.2. *Seconde partie du Théorème* 1.2

Le Lemme 6.2 est un analogue de la Proposition 4.11 qui dit, en particulier, que (i) implique (iii) dans le Théorème 1.1.

LEMME 6.2. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-groupe anormal de G. Alors H couvre ou évite toute section G-minimale A/B de G.*

Preuve. HB/B étant anormal dans G/B, on peut supposer $B = 1$. Le Fait 2.7 et la Remarque 3.1 donnent $G = C_G(A)H$. Comme H est définissable et connexe (Proposition 3.2), le Corollaire 4.3 donne le résultat. ∎

LEMME 6.3. *Soient G un groupe, $k \in \mathbb{N}^*$ et $(A_i)_{i=0,\ldots,k}$ une suite croissante de sous-groupes normaux de G tels que $A_0 = 1$ et $A_k = G$. Soit $\mathscr{U}$ la famille des sous-groupes H de G qui vérifient l'assertion "pour tout $i = 0,\ldots,k-1$, H couvre ou évite A_{i+1}/A_i." Pour tout $H \in \mathscr{U}$ on note $n(H)$ le nombre de sections A_{i+1}/A_i $(i \in \{0,\ldots,k-1\})$ couvertes par H. Soient H et K deux éléments de $\mathscr{U}$ tels que $H < K$. Alors il existe $L \in \mathscr{U}$ tel que $H \leq L < K$ et $n(L) = n(K) - 1$.*

Preuve. Montrons que $n(H) < n(K)$. Il faut trouver une section de la forme A_{i+1}/A_i avec $i \in \{0,\ldots,k-1\}$ qui est couverte par K et pas par H. Il existe un plus petit $j \in \{1,\ldots,k\}$ tel que $H \cap A_j$ soit distinct de $K \cap A_j$. Alors $H \cap A_{j-1} = K \cap A_{j-1}$, et $(H \cap A_j)A_{j-1}/A_{j-1}$ est strictement contenu dans $(K \cap A_j)A_{j-1}/A_{j-1}$. On en déduit que H évite A_j/A_{j-1} et K couvre A_j/A_{j-1}.

Montrons l'existence de L. Soit l le plus grand entier tel que K couvre A_l/A_{l-1} et tel que H évite A_l/A_{l-1}. Soit $L = H(K \cap A_{l-1})$. Alors, pour tout $i \in \{1,\ldots,l-1\}$ (resp. $i \in \{l,\ldots,k\}$), L couvre A_i/A_{i-1} si et seulement si K (resp. H) couvre A_i/A_{i-1} et L évite A_i/A_{i-1} si et seulement si K (resp. H) évite A_i/A_{i-1}. En particulier, L appartient à $\mathscr{U}$. Mais L couvre toutes les sections A_i/A_{i-1} $(i \in \{1,\ldots,k\})$ qui sont couvertes par K sauf pour $i = l$, donc $n(L) = n(K) - 1$. ∎

Nous pouvons alors donner la preuve de la seconde partie du Théorème 1.2.

Preuve. Soient n et m deux entiers et $(H_i)_{0 \leq i \leq n}$ et $(K_j)_{0 \leq j \leq m}$ deux suites décroissantes de sous-groupes de G tels que $H_0 = K_0 = G$ et $H_n = K_m = H$ et, pour tout $i = 1,\ldots,n$ et tout $j = 1,\ldots,m$, H_i (resp. K_j)

est un sous-groupe propre, définissable et connexe maximal de H_{i-1} (resp. K_{j-1}) qui n'est pas normal dans H_{i-1} (resp. K_{j-1}). Il faut alors montrer qu'on a nécessairement $n = m$. Soit $(A_i)_{0 \le i \le k}$ une suite croissante de sous-groupes normaux de G tels que A_{i+1}/A_i soit G-minimale pour tout $i = 0, \ldots, k-1$, $A_0 = 1$ et $A_k = G$. On note $\mathscr{A}$ l'ensemble des sections de la forme A_{i+1}/A_i avec $i \in \{0, \ldots, k-1\}$. Montrons que, pour tout $i = 0, \ldots, n$ et tout $j = 0, \ldots, m$, H_i évite exactement i sections de $\mathscr{A}$ et K_j j sections de $\mathscr{A}$. Comme $H_n = K_m = H$, on aura alors le résultat. Soit $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ tel que H_i évite exactement i sections de $\mathscr{A}$. Le Lemme 6.2 dit que H_i couvre les autres sections de $\mathscr{A}$ et le Lemme 6.3 que H_{i+1} évite exactement $i+1$ sections de $\mathscr{A}$. Ainsi $H_n = H$ évite exactement n sections de $\mathscr{A}$. De même, $K_m = H$ évite exactement m sections de $\mathscr{A}$, donc $n = m$. ∎

7. AUTRES REMARQUES

7.1. *Sur l'anormalité*

LEMME 7.1. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et $(A_i)_{i=0,\ldots,n}$ une suite strictement croissante de sous-groupes définissables, connexes et normaux de G tel que $A_0 = 1$ et $A_n = G$. Soit H un sous-groupe définissable de G qui vérifie "pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, H couvre ou évite A_{i+1}/A_i." Alors H est connexe.*

Preuve. Par induction sur n. On peut supposer $n \ge 1$. $H \cap A_{n-1}$ est connexe par hypothèse d'induction, donc $H^0 \cap A_{n-1} = H \cap A_{n-1}$. Si H évite A_n/A_{n-1}, H est contenu dans A_{n-1} et c'est fini. Sinon $A_n = HA_{n-1} = H^0A_{n-1}$ et H^0 couvre A_n/A_{n-1}. Ainsi, pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, H^0 couvre ou évite A_{i+1}/A_i. Aussi on a montré que H^0 couvre autant de sections de la forme A_{i+1}/A_i où $i = 0, \ldots, n-1$ que H. Le Lemme 6.3 donne alors le résultat. ∎

PROPOSITION 7.2. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, H un sous-groupe anormal de G et A un sous-groupe définissable, connexe et normal de G. Alors $A \cap H$ est définissable et connexe.*

Preuve. H est définissable d'après la Proposition 3.2 donc $A \cap H$ aussi. Soit $(A_i)_{i=0,\ldots,n}$ une suite croissante de sous-groupes de G tel que $A_0 = 1$, $A_n = G$ et A_{i+1}/A_i soit G-minimal pour tout $i = 0, \ldots, n-1$ et tel qu'il existe $j \in \{0, \ldots, n\}$ pour lequel $A = A_j$. Alors le Lemme 6.2 dit que H couvre ou évite A_{i+1}/A_i pour tout $i = 0, \ldots, n-1$, donc $A \cap H$ aussi. Le Lemme 7.1 donne le résultat. ∎

7.2. *Sur les centralisateurs généralisés*

Nous commençons cette section avec la Proposition 7.3 qui sera utile dans ce qui suit pour des applications des centralisateurs généralisés, notamment le Corollaire 7.4 qui montre que les centralisateurs généralisés forment une famille de sous-groupes anormaux.

