Available online at www.sciencedirect.com
SciVerse ScienceDirect

ELSEVIER

Expo. Math. 30 (2012) 295–308

EXPOSITIONES MATHEMATICAE

www.elsevier.de/exmath

Deux extensions de Théorèmes de Hamburger (portant sur l'équation fonctionnelle de la fonction zêta)

Jean-François Burnol[1]

Université Lille 1, UFR de Mathématiques, Cité Scientifique M2, F-59655 Villeneuve d'Ascq, France

Received 24 June 2011; received in revised form 6 January 2012

Abstract

We propose two types of extensions to Hamburger's theorems on the Dirichlet series with a functional equation like the one of the Riemann zeta function, under weaker hypotheses. This builds upon the dictionary between the moderate meromorphic functions with the functional equation and the tempered distributions with an extended S-support condition.

Résumé

Nous proposons deux types d'extensions aux théorèmes de Hamburger sur les séries de Dirichlet avec équation fonctionnelle comme celle de la fonction zêta de Riemann, sous des hypothèses plus faibles. Ceci repose sur le dictionnaire entre les fonctions méromorphes modérées avec cette équation fonctionnelle et les distributions tempérées avec la condition de support S-étendue.

MSC 2010: 11M06; 11F66

Keywords: Riemann zeta function; Dirichlet series; Hamburger theorem; Functional equations; co-Poisson formula; Poisson formula

E-mail address: burnol@math.univ-lille1.fr.

[1] L'auteur remercie le C.R.M. de Barcelone pour l'hospitalité de son accueil en mai 2011, lors d'un séjour pendant lequel ce travail a été conçu et rédigé.

0723-0869/$ - see front matter
doi:10.1016/j.exmath.2012.03.003

1. Introduction et présentation des résultats

Le Théorème de Hamburger [7] dit à peu près que deux fonctions $f(s)$ et $g(s)$, méromorphes dans le plan complexe, qui admettent chacune pour $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ une représentation sous forme de série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$, et sont reliées par l'équation fonctionnelle

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)g(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)f(1-s),$$

sont alors nécessairement égales à un multiple de la fonction zêta de Riemann $\zeta(s)$. Ce résultat fameux illustre une certaine rigidité de l'équation fonctionnelle de la fonction zêta. Notre but ici est, en utilisant quelques notions communes de la théorie des distributions, de le reprouver sous des hypothèses nettement plus faibles que celles d'origine. En particulier nous n'aurons pas besoin de demander à g d'admettre une représentation en série de Dirichlet, mais seulement de tendre rapidement vers une limite lorsque $\mathrm{Re}(s) \to \infty$. Et lorsque l'on supposera seulement g bornée dans un demi-plan alors f sera nécessairement une combinaison linéaire finie de $\zeta(s)$, $\zeta(s+2)$, $\zeta(s+4)$, ...

L'article se veut accessible à tout lecteur disposant du bagage usuel de base de la théorie des distributions: il faut y ajouter quelques éléments qui ont été développés dans le chapitre IV de [2], chapitre qui peut être lu avec les mêmes pré-requis: il y est construit une notion de «fonction méromorphe modérée avec équation fonctionnelle» dont nous rappellerons les principaux éléments.

Il est plus commode pour cet article de mettre l'équation fonctionnelle de la fonction zêta sous la forme $\zeta(s) = \chi(s)\zeta(1-s)$ avec

$$\chi(s) = \frac{\pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}{\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}$$

La fonction méromorphe $\chi(s)$ est à croissance au plus polynomiale dans toute bande verticale de largeur finie. Voici tout d'abord l'énoncé originel démontré par Hamburger:

Théorème (*Hamburger, [7]*)**.** *Soit f une fonction méromorphe dans le plan complexe tout entier, et d'ordre fini (f est $\mathcal{O}(e^{|s|^k})$ avec un certain entier k pour $|s| \to \infty$, en particulier ne possède au plus qu'un nombre fini de pôles). Si $f(s)$ est représentée pour* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *par une série de Dirichlet $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ absolument convergente, et si la fonction méromorphe*

$$g(s) = \chi(s)f(1-s)$$

admet elle aussi, pour $\mathrm{Re}(s) \gg 1$*, une représentation sous la forme d'une série de Dirichlet convergente $\sum_{n=1}^{\infty} b_n n^{-s}$, alors f est un multiple de la fonction zêta. En particulier si $f(s)$ est représentée pour* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *par une série de Dirichlet absolument convergente $\sum_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ et vérifie l'équation fonctionnelle*

$$\pi^{-\frac{s}{2}}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)f(s) = \pi^{-\frac{1-s}{2}}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)f(1-s),$$

alors elle est un multiple de la fonction zêta de Riemann.

Énonçons maintenant notre résultat principal:

Théorème 1. *Soit*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$$

une série de Dirichlet qui converge pour $\mathrm{Re}(s)$ *suffisamment grand. On suppose que:*

(1) *elle admet un prolongement méromorphe au plan complexe tout entier, avec un nombre fini de pôles,*
(2) *dans toute bande verticale de largeur finie et pour tout* $\epsilon > 0$ *on a* $f(s) = \mathcal{O}(e^{\exp \epsilon |s|})$ *lorsque* $|\mathrm{Im}(s)| \to \infty$,
(3) *la fonction méromorphe* $g(s) = \chi(s) f(1-s)$ *vérifie*

$$\exists N \in \mathbf{N},\ \exists y > \frac{1}{2}, \qquad g(s) = \mathcal{O}(|s|^N y^{-s}) \qquad \textit{pour } \mathrm{Re}(s) \to +\infty.$$

Alors $f(s)$ *est une somme finie:*

$$f(s) = \sum_{k \in \mathbf{Z}} c_k \zeta(s - 2k)$$

Nous voyons que le Théorème 1 fait des hypothèses analytiques nettement plus faibles en ce qui concerne le comportement analytique de $f(s)$ et celui de $\chi(s) f(1-s)$. La conclusion n'est plus, dans l'immédiat, que f est zêta, mais il suffit d'être un peu plus exigeant envers la fonction g:

Corollaire 1. *Avec les notations du Théorème 1, si* (1), (2), *et si*

(3′) *la fonction méromorphe* $g(s) = \chi(s) f(1-s)$ *est bornée pour* $\mathrm{Re}(s) \gg 1$ *ou même vérifie seulement*

$$\exists y > \frac{1}{2} \quad g(s) \underset{\mathrm{Re}(s) \to +\infty}{=} \mathcal{O}(y^{-s}),$$

alors f *est une combinaison linéaire finie de* $\zeta(s)$, $\zeta(s+2)$, $\zeta(s+4), \ldots$.

