JOURNAL OF ALGEBRA 138, 195–225 (1991)

Endomorphismes polynomiaux plats

GABRIEL PICAVET

Département de Mathématique Pure,
Université Blaise Pascal (Clermont II),
63177, Aubière Cedex, France

Communicated by Richard G. Swan

Received March 9, 1989

0. INTRODUCTION

An endomorphism e of a polynomial algebra $A[X_1, ..., X_n]$ is defined by the polynomials $e(X_i) = P_i$. Such a morphism e is etale when the jacobian of these polynomials is an invertible one. One form of the jacobian conjecture asserts that an endomorphism, associated to an invertible jacobian, is bijective, another is that such a morphism is finite. In any case an etale morphism is flat. These facts motivated us to obtain characterizations of flat polynomial endomorphisms; another reason was that such characterizations can be used in Algebraïc Geometry. We have endeavoured to obtain criteria easy to handle, mostly by using contents. Consequently, the content modules of J. Ohm and D. E. Rush are an important tool in this work. Let M be a content module, we denote the content function by c_A, when it is necessary to emphasize the base ring A. As a general rule, a property of modules assigned to a ring morphism $A \to B$ is a property of the A-module B, except finite presentation which is a property of algebra morphisms. A topological property of a ring morphism concerns the associated spectral morphism. We prove that flat polynomial endomorphisms have projective dimension $\leqslant 1$. This result was known when the base ring A is Noetherian. Things are easy for one indeterminate, but are more intricate for n indeterminates. A polynomial endomorphism is flat if and only if it is a quasi-finite, universally A-injective morphism. This last property is equivalent to $c_A(R(P_1, ..., P_n)) = c_A(R)$ for any polynomial R. In fact we show a more general property about morphisms between content modules, with mild hypothesis. We obtain a characterization of flat polynomial endomorphisms by means of universally regular sequences. If the polynomials P_i are homogeneous, a flat polynomial endomorphism is faithfully flat and free when A is a field. We note also that a finite flat polynomial

0021-8693/91 $3.00

endomorphism is faithfully flat. We deduce from this last fact that an injective finite polynomial endomorphism is projective. We give several criteria, about finite polynomial endomorphisms. Some of them result from the interpretation by O. Zariski of the Hilbert Nullstellensatz. Besides we obtain that a quasi-finite projective (resp. Mittag–Leffler) ring morphism $A \to B$ is finite if A is reduced (resp. Noetherian). These results apply to polynomial endomorphisms. In case of a base ring which is an algebraically closed field, by means of the rank of a ring morphism at a prime ideal, we give a criterion for a flat polynomial endomorphism to be finite. The last part of the paper is devoted to the study of the flatness of a polynomial endomorphism in case of two indeterminates. We obtain two criteria of flatness. In their statements arise the classical resultant of two polynomials and another new notion of resultant, which we define, and also contents.

We recall now some definitions: if $A \to B$ is a morphism of rings and $A \to A'$ another morphism of rings, the morphism $A' \to B \otimes_A A'$ is said to be deduced from $A \to B$ in the change of base $A \to A'$. Let $\mathbb{P}$ be a property of ring morphisms, we say that a ring morphism $A \to A'$ descends the property $\mathbb{P}$, if a ring morphism $A \to B$ verifies the property $\mathbb{P}$ whenever $A' \to A \otimes_A B$ verifies $\mathbb{P}$.

N.B.: In this paper, rings are commutative and unitary and modules are unitary. Conventions and notations are those of N. Bourbaki and of E. G. A. of Grothendieck and J. Dieudonné.

I. Dimension projective d'un endomorphisme polynomial plat

On prend dans ce qui suit les conventions suivantes: soit A un anneau commutatif unitaire et soit $n \in \mathbb{N} - \{0\}$, on désigne par $A_n[X]$ la A-algèbre de polynômes $A[X_1, ..., X_n]$ et par $A_n[X, S]$ la A-algèbre de polynômes en les $2n$ indéterminées $X_1, ..., X_n$, $S_1, ..., S_n$. Un endomorphisme de la A-algèbre $A_n[X]$ peut être représenté par un morphisme de A-algèbres $e: A_n[S] \to A_n[X]$, et est donc déterminé par la donnée des éléments $e(S_i) = P_i(X_1, ..., X_n)$ de $A_n[X]$, pour $i = 1, ..., n$. Un tel morphisme s'identifie au morphisme canonique $e': A_n[S] \to A_n[S, X]/I(e)$, où $I(e)$ est l'idéal de $A_n[S, X]$ engendré par les polynômes $P_i(X_1, ..., X_n) - S_i = P'_i(X_1, ..., X_n, S_i)$. Il suffit pour le voir, de considérer les morphismes $f_i: A_n[S, X] \to A[S_{i+1}, ..., S_n, X_1, ..., X_n]$ définis par $f_i(S_j) = P_j$, pour $j = 1, ..., i$, $f_i(S_j) = S_j$, pour $j = i+1, ..., n$ et $f_i(X_j) = X_j$, pour $j = 1, ..., n$: les morphismes f_i sont des morphismes de A-algèbres, surjectifs, de noyaux $I_i(e)$ engendrés par les polynômes $P'_1, ..., P'_i$. Le morphisme f_n donne par passage au quotient un isomorphisme de $A_n[S]$-algèbres $A_n[S, X]/I(e) \to A_n[X]$.

Les constatations ci-dessus nous montrent:

LEMME 1.1. *Un endomorphisme de A-algèbres* $e: A_n[S] \to A_n[X]$ *est un morphisme d'anneaux de présentation finie.*

Nous désignons par $dp_A(M)$ la dimension projective d'un A-module M et par $dp(f)$ la dimension projective du A-module B défini par un morphisme d'anneaux $f: A \to B$.

LEMME 1.2. *Soit* $e: A_n[S] \to A_n[X]$ *un morphisme de A-algèbres, alors:*

(i) *Si l'on désigne par C la A-algèbre* $A_n[S, X]$, *on a* $dp_C(C/I(e)) = n$ *et* $dp_C(I(e)) = n-1$.

(ii) *Si A est un anneau intègre, les idéaux* $I_i(e)$ *sont premiers.*

(iii) *Si A est un corps, on a* $ht(I_i(e)) = i$ *et donc* $ht(I(e)) = n$.

Preuve. La suite $\{P'_1, ..., P'_n\}$ est commutativement régulière (au sens de I. Kaplansky dans [12]) dans l'anneau C: en effet $I(e) = C$ est absurde; les polynômes P'_i sont réguliers dans C, car de contenus égaux à A; enfin P'_i est un non diviseur de zéro dans $C/I_{i-1}(e)$; si $QP'_i = \sum_{j=1}^{i-1} C_j(P_j - S_j)$, pour $S_j = P_j$ on obtient, puisque P'_i est un élément régulier, $Q \in I_{i-1}(e)$. On déduit alors de [12, Théorème 2], que $dp_C(C/I(e)) = n$ et de [13, p. 127, Exercice 1], que $dp_C(I(e)) = n-1$. La partie (ii) est claire puisque $I_i(e) = \mathrm{Ker}(f_i)$. Si A est un corps, l'anneau C est un anneau caténaire, dont toutes les chaînes maximales ont même longueurs; par suite $ht(I_i(e)) = \dim(C) - \dim(C/I_i(e))$. Or nous avons $\dim(C) = 2n$ et $C/I_i(e)$ est isomorphe à $A[S_{i+1}, ..., S_n, X_1, ..., X_n]$, donc est de dimension $2n-i$; on a donc $ht(I_i(e)) = i$.

PROPOSITION 1.3. *Soit* $e: A_n[S] \to A_n[X]$ *un endomorphisme de A-algèbres, alors* $dp(e) \leqslant n$ *et* $dp_{A_n[S]}(I(e)) \leqslant n-1$.

Preuve. Le morphisme e s'identifie au morphisme e' qui n'est autre que le composé $A_n[S] \to A_n[S, X] \to A_n[S, X]/I(e)$. Or, il est bien connu que si $B \to C$ est un morphisme d'anneaux et si M est un C-module, on a $dp_B(M) \leqslant dp_C(M) + dp_B(C)$. On remarque alors que le premier morphisme du composé ci-dessus est libre. Le résultat s'en déduit alors immédiatement.

Même si A est un corps, l'idéal $I(e)$ n'est pas forcément plat sur C. Sinon d'après [26, 1.3], l'idéal $I(e)$ serait principal donc de hauteur 1. Tout ceci montre que [18, Théorème 4.3] ne se généralise pas au cas de n indéterminées: un tel théorème affirme que si le morphisme $A \to A[X]/I$, défini par un idéal I de type fini, est plat, alors le $A[X]$-module I est projectif. La proposition suivante montre que l'on a quand même la projectivité de I, mais sur un autre anneau.

Auparavant, rappelons quelques définitions: une injection de A-modules $N \to M$ est dite pure, ou universellement A-injective, si pour tout A-module

X, le morphisme $N \otimes_A X \to M \otimes_A X$ est injectif. Il est bien connu que la pureté se localise et globalise bien. D'autre part, un A-module M est dit de Mittag-Leffler, entre autres définitions, si pour toute famille $\{Q_i\}_{i \in I}$ de A-modules, le morphisme canonique $(\prod_{i \in I} Q_i) \otimes_A M \to \prod_{i \in I} Q_i \otimes_A M$ est injectif, cf. l'article [25] de M. Raynaud et L. Gruson. Du cas local décrit dans [25, I, 3.1.6], on déduit la proposition:

PROPOSITION 1.4. *Soit $u: N \to M$ un morphisme de A-modules, où M est un A-module plat et N un A-module projectif, pour que le morphisme u soit A-universellement injectif il faut et il suffit que pour tout idéal premier P de A, le morphisme $u \otimes_A k(P)$ soit injectif.*

PROPOSITION 1.5. *Soit $f: B \to B_n[X]/I$ un morphisme d'anneaux, de présentation finie. Le morphisme f est plat si et seulement si l'idéal I est B-projectif et pour tout idéal premier P de B, le morphisme $I \otimes_B k(P) \to k(P)_n[X]$ est injectif.*

Preuve. Soit la suite exacte de B-modules $O \to I \to B_n[X] \to B_n[X]/I \to 0$. Si le morphisme f est plat, la suite est B-universellement injective. Il résulte de [25, 2.1.6] que le B-module I est de Mittag-Leffler, puisqu'il en est ainsi du B-module $B_n[X]$. Or I est de type fini sur $B_n[X]$, donc de type dénombrable sur B; on déduit de [25, II.2.2.2] que le B-module I est projectif, puisqu'il est plat sur B. Puisque la suite est B-universellement injective, il est clair que le morphisme $I \otimes_B k(P) \to k(P)_n[X]$ est injectif. Réciproquement, supposons les deux conditions satisfaites, en vertu de 1.4, la suite exacte est B-universellement injective, et puisque le B-module $B_n[X]$ est plat, il en est de même pour le morphisme f.

On en déduit immédiatement le théorème suivant qui généralise un résultat connu lorsque l'anneau A est Noethérien (cf. par exemple, [30, Théorème 44] de Wang).

THÉORÈME 1.6. *Soit $e: A_n[S] \to A_n[X]$ un endomorphisme de A-algèbres plat, alors $dp(e) \leqslant 1$.*

II. PLATITUDE DES A-ENDOMORPHISMES DE L'ANNEAU $A[X]$

Nous allons voir que dans le cas d'une variable, on obtient des critères simples de platitude.

Soit $P(X_1, ..., X_n)$ un élément de $A_n[X]$, on désigne par $P^*(X_1, ..., X_n)$ le polynôme $P(X_1, ..., X_n) - P(0, ..., 0)$.

On rappelle, d'après [21], qu'un morphisme d'anneaux $A \to A'$ est dit subtrusif si pour tout couple $P \subset Q$ d'idéaux premiers de A il existe un couple $P' \subset Q'$ d'idéaux premiers de A' au-dessus de $P \subset Q$.