PROPOSITION 7.3. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, N un sous-groupe normal de G (non nécessairement définissable) et H un sous-groupe nilpotent de G. Alors $E_{G/N}(HN/N) = E_G(H)N/N$.*

Preuve. Si N est central dans G, c'est trivial. Sinon N contient un sous-groupe G-minimal A d'après le Fait 2.6. Par hypothèse d'induction on peut supposer $N = A$. Si $E_{G/N}(HN/N) \neq G/N$, l'hypothèse d'induction donne le résultat. On peut donc supposer $E_{G/N}(HN/N) = G/N$. Si $H \leq F(G)$ la proposition est triviale, donc on peut supposer que $F(G)$ ne contienne pas H. Soit $F = (\mathrm{Fratc}(G))^0$. D'après la Proposition 5.10 et le Fait 5.14, $E_{G/F}(HF/F) < G/F$ et, si $F \neq 1$, l'hypothèse d'induction donne le résultat. Donc on peut supposer $F = 1$. Alors il existe un sous-groupe U de G définissable, connexe et propre maximal de G qui ne contient pas N. Ainsi $G = NU$ et $N \cap U$ est fini, donc central. Si H centralise N, $E_G(H) = G$ puisque $E_{G/N}(HN/N) = G/N$. Le Fait 5.14 contredit alors $H \nleq F(G)$, donc il existe $h \in H \setminus C_G(N)$. Donc $N \cap U = 1$ d'après le Fait 2.9. Aussi $h = nu$ pour $n \in N$ et $u \in U$. Comme $C_N(h) = 1$, $C_N(u) = 1$ d'après le Fait 2.9. Le Fait 2.5 dit qu'alors $N = \{[x, u^{-1}] : x \in N\}$. Ainsi il existe $x \in N$ tel que $n = [x, u^{-1}]$ et $h = [x, u^{-1}]u = u^x \in U^x$. Comme $E_{G/N}(HN/N) = G/N$, $E_G(h)$ contient U^x. Mais $C_N(h) = 1$, donc $E_G(h) = U^x$ et $E_G(H)$ est contenu dans U^x. Comme $E_{G/N}(HN/N) = G/N$, $E_G(H) = U^x$ et le résultat suit de cette égalité. ∎

COROLLAIRE 7.4. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-groupe nilpotent de G. Alors $E_G(H)$ est anormal dans G.*

Preuve. Par induction sur le rang de G. Soit A un sous-groupe G-minimal. Alors $E_G(HA/A) = E_G(H)A/A$ d'après la Proposition 7.3 et $E_G(HA/A)$ est anormal dans G/A par hypothèse d'induction, donc il suffit de montrer que $E_G(H)$ est anormal dans $E_G(H)A$ d'après le Fait 4.6. $G/C_G(A)$ étant abélien d'après le Fait 2.7,

$$G/C_G(A) = E_{G/C_G(A)}(HC_G(A)/C_G(A)).$$

Mais, par la Proposition 7.3,

$$E_{G/C_G(A)}(HC_G(A)/C_G(A)) = E_G(H)C_G(A)/C_G(A),$$

donc $G = E_G(H)C_G(A)$. Aussi $E_G(H)$ contient $Z(G)$ et $E_G(H)A$ est définissable et connexe d'après le Corollaire 5.17. Donc le Corollaire 4.3 donne le résultat. ∎

Il est bien connu que, si G est un groupe abélien fini et si A est un groupe d'automorphisme de G tel que $(|G|, |A|) = 1$, alors $G = C_G(A) \times [G, A]$. La Proposition 7.6 peut être vu comme un analogue de ce résultat.

LEMME 7.5. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, A un sous-groupe normal de G, définissable, abélien et centralisé par G', $g \in G$ et*

$$\mathrm{ad}_g : A \to A$$
$$a \mapsto [a, g]$$

Alors il existe un entier n tel que $A = (\mathrm{ad}_g)^n(A) \times E_A(g)$ et tel que $(\mathrm{ad}_g)^n(A)$ soit connexe.

Preuve. Par induction sur le rang de G. Comme $E_G(g)$ est anormal dans G d'après le Corollaire 7.4, $AE_G(g)$ aussi. Alors $AE_G(g)$ est définissable et connexe d'après le Théorème 1.2 et, par hypothèse d'induction, on peut supposer $G = AE_G(g)$. Comme ad_g est un homomorphisme définissable de groupe puisque A est abélien, la suite $((\mathrm{ad}_g)^i(A))_{i \in \mathbb{N}}$ est décroissante et formée de sous-groupes définissables de A. On en déduit qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $(\mathrm{ad}_g)^m(A) = (\mathrm{ad}_g)^{m+1}(A)$. D'après la Proposition 5.16 il existe un entier k tel que $(\mathrm{ad}_g)^k(E_G(g)) = 1$. Soient $n = \max(m, k)$ et $I = (\mathrm{ad}_g)^n(A)$. Comme $(\mathrm{ad}_g)^n_{|I}$ est un homomorphisme définissable de groupe, $\mathrm{rk}\, I = \mathrm{rk}(\mathrm{ad}_g)^n_{|I}(I) + \mathrm{rk}\,\mathrm{Ker}(\mathrm{ad}_g)^n_{|I} = \mathrm{rk}\, I + \mathrm{rk}\, E_I(g)$ et $E_I(g)$ est fini. Comme I est normal dans G puisque G' centralise A, $E_{G/I}(gI) = E_G(g)I/I$ et, comme A/I est contenu dans $E_{G/I}(gI)$ (Proposition 7.3), $G = IE_G(g) = I^0E_G(g)$ puisque $G = AE_G(g)$. En particulier I est connexe et $A = IE_A(g)$. D'après la Proposition 7.2, $E_I(g)$ est donc connexe, mais $E_I(g)$ est fini, donc on a le résultat. ∎

PROPOSITION 7.6. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, A un sous-groupe de G définissable, normal, abélien et centralisé par G' et H un sous-groupe nilpotent de G. Alors $A = E_A(H) \times F$ où F désigne le plus petit groupe de la suite $(F_i)_{i \in \mathbb{N}}$ où $F_0 = A$ et $F_{i+1} = [F(E_G(H)), F_i]$ pour tout $i \in \mathbb{N}$. En particulier, F est un sous-groupe normal, définissable et connexe de G.*

Preuve. Par induction sur le rang de G. Notons que F est normal dans G puisque $G = G'E_G(H)$ (Remarque 3.1 et Corollaire 7.4) et puisque $E_G(H)$ normalise F. On peut donc supposer $G = AE_G(H) = A^0E_G(H)$ et $A = F$. En particulier A est supposé connexe. Si H est contenu dans $F(G)$, $F = 1$ et $G = E_G(H)$, donc le résultat est trivial et on peut supposer qu'il existe $h \in H \setminus F(G)$. D'après le Fait 5.14, $E_G(h)$ est distinct de G. Soit

$$\begin{aligned} \mathrm{ad}_h \colon A &\to A \\ a &\mapsto [a, h] \end{aligned}$$