Corollaire 2. *Si* (1), (2), (3), *et*

(4) *il existe c tel que pour sigma réel tendant vers* $+\infty$ *on a* $g(\sigma) = c + \mathcal{O}(\sigma^{-k})$ *pour tout* $k \in \mathbf{N}$,

alors $f(s) = c\,\zeta(s)$.

Un deuxième théorème de Hamburger englobe son premier. Il demande toujours que $f(s)$ soit une série de Dirichlet au sens strict, mais autorise $g(s)$ à être une série de Dirichlet générale, c'est-à-dire de la forme $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{\lambda_n^s}$ avec $0 < \lambda_n \to +\infty$.

Théorème (*Hamburger, [8]*)**.** *Soit* f *une fonction méromorphe dans le plan complexe tout entier, d'ordre fini, et égale pour* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *à la somme d'une série de Dirichlet absolument convergente. Si la fonction*

$$g(s) = \chi(s) f(1-s)$$

admet pour Re(s) *suffisamment grand une représentation sous la forme d'une série de Dirichlet générale*[2]

$$g(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{y_n^s},\quad \mathrm{Re}(s)\gg 0,\ 0<y_n\to\infty,\ 0<y_1<y_2<\cdots<y_k=1<\cdots$$

alors $y_{n+k}=y_n+1$ *pour tout* $n\geqslant 1$, *avec* $b_{n+k}=b_n$ *et de plus, pour* $1\leqslant j<k$ *on a les symétries* $b_j=b_{k-j}$, $y_j+y_{k-j}=1$. *Ainsi, si tous les* y_n *sont* $\geqslant 1$, *c'est que* $k=1$ *et que* f *est un multiple de la fonction zêta. En général on a*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sum_{1\leqslant j\leqslant k} b_j\cos(2\pi y_j n)}{n^s},\quad 0<y_1<\cdots<y_k=1$$

Il subsiste dans cet énoncé une certaine dissymétrie entre la série $f(s)$ formée avec des entiers et la série $g(s)$. Nous ajouterons donc dans le présent article à notre Théorème principal le suivant qui rétablit la symétrie entre f et g.

Théorème 2. *Soit*

$$f(s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{x_n^s}$$

une série de Dirichlet générale ($0<x_n<\infty$, $x_n\to\infty$) *qui converge pour* Re(s) *suffisamment grand. On suppose que:*

(1) f *admet un prolongement méromorphe au plan complexe tout entier, avec un nombre fini de pôles,*
(2) *dans toute bande verticale de largeur finie on a* $f(s)=\mathcal{O}(e^{\exp\epsilon|s|})$ *pour tout* $\epsilon>0$ *lorsque* $|\mathrm{Im}(s)|\to\infty$,
(3) *la fonction méromorphe* $g(s)=\chi(s)f(1-s)$ *est aussi, pour* $\mathrm{Re}(s)\gg 0$ *la somme d'une série de Dirichlet générale* $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{y_n^s}$.

Alors les assertions suivantes sont équivalentes:

(i) *l'ensemble* $\{x_n|a_n\neq 0\}$ *est contenu dans un nombre fini de progressions arithmétiques de raison 1,*
(ii) *l'ensemble* $\{y_n|b_n\neq 0\}$ *est contenu dans un nombre fini de progressions arithmétiques de raison 1,*
(iii) *il existe un nombre fini de couples réels* (d,e) *tels que la série* $f(s)$ *soit de la forme:*

$$f(s)=\sum c(d,e)\left(\sum_{\substack{x\equiv d \bmod 1\\ x>0}}\frac{\exp(2\pi iex)}{x^s}+\sum_{\substack{x\equiv -d \bmod 1\\ x>0}}\frac{\exp(-2\pi iex)}{x^s}\right)$$

[2] On pourra toujours supposer que les entiers font partie des y_n; mais on n'autorisera $b_n=0$ que lorsque $y_n\in\mathbf{N}$.

Si l'on connaît a priori le nombre N de suites arithmétiques nécessaires pour f alors on n'a plus besoin de supposer que g soit aussi une série de Dirichlet générale, il suffit d'en contrôler le « début ».

Théorème 3. *Soit*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{x_n^s}$$

une série de Dirichlet générale ($0 < x_n < \infty$, $x_n \to \infty$) qui converge pour $\mathrm{Re}(s)$ *suffisamment grand. On suppose que:*

(1) *f admet un prolongement méromorphe au plan complexe tout entier, avec un nombre fini de pôles,*
(2) *dans toute bande verticale de largeur finie on a $f(s) = \mathcal{O}(e^{\exp \epsilon |s|})$ pour tout $\epsilon > 0$ lorsque $|\mathrm{Im}(s)| \to \infty$,*
(3) *l'ensemble $\{\pm x_n | a_n \neq 0\} \subset \mathbf{R}$ est contenu dans un nombre fini N de translatés de $\mathbf{Z}$,*
(4) *il existe $Y > N$, ainsi que $(y_n, b_n) \in]0, +\infty[\times \mathbf{C}$, $1 \leqslant n \leqslant M$, tels que*

$$g(s) := \chi(s) f(1-s) \underset{\mathrm{Re}(s) \to +\infty}{=} \sum_{1 \leqslant n \leqslant M} b_n y_n^{-s} + \mathcal{O}(Y^{-s}).$$

Alors en fait g est la somme d'une série de Dirichlet générale et conformément au théorème précédent il existe une représentation:

$$f(s) = \sum c(d,e) \left(\sum_{\substack{x \equiv d \bmod 1 \\ x > 0}} \frac{\exp(2\pi i e x)}{x^s} + \sum_{\substack{x \equiv -d \bmod 1 \\ x > 0}} \frac{\exp(-2\pi i e x)}{x^s} \right)$$