PROPOSITION 2.1. *Soit $e: A[S] \to A[X]$ un endomorphisme de A-algèbres. Les conditions suivantes sont équivalentes: (e est défini par $e(S) = P(X)$)*

(i) *Le morphisme e est plat.*

(ii) *Le morphisme e est fidèlement plat.*

(iii) *Le morphisme e est quasi-fini.*

(iv) *Le morphisme e est universellement subtrusif.*

(v) *Le contenu $c(P^*(X))$ est égal à A.*

Preuve. Il est bien connu qu'un morphisme $A \to A[X]/(P(X))$, où $P(X) \in A[X]$ est plat si et seulement si $c(P(X))^2 = c(P(X))$. De même D. Ferrand montre dans [10, Lemme 2.3], que ce morphisme est quasi-fini si et seulement si $c(P(X)) = A$. Soit $P(X) = p_0 + p_1 X + \cdots + p_n X^n$. Supposons le morphisme e plat, en utilisant e', on obtient que $c(P(X) - S)$ est engendré par un idempotent i de $A[S]$. Un tel idempotent est nécessairement dans A. Puisque $p_0 - S$ appartient à $c(P(X) - S)$, on a $p_0 - S = Q(S)i$. Prenant $S = p_0 - 1$, on obtient que i est inversible, donc égal à 1. Il existe alors une combinaison $Q_1(S)\, p_1 + \cdots + Q_n(S)\, p_n + Q(S)(p_0 - S) = 1$. En choisissant $S = p_0$, on en déduit que $c(P^*(X)) = A$. Réciproquement si $c(P^*(X)) = A$, il est clair que $c(P(X) - S) = A[S]$ et donc e est un morphisme plat. Ainsi (i) est équivalent à (v). On vient de voir que $c(P(X) - S) = A[S]$ équivaut à $c(P^*(X)) = A$, donc (iii) est équivalent à (v). Si I est un idéal d'un anneau B, on désigne par $\hat{I}$ la fermeture intégrale de I dans B. Nous avons montré dans [21, Théorème I.41], que le morphisme $A \to A[X]/(P(X))$ est universellement subtrusif si et seulement si $p_0 \in \widehat{c(P^*(X))}$. Si l'on suppose que e est universellement subtrusif, alors $p_0 - S \in \widehat{c(P^*(X))}$ dans $A[S]$; mais pour $S = p_0 - 1$, on en déduit que $1 \in \widehat{c(P^*(X))}$ dans A, et donc que $c(P^*(X)) = A$, puisque pour tout idéal I on a $\hat{I} \subset \sqrt{I}$. Réciproquement, $c(P^*(X)) = A$ entraîne $c(P^*(X)) = A[S]$ et, puisque, pour tout idéal I on a $I \subset \hat{I}$, on voit que e est universellement subtrusif. On en déduit que (iv) est équivalent à (v). Il est clair que (ii) entraîne (iv); puisqu'un morphisme universellement subtrusif est spectralement surjectif, on obtient que (iv) entraîne (ii), ce qui achève la preuve.

Le paragraphe suivant sera consacré à la généralisation convenable de 2.1, au cas de n variables. Disons tout de suite que les choses sont plus compliquées. Auparavant, nous allons compléter l'étude du cas d'une variable.

Soit $\underline{P}_A$ l'ensemble des polynômes d'un variable $P(X)$ sur un anneau A, tels que $c(P^*(X)) = A$. Lorsque $P(X) \in \underline{P}_A$, le morphisme $A \to A[X]/(P(X))$ est fidèlement plat, puisque $c(P^*(X)) = A$ et donc $p_0 \in c(P^*(X))$. Considérons la A-algèbre $A_1 = \bigotimes_{P \in P_A} A[X]/(P(X))$ et puis, par récurrence, $A_i = (A_{i-1})_1$. Finalement, on pose $F(A) = \bigcup_{i \in \mathbb{N}^*} A_i$. Le morphisme structural $A \to F(A)$ est fidèlement plat, puisque A_1 s'obtient comme limite inductive de morphismes fidèlement plats. Tout polynôme $Q(X)$ de $F(A)[X]$, soit $q_0 + \cdots + q_t X^t$, tel que $c_{F(A)}(Q^*(X)) = F(A)$ a un zéro dans $F(A)$. En effet, $Q(X)$ a ses coefficients dans un anneau A_i et si $b_1 q_1 + \cdots + b_t q_t = 1$, on peut se placer dans un anneau A_j tel que tous les termes de cette relation soient dans A_j. Puisque le morphisme $A_j[X]/(Q(X)) \to A_{j+1}$ est injectif, le polynôme Q a un zéro dans A_{j+1}, donc dans $F(A)$. En particulier, tout polynôme unitaire de $F(A)$ a un zéro dans $F(A)$. Il en résulte que les corps résiduels de $F(A)$ sont algébriquement clos.

PROPOSITION 2.2. *Soit $e: A[S] \to A[X]$ un endomorphisme de A-algèbres, défini par $e(S) = P(X)$. Alors e est un morphisme plat si et seulement si pour tout polynôme $Q(X)$ de $A[X]$ on a $c(Q(P(X))) = c(Q(X))$.*

Preuve. Supposons le morphisme e plat, en vertu de la Proposition 2.1, on a $c(P^*(X)) = A$; il en est de même dans $F(A)$. Ref. [6, Proposition 3] montre que $c_{F(A)}(Q(P(X)))$ est l'idéal de $F(A)$ engendré par les éléments $Q(P(b))$, pour tout $b \in F(A)$: en effet, les corps résiduels de $F(A)$ sont infinis. De plus, dans $F(A)$, pour tout polynôme $P(X) \in \underline{P}_{F(A)}$, l'application $f: F(A) \to F(A)$, définie par $f(b) = P(b)$ est surjective, puisque $P(X) - b$ a un zéro dans $F(A)$. Il en résulte que $c_{F(A)}(Q(P(X)))$ est l'idéal engendré par les éléments $Q(b)$ pour $b \in F(A)$. Finalement, on voit que $c_{F(A)}(Q(P(X))) = c_{F(A)}(Q(X))$. La même égalité a lieu dans A, parce que le morphisme $A \to F(A)$ est fidèlement plat et parce que $c_{F(A)}(H(X)) = F(A)\, c_A(H(X))$ pour tout élément $H(X)$ de $A[X]$. Réciproquement, si la propriété sur les contenus est vérifiée, on a $c(P(X) - P(0)) = c(X - P(0)) = A$, ce qui signifie que e est un morphisme plat.

III. LE CAS DE n VARIABLES

On utilise dans la suite le lemme suivant:

LEMME 3.1. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme d'anneaux et soit $e: A_n[S] \to A_n[X]$ un endomorphisme de A-algèbres, déterminé par $e(S_i) = P_i(X_1, ..., X_n)$. Soit encore le morphisme de A-algèbres $e': A'_n[S] \to A'_n[X]$,* *défini par* $e'(X_i) = P^f(X_1, ..., X_n)$ *où* P^f *désigne le polynôme déduit de* P *en transformant ses coefficients par* f*, alors le diagramme suivant est cocartésien dans la catégorie des anneaux commutatifs unitaires*:

$$\begin{array}{ccc} A_n[S] & \longrightarrow & A_n[X] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A'_n[S] & \longrightarrow & A'_n[X] \end{array}$$

Preuve. Les morphismes représentés verticalement sont définis par $P \to P^f$. Les diagrammes commutatifs:

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_n[S] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & A'_n[S] \end{array}$$

et

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A_n[X] \\ \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & A'_n[X] \end{array}$$

sont cocartésiens, parce que $A' \otimes_A A_n[X] = A'_n[X]$. Le diagramme commutatif composé

$$\begin{array}{ccccc} A & \longrightarrow & A_n[S] & \longrightarrow & A_n[X] \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ A' & \longrightarrow & A'_n[S] & \longrightarrow & A'_n[X] \end{array}$$

est donc cocartésien, ainsi que le premier carré commutatif de ce diagramme. Il résulte de [9, Chap. 0, 1.2.9.], que le diagramme figurant dans l'énoncé du lemme est cocartésien: il suffit de prendre la proposition duale de celle de [9], concernant les carrés cartésiens.

Le lemme précédent signifie que si l'on fait le changement de base $A \to A'$, pour les anneaux de polynômes, alors e' est déduit de e par changement de base. Nous utiliserons ce lemme en particulier pour se ramener à des anneaux de polynômes sur un corps: pour tout idéal premier P de A on a un morphisme $A \to k(P)$.

LEMME 3.2. *Soit* $e: A_n[S] \to A_n[X]$ *un endomorphisme de* A*-algèbres, alors* e *est plat si et seulement si pour tout idéal premier* P *de* A *le morphisme de* $k(P)$*-algèbres* $e_P: k(P)_n[S] \to k(P)_n[X]$ *est plat.*

Preuve. Si le morphisme e est plat, le morphisme e_P, déduit de e, par changement de base, est plat. Soit le composé de morphismes d'anneaux $A \to B = A_n[S] \to C = A_n[X]$. Les morphismes $A \to B$ et $A \to C$ sont de présentations finies et plats, parce que libres. Le résultat énoncé dans [8, IV.11.3.11] nous assure que dans ces conditions, si pour tout idéal premier P de A le morphisme $B \otimes_A k(P) \to C \otimes_A k(P)$ est plat, alors le morphisme $B = A_n[S] \to A_n[X] = C$ est plat; or le morphisme $B \otimes_A k(P) \to C \otimes_A k(P)$ n'est autre que le morphisme $k(P)_n[S] \to k(P)_n[X]$; ceci achève la preuve du lemme.

Rappelons qu'un morphisme d'anneaux $A \to B$ est dit quasi-fini s'il est de type fini et si pour tout idéal premier P de A la fibre $B \otimes_A k(P)$ est finie sur $k(P)$. La dernière condition est équivalente à la dimension de l'anneau $B \otimes_A k(P)$ est nulle. On trouve dans [28, 1.6], le résultat suivant:

LEMME 3.3. *Soit $A \to B \to C$ un composé de morphismes d'anneaux, tels que le morphisme $B \to C$ soit de type fini, alors ce morphisme est quasi-fini si et seulement si pour tout idéal premier P de A le morphisme $B \otimes_A k(P) \to C \otimes_A k(P)$ est quasi-fini.*

On applique ce qui précède au cas d'un endomorphisme polynômial:

LEMME 3.4. *Soit un endomorphisme de A-algèbres $e\colon A_n[S] \to A_n[X]$. Le morphisme e est A-universellement injectif (resp. quasi-fini) si et seulement si pour tout idéal premier P de A le morphisme $k(P)_n[S] \to k(P)_n[X]$ est injectif (resp. quasi-fini).*

Preuve. La partie concernant l'universelle injectivité de e résulte immédiatement de la Proposition 1.4.

Pour généraliser la Proposition 2.2 au cas de n variables, on commence par caractériser les morphismes de modules à conoyaux plats, à l'aide de la notion de contenu. D'après J. Ohm et D. E. Rush, cf. [19], un A-module M est dit à contenu si pour tout élément x de M on a $x \in c(x)M$, où $c(x)$ est le contenu de x, c'est à dire l'intersection des idéaux I de A tels que $x \in IM$. Un module projectif, et donc un module libre, est à contenu.

PROPOSITION 3.5. *Soit P un A-module plat et soit $u\colon M \to P$ un morphisme injectif de A-modules. Soient les conditions:*

(i) *Le A-module P/M est plat.*

(ii) *Le morphisme u est universellement injectif.*

(iii) *Pour tout élément x de M on a $c(u(x)) = c(x)$.*

Alors (i) *est équivalent à* (ii) *et* (i) *ou* (ii) *impliquent* (iii). *Si M est un module à contenu, alors* (i) *est équivalent à* (iii).

Preuve. Puisque P est un module plat, l'équivalence de (i) et (ii) est bien connue. On sait aussi que lorsque P et P/M sont des modules plats, pour tout idéal I de A on a $IM = M \cap IP$. Dans ces conditions, soit x un élément de M et soit I un idéal de A tel que $u(x) \in IP$, alors x appartient à $M \cap IP = IM$. Il est clair que $x \in IM$ entraîne $u(x) \in IP$. On en déduit alors que $c(u(x)) = c(x)$. Réciproquement, supposons que M soit un module à contenu et que (iii) soit réalisée, soit $x \in M \cap IP$, où I est un idéal de A, puisque $u(x) \in IP$, on a $c(x) \subset I$; de $x \in c(x)M$ on déduit que $x \in IM$. Il en résulte que $IP \cap M = IM$ et par un résultat classique que P/M est un module plat.

PROPOSITION 3.6. *Soit u: $M \to P$ un morphisme de A-modules, où M est un module à contenu et P un module plat, alors le morphisme u est universellement injectif si et seulement si pour tout élément x de M on a $c(u(x)) = c(x)$.*

Preuve. Compte tenu de la Proposition 3.5, il suffit de montrer que la condition (iii) entraîne que u est injectif, mais $u(x) = 0$ implique $c(x) = 0$ et comme x appartient à $c(x)M$, on voit que $x = 0$.

Remarque 3.7. Soit X un A-module plat, nous avons montré dans [22, 2.6], que X est un module de Mittag-Leffler si et seulement si pour tout morphisme d'anneaux $A \to A'$, le A'-module $X \otimes_A A'$ est à contenu (on dit alors que X est universellement à contenu). Soit alors P un module plat de M. L., soit M un sous-module tel que P/M soit plat; puisque le morphisme $M \to P$ est universellement injectif, il résulte de [25, II.2.1.6] que le module M est de Mittag-Leffler et comme il est plat il est alors universellement à contenu.