Le Lemme 7.5 dit que $A = (\mathrm{ad}_h)^n(A) \times E_A(h)$ pour un certain entier n donc, en particulier, $(\mathrm{ad}_h)^n(A)$ n'est pas trivial et est donc infini puisque connexe. Soit $I = (\mathrm{ad}_h)^n(A)$. Par hypothèse d'induction, $E_{A/I}(HI/I)$ est trivial et, comme $E_{A/I}(HI/I) = E_A(H)I/I$ d'après la Proposition 7.3, $E_A(H)$ est contenu dans I. Mais $E_A(h)$ contient $E_A(H)$ et intersecte trivialement I, donc $E_A(H)$ est trivial. ∎

COROLLAIRE 7.7. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et 2-résoluble et C un sous-groupe de Carter de G. Alors il existe un entier k tel que $G = G^k \rtimes C$.*

Preuve. Soit k un entier tel que $G^k = G^{k+1}$ (k existe d'après le théorème des indécomposables de Zil'ber). Il suffit de prendre $G^k = A$ et $H = C$. Comme $E_G(C) = C$ puisque C est autonormalisant, la Proposition 7.6 et la Remarque 3.1 donnent le résultat. ∎

Notons que, dans le Corollaire 7.7, G^k est aussi l'intersection de tous les sous-groupes normaux et définissables H de G tel que le quotient G/H soit nilpotent. Ce qui correspond à une notion utilisée dans la partie 8 ($G^k = G_{\mathcal{N}}$, voir Définition 8.3).

Un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble peut avoir une infinité de classes de conjugaisons de sous-groupes anormaux (par exemple $(K^+ \oplus K^+) \rtimes K^*$ où K désigne un corps algébriquement clos et où K^* agit naturellement sur $(K^+ \oplus K^+)$). Le Théorème 7.9 montre que, par contre, il ne peut pas avoir une infinité de classes de conjugaisons de centralisateurs généralisés de sous-groupes nilpotents.

LEMME 7.8. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, A un sous-groupe G-minimal de G et E_0 et E_1 deux centralisateurs généralisés de sous-groupes nilpotents de G tels que $G = AE_0 = AE_1$ et tels que $A \cap E_0$ et $A \cap E_1$ soient finis. Alors E_0 et E_1 sont conjugués et $G = A \rtimes E_0 = A \rtimes E_1$.*

Preuve. Par induction sur le rang de G. Les intersections $A \cap E_0$ et $A \cap E_1$ sont triviales d'après la Proposition 7.2 et le Corollaire 7.4. Si $F(G)^0 = A$, alors $Z(G)$ est fini et $G' = A$ d'après le Fait 2.7, donc le Fait 2.11 donne le résultat. Ainsi on peut supposer $F(G)^0 \neq A$. Alors E_0 contient un sous-groupe G-minimal B. Soient X un sous-ensemble de G tel que $E_1 = E_G(X)$ et $x \in X$. Alors $F(G/A) = F(E_1)A/A$ puisque G/A

$\cong E_1$ et on en déduit, par le Fait 5.14, que xA appartient à $F(G/A)$. Mais la section BA/A est G/A-minimale, donc centrale dans $F(G/A)$ d'après le Fait 2.7 et, en particulier, est centralisée par xA. Alors $[B, x] \leq A \cap B = 1$ et x centralise B, en particulier B est contenu dans $E_G(x)$. Ceci prouve que B est contenu dans $E_G(X) = E_1$. L'hypothèse d'induction donne le résultat dans le quotient G/B, donc dans G. ∎

THÉORÈME 7.9. *Un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de centralisateurs généralisés de sous-groupes nilpotents. De plus, ce nombre est borné par* $2^{rk G^k}$ *où k désigne un entier tel que* $G^k = G^{k+1}$.

Preuve. Supposons que G soit un contrexemple de rang minimal au théorème. Soit A un sous-groupe G-minimal dans G^k. Par minimalité du rang de G, G/A a au plus $2^{\mathrm{rk}\, G^k - \mathrm{rk}\, A}$ classes de conjugaisons de centralisateurs généralisés. Par la Proposition 7.3, il existe un centralisateur généralisé E/A de G/A tel que E contienne trois centralisateurs généralisés E_0, E_1, et E_2 non conjugués deux à deux et qui vérifient $E = AE_0 = AE_1 = AE_2$. En particulier il en existe deux qui intersectent finiment A. Le Lemme 7.8 donne alors une contradiction. ∎

Nous donnons deux corollaires à ce théorème.

COROLLAIRE 7.10. *Un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de sous-groupes nilpotents maximaux.*

Preuve. Soit F un sous-groupe nilpotent maximal de G (il existe d'après le Corollaire 5.17). Alors $F = F(E_G(F))$ et le Théorème 7.9 donne le résultat. ∎

Une classe $\mathscr{S}$ de groupes est dite *S-close* si, pour tout $G \in \mathscr{S}$, tous les sous-groupes de G appartiennent à $\mathscr{S}$. La classe $\mathscr{U}$ des $\mathscr{U}$-groupes était définit dans [9] comme étant la plus grande classe S-close de groupes localement fini satisfaisant les conditions:

(U1) si $G \in \mathscr{U}$, alors G possède une série $1 = G_0 \trianglelefteq \cdots \trianglelefteq G_n = G$ avec des facteurs localement nilpotents;

(U2) si $G \in \mathscr{U}$ et si π est un ensemble d'entiers premiers, alors les π-sous-groupes de Hall de G sont conjugués dans G.

Signalons que B. Hartley a montré dans [10] que (U2) implique (U1).

Pour le second corollaire, nous avons besoin d'un lemme qui nécessite un théorème sur les $\mathscr{M}_c$-groupes localement finis. Il provient de la Section 5 de [9] (où il est donné pour les $\mathscr{U}$-groupes) et du fait qu'un $\mathscr{M}_c$-groupe résoluble et localement fini est un $\mathscr{U}$-groupe (voir [7], Bryant et Hartley).

Fait 7.11 ([9, Section 5], Gardiner, Hartley, et Tomkinson). Tout $\mathscr{M}_c$-groupe localement fini résoluble G a un sous-groupe localement nilpotent autonormalisant C et deux tels sous-groupes sont conjugués. De plus, si N est un sous-groupe normal de G tel que G/N soit localement nilpotent, $G = NC$.

Si p est un entier premier, on appelle *p-tore* tout p-groupe abélien et divisible.

Fait 7.12 ([6], Borovik et Poizat). Soit p un entier premier. Soit T un p-tore dans un groupe G de rang de Morley fini, alors $[N_G(T):C_G(T)] < \infty$ et même, il existe un entier c tel que $[N_G(T):C_G(T)] \leq c$ pour tout p-tore T de G.