Voici quelques références, par nécessité très brèves, à la littérature. Les résultats de Hamburger [7–9] (qui incluent aussi des énoncés semblables avec des équations fonctionnelles formées avec $\pi^{-\frac{s+1}{2}} \Gamma(\frac{s+1}{2})$) sont bien connus et ont eu une postérité riche et assez variée. En particulier les travaux de Hecke [11] et de Weil [17], sur le lien important avec l'invariance modulaire sur le demi-plan de Poincaré, et donc d'une manière générale avec les fonctions automorphes, ont eu une forte influence motivant l'établissement de « converse theorems » de plus en plus sophistiqués dans le cadre du programme de Langlands. Également et de manière liée, l'étude des axiomes de Selberg est intimement concernée par des théorèmes inverses comme celui de Hamburger: ainsi Kaczorowski, Molteni et Perelli ont caractérisé les conducteurs pour lesquels les fonctions de Dirichlet $L(s, \chi)$ sont les seules avec leur équation fonctionnelle dans une certaine classe [12]. Il s'agit là de questions d'une nature infiniment plus arithmétique que celles que nous examinerons ici-même, puisqu'il faut déterminer les caractères de Dirichlet partageant la même parité et la même somme de Gauss. Molteni a obtenu dans [14,15] des résultats étendant ceux de [12] à une classe plus large de conducteurs.

Pour en revenir au contexte originel, Hamburger avait déjà insisté [10] sur la variété des écritures équivalentes de l'équation fonctionnelle comme formule sommatoire. On peut y voir comme une anticipation du point de vue des distributions, qui déplace la focalisation de la « fonction test » vers la forme linéaire sur ces fonctions tests (même si on doit garder présent à l'esprit que ce n'est là qu'une façon d'appréhender la réalité d'une distribution). Ceci est dit uniquement dans la perspective de l'équation fonctionnelle, car pour d'autres propriétés, on ne saurait préjuger de ce qui s'avérera plus ou moins utile. Par exemple chez Hamburger [10] et Siegel [16] l'équation fonctionnelle devient un développement en éléments simples d'une certaine transformée de Laplace.

Cette écriture fut généralisée par Bochner et Chandrasekharan [1]; et par Chandrasekahran et Mandelbrojt [4,5]. On considère des séries de Dirichlet $\sum a_n\lambda_n^{-s}$ et $\sum b_n\mu_n^{-s}$ reliées par des équations fonctionnelles d'un certain type et on pose la question: étant donnés les λ_n et les μ_n peut-on en fonction de leurs propriétés majorer la dimension de l'espace des choix possibles pour les a_n et b_n? Kahane et Mandelbrojt [13] interprètent l'équation fonctionnelle comme une formule de transformée de Fourier pour des distributions « quasi-périodiques ». Ils prennent ensuite comme point de départ une telle paire de Fourier, et prouvent dans ce contexte des énoncés sur le support et le spectre: pour certains de leurs résultats, ils reviennent à des fonctions analytiques, via une transformée de Laplace–Carleman, pour d'autres ils mettent en plus à l'oeuvre des techniques de fonctions quasi-périodiques. Sous l'hypothèse d'une densité supérieure de répartition finie pour les μ_n, ils prouvent que les λ_n sont combinaisons linéaires à coefficients entiers d'un nombre fini de nombres réels (ce qui généralise un résultat de [4]). Ils ne s'attardent pas à considérer des supports limités d'emblée à un nombre fini de suites arithmétiques, cela ne serait chez eux qu'un exercice facile et immédiat une fois dans le contexte des distributions, mais obtiennent des critères qui a posteriori donnent cette situation.[3] Lorsque les λ_n sont a priori des entiers (ou placés sur un nombre fini de translatés de $\mathbf{Z}$) la difficulté est de faire la traduction vers les distributions: car après il n'est même plus alors besoin d'outils avancés.

Après tous les travaux cités, et d'autres encore certainement, il est donc devenu de plus en plus « bien connu » que l'équation fonctionnelle traduit l'invariance de la distribution $\sum_{n\in\mathbf{Z}}\delta(x-n)$ sous la transformation de Fourier.[4] Mais c'est avec l'idée de co-Poisson [3] que nous obtenons une vision plus complète de cette correspondance. C'est sur la base de l'idée de co-Poisson que le chapitre IV de [2] établit un dictionnaire (allant dans les deux sens) entre une certaine classe de fonctions méromorphes et une certaine classe de distributions tempérées.

Des questions fines (comme le résultat de Kahane–Mandelbrojt) apparaissent lorsque l'on veut étudier en général des mesures ou des distributions à support discret D et dont la transformée de Fourier $\mathcal{F}(D)$ est encore à support discret[5]; l'objet du présent travail n'est aucunement une telle étude générale. Au contraire, nous bénéficierons (comme Hamburger) dès notre point de départ de la simplification énorme apportée par l'hypothèse que la distribution $D=\sum_{n\geqslant 1}a_n(\delta_{x_n}+\delta_{-x_n})$ associée à la fonction analytique f est une mesure supportée sur les entiers $\mathbf{Z}$ ou un nombre fini de ses translatés. Mais le dictionnaire général de [2, Chap. IV] nous donne les moyens d'affaiblir considérablement

[3] Chez nous, les suites arithmétiques sont restreintes à la raison 1.

[4] La transformation de Fourier est définie ici avec le noyau $\exp(2\pi ixy)$. Suivant que l'on étudie l'équation fonctionnelle formée avec $\Gamma(\frac{s}{2})$ ou $\Gamma(\frac{s+1}{2})$ il faudra considérer des fonctions et distributions paires ou impaires.

[5] *Cf.* [6] pour un résultat d'unicité dans $\mathbf{R}^n$, lorsque l'on a deux mesures discrètes positives dont l'une est de la forme $\sum_k\delta_{x_k}$.

les hypothèses faites par Hamburger et d'en étendre ses énoncés, et c'est là tout l'objet de la présente rédaction.

2. Preuves

Le chapitre IV de [2] établit une correspondance générale via la transformation de Mellin *droite* « $\int_0^\infty D(x)x^{-s}\,dx$» entre des fonctions $f(s)$ avec un nombre fini de pôles dans tout le plan complexe et une certaine condition de croissance (pour tout demi-plan $\mathrm{Re}(s) > \sigma$ on a l'existence d'un entier N et d'un réel $A > 0$ avec, loin des pôles, $f(s) = O(|s|^N A^{\mathrm{Re}(s)})$, condition qui doit aussi être imposée à $\chi(s)f(1-s)$), et, d'autre part, les distributions tempérées paires $D(x)$, nulles dans un voisinage de l'origine et dont la transformée de Fourier $E(x)$ est, non pas forcément nulle (cela serait le cas si $f(s)$ et $\chi(s)f(1-s)$ n'avaient pas de pôles), mais *quasi-homogène* dans un voisinage de l'origine.