THÉORÈME 3.8. *Soit e: $A_n[S] \to A_n[X]$ un endomorphisme de A-algèbres, défini par $e(S_i) = P_i(X_1, ..., X_n)$, le morphisme e est A-universellement injectif si et seulement si pour tout élément $R(S_1, ..., S_n)$ de $A_n[S]$, on a: $c_A(R(S_1, ..., S_n)) = c_A(R(P_1(X_1, ..., X_n), ..., P_n(X_1, ..., X_n)))$.*

Preuve. Il suffit d'appliquer la Proposition 3.6 au morphisme de A-modules e et de se rappeler qu'un anneau de polynômes sur A est plat sur A et à contenu.

LEMME 3.9. *Soit e: $A_n[S] \to A_n[X]$ un endomorphisme de A-algèbres. Si le morphisme e est plat il est A-universellement injectif.*

Preuve. En vertu des Lemmes 3.2 et 3.4 il suffit de montrer que pour tout idéal premier P de A, le morphisme plat $k(P)_n[S] \to k(P)_n[X]$ est injectif: or les anneaux sont intègres et le morphisme plat définit un module sans torsion, il est donc injectif.

PROPOSITION 3.10. *Soit* $e: A_n[S] \to A_n[X]$ *un endomorphisme de* A-*algèbres, plat et défini par* $e(S_i) = P_i(X_1, ..., X_n)$, *alors* $c(P_i^*) = A$ *et les morphismes* $A \to A_n[X]/(P_i(X_1, ..., X_n))$ *sont fidèlement plats.*

Preuve. En vertu du Théorème 3.8, on a $c(P_i^*) = c(S_i - P_i(0, ..., 0)) = A$. Par [21, 1.45], le morphisme $A \to A_n[X]/(P_i(X_1, ..., X_n))$ est plat si et seulement si $c(P_i)^2 = c(P_i)$, ce qui est le cas, puisque $c(P_i) = A$. De plus soit M un idéal maximal de A et supposons que $MA_n[X]/(P_i) = A_n[X]/(P_i)$. En passant dans l'anneau $A/M[X_1, ..., X_n]$ on obtient que P_i est inversible dans cet anneau et donc les coefficients non constants de P_i sont dans M, c'est à dire que $c(P_i^*) \subset M$, ce qui est absurde. Finalement le morphisme est fidèlement plat.

Les conditions de la Proposition 3.10 ne suffisent pas, comme dans le cas d'une variable, pour assurer que le morphisme e est plat. Considèrons, par exemple l'endomorphisme $e: A[X, Y] \to A[X, Y]$ défini par $e(X) = X$ et $e(Y) = XY$. On a bien $c(X) = A$ et $c(XY) = A$. Cependant si e était plat, la suite $\{X, Y\}$ étant régulière, il en serait de même pour la suite $\{X, XY\}$, ce qui est absurde. La condition manquante sera dégagée un peu plus loin.

On donne maintenant une caractérisation des endomorphismes polynômiaux plats, à l'aide des suites régulières. Plus précisément:

DÉFINITION 3.11. Soit $f: A \to B$ un morphisme d'anneaux, une suite $\{b_1, ..., b_n\}$ d'éléments de B est dite A-régulière si pour toute suite d'éléments $\{x_1, ..., x_n\}$ de A, la suite $\{b_1 - f(x_1), ..., b_n - f(x_n)\}$ est régulière.

La suite $\{b_1, ..., b_n\}$ est dite universellement A-régulière si pour tout morphisme d'anneaux $A \to A'$, la suite $\{b_1 \otimes 1, ..., b_n \otimes 1\}$ de $B \otimes_A A'$ est A'-régulière.

PROPOSITION 3.12. *Soit* $e: A_n[S] \to A_n[X]$ *un endomorphisme de* A-*algèbres, défini par* $e(S_i) = P_i(X_1, ..., X_n)$. *Le morphisme e est plat si et seulement si la suite* $\{P_1, ..., P_n\}$ *est universellement* A-*régulière.*

Preuve. Soit une suite $\{x_1, ..., x_n\}$ d'éléments de A, il est bien connu et facile de voir que la suite $\{S_1 - x_1, ..., S_n - x_n\}$ est régulière dans $A_n[S]$. Si le morphisme e est plat il en est de même pour la suite transformée par e: la suite $\{P_1 - x_1, ..., P_n - x_n\}$ est régulière. Soit un changement de base $f: A \to A'$, les hypothèses étant les mêmes après changement de base, on voit que la suite $\{P_1^f, ..., P_n^f\}$ est A'-régulière. Ainsi la suite $\{P_1, ..., P_n\}$ est universellement A-régulière. Réciproquement supposons cette suite universellement A-régulière. Pour montrer que le morphisme e est plat, le Lemme 3.2 nous montre qu'on peut supposer que A est un corps k. On peut de plus supposer que k est un corps algébriquement clos: si $k \to K$ est le morphisme clôture algébrique du corps k, le morphisme $k_n[S] \to K_n[X]$ est fidèlement plat, donc descend la platitude. Considérons donc un corps k, algébriquement clos, un morphisme $e\colon k_n[S] \to k_n[X]$ défini par $e(S_i) = P_i$, où la suite $\{P_1, ..., P_n\}$ est k-régulière. Soit $M = (X_1 - a_1, ..., X_n - a_n)$ un idéal maximal de $k_n[X]$, où $a_1, ..., a_n$ sont des éléments de k. La suite $\{P_1 - P_1((a_j)), ..., P_n - P_n((a_j))\}$ a ses éléments contenus dans M et est régulière. Il en est de même pour l'image de cette suite par le morphisme canonique $h\colon k_n[X] \to k_n[X]_M$. Soit $\varepsilon\colon k_n[S] \to k_n[X]$ le morphisme de A-algèbres défini par $\varepsilon(S_i) = P_i - P_i((a_j))$, alors le morphisme de A-algèbres $h \circ \varepsilon$ est plat, en vertu du résultat suivant, du à R. Hartshorne, énoncé dans [16, 20.D.]: soit B un anneau local Noethérien, d'idéal maximal N; on suppose que B contient un corps k; si $\{x_1, ..., x_n\}$ est une suite régulière contenue dans N, alors le morphisme $k_n[S] \to B$, défini par S_i donne x_i, est plat; soit l'isomorphisme $f\colon k_n[S] \to k_n[S]$, défini par $f(S_i) = P_i((a_j)) + S_i$, alors le morphisme $h \circ e\colon k_n[S] \to k_n[X]_M$ est égal à $h \circ \varepsilon \circ f$ et donc est un morphisme plat. Cette propriété étant vraie pour tout idéal maximal M de $k_n[X]$, on en déduit que le morphisme e est plat.

LEMME 3.13. *Soit K un corps et soit $e\colon K_n[S] \to K_n[X]$ un endomorphisme de K-algèbres, plat. Le morphisme e est quasi-fini si et seulement si pour tout idéal premier P de $K_n[X]$ de hauteur h, l'idéal premier $e^{-1}(P)$ est de hauteur h.*

Preuve. Posons $B = K_n[S]$ et $C = K_n[X]$; soit P un idéal premier de C, de contracté Q dans B. Puisque le morphisme e est plat, il résulte de [2, Sect. 3.4, Cor. 1] que $\dim(C_P) = \dim(B_Q) + \dim(C_P \otimes_{B_Q} k(Q))$. Le morphisme e étant de type fini, il est quasi-fini si et seulement si pour tout couple (P, P') d'idéaux premiers de C, tels que $P' \subset P$, la relation $e^{-1}(P) = e^{-1}(P')$ entraîne $P = P'$, cf. [28, 1.8]. Or l'anneau $C_P \otimes_{B_Q} k(Q)$ est isomorphe à C_P/QC_P. Ce dernier anneau est local, sa dimension est nulle si et seulement si son spectre est réduit à l'idéal maximal. Or les idéaux premiers de C_P/QC_P sont en bijection avec les idéaux premiers P' de C, tels que $P' \subset P$ et $e^{-1}(P') = Q$. Il en résulte que e est quasi-fini si et seulement si $\dim(C_P \otimes_{B_Q} k(Q)) = 0$, pour tout idéal premier P de C. Or cette dernière condition équivaut à $\dim(C_P) = \dim(B_Q)$, ce qui achève la preuve.

PROPOSITION 3.14. *Un endomorphisme de A-algèbres, plat $e\colon A_n[S] \to A_n[X]$ est quasi-fini.*

Preuve. En vertu du Lemme 3.4, on peut supposer que A est un corps. D'après le Lemme 3.13, il suffit de montrer que e conserve les hauteurs des idéaux premiers. Soit P un idéal premier de $A_n[X]$ et $Q = e^{-1}(P)$, si e est plat on a $ht(Q) \leqslant ht(P)$. Considérons le morphisme sous la forme

e': $A_n[S] \to A_n[S, X]/I(e)$. Puisqu'on a affaire à des anneaux de polynômes sur un corps, on a en désignant par P^* l'idéal de $A_n[S, X]$ correspondant à P, $ht(P^*) = ht(I(e)) + ht(P)$; d'après le Paragraphe I, l'idéal premier $I(e)$ est de hauteur n. Posons $B = A_n[S]$ et soit le morphisme $B \to B_n[X]$, en vertu d'un résultat classique (l'anneau B est Noethérien), on a $ht(P^*) \leqslant ht(Q) + n$, d'où l'on déduit que $ht(P) \leqslant ht(Q)$. Finalement on voit que $ht(P) = ht(Q)$.

THÉORÈME 3.15. *Soit e: $A_n[S] \to A_n[X]$ un endomorphisme de A-algèbres, les conditions suivantes sont équivalentes*:

(i) *Le morphisme e est plat.*

(ii) *Le morphisme e est quasi-fini et universellement A-injectif.*

(iii) *Le morphisme e est universellement générisant (vérifiant le Going down)*

(iv) *Le morphisme e est universellement ouvert.*

Preuve. On sait déja qu'un morphisme e plat est quasi-fini et universellement A-injectif. Réciproquement, supposons ces deux conditions satisfaites; par le théorème principal de Zariski, sous la forme énoncée dans [24], pour tout idéal premier P de A le morphisme injectif $k(P)_n[S] \to k(P)_n[X]$ se factorise en $k(P)_n[S] \to E \to k(P)_n[X]$, où E est la fermeture intégrale de $k(P)_n[S]$ dans $k(P)_n[X]$, cf. [24, 4.2], et le morphisme $E \to k(P)_n[X]$ est une immersion ouverte, c'est à dire un épimorphisme plat de présentation finie. Le morphisme $k(P)_n[S] \to E$ est entier injectif, entre anneaux intègres, donc est sans torsion et l'anneau $k(P)_n[S]$ est intégralement clos; il résulte de [27, 2.1], que ce morphisme est universellement ouvert; il en est de même pour le morphisme $E \to k(P)_n[X]$, puisqu'un morphisme plat (ou même universellement générisant), de présentation finie est universellement ouvert, cf. [9, I., 7.3.10]. Une partie de la preuve sera achevée si nous montrons que l'hypothèse: le morphisme $k(P)_n[S] \to k(P)_n[X]$ est universellement ouvert entraîne que le morphisme $k(P)_n[S] \to k(P)_n[X]$ est plat. Or ce dernier point est conséquence de [8, IV. 15.4.2]: soit f: $Y \to X$ un morphisme de type fini entre anneaux Noethériens; si Y est un anneau régulier et si X est un anneau de Cohen–Macaulay, alors f est plat si et seulement si f est universellement ouvert. On vient donc de voir qu'un morphisme e quasi-fini et universellement A-injectif est plat, en vertu du Lemme 3.2. Si le morphisme e est plat, comme il est de présentation finie, il est universellement ouvert et donc universellement générisant, cf. [9, I.3.9.3]. Un morphisme e de présentation finie, universellement générisant est universellement ouvert; il en est de même pour le morphisme $e \otimes k(P)$, alors le raisonnement fait ci-dessus nous montre que e est un morphisme plat. La preuve est ainsi terminée.

PROPOSITION 3.16. *Soit $e: A_n[S] \to A_n[X]$ un endomorphisme de A-algèbres quasi-fini et spectralement surjectif, alors le morphisme e est fidèlement plat. En particulier, un morphisme e fini et injectif est fidèlement plat.*

Preuve. Soit pour tout idéal premier P de A le morphisme $e_P: k(P)_n[S] \to k(P)_n[X]$. Ce morphisme est injectif: puisque le morphisme spectral ${}^a e_P$ est surjectif, on a ${}^a e_P(V(0)) = \overline{{}^a e_P(V(0))} = V(e_P^{-1}(0)) = V(0)$; mais les anneaux sont intègres et, par suite, $0 = e_P^{-1}(0)$; ainsi le morphisme e_P est injectif. En vertu du Lemme 3.4 le morphisme e est A-universellement injectif, donc est plat d'après la Proposition 3.16.