LEMME 7.13. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, π un ensemble d'entiers premiers, B le π-sous-groupe définissable et d'exposant borné maximal de G, R un π-sous-groupe de Hall de G et C un sous-groupe localement nilpotent autonormalisant de R. Alors $N_G(R) = BE_G(C)$.*

Preuve. R est localement fini d'après le Fait 5.1. D'après le Fait 2.7, R' est contenu dans $F(G)^0$, donc R' est contenu dans $B * T$, où T est la somme directe des tores de $F(G)$, d'après le Fait 2.4. Mais T est central dans G puisque G est connexe (Fait 7.12), donc R^2 est contenu dans B et $R = BC$ d'après le Fait 7.11. Par l'argument de Frattini, $N_G(R) = BN_G(C)$. Il suffit alors de montrer que $E_G(C) = N_G(C)$. D'après le Corollaire 5.17, C est nilpotent. Donc, comme $[C, N_G(C)] \leq C$, $N_G(C)$ est contenu dans $E_G(C)$, aussi C est contenu dans $F(E_G(C))$. Soit S le π-sous-groupe de Hall de $F(E_G(C))$, nécessairement S contient C. Alors BS est un π-sous-groupe de G qui contient R, donc $R = BS$ et S est contenu dans R. On en déduit que $N_S(C) = C$ et, par la condition de normalisateur dans S, $C = S$. Ceci prouve que C est normal dans $E_G(C)$, d'où le résultat. ∎

COROLLAIRE 7.14. *Un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G n'a qu'un nombre fini de classes de conjugaisons de normalisateurs de sous-groupes de Hall.*

Preuve. Suit directement du Lemme 7.13 et du Théorème 7.9. ∎

Le Lemme 7.13 nous permet aussi de donner une généralisation du Fait 5.3 (Corollaire 7.15).

COROLLAIRE 7.15. *Si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et si R est un sous-groupe de Hall de G, alors $N_G(R)$ est anormal dans G et R est connexe.*

Preuve. D'après le Lemme 7.13 et le Corollaire 7.4, $N_G(R)$ est anormal dans G. Alors $N_G(R)$ est en particulier définissable et connexe d'après la Proposition 3.2 et R est connexe d'après le Fait 5.3. ∎

Maintenant on va montrer que, dans un sous-groupe définissable d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, les sous-groupes de Carter existent et ils sont conjugués.

THÉORÈME 7.16. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un sous-groupe définissable de G. Alors H a un sous-groupe de Carter et les sous-groupes de Carter de H sont conjugués dans H.*

Preuve. On suppose que G est un contrexemple de rang minimal et H un sous-groupe définissable de G qui ne vérifie pas le théorème et qui est de rang et degré minimal.

(1) H a un sous-groupe de Carter.

H n'est pas nilpotent, donc il existe $h \in H \setminus F(H)$. En particulier $E_H(h)$ est un sous-groupe définissable propre de H d'après le Fait 5.14 et le Corollaire 5.18. Par minimalité de H, $E_H(h)$ a un sous-groupe de Carter C et les sous-groupes de Carter de $E_H(h)$ sont conjugués dans $E_H(h)$. Par l'argument de Frattini, $E_H(h) = E_H(h)' N_{E_H(h)}(C) = E_H(h)'C$. D'après le Corollaire 5.17, C est contenu dans un sous-groupe nilpotent maximal K de H. Comme $H' \leq G'$ est nilpotent d'après le Fait 2.7, K est un sous-groupe de Carter de $H'K$. Si $H = H'K$, c'est fini. Sinon, $H = H'N_H(K)$ par minimalité de H et par l'argument de Frattini. Supposons $H = N_H(K)$. Alors K est contenu dans $F(H)$ et C aussi. Donc C est contenu dans $F(E_H(h))$ et, C étant un sous-groupe de Carter de $E_H(h)$, $C = E_H(h)$. On en déduit que h appartient à C qui est contenu dans $F(H)$, ce qui est contradictoire. Alors $N_H(K) < H$ et, par conséquent, $N_H(K)$ a un sous-groupe de Carter D d'après la minimalité de H. Aussi les sous-groupes de Carter de $N_H(K)$ sont conjugués dans $N_H(K)$ et $N_H(K) = N_H(K)'D$ d'après l'argument de Frattini. On en déduit que $H = H'D$ et, si L est un sous-groupe nilpotent maximal de H qui contient D, alors L est un sous-groupe de Carter de H. On en déduit (1).

(2) Conjugaison.

Comme H est un contrexemple au théorème et comme H a un sous-groupe de Carter d'après (1), H possède deux sous-groupes de Carter K_1 et K_2 non conjugués dans H. Soit A un sous-groupe G-minimal de G.

Montrons que $AH = AK_1 = AK_2$. Si $AH > AK_1$, alors les sous-groupes de Carter de $(H \cap A)K_1$ sont conjugués par minimalité de H et $N_H((H \cap A)K_1) = (H \cap A)K_1$ d'après l'argument de Frattini. On en déduit que $K_1(H \cap A)/(H \cap A)$ est un sous-groupe de Carter de $H/(H \cap A)$ et, par conséquent, $K_1 A/A$ est un sous-groupe de Carter de HA/A. En particulier HA/A n'est pas nilpotent et, donc, $AH < AK_2$. Alors, de même, K_2A/A est un sous-groupe de Carter de HA/A. Par minimalité de G, K_1A/A et K_2A/A sont conjugués par un élément de H et, comme les sous-groupes de Carter de $(H \cap A)K_1$ sont conjugués, K_1 et K_2 sont conjugués, ce qui est absurde. On en déduit $AH = AK_1$, de même on a l'égalité $AH = AK_2$.

Montrons qu'il existe $a \in A$ tel que $K_1^a = K_2$. Comme $AK_1 = AK_2$, K_2 est contenu dans $AE_G(K_1)$ et $G = AE_G(K_1)$ par minimalité de G. De même $G = AE_G(K_2)$. Si $E_G(K_1) \cap A$ n'était pas trivial, K_1 centraliserait un élément de A, donc centraliserait A d'après le Fait 2.9. Alors AK_1 serait nilpotent et, comme H est contenu dans AK_1, on aurait $K_1 = H = K_2$ ce qui est contradictoire. Donc $G = A \rtimes E_G(K_1)$ et, de même, $G = A \rtimes E_G(K_2)$. En particulier $E_G(K_1) \cap AH = K_1$ et $E_G(K_2) \cap AH = K_2$. D'après le Lemme 7.8, il existe $a \in A$ tel que $E_G(K_1)^a = E_G(K_2)$. On en conclut que $K_1^a = (E_G(K_1) \cap AH)^a = E_G(K_2) \cap AH = K_2$.

Montrons que a appartient à H. Soit h un élément de H qui ne centralise aucun élément de A. Soit C le sous-groupe de A tel que $C/(A \cap H) = C_{A/(A \cap H)}(h)$. $C = \{[c,h] : c \in C\}$ d'après le Fait 2.5. Donc, comme $[C,h]$ est contenu dans $A \cap H$, $C = A \cap H$. On en déduit que, pour tout $b \in A$, $[b,h]$ appartient à H si et seulement si b appartient à $A \cap H$. Ainsi $N_A(H) = A \cap H$. Or $H^a = (A \cap H)K_1^a = (A \cap H)K_2 = H$, donc a appartient à H. ∎

On finit en montrant qu'on peut aussi "remonter" les quotients.