Une distribution $Q(x)$ est dite quasi-homogène si les $Q(tx)$, $t \neq 0$ engendrent un espace vectoriel de dimension finie. Par exemple $\log|x|$ est quasi-homogène. Les distributions *homogènes* sont essentiellement les $|x|^{w-1}$ (je ne m'occuperai que de distributions *paires*), avec $w \in C$, à ceci près que pour $w = 0$, $w = -2$, $w = -4, \ldots$ il faut en fait prendre $\delta(x)$, $\delta''(x)$, $\delta^{(4)}(x), \ldots$. Plus précisément, soit:

$$Q_w(x) = \frac{|x|^{w-1}}{\pi^{-\frac{w}{2}}\Gamma\left(\frac{w}{2}\right)}$$

Lorsque $0 < \mathrm{Re}(w)$ cela définit directement une distribution homogène de x, et pour $\mathrm{Re}(w) \leqslant 0$ on peut prouver que Q_w se prolonge comme fonction analytique à valeurs dans les distributions (tempérées). On notera que la restriction de la distribution Q_w à $x \neq 0$ est précisément la fonction donnée par la formule ci-dessus, donc identiquement zéro si $\frac{w}{2}$ est un pôle de la fonction Gamma.[6] On dispose de la formule utile $\mathcal{F}(Q_w) = Q_{1-w}$, et par exemple $\mathcal{F}(Q_0) = Q_1 = 1$ ce qui permet de voir $Q_0 = \delta$.

Les homogènes sont des vecteurs propres de la dérivation $\frac{d}{dx}x$, et on peut aussi définir les quasi-homogènes comme celles qui sont annulées par des polynômes en cet opérateur. Pour plus de détails, voir [2, IV].

Rappelons aussi ce que l'on entend par $\int_0^\infty D(x)x^{-s}\,dx$, lorsque D est une distribution tempérée paire. Nous ne faisons cette définition que lorsque D restreinte à un intervalle $]-a, a[$ est quasi-homogène.[7] Il est important que les identités d'Euler $\sum_{n\in\mathbf{Z}} q^n = 0$ et $\int_0^\infty x^{s-1}dx = 0$ indiquent que les transformées de Mellin des distributions quasi-homogènes sont identiquement nulles. On commence donc par soustraire la partie quasi-

[6] La fonction $1/|x|$ n'est pas une distribution mais il y a une infinité de distributions qui se restreignent sur $x \neq 0$ à cette fonction; parmi celles-ci il y a la transformée de Fourier de $-2\log|x|$. Ces distributions sont toutes quasi-homogènes, mais aucune n'est homogène, et la seule (à un multiple près) distribution avec l'homogénéité de $1/|x|$ c'est le Dirac à l'origine. Par contre la fonction $1/x$ elle est une distribution homogène; elle est impaire, et c'est la valeur principale de Cauchy.

[7] Dans la vraie vie on a bien sûr besoin de calculer des transformées de Mellin plus générales, par exemple $\int_0^\infty f(x)x^{-s}\,dx$ lorsque $f \in L^2(0, +\infty; dx)$ mais alors ce Mellin n'est ni moins ni mieux qu'une fonction de carré intégrable pour $\mathrm{Re}(s) = \frac{1}{2}$. Si l'on veut de l'analyticité, il se trouve que la condition de support considérée est la plus simple ayant déjà une utilité. Le fait que la condition de support puisse faire bon ménage avec Fourier est déjà en soi un fait remarquable.

homogène de D (qui pour $x > 0$ est une fonction analytique combinaison linéaire d'expressions $(\log x)^N x^{w-1}$, $N \in \mathbf{N}$, $w \in \mathbf{C} \setminus (-2\mathbf{N})$; on fait la soustraction de cette expression analytique sur *tout* l'intervalle $]0, +\infty[$), donc on peut supposer D nulle sur $]0, a[$ (il peut rester des Dirac à l'origine, que l'on oublie). On peut alors écrire D pour $x > 0$ comme la dérivée N^{e} d'une fonction continue C à croissance polynomiale, nulle sur $]0, a[$, et on pose ([2, 4.11]):

$$\widehat{D}(s) = s(s+1)\cdots(s+N-1)\int_a^\infty C(x)x^{-s-N}\,dx, \qquad \mathrm{Re}(s) \gg 0$$

Toutes les formules raisonnables marchent avec cette définition. Par exemple [2, 4.20] si D est de la forme $\sum_n a_n(\delta(x - x_n) + \delta(x + x_n))$, $0 < x_1 < x_2 < \cdots \to \infty$, $\sum_{x_n \leqslant X} |a_n| = \mathcal{O}(X^A)$, $A < \infty$ alors $\widehat{D}(s) = \sum_{n\geqslant 1} a_n x_n^{-s}$.

Venons-en à la démonstration du Théorème 1. Soit D la distribution paire $\sum_{n\in Z} a_n\delta_n$ avec $a_0 = 0$ et $a_{-n} = a_n$. Comme la série de Dirichlet converge quelque part les a_n ont croissance polynomiale et D est une distribution tempérée. Et nous venons de préciser que la série de Dirichlet est aussi la transformée de Mellin, en notre sens, de D.

Ensuite, par hypothèse $\chi(s)f(1-s)$ est pour $\mathrm{Re}(s) = \sigma$ à croissance polynomiale lorsque $\sigma \gg 0$ donc $f(s) = \chi(s)\chi(1-s)f(s)$ est à croissance polynomiale sur toute droite $\mathrm{Re}(s) = -\sigma$ avec $\sigma \gg 0$. Si on va suffisamment loin à droite $f(s)$ est bornée. Fixons donc deux telles droites verticales $\mathrm{Re}(s) = -\sigma$ et $\mathrm{Re}(s) = +\sigma$ avec $\sigma \gg 0$. Entre les deux on a l'hypothèse a priori (modulo un nombre fini de pôles) d'une croissance en $\mathcal{O}(\exp(e^{\epsilon|s|}))$. Soit $P(s)$ un polynôme correspondant aux pôles, prenons $A \gg 0$ et M entier suffisamment grand; le produit $P(s)f(s)/(s+A)^M$ tend vers zéro sur chacune des deux droites $\mathrm{Re}(s) = \pm\sigma$ et est $\mathcal{O}(\exp(e^{\epsilon|s|}))$ entre, pour tout $\epsilon > 0$. Par Phragmén–Lindelöf $P(s)f(s)/(s+A)^M$ est borné dans cette bande, et f y est à croissance polynomiale. Comme f est donnée par une série de Dirichlet elle est bornée pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, donc f est à croissance polynomiale dans tout demi-plan droit.