PROPOSITION 3.17. *Soit $e: A_n[S] \to A_n[X]$ un endomorphisme de A-algèbres. Pour que le morphisme e soit plat (resp. spectralement surjectif, quasi-fini, universellement A-injectif) il faut et il suffit que pour tout morphisme d'anneaux $A \to K$, où K est un corps algébriquement clos, le morphisme $K_n[S] \to K_n[X]$ soit plat (resp. spectralement surjectif, quasi-fini, injectif).*

Preuve. Les propriétés de morphismes d'anneaux figurant dans l'énoncé de la proposition sont vraies si et seulement si, pour tout idéal premier P de A, elles sont vraies pour le morphisme $k(P)_n[S] \to k(P)_n[X]$. Elles sont stables par changement de base. De plus si K est une clôture algébrique de $k(P)$, le morphisme $k(P)[X] \to K[X]$ est fidèlement plat, donc descend les propriétés intervenant dans l'énoncé de la proposition.

Remarque 3.18. Nous avons vu, dans la Proposition 3.12, que la platitude d'un morphisme e s'exprime par l'assertion: la suite $\{P_1, ..., P_n\}$ est universellement A-régulière. Un examen de la preuve de la Proposition 3.12 montre que cette condition est équivalente à la suivante: pour tout morphisme d'anneaux $f: A \to K$, où K est un corps algébriquement clos, si $a_1, ..., a_n$ sont des éléments de K, la suite $\{P_1^f - a_1, ..., P_n^f - a_n\}$ est régulière. Dans le cas où les coefficients des polynômes P_i sont des éléments de $\mathbb{Z}$, cette remarque fournit un critère effectif de platitude, pour un morphisme e.

S. S. S. Wang fait remarquer dans [30], après l'énoncé du Théorème 49, qu'une conséquence de son théorème principal 46 est que la solution de la conjecture du Jacobien passe par l'obtention d'un critère de fidèle platitude pour un morphisme e étale, donc plat. Si un morphisme e est plat, il est fidèlement plat si et seulement si le morphisme spectral ${}^a e$ est surjectif. Il est facile de voir, dans le cas où A est un corps algébriquement clos, que la surjectivité de ${}^a e$ équivaut à la surjectivité de l'application polynômiale associée $P(e): A^n \to A^n$, définie par $P(e)(a_1, ..., a_n) = (P_1(a_i), ..., P_n(a_i))$. Mais ce critère est peu maniable.

Il est un cas évident où un morphisme e plat est fidèlement plat: un morphisme d'anneaux injectif, fini et plat est fidèlement plat. Cet aspect

481 138 1-14

sera traité dans le paragraphe suivant. Auparavant, nous donnons un critère de fidèle platitude assez simple, mais non général.

THÉORÈME 3.19. *Soit* $e: A_n[S] \to A_n[X]$ *un endomorphisme de A-algèbres, défini par* $e(S_i) = P_i(X_1, ..., X_n)$. *On suppose que le morphisme e est plat et que les polynômes* P_i *sont homogènes, alors le morphisme e est libre si A est un corps; si A est un anneau quelconque, le morphisme e est fidèlement plat.*

Preuve. Soit Pi le degré du polynôme homogène P_i. On sait qu'on peut considérer $A_n[S]$ comme un anneau gradué, la graduation étant définie ainsi: un élément homogène de poids p est une combinaison linéaire sur A de monômes $X_1^{i(1)}X_2^{i(2)}\cdots X_n^{i(n)}$ tels que $p_1 i(1) + \cdots + p_n i(n) = p$. Le morphisme e peut alors être considéré comme définissant sur $A_n[X]$, muni de sa graduation usuelle, une structure de $A_n[S]$-module gradué. Compte tenu des propositions précédentes, on peut supposer que A est un corps. Dans ce cas, les éléments homogènes de poids 0 de $A_n[S]$ sont les éléments de A, qui est un corps; le morphisme e étant plat, on a $\mathrm{Tor}_1^{A_n[S]}(A_n[X], A) = 0$. Il résulte de [5, VIII.6.1] que le morphisme e est libre.

Le théorème précédent suggère qu'en homogénéisant les polynômes P_i on peut obtenir des résultats supplémentaires. Si $P(X_1, ..., X_n)$ est un élément de $A_n[X]$, on désigne par ${}^hP(X_1, ..., X_n, X_{n+1})$ le polynôme déduit de P par homogénéisation. Soit, pour $a \in A$, le morphisme d'anneaux $f_a: A_{n+1}[X] \to A_n[X]$ défini par $f_a(X_{n+1}) = a$ et $f_a(X_i) = X_i$, pour $i = 1, ..., n$. Le morphisme f_a est surjectif, de noyau engendré par $X_{n+1} - a$. Considérons un endomorphisme de A-algèbres $e: A_n[S] \to A_n[X]$, défini par $e(S_i) = P_i$, on définit alors un endomorphisme de A-algèbres $h(e): A_{n+1}[S] \to A_{n+1}[X]$, par $h(e)(S_i) = {}^hP_i$, pour $i = 1, ..., n$ et $h(e)(S_{n+1}) = X_{n+1}$. Posons $B = A_{n+1}[S]$, $C = A_{n+1}[X]$, soit I l'idéal de B engendré par $S_{n+1} - a$; puisque le morphisme $B \to C$ donne un isomorphisme d'anneaux $C \otimes_B B/I = C/I.C$ et puisque $I.C$ est l'idéal de C engendré par $X_{n+1} - a$, la considération du carré cocartésien:

$$\begin{array}{ccc} B & \longrightarrow & C \\ \downarrow & & \downarrow \\ B/I & \longrightarrow & C/I.C \end{array}$$

nous montre que l'on a un carré cocartésien:

$$\begin{array}{ccc} A_{n+1}[S] & \xrightarrow{h(e)} & A_{n+1}[X] \\ {\scriptstyle f_a}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle f_a} \\ A_n[S] & \xrightarrow[e_a]{} & A_n[X] \end{array}$$

où e_a est l'endomorphisme de A-algèbres défini par $e_a(S_i) = {}^hP_i(X_1, ..., X_n, a)$. On remarque que $e = e_1$.

COROLLAIRE 3.20. *Soit $e: A_n[S] \to A_n[X]$ un endomorphisme de A-algèbres, si le morphisme $h(e)$ est plat, alors les morphismes e_a, et en particulier e, sont fidèlement plats.*

Remarque 3.21. La platitude de e n'entraîne pas celle de $h(e)$: soit K un corps algébriquement clos et soit $e: K[X, Y] \to K[X, Y]$ défini par $e(X) = X^2 + Y^2 - X$ et $e(Y) = X^2 + Y^2$. Le morphisme e est plat, car la suite $\{e(X), e(Y)\}$ est universellement A-régulière, et spectralement surjectif, car l'application $P(e)$ est surjective. Si le morphisme $h(e)$ était plat, il en serait de même pour e_0; or $e_0(X) = X^2 + Y^2 = e_0(Y)$, montre que e_0 n'est pas injectif donc n'est pas plat.

L'utilisation des résultats de S. S. S. Wang dans [30] nous fournit un critère de platitude pour un morphisme e.

PROPOSITION 3.22. *Soit $e: A_n[S] \to A_n[X]$ un endomorphisme de A-algèbres, défini par $e(S_i) = P_i$. Le morphisme e est net si et seulement si le déterminant du Jacobien des polynômes P_i est un élément inversible de $A_n[X]$. Dans ce cas le morphisme e est étale, donc plat.*

Preuve. Considèrons la factorisation $A_n[S] \to A[P_1, ..., P_n] \to A_n[X]$, le premier morphisme est surjectif, donc net. Le composé est donc net si et seulement si le deuxième morphisme est net. Le théorème 38 de [30] donne alors le premier résultat. Le même théorème nous montre que le deuxième morphisme est plat et que les éléments $P_1, ..., P_n$ sont algébriquement indépendants sur A, lorsque e est un morphisme net. Il en résulte que dans ce cas, le morphisme e est plat.

Remarque 3.23. Il en résulte de [8, IV.17.8] que le morphisme e est net si et seulement si pour tout idéal premier P de A, le morphisme $e \otimes k(P)$ est net.

PROPOSITION 3.24. *Soient e et e' des A-endomorphismes de $A_n[X]$, alors*

(i) *Si le morphisme $e' \circ e$ est plat et si e' est spectralement surjectif, le morphisme e est plat. Si e et e' sont plats, il en est de même pour $e \circ e'$.*

(ii) *Le morphisme $e \circ e'$ est étale si et seulement si e et e' sont étales.*

Preuve. Supposons $e' \circ e$ plat et e' spectralement surjectif. Puisque $e' \circ e$ est universellement A-injectif, il en est de même pour e. D'autre part, on sait d'après [28] qu'un morphisme d'anneaux est universellement incomparable si et seulement si ses extensions résiduelles sont algébriques; en utilisant la surjectivité spectrale de e' on obtient que le morphisme e a ses extensions résiduelles algébriques. Puisque e est de type fini et universellement incomparable, il est quasi-fini [28, Corollaire 1.8]. Il résulte du Théorème 3.15 que le morphisme e est plat.

Si e est un A-endomorphisme de $A_n[X]$, nous désignons par $J_e(X_1, ..., X_n)$ le déterminant de la matrice Jacobienne des polynômes $e(S_i) = P_i$. On a alors $J_{e' \circ e}(X_1, ..., X_n) = J_e(P'_1, ..., P'_n)\, J_{e'}(X_1, ..., X_n)$. Si le morphisme $e' \circ e$ est étale, le produit de polynômes ci-dessus est inversible, donc $J_{e'}$ est inversible et le morphisme e' est étale. Remplaçons A par un de ses corps résiduels, alors $J_{e'}$ est une constante, non nulle, il en est de même pour $J_e(P'_1, ..., P'_n)$. Or les éléments P'_i sont algébriquement indépendants, il en résulte que J_e est une constante. Finalement on voit que e est étale.

Remarque 3.25. Soit un composé $e' \circ e$ fini et supposons que e' soit fidèlement plat, alors e' étant injectif, le morphisme e est entier, de type fini, donc fini.

Il peut être intéressant dans l'étude d'un endomorphisme e de pouvoir remplacer les polynômes P_i, par des polynômes dont la partie homogène de plus haut degré est un monôme. Il est possible d'arriver à un tel résultat, en utilisant une méthode due à Kronecker et utilisée dans la preuve du lemme de normalisation. Comme la preuve est très technique, on se contentera de donner une esquisse de la démonstration.

PROPOSITION 3.26. *Soit* $e\colon A_n[X] \to A_n[X]$ *un* A*-endomorphisme d'algèbres défini par* $e(X_i) = P_i(X_1, ..., X_n)$. *Il existe des* A*-endomorphismes* $e_1, ..., e_n$ *de* $A_n[X]$, *fidèlement plats et finis, tels que* $e_n \circ e_{n-1} \circ \cdots \circ e_1 \circ e(X_i) = a_i X^{u_i} + \sum_{|p| < |u_i|} a_p X^p$, *où* a_i *est un élément non nul de* A *et* u_i *et* p *désignent des éléments de* $\mathbb{N}^n$. *Les endomorphismes* e_i *sont du type suivant*: $e_1(X_1) = X_1$, $e_1(X_i) = X_i + X_1^{n_i}$, *pour* $i = 2, ..., n$, $n_i \in \mathbb{N} - \{0\}$. $e_k(X_1) = X_1$, $e_k(X_2) = X_2^d, ..., e_k(X_k) = X_k^{d^{k-1}}$, $e_k(X_i) = X_k^{p_i} + X_i$, *pour* $i = k+1, ..., n$, *où* d *et* p_i *sont des éléments de* $\mathbb{N} - \{0\}$, $e_n(X_i) = X_i^{d^{i-1}}$, *pour* $i = 1, ..., n$ *et où* d *est un élément de* $\mathbb{N} - \{0\}$.