COROLLAIRE 7.17. *Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, N un sous-groupe normal (pas nécessairement définissable) de G et H/N un sous-groupe nilpotent de G/N. Alors il existe un sous-groupe nilpotent C de $d(H)$ tel que $d(H) = NC$ et $E_G(C)N/N = E_{G/N}(H/N)$.*

Preuve. Par induction sur le rang de G. Soit E le sous-groupe qui vérifie $E/N = E_{G/N}(H/N)$. Si N est central dans G, le fait est trivial. Sinon N contient un sous-groupe G-minimal A d'après le Fait 2.6. Par hypothèse d'induction on peut supposer $N = A$. Soit C un sous-groupe de Carter de $d(H)$ (il existe d'après le Théorème 7.16). Par conjugaison des sous-groupes de Carter dans NC et par l'argument de Frattini $d(H) = NC$. La Proposition 7.3 donne $E_{G/N}(H/N) = E_{G/N}(d(H)/N) = E_G(C)N/N$. ∎

8. THÉORIE DES FORMATIONS CONNEXES

La notion de *formation* a été introduite par Gaschütz [11] pour les groupes résolubles finis après les travaux de Carter sur les sous-groupes nilpotents et autonormalisants des groupes résolubles finis.

Il existe des théories des formations pour diverses classes de groupes résolubles (groupes finis, $\mathscr{M}_c$-groupes périodiques, ...). Ces théories permettent de mieux comprendre la structure des groupes résolubles appartenant à ces classes en fournissant une approche générale à certains phénomènes de recouvrements. On rappelle qu'il existe une théorie des formations pour les sous-groupes localement finis des groupes de rang de Morley fini résolubles (voir [1]). Elle utilise fortement les résultats connus sur les $\mathscr{M}_c$-groupes périodiques. La méthode utilisée ici pour développer la théorie des formations, appelée *théorie des formations connexes*, pour les groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles, est très différente de celle utilisée pour les $\mathscr{M}_c$-groupes périodiques, puisque nous n'utilisons plus la théorie de Sylow. Nous avons juste besoin de l'existence d'une notion de sous-groupe de Frattini (Définition 5.6). Il est interessant de remarquer qu'on traite notre cas de la même façon qu'est traité le cas fini dans [19, p. 269 à 274]. Le résultat principal de cette section (Théorème 8.5) est alors indépendant des parties 3 à 7, seuls quelques faits biens connus (inscrits dans la seconde partie) sont nécessaires.

Nous finissons en illustrant cette théorie par deux exemples de formations connexes saturées: les groupes de rang de Morley fini connexes et nilpotents (formation connexe $\mathscr{N}$) et les π^*-groupes (Définition 8.16). Nous montrons que, si G désigne un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble alors, les sous-groupes $\mathscr{N}$-couvrants de G sont exactement les sous-groupes de Carter de G (Corollaire 8.14). La seconde formation permet de retrouver un théorème de Borovik et Nesin sur les π^*-groupes (Corollaire 8.19).

8.1. *La théorie*

DÉFINITION 8.1. Si $\mathscr{F}$ est une classe de groupes, on appelle $\mathscr{F}$-groupe un élément de $\mathscr{F}$.

Une formation connexe est une classe $\mathscr{F}$ de groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles, qui vérifient:

(i) l'image d'un $\mathscr{F}$-groupe par un homomorphisme définissable de groupe est un $\mathscr{F}$-groupe;

(ii) si G est un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble avec deux sous-groupes normaux et définissables N_1 et N_2 tels que G/N_1 et G/N_2 soient des $\mathscr{F}$-groupes, $G/(N_1 \cap N_2)^0$ est un $\mathscr{F}$-groupe.

On dira que $\mathscr{F}$ est saturée si, pour tout groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G, $G/\text{Fratc}(G) \in \mathscr{F}$ implique $G \in \mathscr{F}$.

Le principal exemple de formation connexe est celle des groupes de rang de Morley fini connexes et nilpotents. Le Lemme 5.11 montre que cette formation est saturée.

LEMME 8.2. *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe saturée, G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et N un sous-groupe G-minimal de G. On suppose $G/N \in \mathcal{F}$ et $G \notin \mathcal{F}$. Alors il existe un sous-groupe $M \in \mathcal{F}$ tel que $G = NM$ et tel que $N \cap M$ soit fini. De plus, deux tels sous-groupes sont conjugués.*

Preuve. Comme $G/N \in \mathcal{F}$ et $G \notin \mathcal{F}$, N n'est pas contenu dans $\mathrm{Fratc}(G)$ puisque $\mathcal{F}$ est saturée. Donc il existe un sous-groupe définissable, connexe et propre maximal M de G qui ne contient pas N. Par maximalité de M, $G = NM$. Alors $M \cap N$ est normal dans G et, N étant G-minimal, $M \cap N$ est fini. Aussi, comme $M/(M \cap N) \cong G/N$ appartient à $\mathcal{F}$, M aussi.

On va montrer, par induction sur le rang de G, que deux $\mathcal{F}$-sous-groupes K_1 et K_2 tels que $G = NK_1 = NK_2$ et tels que $N \cap K_1$ et $N \cap K_2$ soient finis sont conjugués. K_1 et K_2 sont deux sous-groupes définissables, connexes et propres maximaux de G puisque N est G-minimal. Si G a un sous-groupe G-minimal B distinct de N, alors G/B n'appartient pas à $\mathcal{F}$ puisque $G = G/(N \cap B)^0$ n'appartient pas à $\mathcal{F}$. Par maximalité de K_1 et de K_2, B est contenu dans K_1 et K_2. L'hypothèse d'induction donne alors le résultat et on peut supposer que N est l'unique sous-groupe G-minimal de G. Si G avait un centre infini, N serait alors central dans G. K_1 et K_2 serait donc normaux et, par conséquent, triviaux. On peut donc supposer le centre de G fini. Comme les intersections $K_1 \cap N$ et $K_2 \cap N$ sont finies et normales dans G, donc centrales, elles sont triviales d'après le Fait 2.9. Aussi N centralise G' d'après le Fait 2.7, donc K_1' et K_2' sont triviaux. On en déduit que G' est contenu dans N. Mais G' n'est pas trivial puisque G a un centre fini, donc $G' = N$ par G-minimalité de N. Le Fait 2.11 donne alors le résultat. ∎

DÉFINITION 8.3. Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe et G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. On note $G_{\mathcal{F}}$ le plus petit sous-groupe normal et définissable de G tel que $G/G_{\mathcal{F}}$ appartienne à $\mathcal{F}$.

Un sous-groupe H de G est un sous-groupes $\mathcal{F}$-couvrant de G si H appartient à $\mathcal{F}$ et si $S = S_{\mathcal{F}}H$ pour tout sous-groupe définissable et connexe S de G qui contient H.

D'après la Définition 8.1, le sous-groupe $G_{\mathcal{F}}$ existe toujours et est définissable et connexe.

LEMME 8.4. *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe, G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et N un sous-groupe définissable et normal de G.*

(i) *Si H est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G, alors HN/N est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G/N.*

(ii) *Si K/N est un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant de G/N et si H est un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant de K^0, alors H est un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant de G.*

Preuve. (i) Soient S/N un sous-groupe définissable et connexe de G/N qui contient HN/N et R le sous-groupe de S qui vérifie $R/N = (S/N)_{\mathscr{F}}$. Comme $S^0/(S^0 \cap R) \cong S^0R/R = S/R \in \mathscr{F}$, $S^0/R^0 = S^0/(S^0 \cap R)^0 \in \mathscr{F}$ donc, comme S^0 contient H, $S^0 = R^0H$. Ainsi $S/N = (R^0H)N/N = (R/N)(HN/N)$ et c'est fini.