La fonction $f(s)$ est donc une fonction méromorphe *modérée* au sens de [2, Déf. 4.27]. Considérons la fonction $g(s) = \chi(s)f(1-s)$. Par ce qui a déjà été établi pour f elle est à croissance polynomiale dans toute bande verticale de largeur finie. Et par hypothèse elle est $\mathcal{O}(|s|^N Y^{-s})$, pour $\mathrm{Re}(s) \geqslant \sigma_0$, lorsque $\sigma_0 \gg 0$ est bien choisi, avec N entier et $Y > \frac{1}{2}$. Les pôles de $g(s) = \pi^{s-\frac{1}{2}}\Gamma(\frac{1-s}{2})\Gamma(\frac{s}{2})^{-1}f(1-s)$, mis à part ceux qui proviennent de f, ne peuvent être qu'en $1-s = 0, -2, -4, \ldots$, mais comme il n'y en a pas pour $\mathrm{Re}(s) \gg 0$, c'est donc que g n'a qu'un nombre fini de pôles dans tout le plan complexe. Soit $Q(s)$ un polynôme correspondant à ces pôles, pour $\mathrm{Re}(s) \geqslant -\sigma_0$ la fonction analytique $Y^s Q(s)g(s)$ est à croissance polynomiale: car elle l'est d'une part pour $|\mathrm{Re}(s)| \leqslant \sigma_0$ et d'autre part pour $\mathrm{Re}(s) > \sigma_0$. Et cela est vrai pour tout σ_0, donc g est aussi une fonction *modérée* au sens de [2].

Par [2, Thm. 4.54]: *la distribution D dont f est la transformée de Mellin a une transformation de Fourier E dont la restriction a un certain intervalle* $]-Y_0, Y_0[$ *est quasi-homogène; de plus la transformée de Mellin de la distribution tempérée paire E est égale à $g(s) = \chi(s)f(1-s)$.*

On dispose d'une information complémentaire importante [2, Rem. 4.29]: notons Q la composante quasi-homogène de E, et soit $E_1 = E - Q$, donc cet E_1 est identiquement nulle dans un certain intervalle $]-Y_0, Y_0[$. Si on prend pour Y_0 le plus petit point positif du support de E_1 alors:

$$-\log Y_0 = \limsup_{\sigma\to+\infty} \frac{1}{\sigma} \log|g(\sigma)|$$

Nous avons dans notre cas $\boldsymbol{Y_0 \geqslant Y > \frac{1}{2}}$.

Comme D est une mesure supportée sur $\mathbf{Z}$ elle vérifie l'équation

$$\exp(2\pi i x)D(x) = D(x)$$

Donc, et cela sera fondamental évidemment:

$$E(x+1) = E(x) \quad \text{et ainsi } Q(x+1) - Q(x) = E_1(x) - E_1(x+1)$$

La restriction de la partie quasi-homogène Q à $x \neq 0$ est une certaine fonction $q(x)$. Cette fonction est paire. Pour $x > 0$ elle est une expression finie de la forme $q(x) = \sum_{n,w} q_{n,w}(\log x)^n x^{w-1}$, en particulier elle est analytique sur $\mathbf{C}\setminus]-\infty, 0]$ avec croissance polynomiale à l'infini. Regardons ϵ avec $0 < \epsilon < \frac{1}{2}$, $\frac{1}{2} + \epsilon \leqslant Y_0$. Sur $\frac{1}{2} - \epsilon < x < \frac{1}{2} + \epsilon$, $E_1(x)$ comme $E_1(x-1)$ sont identiquement nuls, donc

$$\frac{1}{2} - \epsilon < x < \frac{1}{2} + \epsilon \Longrightarrow q(x) = q(x-1) = q(1-x).$$

La fonction q est analytique sur $\mathbf{C}\setminus]\infty, 0]$ et la fonction $q(1-x)$ est analytique sur $\mathbf{C}\setminus[1, +\infty[$. Ces deux fonctions coïncident sur l'intervalle $]\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon[$, *donc q est une fonction entière.* Or elle est à croissance polynomiale. Donc q est un polynôme sur $x > 0$. La conclusion est que $q(x) = P(|x|)$ avec P un polynôme qui vérifie $P(x) = P(1-x)$.

Considérons la fonction (continue) 1-périodique $B(x)$ qui vaut $P(x)$ pour $0 < x < 1$. Nous avons $B(x) = q(x)$ pour $0 < x < 1$ puis, pour $-1 < x < 0$: $B(x) = B(x+1) = q(x+1) = q(x)$. Les polynômes de Bernoulli d'indices pairs $B_0 = 1$, $B_2 = x^2 - x + \frac{1}{6}, \ldots$ forment une base de l'espace vectoriel des polynômes invariants par $x \mapsto 1-x$, et (à une constante multiplicative près) la fonction 1-périodique $B_{2n}(\{x\})$ (pour $n \geqslant 1$) est la transformée de Fourier de la distribution $\sum_{k\in\mathbf{Z}\setminus\{0\}} k^{-2n}\delta_k$. Ainsi, quitte à retirer de notre série de Dirichlet d'origine une combinaison linéaire finie de $\zeta(s+2), \zeta(s+4), \ldots$ on peut faire en sorte que la fonction 1- périodique $B(x)$ soit réduite à une constante. La transformée de Fourier de $\sum_{k\neq 0}\delta_k$ est $\sum_{k\neq 0}\delta_k + \delta - 1$, et quitte à retirer en plus un multiple de $\zeta(s)$ (à la serie de Dirichlet originellement considérée) on peut réduire $B(x)$ à la fonction nulle (au prix d'un Dirac à l'origine). Nous n'avons fait que modifier notre distribution D en lui ajoutant une mesure supportée sur $\mathbf{Z}\setminus\{0\}$ donc elle reste une mesure supportée sur $\mathbf{Z}$ et sa transformée de Fourier E reste 1-périodique et paire. Maintenant la restriction de E à $]0, \frac{1}{2} + \epsilon[$ est identiquement nulle. Donc E restreinte à $]-\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon[$ est une combinaison linéaire finie de $\delta, \delta'', \ldots$. Mais E est 1 périodique, donc en fait

$$E = P\left(\frac{d}{dx}\right)\sum_{k\in\mathbf{Z}}\delta_k(x)$$

avec un polynôme P pair. Ce qui signifie que D qui est sa transformée de Fourier est de la forme $R(x)\sum_{k\in\mathbf{Z}}\delta_k(x) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} R(k)\delta_k(x)$ avec R un certain polynôme pair, qui doit en fait être nul à l'origine puisque notre D est nulle sur $]-1, 1[$. Ainsi notre $f(s)$ du départ a été réduit à une combinaison linéaire finie de $\zeta(s-2), \zeta(s-4), \dots$