Preuve. Montrons d'abord que les morphismes e_i du type ci-dessus sont finis et fidèlement plats. Posons $e_j(X_i) = T_i$, pour un morphisme e_j. On constate alors que pour $i = 1, ..., j$ l'indéterminée X_i est entière sur $A_n[T]$. Pour $i = j+1, ..., n$ on remarque que X_i est somme de deux éléments entiers sur $A_n[T]$. Le morphisme e_j est donc entier, et par suite, fini. Pour voir que e_j est spectralement surjectif, on remplace A par un corps algébriquement clos K. Puisque K est algébriquement clos, le système d'équations $e_j(X_i) = k_i$, où k_i est un élément de K, admet evidemment une solution. Il en résulte que e_j est spectralement surjectif. En vertu de la Proposition 3.16, le morphisme e_j est fidèlement plat. Soit maintenant A un anneau et soit $B = A_n[X]$. Soient aussi des polynômes $P_1, ..., P_t$ éléments de B. On peut définir des entiers m_i en sorte que si e' est le morphisme de A-algèbres défini par $e'(X_1) = X_1$, $e'(X_i) = X_i + X_1^{m_i}$, on ait $e'(P_i) = a_{r_i,i} X_1^{r_i} + \sum_{j<r_i} a_{j,i}(X_2, ..., X_n) X_1^j$, où $a_{r_i,i}$ appartient à $A - \{0\}$. Pour cela on prend un entier d strictement supérieur à tout exposant d'une indéterminée X_i figurant dans un monôme composant d'un polynôme P_j, cf., par exemple, [14, 7.2.1], en modifiant légèrement l'argument. Prenons maintenant l'endomorphisme e, défini par les polynômes P_i. Une application de ce qui précède nous donne un endomorphisme e_1, tel que $e_1(P_i) = a_{r_i,i} X_1^{r_i} + \sum_{j<r_i} a_{j,i}(X_2, ..., X_n) X_1^j$. Considérons maintenant les polynômes $a_{j,i}$ de $A[X_2, ..., X_n]$. On applique le procédé ci-dessus, on obtient un A-endomorphisme de $A[X_2, ..., X_n]$, soit e' défini par $e'(X_2) = X_2$, $e'(X_i) = X_i + X_2^{n_i}$, pour $i = 3, ..., n$. On considère alors le A-endomorphisme e'' de $A_n[X]$ défini par $e''(X_1) = X_1$ et $e''(X_i) = e'(X_i)$, pour $i = 2, ..., n$. Un remplacement donne $e''(e(X_i)) = \sum_{j<r_i} b_j X_1^j X_2^{s(j)} + P(X_1, ..., X_n)$, où b_j est un élément non nul de A et où P est un polynôme en X_1 et X_2 sur $A[X_3, ..., X_n]$, dont le degré est strictement inférieur à $\operatorname{Max}(j + s(j))$. Choisissons un entier d, strictement supérieur à tout entier j, $s(j)$, pour tout indice i; soit l'endomorphisme e''' défini par $e'''(X_2) = X_2^d$ et $e'''(X_i) = X_i$, pour $i \neq 2$. On obtient alors e_2 en prenant $e''' \circ e''$. On poursuit ensuite par récurrence.

Donnons maintenant quelques exemples.

EXEMPLE 3.27. Soient dans l'anneau $A[X, X_1, ..., X_n]$ les polynômes: $P_h = X^h + X_1 X^{h-1} + \cdots + X_h$ et $P_{n-h} = X^{n-h} + X_{h+1} X^{n-(h+1)} + \cdots + X_n$ et soit le produit $P = P_h P_{n-h} = X^n + p_1(X_1, ..., X_n) X^{n-1} + \cdots + p_n(X_1, ..., X_n)$. On a: $p_1 = X_1 + X_{h+1}$, $p_2 = X_2 + X_1 X_{h+1} + X_{h+2}, ..., p_n = X_h X_n$. Soit e le A-endomorphisme défini par $e(S_i) = p_i$. Le morphisme e est entier: prenons e sous la forme $A_n[S] \to A_n[S, X]/(p_i - S_i)$. On a dans cet anneau un polynôme à coefficients entiers sur $A_n[S]$: $P(X) = X^n + S_1 X^{n-1} + \cdots + S_n$. Il se factorise en $P_h(X)\, P_{n-h}(X)$. Il résulte du lemme de Kronecker que les coefficients de P_h et P_{n-h} sont entiers sur $A_n[S]$, donc les classes de $X_1, ..., X_n$ sont des éléments entiers sur $A_n[S]$. Le morphisme e est spectralement surjectif: supposons que A soit un corps algébriquement clos. Le polynôme $X^n + b_1 X^{n-1} + \cdots + b_n$ se factorise linéairement sur A, par conséquent le système d'équations $p_i(X_1, ..., X_n) = b_i$ a une solution dans A. Finalement, on en déduit que le morphisme e est fini, fidèlement plat. Au cours de [32, Preuve de I.4.2] on montre que J_e est le résultant de P_h, P_{n-h}. On a donc $J_e(0, ..., 0) = 0$ et le morphisme e n'est pas étale. On voit aussi sur cet exemple que la platitude d'un morphisme e n'entraîne pas que J_e soit un élément régulier.

Exemple 3.28. Soient $f_1(X), ..., f_n(X)$ des éléments de $A[X]$, tels que $c(f_i^*) = A$. Si s est un élément du groupe symétrique sur n éléments, considérons l'endomorphisme de A-algèbres de $A_n[X]$, défini par $e(S_i) = X_{s(i)}$. Ce morphisme est un isomorphisme. Soit aussi le morphisme de A-algèbres e' défini par $e'(S_i) = f_i(X_i)$. Le morphisme e' est fidèlement plat; en effet l'anneau $A_n[S, X]/(f_1(X_1) - S_1 \cdots f_n(X_n) - S_n)$ est une $A_n[S]$ algèbre isomorphe à $\bigotimes_{i=1}^n A_n[S][X]/(f_i(X) - S_i)$ et l'hypothèse sur les polynômes f_i entraîne, compte tenu de la Proposition 2.1, que le morphisme $A_n[S] \to A_n[S]/(f_i(X) - S_i)$ est fidèlement plat. On en déduit que l'endomorphisme de A-algèbres e'' défini par $e''(S_i) = f_i(P_{t(i)}(X_{s(1)}, ..., X_{s(n)}))$, où s et t sont des éléments du groupe symétrique et $P_1, ..., P_n$ sont des polynômes définissant un endomorphisme plat, est un endomorphisme plat.

Exemple 3.29. Les endomorphismes plats peuvent se juxtaposer. Soient des endomorphismes de A-algèbres $e_1: A_n[S] \to A_n[X]$, défini par $e_1(S_i) = P_i$, pour $i = 1, ..., n$ et $e_2: A_p[S] \to A_p[X]$, défini par $e_2(S_i) = Q_{n+i}$, pour $i = 1, ..., p$. Il existe alors un endomorphisme $e: A_{n+p}[S] \to A_{n+p}[X]$, défini par $e(S_i) = P_i(X_1, ..., X_n)$, pour $i = 1, ..., n$ et $e(S_{n+j}) = Q_{n+j}(X_{n+1}, ..., X_{n+p})$, pour $j = 1, ..., p$. Si les endomorphismes e_1, e_2 sont plats, il en est de même pour e que nous désignons par $e_1 \vee e_2$. Pour démontrer ce dernier point, il suffit de prouver que $e_1 \vee \mathrm{Id}$ et $\mathrm{Id} \vee e_2$ sont plats, puisque $e = (e_1 \vee \mathrm{Id}) \circ (\mathrm{Id} \vee e_2) = (\mathrm{Id} \vee e_2) \circ (e_1 \vee \mathrm{Id})$. Mais, par exemple, $e_1 \vee \mathrm{Id}$ n'est autre que le morphisme déduit de e_1, dans le changement de base $A_n[S] \to A_{n+p}[S]$ et est donc plat si e_1 est plat. Notons aussi que e_1 est plat (resp. étale) si et seulement si $e_1 \vee \mathrm{Id}$ est plat (resp. étale).

Voici quelques propriétés des endomorphismes e qui sont plats.

Proposition 3.30. *Un endomorphisme de A-algèbres $e: A_n[S] \to A_n[X]$ est un morphisme de Cohen–Macaulay lorsque e est plat.*

Preuve. Soit un morphisme $f: B \to C$ de A-algèbres et soit Q un idéal premier de B, se contractant en P dans A, alors le morphisme fibre $k(Q) \to C \otimes_B k(Q)$ s'identifie au morphisme fibre du morphisme $f \otimes_A k(P)$ en tout idéal premier Q' de $B \otimes_A k(P)$ au-dessus de Q: on a un diagramme cocartésien

$$\begin{tikzcd} B \arrow[r] \arrow[d] & C \arrow[d] \\ B \otimes_A k(P) \arrow[r] & C \otimes_A k(P) \end{tikzcd}$$

où le morphisme $B \to B \otimes_A k(P)$ est un épimorphisme de la catégorie des anneaux commutatifs unitaires. Par conséquent, l'extension résiduelle $k(Q) \to k(Q')$ est un isomorphisme. Puisque le morphisme fibre de $f \otimes_A k(P)$ en Q' s'obtient en effectuant le changement de base $k(Q) \to k(Q')$ pour le morphisme fibre de f en Q, on voit que l'assertion est démontrée. En particulier, dans le cas du morphisme e le morphisme fibre en l'idéal premier Q de $A_n[S]$ s'identifie au morphisme fibre du morphisme $k(P)_n[S] \to k(P)_n[X]$ en l'idéal premier Q' de $k(P)_n[S]$ au-dessus de Q. Pour montrer qu'un morphisme plat e est de Cohen–Macaulay, on peut donc supposer que A est un corps; puisque e est plat et ses fibres sont des anneaux Noethériens, il nous reste à montrer que les fibres non vides sont des anneaux de Cohen–Macaulay. Soit e: $R = A_n[S] \to A_n[X] = R'$ et soit P un élément de Spec(R) dont la fibre est non vide, son anneau est R'_P/PR'_P. Soit un idéal premier de cet anneau correspondant à un idéal premier M' de R', l'anneau localisé en l'idéal premier est isomorphe à $R'_{M'}/PR'_{M'}$. Comme cet anneau est local, de dimension 0 sa profondeur est zéro, donc cet anneau est de Cohen–Macaulay.

Lorsqu'un endomorphisme e est plat, on peut se demander quand il est fidèlement plat, ou ce qui revient au même: quand est-il spectralement surjectif? Ce problème rejoint celui posé par A. M. Nicolas dans [17]: soit $A \to B$ un morphisme d'anneaux, injectif, entre anneaux factoriels, on dit que ce morphisme définit une extension factorielle si le A-module B est sans torsion et si pour tout élément b de B on peut écrire, à des éléments inversibles près, de manière unique, $b = ax$, où $a \in A$ et $x \in B$, x vérifiant de plus: les relations $x = ux'$, $u \in A$, et $x' \in B$ entraînent u est un élément inversible de A. Le Théorème 1.6 de [17] montre que si le morphisme $A \to B$ est plat, désignant par K le corps des fractions de A, alors $A \to B$ est une extension factorielle de A si et seulement si $B \cap K = A$. Or [30, Théorème 41] nous assure que si A est un anneau factoriel et si le morphisme e: $A_n[S] \to A_n[X]$ est plat la condition précédente est réalisée. Nous en déduisons donc que dans le cas où A est un anneau factoriel, si le morphisme e est plat, il définit une extension factorielle. En particulier, pour tout polynôme P de $A_n[X]$, il existe un polynôme unique Q, à un élément inversible près de A, tel que $P = e(Q)\,P_1$, où P_1 ne peut plus se factoriser de cette façon, sauf par des éléments inversibles. Chez les deux auteurs cités ci-dessus, on pose le problème de la surjectivité spectrale du morphisme lorsqu'il est plat. Dans le cas où A est un corps on peut donner une précision. Soit M un idéal maximal de $K_n[S]$, où K est un corps et soit un morphisme plat e: $K_n[S] \to K_n[X]$. Le morphisme e' déduit de e par localisation en M est de type fini. Soit Q_M un idéal maximal de $K_n[X]_M$, puisque le morphisme e' est de type fini, Q_M se contracte dans $K_n[S]_M$ en un idéal premier $e^{-1}(Q)_M$ de Goldman, c'est à dire que $(K_n[S]/e^{-1}(Q))_M$ est un anneau intègre dont l'idéal minimal est ouvert dans le spectre. Il est alors classique que puisque cet anneau est Noethérien local, sa dimension est inférieure ou égale à 1. Il s'ensuit que la hauteur de $e^{-1}(Q)$ est n ou $n-1$, et puisque e conserve les hauteurs par la Proposition 3.14, la hauteur de Q est n ou $n-1$. Par conséquent, ou bien M a une fibre non vide ou bien la dimension de $K_n[X]_M$ est $n-1$.

IV. Finitude et projectivité d'un endomorphisme polynomial

Comme nous l'avons remarqué un endomorphisme e plat et fini est fidèlement plat. Mais un tel morphisme a des propriétés supplémentaires, telles que la projectivité ou mieux, si l'anneau A n'est pas quelconque.