(ii) Soit S un sous-groupe définissable et connexe de G qui contient H. Comme $K^0/(K^0 \cap N) \cong K^0N/N = K/N \in \mathscr{F}$, $K^0 = H(K^0 \cap N)$ et $K = HN$. Alors SN/N contient K/N. Aussi $SN/(S_{\mathscr{F}}N)$ est isomorphe à $S/(S \cap S_{\mathscr{F}}N)$ qui appartient à $\mathscr{F}$, donc $SN = K(S_{\mathscr{F}}N) = KS_{\mathscr{F}}$ et on obtient $S = S_{\mathscr{F}}(S \cap K) = S_{\mathscr{F}}(S \cap K)^0$. Or $H \leq (S \cap K)^0 \leq K^0$ et $(S \cap K)^0/(S_{\mathscr{F}} \cap K)^0$ est un $\mathscr{F}$-groupe, donc $(S \cap K)^0 = (S_{\mathscr{F}} \cap K)^0H$ et on conclut $S = S_{\mathscr{F}}(S \cap K)^0 = S_{\mathscr{F}}H$. ∎

THÉORÈME 8.5. *Soit $\mathscr{F}$ une formation connexe.*

(i) *Si tout groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble a un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant, $\mathscr{F}$ est saturée.*

(ii) *Si $\mathscr{F}$ est saturée, tout groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G a un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant et deux tels sous-groupes sont conjugués dans G.*

Preuve. Montrons (i). Soient G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble tel que $G/\mathrm{Fratc}(G)$ appartienne à $\mathscr{F}$ et H un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant de G. Alors $G = \mathrm{Fratc}(G)H$ et $G = H \in \mathscr{F}$, d'où le résultat.

Montrons (ii) par induction sur le rang de G. On peut supposer que G n'appartienne pas à $\mathscr{F}$. Soit N un sous-groupe G-minimal de G. Par hypothèse d'induction G/N a un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant K/N.

Si G/N n'appartient pas à $\mathscr{F}$, alors K est distinct de G et K a un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant H d'après l'hypothèse d'induction. Le Lemme 8.4(ii) dit qu'alors H est un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant de G. Soient K et L deux sous-groupes $\mathscr{F}$-couvrants de G. Par le Lemme 8.4(i) KN/N et LN/N sont des sous-groupes $\mathscr{F}$-couvrants de G/N et sont donc conjugués d'après l'hypothèse d'induction. Aussi KN/N est distinct de G/N puisque G/N n'appartient pas à $\mathscr{F}$. Donc, K et L^g étant des sous-groupes $\mathscr{F}$-couvrants de KN pour un $g \in G$, K et L sont conjugués.

On peut donc supposer que G/N appartient à $\mathscr{F}$. Le Lemme 8.2 dit qu'alors il existe un sous-groupe K de G tel que K soit un $\mathscr{F}$-groupe, $G = NK$ et $K \cap N$ soit fini. Comme G n'est pas un $\mathscr{F}$-groupe et comme N est G-minimal, $N = G_{\mathscr{F}}$. Aussi, K est un sous-groupe définissable, connexe et propre maximal de G, donc K est un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant de

G. Si H est un autre sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G alors $G = NH$ et $N \cap H$ est fini puisque N est G-minimal et G n'est pas un $\mathcal{F}$-groupe. Le Lemme 8.2 dit que H et K sont donc conjugués. ∎

COROLLAIRE 8.6. *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe saturée, G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et N un sous-groupe définissable et normal de G. Alors tout sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G/N est de la forme HN/N où H est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G.*

Preuve. Soient K/N (resp. L) un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G/N (resp. G). Alors LN/N est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G/N d'après le Lemme 8.4(i). Donc LN/N est conjugués à K/N par le Théorème 8.5. ∎

COROLLAIRE 8.7. *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe saturée et G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Alors le normalisateur de tout sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant H de G est anormal.*

Preuve. Soient $g \in G$ et $K = \langle N_G(H), N_G(H)^g \rangle$. Alors $\langle H, H^g \rangle$ est définissable et connexe d'après le théorème des indécomposables de Zil'ber et H et H^g sont deux sous-groupes $\mathcal{F}$-couvrants de $\langle H, H^g \rangle$. D'après le Théorème 8.5 il existe $u \in \langle H, H^g \rangle \leq K$ tel que $H^u = H^g$. Ainsi $gu^{-1} \in N_G(H) \leq K$ et g appartient à K. ∎

COROLLAIRE 8.8. *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe saturée. Alors tout groupe de rang de Morley fini connexe et nilpotent a un unique sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant.*

Preuve. Suit direcetment du corollaire précédent. ∎

PROPOSITION 8.9. *Soient $\mathcal{F}$ une formation connexe saturée et G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble. Si H est un $\mathcal{F}$-groupe tel que $G = F(G)H$, alors H est contenu dans un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G.*

Preuve. Par induction sur le rang de G. On peut supposer que G n'est pas un $\mathcal{F}$-groupe. Soit N un sous-groupe G-minimal de G. Alors HN/N est un $\mathcal{F}$-groupe et $G/N = (HN/N)F(G/N)$, donc HN/N est contenu dans un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G/N d'après l'hypothèse d'induction. Ce sous-groupe est de la forme KN/N avec K sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G d'après le Corollaire 8.6.

Si KN est distinct de G alors, comme $KN = F(KN)H$, l'hypothèse d'induction dit que H est contenu dans un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant M de KN. Or M est conjugué à K dans KN donc M est un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de G. Ainsi on peut supposer $G = KN$ et $G_{\mathcal{F}}$ contenu dans N.

Comme N centralise $F(G)$, $K \cap F(G)$ est normal dans G. Si $K \cap F(G)$ est infini alors, par hypothèse d'induction, H est contenu dans T où T désigne un sous-groupe de G tel que $T/(K \cap F(G))^0$ soit un sous-groupe $\mathcal{F}$-couvrant de $G/(K \cap F(G))^0$. Comme $G_{\mathcal{F}}$ est contenu dans N, $T_{\mathcal{F}}$ est aussi contenu dans N. Ainsi $T_{\mathscr{F}}$ est contenu dans $(K \cap N)^0$ qui est trivial puisque N est G-minimal et puisque G n'appartient pas à $\mathscr{F}$. On en déduit que T est un $\mathscr{F}$-groupe d'où le résultat. On peut alors supposer $K \cap F(G)$ fini. Ceci donne $F(G)^0 = N(K \cap F(G))^0 = N$ et on obtient $G = NH$. N étant G-minimal, H est un sous-groupe définissable, connexe et propre maximal de G et $G = G_{\mathscr{F}}H$, donc H est un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant de G. ∎

DÉFINITION 8.10. Soient $\mathscr{F}$ une formation connexe, G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble et H un $\mathscr{F}$-groupe. H est un $\mathscr{F}$-projecteur de G si HN/N est un $\mathscr{F}$-sous-groupe maximal de G/N pour tout sous-groupe normal et définissable N de G.