En conclusion, les hypothèses (1), (2), et (3) ont comme conséquence que la série de Dirichlet de départ est une combinaison linéaire finie $f(s) = \sum_{k\in\mathbf{Z}} c_k\zeta(s-2k)$ et le Théorème 1 est démontré.

Soit, pour $k \in \mathbf{Z}$, $f_k(s) = \zeta(s-2k)$ et $g_k(s) = \chi(s)f_k(1-s)$. Par la relation $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$ et l'équation fonctionnelle on a:

$$g_k(s) = \frac{s(s+1)\cdots(s+2k-1)}{(-4\pi^2)^k}\zeta(s+2k) \quad (k \geqslant 0)$$

$$g_k(s) = \frac{(-4\pi^2)^{-k}}{(s+2k)(s+2k+1)\cdots(s-1)}\zeta(s+2k) \quad (k < 0).$$

Donc, pour tout k donné, et tout $\sigma \gg 0$ on a $g_k(s) \asymp (-4\pi^2)^{-k}s^{2k}$ pour $\mathrm{Re}(s) = \sigma$, $|s| \to \infty$. Il en résulte qu'une combinaison linéaire ne pourra être bornée, sur une droite quelconque prise suffisamment à droite, que si elle ne comporte que des $k \leqslant 0$. Ceci montre qu'en effet la condition (3′) du Corollaire est équivalente à ce que $f(s)$ soit une combinaison linéaire des $\zeta(s-2k)$, $k \leqslant 0$.

Et comme $g_k(\sigma) \sim (-4\pi^2)^{-k}\sigma^{2k}$ pour $\sigma \to +\infty$, si on fait l'hypothèse 4 qu'une combinaison linéaire se rapproche d'une limite c plus vite que tout polynôme inverse ne se rapproche de zéro, alors en particulier elle reste bornée lorsque σ tend vers $+\infty$ par valeurs réelles, ne peut comporter que des termes avec $k \leqslant 0$, et finalement que le seul terme avec $k = 0$. Ainsi $f = c\zeta$.

Nous débutons maintenant les preuves des Théorèmes 2 et 3. Soit $D_0(x) = \sum_{p\in\mathbf{Z}} \delta(x-p)$ la distribution de Poisson, qui est sa propre transformée de Fourier (*cf.* l'Annexe). Considérons $\sum_{p\in\mathbf{Z}} e^{2\pi i(d+p)e}\delta(x-d-p) = e^{2\pi iex}D_0(x-d)$. Sa transformée de Fourier est $e^{2\pi ide}e^{2\pi idx}D_0(x+e)$. Nous définirons donc

$$D_{d,e}(x) = e^{-\pi ide}e^{2\pi iex}D_0(x-d)$$

de sorte que $\mathcal{F}$ agit comme la rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$ dans le plan des (d, e):

$$\mathcal{F}(D_{d,e}) = D_{-e,d}.$$

Considérons les distributions paires: $T_{d,e}(x) = \frac{1}{2}D_{d,e}(x) + \frac{1}{2}D_{d,e}(-x)$. Comme $D_{d,e}(-x) = D_{-d,-e}(x)$, on a $T_{d,e} = \frac{1}{2}D_{d,e} + \frac{1}{2}D_{-d,-e}$ et sa transformée de Fourier est:

$$\mathcal{F}(T_{d,e}) = T_{-e,d}$$

Compte tenu de $T_{d+1,e} = e^{-\pi ie}T_{d,e}$, $T_{d,e+1} = e^{\pi id}T_{d,e}$ et de $T_{-d,-e} = T_{d,e}$, on peut toujours se ramener à $0 < d \leqslant 1$, $0 < e \leqslant 1$, $0 < d + e \leqslant 1$, et, pour $d + e = 1$, par exemple $\frac{1}{2} \leqslant d \leqslant 1$.

La transformée de Mellin $f(s)$ de la distribution paire $T_{d,e}$ est donnée par:

$$f(s) = \frac{1}{2}e^{-\pi ide}\sum_{x\equiv d \bmod 1, x>0}\frac{e^{2\pi iex}}{x^s} + \frac{1}{2}e^{-\pi ide}\sum_{x\equiv -d \bmod 1, x>0}\frac{e^{-2\pi iex}}{x^s}$$

La fonction $g(s) = \chi(s) f(1-s)$ est:

$$g(s) = \frac{1}{2} e^{\pi i d e} \sum_{y \equiv e \bmod 1, y>0} \frac{e^{-2\pi i d y}}{y^s} + \frac{1}{2} e^{\pi i d e} \sum_{y \equiv -e \bmod 1, y>0} \frac{e^{2\pi i d y}}{y^s}$$

La fonction $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) f(s)$ a au plus des pôles en 0 et 1: d'après [2, Thm. 4.55], elle est entière lorsque d et e ne sont pas entiers; lorsque $d \in \mathbf{Z}$ et $e \notin \mathbf{Z}$, $\pi^{-\frac{s}{2}} \Gamma(\frac{s}{2}) f(s)$ possède un unique pôle, qui est en $s = 0$ et le résidu est $-e^{-\pi i d e}$; lorsque $d \notin \mathbf{Z}$ et $e \in \mathbf{Z}$, un unique pôle qui est en $s = 1$ et de résidu $e^{\pi i d e}$; lorsqu'à la fois d et e sont entiers, un pôle en $s = 0$ de résidu $-(-1)^{de}$ et un pôle en $s = 1$ de résidu $(-1)^{de}$.