PROPOSITION 4.1. *Soit $e: A_n[S] \to A_n[X]$ un endomorphisme de A-algèbres fini et injectif, alors:*

(i) *Le morphisme e est projectif.*

(ii) *Si l'anneau A est connexe, le morphisme e est projectif de rang fini.*

(iii) *Si l'anneau A est un corps, le morphisme e est libre.*

Preuve. En vertu de la Proposition 3.16, le morphisme e étant fini et injectif, est fidèlement plat. Mais un morphisme d'anneaux $B \to C$ de présentation finie, fini définit un B-module C de présentation finie, cf. [9, I.6.2.10]. Dans ces conditions $A_n[X]$ est un $A_n[S]$-module plat de présentation finie et est donc projectif. Pour montrer (ii), il suffit de remarquer que la connexité de A entraîne celle de $A_n[S]$. Le cas de (iii) se traite en utilisant le théorème de Quillen–Suslin sur la conjecture de Serre: tout module projectif de type fini sur un anneau de polynômes sur un corps est libre.

Remarques 4.2. (1) Si le morphisme e n'est pas fini, mais est projectif, et si de plus l'anneau A est Noethérien connexe alors le morphisme e est libre, cela résulte immédiatement d'un théorème de H. Bass dans [1, 4.5].

(2) Considérons un endomorphisme $e: A[S] \to A[X]$ fini et projectif, alors le morphisme $e \otimes A_P$, pour tout idéal premier P de A, est libre, une base étant constituée par des puissances de X. Considérons en effet le morphisme $B = A_P[S] \to A_P[X] = C$, il est projectif de rang r. Soit Q un idéal premier de B, le morphisme $k(Q) \to k(Q) \otimes_B C$ est aussi libre de rang r et est engendré par $\{1 \otimes X^i\}_{i \in \mathbb{N}}$. Le polynôme caractéristique de $1 \otimes X$ sur $k(Q)$ est de degré r, donc $1 \otimes X^{r+j}$ est combinaison linéaire d'éléments de $\{1, 1 \otimes X, ..., 1 \otimes X^{r-1}\}$. Ce dernier ensemble est donc une base de $k(Q) \otimes_B C$ sur $k(Q)$. Mais l'anneau B_Q est local, le module C_Q est de présentation finie sur B_Q, le morphisme $QB_Q \otimes_{B_Q} C_Q \to C_Q$ est injectif car C_Q est un B_Q-module plat. Il résulte de [3, II.3.2.5] que l'image de

l'ensemble $E = \{1, X, ..., X^{r-1}\}$ est une base de C_Q sur B_Q. En globalisant, on voit que E est une base de C sur B.

(3) Le morphisme $e: \mathbb{C}[S, T] \to \mathbb{C}[X, Y]$, défini par $e(S) = X$ et $e(T) = Y + XY^2$ est fidèlement plat, mais non projectif, cf. [30, Exemple 60].

(4) Soit A un anneau intègre et soit e un endomorphisme polynômial plat et quasi-fini en 0 (la fibre en 0 est un espace vectoriel de dimension finie) alors le morphisme e est projectif si et seulement si il est fini. Pour démontrer ce qui précède, il suffit d'utiliser les Théorèmes 3 et 4 donnés par C. U. Jensen dans [11].

Nous allons donner des critères de finitude pour un endomorphisme e. Puisqu'un tel morphisme est de présentation finie, un morphisme e est fini si et seulement si il est entier. En fait ces critères ne sont rien d'autre que la formulation du théorème des zéros projectif par O. Zariski. Plus précisément:

Définition 4.3 [31]. Soit $\{z_1, ..., z_m\}$ une partie de $A_n[X]$. Une telle partie est dite système homogène d'intégrité si les éléments z_i sont homogènes de degrès >0 et si le morphisme $A[z_1, ..., z_m] \to A_n[X]$ est entier. Cette définition se trouve dans [31, p. 198 et les résultats utilisés suivants pp. 198, 211–213].

Théorème 4.4. *Soit* $e: A_n[S] \to A_n[X]$ *un endomorphisme de* A*-algèbres, défini par* $e(S_i) = P_i$. *Le morphisme* e *est fini et projectif si l'anneau* A *est réduit, dans les cas suivants:*

(i) *Les polynômes* P_i *sont homogènes de degrés* >0 *et l'idéal* $(X_1, ..., X_n)$ *est contenu dans la racine de l'idéal* $(P_1, ..., P_n)$.

(ii) *Les parties homogènes de plus haut degré des polynômes* P_i *vérifient les conditions de* (i).

(iii) *Les polynômes* ${}^hP_i$ *vérifient la condition* (i) *dans* $A_{n+1}[X]$.

Preuve. Dans le cas où les polynômes P_i sont homogènes de degrés >0, la condition restante de (i) équivaut à: le système $\{P_1, ..., P_n\}$ est un système d'intégrité, cf. le lemme de [31, p. 199]. En ce qui concerne le cas de (ii) on utilise [31, p. 211, Théorème 28]. Supposons l'anneau A réduit, [31, p. 213, Théorème 29] et sa remarque suivante nous montrent que les éléments $P_1, ..., P_n$ sont algébriquement indépendants. Il en résulte que dans ce cas le morphisme e est fini et injectif, donc quasi-fini et spectralement surjectif. En vertu de la Proposition 3.16 le morphisme e est plat et fini et, donc, d'après la Proposition 4.1, projectif. Puisque le morphisme e se déduit de $h(e)$ par changement de base, le résultat est clair dans le cas de (iii).

Remarque. Si les polynômes P_i sont homogènes, la condition de (i) équivaut en fait à la finitude du morphisme e.

COROLLAIRE 4.5. *Soit K un corps algébriquement clos et soit $e: K_n[S] \to K_n[X]$ un endomorphisme de K-algèbres, si le morphisme e est spectralement surjectif, pour tout élément $(a_1, ..., a_n) \in K^n$, désignant par $p(i)$ le degré de P_i, le morphisme $K[{}^hP_1 - a_1 X_{n+1}^{p(1)}, ..., {}^hP_n - a_n X_{n+1}^{p(n)}] \to K_{n+1}[X]$ est non entier.*

Preuve. Si le morphisme e est spectralement surjectif, l'application $P(e)$ est surjective, donc le système de polynômes $\{{}^hP_i - a_i X_{n+1}^{p(i)}\}$ a un zéro non trivial. Par suite l'idéal $(X_1, ..., X_{n+1})$ n'est pas contenu dans l'idéal engendré par les polynômes ${}^hP_i - a_i X_{n+1}^{p(i)}$. Il résulte du lemme de [31, p. 199], que le morphisme n'est pas entier.

On se propose maintenant de montrer que la projectivité d'un morphisme e, sous certaines conditions générales, entraîne sa finitude. En fait les résultats découleront de propositions portant sur des morphismes d'anneaux.

LEMME 4.6. *Soit $f: A \to B$ un morphisme d'anneaux, quasi-fini, tel que pour tout idéal premier P de A le morphisme $A_P \to B_P$ soit fini, le morphisme f est alors fini.*

Preuve. Nous avons montré dans [21] le résultat suivant: soit un A-module M, tel que pour tout idéal premier P de A le module M_P soit de type fini sur A_P; si de plus il existe un morphisme d'anneaux $A \to B$, spectralement surjectif, tel que $M \otimes_A B$ soit un B-module de type fini, alors le A-module M est de type fini. Soit maintenant T l'anneau absolument plat universel de J. P. Olivier, associé à A, cf. [20]. Il existe un épimorphisme $A \to T$ de la catégorie des anneaux, spectralement bijectif. Pour démontrer le lemme, il suffit donc de montrer que le morphisme $T \to T \otimes_A B$ est fini. Soit T' l'anneau $T \otimes_A B$, le morphisme $T \to T'$ se factorise en $T \to C \to T'$, où le morphisme $T \to C$ est fini et le morphisme $C \to T'$ est un épimorphisme plat de présentation finie, en vertu du théorème principal de O. Zariski. L'anneau T a tous ses idéaux premiers maximaux, le morphisme $T \to C$ est entier, il en est de même pour l'anneau C. On voit donc que l'anneau C_{red} est absolument plat. Il résulte de [20, Proposition 2] que le morphisme $C \to T'$ est surjectif: un épimorphisme plat de source un anneau A, tel que A_{red} soit absolument plat, est surjectif. Par suite le morphisme $T \to T'$ est fini.

PROPOSITION 4.7. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme d'anneaux quasi-fini et projectif, si l'anneau A est réduit le morphisme f est fini.*

Preuve. Soit A un anneau réduit, on sait qu'il existe un morphisme d'anneaux $A \to B(A)$, entier, injectif et essentiel, où $B(A)$ est l'enveloppe de Baer de A, c'est à dire un anneau tel que l'annulateur de tout idéal soit engendré par un idempotent. Un tel anneau est réduit et tout anneau localisé en un idéal premier est intègre. Pour toutes ces propriétés, on peut consulter par exemple [23]. Désignons par D l'anneau $B(A)$ et par D' l'anneau $B(A) \otimes_A A'$. Soit P un idéal premier de D, puisque le morphisme f est projectif, il en est de même pour le morphisme $D_P \to D'_P$. L'anneau D_P étant intègre, ce dernier morphisme est sans torsion. Soit K le corps des fractions de D_P, le morphisme $K \to K \otimes_{D_P} D'_P$ est fini, parce que le morphisme f est quasi-fini. Il résulte de [11, Théorème 4] que le morphisme $D_P \to D'_P$ est fini.

Par le Lemme 4.6, il en est de même pour $D \to D'$. Le morphisme $A \to D$, étant universellement submersif, descend les morphismes entiers. Donc le morphisme $A \to A'$ est fini.

PROPOSITION 4.8. *Soit $f: A \to A'$ un morphisme d'anneaux, où A est un anneau Noethérien. Si le morphisme f est quasi-fini et de Mittag-Leffler, plat (en particulier s'il est projectif) il est fini.*

Preuve. Soit B un anneau localisé de A, par rapport à un idéal premier. L'anneau B est Noethérien local, d'idéal maximal M. Munissons le de la topologie M-adique, le morphisme complétion $B \to \hat{B}$, est fidèlement plat, $\hat{B}$ étant le séparé complété de B. Désignons par B' l'anneau $B \otimes_A A'$, le morphisme $\hat{B} \to \hat{B} \otimes_A B'$ est quasi-fini de Mittag-Leffler et plat. En particulier, d'après [22, III.2.6], il est à contenu. Soit $C = \hat{B} \otimes_A B'$, puisque la topologie $\hat{M}$-adique de $\hat{B}$ est séparée on a $\bigcap (\hat{M}^n C) = (\bigcap \hat{M}^n) C = 0$. Il en résulte que le $\hat{B}$-module C est séparé pour la topologie $\hat{M}$-adique et que $C/\hat{M}C$ est de type fini sur $\hat{B}/\hat{M}$. Un théorème classique nous assure que dans ce cas le $\hat{B}$-module C est de type fini, cf. par exemple [14, Proposition 4.1]. Par descente fidèlement plate, à l'aide du morphisme $B \to \hat{B}$, on en déduit que le morphisme $B \to B'$ est fini. On applique alors le Lemme 4.6.

THÉORÈME 4.9. *Soit $e: A_n[S] \to A_n[X]$ un endomorphisme de A-algèbres, le morphisme e est fini dans les cas suivants:*

(i) *L'anneau A est réduit et le morphisme e est projectif.*

(ii) *L'anneau A est Noethérien et le morphisme e est plat de Mittag-Leffler.*

Preuve. On utilise le Lemme 4.6 et la Proposition 4.7.

On donne maintenant des résultats faisant intervenir la dimension des fibres d'un endomorphisme polynômial plat, l'anneau de base étant un corps algébriquement clos.

Soit donc K un corps algébriquement clos et soit e: $K_n[S] \to K_n[X]$ un endomorphisme polynômial plat, défini par $e(S_i) = P_i$. Rappelons que lorsque $A \to B$ est un morphisme d'anneaux, le morphisme fibre en un idéal premier P de l'anneau A est le morphisme $k(P) \to B \otimes_A k(P)$. On appelle alors la dimension du $k(P)$-espace vectoriel $B \otimes_A k(P)$: le rang en P du morphisme f: $A \to B$ et on le note $r_P(f)$. Puisqu'un endomorphisme polynômial plat est quasi-fini, le rang en tout idéal premier d'un tel morphisme est fini. Le Théorème 2.3 de [7] nous montre que si $P \subset Q$ sont des idéaux premiers de $K_n[S]$ et si le morphisme e est plat alors $r_Q(e) \leqslant r_P(e)$. Dans ces conditions, si $M = (S_i - a_i)$ est un idéal maximal de $K_n[S]$, pour tout idéal premier P de $K_n[S]$, contenu dans M, on obtient: $r_M(e) \leqslant r_P(e) \leqslant r_0(e)$. Or le morphisme fibre en M s'identifie au morphisme $K \to K_n[X]/(P_i - a_i)$ et le morphisme fibre générique (en 0) s'identifie au morphisme $K(S_1, ..., S_n) = K_n(S) \to K_n(S)[X_1, ..., X_n]/(P_i - S_i)$, pour ce dernier morphisme il suffit de considérer le morphisme e' associé à e.