THÉORÈME 8.11. *Soient $\mathscr{F}$ une formation connexe et G un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble.*

(i) *Tout sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant de G est un $\mathscr{F}$-projecteur de G.*

(ii) *Si $\mathscr{F}$ est saturée, tout $\mathscr{F}$-projecteur de G est un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant de G.*

Preuve. (i) Soient N un sous-groupe normal et définissable de G et H un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant de G. Si HN/N est contenu dans un $\mathscr{F}$-sous-groupe K/N de G/N, alors $K^0/(N \cap K^0) \cong K^0N/N = K/N$ est un $\mathscr{F}$-groupe. On en déduit que $K = K^0N = HN$, ce qui donne le résultat.

(ii) Par induction sur le rang de G. On peut supposer G non trivial. Soient N un sous-groupe G-minimal de G et H un $\mathscr{F}$-projecteur de G. Alors HN/N est un $\mathscr{F}$-projecteur de G/N. Par hypothèse d'induction, HN/N est un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant de G/N. D'après le Corollaire 8.6, il existe un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant H^* de G tel que $HN = H^*N$. Aussi $HN = F(HN)H$ et la Proposition 8.9 dit que H est contenu dans un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant K de HN. Mais H est un $\mathscr{F}$-sous-groupe maximal de G, donc $H = K$. Alors H et H^* sont conjugués dans HN d'après le Théorème 8.5. ∎

8.2. *Applications*

Dans la suite on désignera par $\mathscr{N}$ la formation connexe des groupes de rang de Morley fini connexes et nilpotents. Comme première application des résultats ci-dessus nous donnons une autre démonstration de l'existence et de la conjugaison des sous-groupes de Carter connexes dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble (Corollaire 8.13). Cette preuve utilise la partie 3 mais n'utilise rien des parties 4, 6, et 7 et seulement des trivialités de la partie 5 (Lemmes 5.7 et 5.9). En fait on montre qu'on a affaire aux sous-groupes $\mathscr{N}$-couvrants (Proposition 8.12).

Comme le Théorème 1.1 montre que les sous-groupes de Carter d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble sont exactement les sous-groupes de Carter connexes et comme, pour les groupes finis, les sous-groupes de Carter correspondent aux sous-groupes $\mathscr{F}$-couvrants pour la formation des groupes nilpotents (voir [19, p. 273]), on montre que la Définition 2.13 de sous-groupe de Carter est, du point de vue de la théorie des formations connexe, celle qui correspond le mieux à la définition de sous-groupe de Carter dans le cas fini.

PROPOSITION 8.12. *$\mathscr{N}$ est une formation connexe saturée et les sous-groupes $\mathscr{N}$-couvrants d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G sont exactement les sous-groupes de Carter connexes de G.*

Preuve. $\mathscr{N}$ est une formation connexe saturée d'après le Lemme 5.11. Le Théorème 8.5 dit alors que G a un sous-groupe $\mathscr{N}$-couvrant C. $G = F(G)C$ d'après le Fait 2.7. On en déduit que $N_G(C)^0 = N_{F(G)}(C)^0C$ est nilpotent et est égal à C puisque C est $\mathscr{N}$-couvrant. Le Corollaire 8.7 et la Proposition 3.2 disent que $N_G(C)$ est connexe, donc C est un sous-groupe de Carter connexe de G. Il suffit alors de montrer qu'un sous-groupe de Carter connexe K de G est $\mathscr{N}$-couvrant. On peut supposer G contrexemple de rang minimal. D'après le Fait 2.7, la minimalité du rang de G, le Théorème 8.5 et l'argument de Frattini, $G = F(G)^0N_G(K) = F(G)^0K$. La Proposition 8.9 dit alors que K est contenu dans un sous-groupes $\mathscr{N}$-couvrant de G. Comme $N_G(K) = K$, K est alors $\mathscr{N}$-couvrant dans G. ∎

COROLLAIRE 8.13. *Soit G un groupe de rang de Morley fii connexe et résoluble. Alors les sous-groupes de Carter connexes de G existent et sont conjugués.*

Preuve. Suit de la Proposition 8.12 et du Théorème 8.5. ∎

En utilisant le Théorème 1.1, nous en déduisons le résultat suivant:

COROLLAIRE 8.14. *Les sous-groupes $\mathscr{N}$-couvrants d'un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble G sont exactement les sous-groupes de Carter de G.*

Avant de donner la seconde application, nous rappelons deux définitions.

DÉFINITION 8.15 [5]. Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et π un ensemble de nombres premiers. On note $B_\pi(G)$ le π-sous-groupe normal, définissable, connexe et d'exposant borné de G qui est maximal pour ces propriétés.

DÉFINITION 8.16 [5]. Soient G un groupe de rang de Morley fini résoluble et π un ensemble de nombres premiers. G est un π^*-groupe si

G est connexe et si ses sections définissables, abéliennes et connexes sont π-divisibles.

Le Lemme 8.17 montrera que la classe des π^*-groupes est une formation connexe saturée ce qui place cette notion dans un contexte plus général et rend son contenu plus clair.

Dans ce qui suit nous nous permettons l'usage de Théorèmes 1.1 et 1.2 bien que les arguments n'utilisent que certains fragments de ces résultats.

LEMME 8.17. *La classe des π^*-groupes est une formation connexe saturée pour tout ensemble π d'entiers premiers.*

Preuve. Soient π un ensemble d'entiers premiers et $\mathscr{F}$ la classe des π^*-groupes. Il est clair que $\mathscr{F}$ est une formation connexe et on va montrer qu'elle est saturée. Soit H un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble avec $B_\pi(H)$ non trivial. Il suffit de trouver un sous-groupe propre, définissable et connexe maximal de H qui ne contient pas $B_\pi(H)$. D'après le Fait 2.4, $F(H)^0$ a un π^*-sous-groupe caractéristique C tel que $F(H)^0 = C * B_\pi(H)$. Soit K un sous-groupe de Carter de H. Les Théorèmes 1.1 et 1.2 disent que K est définissable et connexe donc, comme K est nilpotent, le Fait 2.4 dit que K a un π^*-sous-groupe caractéristique D tel que $K = D * B_\pi(K)$. Comme $H = F(H)^0K$ d'après le Fait 2.7 et la Remarque 3.1, $H = B_\pi(H)(DC)$. Comme $B_\pi(H)$ est non trivial et comme $DC \cap B_\pi(H)$ est fini puisque DC est un π^*-sous-groupe, DC est contenu dans un sous-groupe propre, définissable et connexe maximal M de H. Alors M ne contient pas $B_\pi(H)$ et la démonstration est achevée. ∎

L'objet du théorème suivant est de caractériser les sous-groupes $\mathscr{F}$-couvrants des groupes de rang de Morley fini connexes et résolubles où $\mathscr{F}$ désigne la formation des π^*-groupes. Notons que ce théorème permet une nouvelle démonstration du théorème de Borovik et Nesin sur les π^*-groupes (Corollaire 8.19).