Comme pour le Théorème 1 les hypothèses faites dans les Théorèmes 2 ou 3 assurent que f et g sont des fonctions modérées, et donc transformées de Mellin respectives de distributions paires D et E_1 identiquement nulles dans un voisinage de l'origine, et telles que $E = \mathcal{F}(D)$ ne diffère de E_1 que par une distribution quasi-homogène (paire) Q. Pour le Théorème 2, on a donc:

$$D = \sum_{n \geqslant 1} a_n (\delta_{x_n} + \delta_{-x_n})$$

$$E = Q + \sum_{n \geqslant 1} b_n (\delta_{y_n} + \delta_{-y_n})$$

Supposons que l'on puisse trouver un nombre fini de suites arithmétiques de raison 1 recouvrant le support de D pour $x > 0$. On a alors un nombre fini de nombres réels $d_1, \ldots, d_N$, distincts modulo 1, obtenus comme les représentants modulo 1 dans $]-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ de tous les $\pm x_n$, $n \geqslant 1$ ($a_n \neq 0$), et qui sont tels que le support de D dans $\mathbf{R}$ est recouvert par les $d_j + \mathbf{Z}$. Les hypothèses ne font pas que les d_j soient parmi les $\pm x_n$ mais assurent que chaque d_j est tel que soit $d_j + K$, soit $-d_j + K$ est un x_n lorsque K est suffisamment grand (et réciproquement pour n avec $a_n \neq 0$).

Soit $\phi(x) = \prod_{1 \leqslant j \leqslant N} (e^{2\pi i x} - e^{2\pi i d_j}) = \sum_{k=0}^{N} c_k e^{2\pi i (N-k) x}$, $c_0 = 1$, $c_N = \pm 1$. Comme D est une mesure on a:

$$\phi(x) D(x) = 0 \quad \text{et donc} \quad E(x+N) + c_1 E(x+N-1) + \cdots + c_N E(x) = 0.$$

Pour $x > 0$ l'expression

$$Q(x+N) + c_1 Q(x+N-1) + \cdots + c_N Q(x)$$

est une fonction analytique (dans $\mathbf{C} \setminus]-\infty, 0]$). Or elle a aussi, par l'équation pour E, un support discret, et est par suite identiquement nulle. Et par conséquent aussi

$$x > 0 \Longrightarrow E_1(x+N) + c_1 E_1(x+N-1) + \cdots + c_N E_1(x) = 0.$$

Montrons aussi au passage que Q est (pour $x > 0$) constante. Comme $|c_N| = 1$, la formule de récurrence permet de voir que Q est analytique dans $\mathbf{C} \setminus]-\infty, -1]$, puis dans $\mathbf{C} \setminus]-\infty, -2]$, ... et donc que Q est une fonction entière. Comme elle a a priori croissance polynomiale à l'infini, c'est qu'elle est un polynôme. Le degré d'un polynôme $Q(x)$ ne change pas par son remplacement par $Q(x+1) - \omega Q(x)$, lorsque $\omega \neq 1$, donc l'équation pour Q donne $Q = 0$ si 0 n'est pas dans la liste des d_j, et se réduit à $Q(x+1) - Q(x) = 0$

donc à Q constante sinon. Ceci est valable pour $x > 0$ et par parité la distribution Q est une constante sur $\mathbf{R} \setminus \{0\}$.

En ce qui concerne E_1, la formule montre que si $x > N$ appartient à son support alors il en est de même de l'un de $x - 1$, $x - 2, \ldots, x - N$. Comme le support de E_1 est discret, cela prouve (comme affirmé dans l'énoncé) qu'en effet il est contenu dans un nombre fini de suites arithmétiques de raison 1.

La situation est maintenant symétrique entre D et E et compte tenu de ce que nous avons déjà établi pour la restriction de Q à $x \neq 0$, nous en déduisons que $\mathcal{F}(Q)$ est constant pour $x \neq 0$ et donc au final que Q est de la forme $-\alpha + \beta\delta$. Quitte à remplacer D par $D + \alpha\delta$ et E par $E + \alpha$ on peut dorénavant supposer que D comme E ont, au plus, chacun un Dirac à l'origine. Cette modification éventuelle de D (qui n'en est pas une de la série de Dirichlet d'origine) peut nous amener à joindre 0 à la liste des d_j (et à remplacer N par $N + 1$). Dorénavant E est une mesure paire, vérifiant une récurrence

$$\prod_j (\tau - \exp(2\pi i d_j))E = 0 \qquad (\tau(E)(x) = E(x+1))$$

et supportée sur un nombre fini de translatés de $\mathbf{Z}$. Soient $e_1, \ldots, e_M$ les représentants dans $]-\frac{1}{2}, +\frac{1}{2}]$ de ce support de E pris modulo 1. On a:

$$E(x) = \sum_{1 \leqslant k \leqslant M} \sum_{p \in \mathbf{Z}} c_k(p)\delta(x - e_k - p)$$

Chacune des M suites $(c_k(p))_{p\in\mathbf{Z}}$ doit vérifier la récurrence linéaire

$$\prod_{1 \leqslant j \leqslant N} (\tau - \exp(2\pi i d_j))c_k = 0 \qquad (\tau(c_k)(p) = c_k(p+1))$$

dont l'espace vectoriel des solutions est de dimension N et engendré par les fonctions linéairement indépendantes $p \mapsto \exp(2\pi i d_j p)$, $1 \leqslant j \leqslant N$. Cela prouve que E est une combinaison linéaire des NM distributions $e^{2\pi i d_j x} D_0(x - e_k)$ considérées précédemment (avec D_0 la distribution de Poisson), $1 \leqslant j \leqslant N$, $1 \leqslant k \leqslant M$. Mais comme E est une distribution paire elle est aussi combinaison linéaire des parties paires de ces distributions, donc des T_{e_k,d_j}. Par conséquent la distribution originale D (incorporant, comme nous l'avons indiqué, un certain multiple du Dirac à l'origine) est une combinaison linéaire des T_{-d_j,e_k}, ou encore des T_{d_j,e_k} puisque l'ensemble des d_j est stable par passage à l'opposé (sauf pour un éventuel $\frac{1}{2}$, mais $\frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + 1$ et $T_{d+1,e} = e^{-\pi i e}T_{d,e}$). Le Théorème 2 est prouvé.