On a donc obtenu la proposition suivante:

PROPOSITION 4.10. *Soit K un corps algébriquement clos et soit e: $K_n[S] \to K_n[X]$ un endomorphisme de K-algèbres plat, si P est un idéal premier de $K_n[S]$, contenu dans un idéal maximal $M = (S_1 - a_1, ..., S_n - a_n)$ de $K_n[S]$, alors*

$$\mathrm{Dim}_K(K_n[X]/(P_i - a_i)) \leqslant r_P(e) \leqslant \mathrm{Dim}_{K_n(S)}((K_n(S))_n[X]/(P_i - S_i)).$$

THÉORÈME 4.11. *Soit K un corps algébriquement* clos *et soit e: $K_n[S] \to K_n[X]$ un K-endomorphisme d'algèbres, défini par $e(S_i) = P_i$, plat. Le morphisme e est fini si et seulement si pour tout élément $(a_1, ..., a_n) \in K^n$ on a* $\mathrm{Dim}_K(K_n[X]/(P_i - a_i)) = \mathrm{Dim}_{K_n(S)}((K_n(S))_n[X]/(P_i - S_i))$.

Preuve. Supposons d'abord que le morphisme e soit fini, d'après la Proposition 4.1 le morphisme e' est projectif. Soit $M = (S_i - a_i)$ un idéal maximal de $K_n[S]$, le morphisme $K_n[S]_M \to K_n[S]_M[X_1, ..., X_n]/(P_i - S_i)$ est projectif sur un anneau local donc est libre. Puisque l'on a l'égalité $K_n(S)[X_1, ..., X_n]/(P_i - S_i) = K_n(S) \otimes_{K_n[S]_M} K_n[S]_M[X_1, ..., X_n]/(P_i - S_i)$, on en déduit que le rang en 0 de e est égal à la dimension du module libre défini par $e \otimes K_n[S]_M$. En associant à chaque indéterminée S_i l'élément a_i de K, on définit un morphisme d'anneaux $K_n[S]_M \to K$, ce qui donne à nouveau l'égalité $K \otimes_{K_n[S]_M} K_n[S]_M[X_1, ..., X_n]/(P_i - S_i) = K_n[X]/(P_i - a_i)$, d'ou l'on déduit que $r_M(e)$ est égal à la dimension du module libre défini par $e \otimes K_n[S]_M$, et finalement $r_P(e) = r_0(e)$. Réciproquement supposons que $r_M(e) = r_0(e)$, pour tout idéal maximal M de $K_n[S]$. Proposition 4.9 montre que la fonction $r_P(e)$ est constante sur $\mathrm{Spec}(K_n[S])$. Le Théorème 3.1 démontré par W. V. Vasconcelos dans [29], nous assure que le morphisme e est localement fini sur le spectre de $K_n[S]$. En vertu du Lemme 4.6, le morphisme e est fini.

Remarque. Dans les hypothèses de la Proposition 4.10 le morphisme fibre en zéro de e s'identifie à $K_n(P_i) \to K_n(X)$ et donc le morphisme e est fini si et seulement si pour tout élément $(a_1, ..., a_n)$ de K^n on a $\mathrm{Dim}_K(K_n[X]/(P_i - a_i)) = [K_n(X) : K_n(P_i)]$. En effet, le corps des fractions de $K_n[X]$ est isomorphe à $K_n(P_i)$; l'anneau $F = K_n[X] \otimes_{K_n[P_i]} K_n(P_i)$ est Artinien, il existe une factorisation de morphismes d'anneaux $K_n[X] \to F \to K_n(X)$; on en déduit que le morphisme $F \to K_n(X)$ est un épimorphisme, de source un anneau Artinien, donc est surjectif; il est de plus injectif: en effet le morphisme $K_n[X] \to F$ est un épimorphisme plat injectif, donc est essentiel, en vertu du résultat suivant de [15]: si $A \to B$ est un épimorphisme plat injectif d'anneaux, pour tout idéal I' de B se contractant en I dans A on a $I' = IB$.

Considérons toujours les hypothèses du Théorème 4.11, posons $R = K_n[X]$ et soit I l'idéal de R engendré par les polynômes $P_i - a_i$. L'anneau $A = R/I$ est Artinien et le R-module A est donc de longueur finie; il en résulte que pour tout idéal maximal M de R, contenant I, le morphisme $A \to A_M$ est surjectif; puisque le morphisme e est quasi-fini, on en déduit que le morphisme $K \to A_M$ est fini. Supposons que e soit étale, le morphisme $K \to A$ étant un morphisme fibre de e est aussi étale; par conséquent l'anneau A est réduit et donc l'anneau A_M est un corps extension finie de K; ainsi le morphisme $K \to A_M$ est un isomorphisme. Or l'anneau A étant Artinien, le morphisme canonique $A \to \prod_{M \in \mathrm{Max}(A)} A_M$ est un isomorphisme. Il en résulte que la dimension de A sur K est égale au cardinal de $\mathrm{Max}(A)$. Or ce dernier cardinal est égal au nombre $n(a_1, ..., a_n)$ de solutions dans K^n du système d'équations $P_i(X_1, ..., X_n) = a_i$, pour $i = 1, ..., n$. On voit alors que l'on a obtenu un résultat sans doute bien connu des spécialistes de la conjecture du Jacobien:

COROLLAIRE 4.12. *Soit K un corps algébriquement clos et soit $e: K_n[S] \to K_n[X]$ un K-endomorphisme d'algèbres étale. Le morphisme e est fini si et seulement si pour tout $(a_1, ..., a_n) \in K^n$ on a $n(a_1, ..., a_n) = [K_n(X) : K_n(P_i)]$.*

V. LE CAS DE DEUX VARIABLES

On peut obtenir, dans le cas de deux variables, des caractérisations supplémentaires de la platitude d'un endomorphisme e. Ceci est du au fait que la régularité d'une suite régulière à deux éléments peut s'exprimer en terme de divisibilité. Voici d'abord un lemme de preuve évidente.

LEMME 5.1. *Soit K un corps et soient f et g des polynômes non constants de $K[X, Y]$, alors f et g sont premiers entre eux si et seulement si la suite $\{f, g\}$ est régulière.*

Dans la suite, nous prenons les conventions suivantes: si A est un anneau et si e: $A[S, T] \to A[X, Y]$ est un endomorphisme de A-algèbres, défini par $e(S) = f(X, Y)$, $e(T) = g(X, Y)$, on désigne par e_P l'endomorphisme $e \otimes K(P)$, pour tout idéal premier P de A, $K(P)$ désignant une clôture algébrique du corps résiduel $k(P)$ de A en P. Si h est un élément de $A[X, Y]$, on désigne par h_P le polynôme déduit de h par l'homomorphisme $A \to K(P)$.

PROPOSITION 5.2. *Soit e: $A[S, T] \to A[X, Y]$, un endomorphisme de A-algèbres, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(i) *Le morphisme e est plat.*

(ii) *Pour tout idéal premier P de A, le morphisme e_P est injectif et deux polynômes non constants de $K(P)$ $[S, T]$, premiers entre eux, sont transformés par e_P en deux polynômes premiers entre eux.*

(iii) (a) *On a $c_A(f^*) = A$, $c_A(g^*) = A$*

(b) *Pour tout idéal premier P de A, pour tout élément $(a, b) \in K(P)^2$, on a* p.g.c.d. $(f_P(X, Y) - a, g_P(X, Y) - b) = 1$.

Preuve. En vertu du Théorème 3.15, la platitude de e entraîne l'injectivité de e_P. D'autre part, la caractérisation des endomorphismes plats, à l'aide des suites régulières, et le Lemme 5.1, nous montrent que (i) entraîne (ii). Supposons (ii) réalisé, puisque e_P est injectif les polynômes f_P et g_P ne sont pas des constantes, ce qui donne (iii), (a). On obtient (iii), (b) parce que S-a et T-b sont premiers entre eux. Plaçons nous dans les hypothèses de (iii), en vertu du Lemme 5.1, les polynômes non constants et premiers entre eux f_P-a et g_P-b forment une suite régulière, donc le morphisme e est plat, par la Remarque 3.18.

LEMME 5.3. *Soit K un corps et soient m, n, p, q des entiers > 0. Soient des polynômes $f(X, Y) = \sum_{i=0}^{n} a_i(X)\, Y^i = \sum_{j=0}^{p} b_j(Y)\, X^j$, tel que $a_n(X) \neq 0$ et $b_p(Y) \neq 0$ et $g(X, Y) = \sum_{i=0}^{m} c_i(X)\, Y^i = \sum_{j=0}^{q} d_j(Y)\, X^j$, tel que $c_m(X) \neq 0$ et $d_q(Y) \neq 0$. On désigne par $R_Y(f, g)(X)$, le résultant de f et g considérés comme des éléments de $K[X][Y]$ et par $R_X(f, g)(Y)$ celui de f et g considérés comme des éléments de $K[Y][X]$. On a alors f et g sont des poynômes premiers entre eux si et seulement si $R_Y(f, g)$ et $R_X(f, g)$ sont différents de* 0.

Preuve. Il est bien connu que l'on a le résultat suivant: soit D un anneau factoriel et soient f et g des éléments de $D[U]$, de degrés $\geqslant 1$. Alors

f et g ont un facteur commun non constant si et seulement si $\mathrm{Res}(f, g) = 0$. Supposons donc f et g premiers entre eux, puisque leurs degrés en Y sont $\geqslant 1$,

(par hypothèse on a $n > 0$ et $a_n(X) \neq 0$, ainsi que $m > 0$ et $c_m(X) \neq 0$)

ce qui précède montre que $R_Y(f, g) \neq 0$; de même $R_X(f, g) \neq 0$. Réciproquement, si les deux résultants sont non nuls, alors dans $K[X][Y]$, tout facteur commun ne peut qu'être constant, donc du type $a(X)$. Mais dans $K[Y][X]$ un tel facteur commun ne peut qu'être dans $K[Y]$, c'est à dire que $a(X)$ est un élément de K. Les deux polynômes sont donc premiers entre eux.

Pour plus de commodité dans les preuves qui suivent, nous introduisons l'anneau $F(A)$ du Paragraphe II. Le morphisme $A \to F(A)$ est fidèlement plat et ses corps résiduels sont algébriquement clos. Par conséquent, un endomorphisme e est plat si et seulement si $e \otimes F(A)$ est plat. De plus si $B \to B'$ est un morphisme d'anneaux fidèlement plat, pour tout polynôme f sur B on a: $c_{B'}(f) = c_B(f)B'$ et donc $c_{B'}(f) \cap B = c_B(f)$.

Proposition 5.4. *Soit* $e: A[S, T] \to A[X, Y]$ *un endomorphisme de* A*-algèbres défini par* $e(S) = f(X, Y)$ *et* $e(T) = g(X, Y)$. *Soit la condition* (C) *suivante: on suppose que* $f(X, Y) - f(X, 0)$ (*resp.* $f(X, Y) - f(0, Y)$) *a au moins un coefficient dans* $A[X][Y]$ (*resp.* $A[Y][X]$) *de contenu égal à* A *et de même pour* g. *On désigne par* $R_Y(X, S, T)$ *le résultant de* $f(X, Y) - S$ *et de* $g(X, Y) - T$ *dans* $A[S, T, X][Y]$ *et par* $R_X(Y, S, T)$ *le résultant de* $f(X, Y) - S$ *et* $g(X, Y) - T$ *dans* $A[S, T, Y][X]$. *Alors le morphisme* e *est plat si et seulement si on a les deux conditions*: $c_{A[S,T]}(R_Y(X, S, T)) = A[S, T]$ *et* $c_{A[S,T]}(R_X(Y, S, T)) = A[S, T]$.