THÉORÈME 8.18. *Soient $\mathscr{F}$ la classe des π^*-groupes et G un groupe de rang de Morley fini résoluble et connexe. Alors les sous-groupes $\mathscr{F}$-couvrants de G sont exactement les π^*-sous-groupes maximaux de G.*

Preuve. On déduit du Théorème 8.5 et du Lemme 8.17 que G a un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant L et que deux sous-groupes $\mathscr{F}$-couvrants de G sont conjugués. Alors, comme $G/B_\pi(G)$ est un $\mathscr{F}$-groupe, $G = B_\pi(G)L$ et, comme un π^*-sous-groupe de G intersecte finiment $B_\pi(G)$, L est un π^*-sous-groupe maximal de G. Pour finir la preuve du théorème, il suffit donc de montrer qu'un π^*-sous-groupe maximal U de G est un sous-groupe $\mathscr{F}$-couvrant de G. Comme $U \cap B_\pi(G)$ est fini, il est suffisant de prouver $G = B_\pi(G)U$. Supposons G contrexemple de rang minimal au théorème.

D'après le Fait 2.4, $F(G)^0$ a un π^*-sous-groupe caractéristique C tel que $F(G)^0 = C * B_\pi(G)$. Alors CU est un π^*-sous-groupe de G, donc U contient C et $B_\pi(G)U$ contient $F(G)^0$. Le Fait 2.7 dit alors que $B_\pi(G)U$ est normal dans G. Soit $N = N_G(U)$. Montrons que N est anormal dans G. Soient $g \in G$ et $F = d(N, N^g)$. Si $F = G$, $g \in F$ sinon, par minimalité de G, il existe $a \in F^0$ tel que $U^a = U^g$. Ainsi $g \in N_G(U)a \subseteq F$. Le Théorème 1.2 dit que N contient un sous-groupe de Carter D de G. Le Fait 2.4 donne l'existence d'un π^*-sous-groupe V de D tel que $D = B_\pi(D) * V$. Or $B_\pi(D)$ est contenu dans $B_\pi(G)$ et UV est un π^*-sous-groupe de G puisque V normalise U, donc V est contenu dans U et D est contenu dans $B_\pi(G)U$. Comme D est anormal dans G d'après le Théorème 1.1, $B_\pi(G)U$ est anormal dans G. Le fait que $B_\pi(G)U$ soit un sous-groupe normal propre de G est contredit. ∎

Le théorème de Borovik et Nesin sur les π^*-groupes devient alors un corollaire du théorème ci-dessus et du Théorème 8.5.

COROLLAIRE 8.19 [5, Borovik & Nesin]. *Soit G un groupe de rang de Morley fini résoluble et connexe et π un ensemble de nombres premiers. Alors les π^*-sous-groupes maximaux de G sont conjugués. Si K est l'un d'eux, alors $G = B_\pi(G)K$ et $B_\pi(G) \cap K$ est un sous-groupe fini.*

Note. *Après l'acceptation de cet article, T. Altınel m'a communiqué un article de T. A. Peng* [1] *où sont déjà étudiés les centralisateurs généralisés* (*définition* 5.15). *Un théorème de* [1] *dit que, dans un groupe nilpotent-par-abélien, $E_G(x)$ est un sous-groupe de G pour tout $x \in G$. En particulier, le fait* 2.7 *montre que, dans un groupe de rang de Morley fini connexe et résoluble, $E_G(x)$ est un sous-groupe de G pour tout $x \in G$. Toutefois, mes motivations pour introduire un tel objet étant différentes de celles de T. A. Peng, les simplifications qui suivent de ce résultat sont mineures* (*les* 5 *dernières lignes de la preuve de la proposition* 5.16 *sont inutiles*).

REMERCIEMENTS

Je remercie chaleureusement Tuna Altınel pour toute l'aide qu'il m'a apporté durant l'élaboration de cet article, ainsi que Bruno Poizat pour ses fructueuses suggestions, et Gregory Cherlin et Frank Wagner pour leur lecture critique de ce travail.

RÉFÉRENCES

1. T. Altınel, G. Cherlin, L.-J. Corredor, et A. Nesin, A Hall theorem for ω-stable groups, *J. London Math. Soc.* (2) **57** (1998), 385–397.
2. O. V. Belegradek, On groups of finite Morley rank, *in* "Abstracts of the Eighth International Congress of Logic, Methodology, and Philosophy of Science, LMPS'87, Moscow, 17–22 August 1987," pp. 100–102.

3. A. V. Borovik et A. Nesin, "Groups of Finite Morley Rank," Oxford Univ. Press, Oxford, UK, 1994.
4. A. V. Borovik et A. Nesin, On the Schur–Zassenhaus theorem for groups of finite Morley rank, *J. Symbolic Logic* **57** (1992), 1469–1477.
5. A. V. Borovik et A. Nesin, Schur–Zassenhaus theorem revisited, *J. Symbolic Logic* **59** (1994), 283–291.
6. A. V. Borovik et B. Poizat, Tores et p-groupes, *J. Symbolic Logic* **55** (1990), 565–583.
7. R. Bryant et B. Hartley, Periodic locally soluble groups with the minimal condition on centralizers, *J. Algebra* **61** (1979), 328–334.
8. R. W. Carter, Nilpotent self-normalizing subgroups of soluble groups, *Math. Z.* **75** (1961), 136–139.
9. A. D. Gardiner, B. Hartley, et M. J. Tomkinson, Saturated formations and Sylow structure in locally finite groups, *J. Algebra* **17** (1971), 177–211.
10. B. Hartley, Sylow theory in locally finite groups, *Compositio Math.* **25** (1972), 263–280.
11. W. Gaschütz, Zur Theorie der endlichen auflösbaren Gruppen, *Math. Z.* **80** (1963), 300–305.
12. K. W. Gruenberg, The Engel elements of a soluble group. *Illinois J. Math.* **3** (1959), 151–168.
13. E. Jaligot, Groupes de rang de Morley fini de type pair avec un sous-groupe faiblement inclus, preprint.
14. O. H. Kegel et B. A. F. Wehrfritz, "Locally Finite Groups," North-Holland, Amsterdam, 1973.
15. A. Nesin, On solvable groups of finite Morley rank, *Trans. Amer. Math. Soc.* **321** (1990), 659–690.
16. A. Nesin, Poly-separated and ω-stable nilpotent groups, *J. Symbolic Logic* **56** (1991), 694–699.
17. A. Nesin, Generalized fitting subgroups of a group of finite Morley rank, *J. Symbolic Logic* **56** (1991), 1391–1399.
18. B. Poizat, "Groupes stables," Nur Al-mantiq Wal-Ma'rifah, Villeurbanne, France, 1987.
19. D. J. S. Robinson, "A Course in the Theory of Groups," Springer-Verlag, New York/Berlin, 1993.
20. F. O. Wagner, Nilpotent complements and Carter subgroups in stable $\mathfrak{R}$-groups, *Arch. Math. Logic* **33** (1994), 23–34.
21. F. O. Wagner, "Stable Groups," London Mathematical Society Lecture Notes Series, Cambridge Univ. Press, Cambridge, UK, 1997.
22. B. I. Zil'ber, Groups and rings whose theory is categorical, *Fund. Math.* **55** (1977), 173–188.
23. B. I. Zil'ber, Some model theory of simple algebraic groups over algebraically closed fields, *Colloq. Math.* **48** (1984), 173–180.
24. T. A. Peng, On groups with nilpotent derived groups, *Arch. Math.* (*Basel*) **20** (1969), 251–253.