Je passe maintenant à la preuve du Théorème 3. En exploitant les hypothèses comme précédemment nous avons ici une distribution tempérée paire $D = \sum_{n\geqslant 1} a_n(\delta_{x_n} + \delta_{-x_n})$, dont le support est inclus (par hypothèse) dans un nombre fini N de translatés de $\mathbf{Z}$, et la transformée de Fourier E est de la forme $Q + E_1$ avec Q quasi-homogène, E_1 paire, égale dans un certain intervalle ouvert $]-Y_0, Y_0[$ $(Y_0 > N)$ à $\sum_{1\leqslant n\leqslant M} b_n(\delta_{y_n} + \delta_{-y_n})$. Comme précédemment, par ce que nous savons du support de la mesure D nous obtenons une certaine récurrence linéaire $\prod_{1\leqslant j\leqslant N}(\tau - \exp(2\pi i d_j))E = 0$. Prenons $\epsilon > 0$ avec $N + \epsilon < Y_0$ et de sorte que l'intervalle $]0, \epsilon[$ ne rencontre modulo 1 aucun des $\pm y_n$, $1 \leqslant n \leqslant M$. Sur cet intervalle $E_1(x), \ldots, E_1(x + N)$ sont identiquement nuls, et ainsi $\prod_{1\leqslant j\leqslant N}(\tau - \exp(2\pi i d_j))Q = 0$. On peut donc exprimer $Q(x)$ en fonction de

$Q(x+1), \ldots, Q(x+N)$, et par analyticité cela restera valable pour $x = z \in \mathbf{C}\backslash]-\infty, 0]$, puis permet d'étendre le domaine d'analyticité de $Q(z)$ à $\mathbf{C}\backslash]-\infty, -1]$, etc..., donc $Q(z)$ est une fonction entière et finalement un polynôme. Pour les $\omega \neq 1$ la transformation $P(x) \mapsto P(x+1) - \omega P(x)$ conserve le degré des polynômes, donc notre polynôme $Q(x)$ ou est directement vu comme étant nul, ou vérifie $Q(x+1) = Q(x)$ et est constant. Par parité nous avons ainsi que la restriction de Q à $x \neq 0$ est une constante. Nous pouvons alors soustraire un Dirac à l'origine à D afin de retirer cette constante à E, en maintenant la relation $\mathcal{F}(D) = E$. La restriction de E à $]-\epsilon, +\epsilon[$ est paire et supportée à l'origine donc une combinaison de δ, δ'', ... Cependant E n'a en $1, 2, \ldots, N$ au plus que des Dirac, et c'est ainsi aussi le cas à l'origine, par la récurrence. La restriction de E à $]-\epsilon, N+\epsilon[$ est ainsi une somme d'un nombre fini de Dirac et par la relation de récurrence, il en résulte que E est elle-même une mesure, au support discret inclus dans un nombre fini de suites arithmétiques de raison 1. À ce stade nous nous sommes ramenés aux hypothèses du Théorème précédent.

3. Annexe: preuve de l'identité de Poisson distributionnelle

Soit $D(x) = \sum_{n\in\mathbf{Z}} \delta(x-n)$ la distribution de Poisson, et E sa transformée de Fourier, au sens des distributions tempérées. De $D(x+1) = D(x)$ il résulte $(e^{2\pi i x} - 1)E(x) = 0$ ce qui établit que E est une mesure[8] supportée sur $\mathbf{Z}$. De $(e^{2\pi i x} - 1)D(x) = 0$ il résulte que E est 1-périodique. Donc $E = cD$ pour une certaine constante c.

Soit f une fonction paire, infiniment dérivable à support compact, positive, non identiquement nulle. Soit $k = f * f + \mathcal{F}(f)^2$. La fonction de Schwartz k est paire, positive, et sa propre transformée de Fourier. Et $k(0) > 0$. Donc $0 < (D, k) = (E, k)$ et $c = 1$.

References

[1] S. Bochner, K. Chandrasekharan, On Riemann's functional equation, Ann. of Math. (2) 63 (1956) 336–360.
[2] J.-F. Burnol, Entrelacement de co-Poisson, Ann. Inst. Fourier 57 (2) (2007) 525–602.
[3] J.-F. Burnol, On Fourier and Zeta ('s), Forum Math. 16 (2004) 789–840.
[4] K. Chandrasekharan, S. Mandelbrojt, On Riemann's functional equation, Ann. of Math. (2) 66 (1957) 285–296.
[5] K. Chandrasekharan, S. Mandelbrojt, On solutions of Riemann's functional equation, Bull. Amer. Math. Soc. 65 (1959) 358–362.
[6] A. Córdoba, La formule sommatoire de Poisson, C. R. Acad. Sci., Sér. I Math. 306 (8) (1988) 373–376.
[7] H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (erste mitt.), Math. Z. 10 (3–4) (1921) 240–254.
[8] H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (zweite mitt.), Math. Z. 11 (3–4) (1921) 224–245.
[9] H. Hamburger, Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion (dritte mitt.), Math. Z. 13 (1) (1922) 283–311.
[10] H. Hamburger, Über einige Beziehungen, die mit der Funktionalgleichung der Riemannschen ζ-Funktion äquivalent sind, Math. Ann. 85 (1) (1922) 129–140.
[11] E. Hecke, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch ihre Funktionalgleichung, Math. Ann. 112 (1) (1936) 664–699.

[8] puisque les seules distributions annulées par x sont le Dirac et ses multiples!

[12] J. Kaczorowski, G. Molteni, A. Perelli, A converse theorem for Dirichlet L-functions, Comment. Math. Helv. 85 (2) (2010) 463–483.

[13] J.-P. Kahane, S. Mandelbrojt, Sur l'équation fonctionnelle de Riemann et la formule sommatoire de Poisson, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 75 (1958) 57–80.

[14] G. Molteni, Multiplicity results for the functional equation of the Dirichlet L-functions, Acta Arith. 145 (1) (2010) 43–70.

[15] G. Molteni, Multiplicity results for the functional equation of the Dirichlet L-functions: case $p = 2$, Acta Arith. 145 (1) (2010) 71–81.

[16] C.L. Siegel, Bemerkung zu einem Satz von Hamburger über die Funktionalgleichung der Riemannschen Zetafunktion, Math. Ann. 86 (3–4) (1922) 276–279.

[17] A. Weil, Über die Bestimmung Dirichletscher Reihen durch Funktionalgleichungen, Math. Ann. 168 (1967) 149–156.