Preuve. La remarque précédente nous montre que l'on peut remplacer A par $F(A)$, puisque les résultants sont les mêmes que A ou $F(A)$ soit l'anneau de base. Nous pouvons donc supposer les corps résiduels de A algébriquement clos. La condition (C) implique que $c(f^*) = A$ et $c(g^*) = A$ et que pour tout idéal premier P de A les polynômes f_P et g_P sont de degrés en X et Y supérieurs ou égaux à 1. On déduit de la Proposition 5.2 et du Lemme 5.3 que e est un morphisme plat si et seulement si pour tout idéal premier P de A on a $R_Y(f_P - a, g_P - b) \neq 0$ et $R_X(f_P - a, g_P - b) \neq 0$, pour tout couple $(a, b) \in k(P)^2$. Soit (a, b) un élément de $k(P)^2$ fixé. On définit un morphisme d'anneaux $h_{a,b}: A[S, T][X] \to k(P)[X]$ par $h_{a,b}(X) = X$ et $h_{a,b}(U(S, T)) = U_P(a, b)$. Il résulte de [4, AIV75, Cor. 2], que l'on a $h_{a,b}(R_Y(X, S, T)) = pR_Y(f_P - a, g_P - b)$, où p est un produit de puissances des coefficients dominants en Y de f_P et g_P: par l'effet de $h_{a,b}$ l'ordre du résultant ne peut que s'abaisser. Compte tenu des hypothèses p n'est pas nul. On en déduit que le morphisme e est plat si et seulement si pour tout idéal premier P de A et tout élément (a, b) de $k(P)^2$, on a $(R_Y)_P(X, a, b) \neq 0$ et $(R_X)_P(Y, a, b) \neq 0$.

Soit $R_Y(X, S, T) = \sum a_i(S, T) X^i$ et $R_X(Y, S, T) = \sum b_j(S, T) Y^j$ et soient I et J les idéaux de $A[S, T]$ engendrés respectivement par les polynômes a_i et b_j.

Ce qui précède montre que la platitude de e équivaut à: pour tout idéal premier P de A et pour tout couple $(a, b) \in k(P)^2$, il existe des indices i et j tels que $(a_i)_P(a, b) \neq 0$ et $(b_j)_P(a, b) \neq 0$. D'après le théorème des zéros d'Hilbert, ces dernières conditions sont équivalentes à: pour tout idéal premier P de A on a $A_P[S, T] = I_P + PA_P[S, T]$ et $A_P[S, T] = J_P + PA_P[S, T]$. La fin de la preuve s'obtient alors en utilisant le lemme suivant.

LEMME 5.5. *Soit $f\colon A \to B$ un morphisme d'anneaux et soit I un idéal de B tel que pour tout idéal premier P de A on ait $B_P = I_P + PB_P$, alors $I = B$.*

Preuve. Soit M un idéal maximal de B se contractant en P dans A. On déduit de l'hypothèse que $B_M = I_M + MB_M$. Puisque B_M est un B_M-module de type fini le lemme de Nakayama montre que $B_M = I_M$, et donc que $B = I$.

Nous allons maintenant donner un critère de platitude, faisant intervenir la notion d'idéal résultant de deux polynômes à deux variables. Soit A un anneau et soit l'anneau de polynômes $B = A[S, T]$. Pour un entier $r > 0$, on considère le B-module libre de rang $r(r+1)/2$ suivant: S_r est l'ensemble des éléments de $B[X, Y]$ de degrés $< r$. Soient $f(X, Y) - S$ et $g(X, Y) - T$ des éléments de $B[X, Y]$, tels que $d^0 f = p > 0$ et $d^0 g = q > 0$. Soit l'application B-linéaire $t\colon S_q \times S_p \to S_{p+q}$ définie par $t(U, V) = U(f - S) + V(g - T)$. Si $h\colon B \to B'$ est un morphisme d'anneaux, on obtient dans le changement de base défini par h une application B'-linéaire $t'\colon S'_q \times S'_p \to S'_{p+q}$ définie par $t'(U', V') = U'(f^h(X, Y) - h(S)) + V'(g^h(X, Y) - h(T))$. Si la matrice de t dans les bases canoniques constituées des éléments $X^a Y^b$ est $(a_{i,j})$, celle de t' est $(h(a_{i,j}))$. Le morphisme fidèlement plat $A \to F(A)$ donne un morphisme $h\colon B = A[S, T] \to F(A)[S, T] = B'$ fidèlement plat. Dans ce changement de base les matrices de t et t' sont les mêmes. De plus le morphisme t est universellement B-injectif si et seulement si le morphisme t' est universellement B'-injectif, en effet le morphisme $B \to B'$ est fidèlement plat. Nous avons déja vu qu'un endomorphisme e est plat si et seulement si $e \otimes F(A)$ est plat.

DÉFINITION 5.6. Soient $f(X, Y)$ et $g(X, Y)$ des éléments de $A[X, Y]$, de degrés > 0. On appelle idéal résultant de $f(X, Y) - S$ et $g(X, Y) - T$ l'idéal de $A[S, T]$ engendré par les mineurs d'ordre $\mathrm{Dim}(S_p) + \mathrm{Dim}(S_q)$ de la matrice de l'application B-linéaire t dans les bases canoniques formées par les éléments $X^a Y^b$. Un de ces mineurs sera désigné par $M_{i,j}(S, T)$ et l'idéal résultant par $\operatorname{Ires}(f(X, Y) - S, g(X, Y) - T)$.

Dans le cas où A est un anneau intègre on sait que l'application t est injective si et seulement si un des mineurs $M_{i,j}(S, T)$ est non nul, compte tenu du fait que $\operatorname{Dim}(S_p) + \operatorname{Dim}(S_q) \leqslant \operatorname{Dim}(S_{p+q})$.

En vertu de la fidèle platitude de $A \to F(A)$ l'idéal résultant est égal à B si et seulement si il est égal à B'.

THÉORÈME 5.7. *Soit e: $A[S, T] \to A[X, Y]$ un endomorphisme de A-algèbres, défini par $e(S) = f(X, Y)$ et $e(T) = g(X, Y)$. On suppose que les composants homogènes de plus haut degré de f et g sont de contenus égaux à A et $d^0 f$, $d^0 g > 0$.*

Les conditions suivantes sont équivalentes:

(i) *Le morphisme e est plat.*

(ii) *Le morphisme t est $A[S, T]$-universellement injectif.*

(iii) *Pour tout couple (U, V) d'éléments de $S_q \times S_p$ on a*: $c_{A[S,T]}(U(f(X, Y) - S) + V(g(X, Y) - T)) = c_{A[S,T]}(U) + c_{A[S,T]}(V)$.

(iv) *L'idéal résultant* $\operatorname{Ires}(f(X, Y) - S, g(X, Y) - T) = A[S, T]$.

Preuve. Les conditions (ii) et (iii) sont équivalentes: en effet, d'après la Proposition 3.6, le morphisme t est universellement B-injectif si et seulement si pour tout couple $(U, V) \in S_q \times S_p$ on a $c(t(U, V)) = c(U, V)$, puisque les modules $S_p \times S_q$ et S_{p+q} sont à contenus; d'autre part, si M et N sont des modules à contenus, le contenu sur le module produit $M \times N$ est donné par $c(m, n) = c(m) + c(n)$, cf. [19, Cor. 1.4]. En ce qui concerne les conditions (i) et (ii) on peut supposer les corps résiduels de A algébriquement clos, en remplaçant A par $F(A)$. Il résulte d'un paragraphe précédent que le morphisme e est plat si et seulement si pour tout idéal premier P de A la suite $\{f_P(X, Y) - a, g_P(X, Y) - b\}$ est régulière, pour tout couple $(a, b) \in k(P)^2$. Désignons par $t_{P,a,b}$ le morphisme déduit de t par le changement de base $h_{a,b}$: $A[S, T] \to k(P)$, défini par $h_{a,b}(U(S, T)) = U_P(a, b)$. Compte tenu des hypothèses on a $d^0 f = d^0 f_P$ et $d^0 g = d^0 g_P$. Il est alors facile de voir que la suite $\{f_P(X, Y) - a, g_P(X, Y) - b\}$ est régulière si et seulement si le morphisme $t_{P,a,b}$ est injectif, ou encore si et seulement si il existe un mineur $M_{i,j}(a, b) \neq 0$. Le théorème des zéros de Hilbert donne alors: e est plat équivaut à $\operatorname{Ires}(f_P - S, g_P - T) = k(P)[S, T]$, pour tout P. Une application du Lemme 5.5 montre finalement que la platitude de e équivaut à $\operatorname{Ires}(f(X, Y) - S, g(X, Y) - T) = A[S, T]$. Considérons maintenant, pour tout idéal premier Q de $A[S, T]$, le morphisme $A[S, T] \to k(Q)$, désigné par h_Q. Compte tenu des hypothèses, nous savons que t est universellement B-injectif si et seulement si pour tout idéal premier Q de

$A[S, T]$, le morphisme $t \otimes k(Q)$ est injectif. Cette dernière condition équivaut à: pour tout idéal premier Q on a $\operatorname{Ires}(f^{h_Q}(X, Y) - h_Q(S), g^{h_Q}(X, Y) - h_Q(T)) \neq 0$, donc à $\operatorname{Ires}(f(X, Y) - S, g(X, Y) - T) = A[S, T]$.

Bibliographie

1. H. Bass, Big projective modules are free, *Illinois J. Math.* **7** (1963), 24–31.
2. N. Bourbaki, "Algèbre Commutative," Chaps. 8 et 9, Masson, Paris, 1983.
3. N. Bourbaki, "Algèbre Commutative," Chaps. 1 et 2, Hermann, Paris, 1961.
4. N. Bourbaki, "Algèbre," Chaps. 4–7, Masson, Paris, 1981.
5. H. Cartan and S. Eilenberg, "Homological Algebra," Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1956.
6. P. J. Cahen and J. L. Chabert, Coefficients et valeurs d'un polynôme, *Bull. Sci. Math.* (2) **95** (1971), 295–304.
7. S. H. Cox and D. E. Rush, Finiteness in flat modules and algebras, *J. Algebra* **32** (1974), 44–50.
8. J. Dieudonné and A. Grothendieck, "Eléments de Géométrie Algébrique," Presses Universitaires de France (Institut des Hautes Etudes Scientifiques); *Publ. Math.* No. 32, No. 28 (1960, 1967).
9. J. Dieudonné and A. Grothendieck, Eléments de Géométrie Algébrique I, *in* "Die Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften," Vol. 166, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1971.
10. D. Ferrand, Trivialisation des modules projectifs, La méthode de Kronecker, *J. Pure Appl. Algebra* **24** (1982), 261–264.
11. C. U. Jensen, A remark on flat and projective modules, *Canad. J. Math.* **18** (1966), 943–949.
12. I. Kaplansky, *R*-Sequences and homological dimension, *Nagoya Math. J.* **20** (1962), 175–199.
13. I. Kaplansky, "Commutative Rings," Allyn and Bacon, Boston, 1970.
14. J. P. Lafon, "Algèbre Commutative, Language Géométrique et Algébrique," Hermann, Paris, 1977.
15. D. Lazard, Autour de la platitude, *Bull. Soc. Math. France* **97** (1969), 81–128.
16. H. Matsumura, "Commutative Algebra," Benjamin, New York, 1970.
17. A. M. Nicolas, Extensions factorielles et modules factorables, *Bull. Sci. Math.* (2) **98** (1974), 117–143.
18. J. Ohm and D. E. Rush, The finiteness of I when $R[X]/I$ is flat, *Trans. Amer. Math. Soc.* **171** (1972), 377–408.
19. J. Ohm and D. E. Rush, Content modules and algebras, *Math. Scand.* **31** (1972), 49–68.
20. J. P. Olivier, Anneaux absolument plats universels et épimorphismes à buts réduits, *in* "Séminaire Samuel. P.6," Secrétariat Mathématique, Paris, 1967–1968.
21. G. Picavet, Submersion et descente, *J. Algebra* **103** (1986), 527–591.
22. G. Picavet, Propriétés et applications de la notion de contenu, *Comm. Algebra* **13** (1985), 2231–2265.
23. G. Picavet, Ultrafiltres sur un espace spectral, anneaux de Baer, anneaux à spectre minimal compact, *Math. Scand.* **46** (1980), 23–53.
24. M. Raynaud, Anneaux locaux Henséliens, *in* "Lecture Notes in Math.," Vol. 169, Springer-Verlag, Berlin, 1970.
25. M. Raynaud and L. Gruson, Critères de platitude et projectivité, *Invent. Math.* **13** (1971), 1–89.

26. J. D. Sally and W. V. Vasconcelos, Flat ideals, *Comm. Algebra* **3** (1971), 531–543.
27. H. Seydi, Sur deux théorèmes d'Algèbre Commutative, *C.R. Acad. Sci. Paris Ser. A* **271** (1970), 1105–1108.
28. H. Uda, Incomparability in rings extensions, *Hiroshima Math. J.* **9** (1979), 451–463.
29. W. V. Vasconcelos, Flat modules over commutative Noetherian rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **152** (1970), 137–143.
30. S. S. S. Wang, A jacobian criterion for separability, *J. Algebra* **65** (1980), 453–494.
31. O. Zariski and P. Samuel, "Commutative Algebra," Van Nostrand, Princeton/Toronto/London/New York, 1960.
32. J. S. Milne, "Etale Cohomology," Princeton Univ. Press, Princeton, NJ, 1980.