JOURNAL OF ALGEBRA 88, 292–316 (1984)

Kohärenz in Kategorien mit Gruppenstruktur, III

K.-H. ULBRICH

Mathematisches Seminar der Universität Hamburg, Bundesstraße 55, D-2 Hamburg 13, West Germany

Communicated by Saunders MacLane

Received December 8, 1982

Diese Arbeit gibt eine Verallgemeinerung der Kohärenzsätze aus [6] und [7]. Wir erläutern dies zunächst an dem folgenden Beispiel. Es sei R ein kommutativer Ring und $\mathscr{M}_R$ die Kategorie der kommutativen R-Algebren; zu jedem $X \in \mathscr{M}_R$ hat man die Kategorie $\mathscr{Pic}(X)$ der projektiven X-Moduln vom konstanten Rang 1 und zu jedem Morphismus $h: X \to Y$ aus $\mathscr{M}_R$ den Funktor

$$h^*: \mathscr{Pic}(X) \to \mathscr{Pic}(Y), \qquad h^*(P) = P \otimes_X Y.$$

Damit ist allerdings kein Funktor $\mathscr{M}_R \to Cat$ gegeben, denn für eine Komposition $X \to^h Y \to^g Z$ in $\mathscr{M}_R$ gilt nicht $g^* \circ h^* = (g \circ h)^*$ und außerdem ist id_X^* nicht der Identitätsfunktor. Es existieren jedoch natürliche Transformationen

$$\eta_{g,h}: g^* \circ h^* \to (g \circ h)^* \qquad \text{und} \qquad \eta_X: \mathrm{id}_X^* \to \mathrm{Id},$$

definiert durch die kanonischen Isomorphismen $(P \otimes_X Y) \otimes_Y Z \to P \otimes_X Z$ und $P \otimes_X X \to P$, $P \in \mathscr{Pic}(X)$. Diese Daten insgesamt bilden einen Pseudofunktor

$$\mathscr{Pic}: \mathscr{M}_R \to Cat$$

im Sinn von [2], exposé VI, später auch *lax functor* genannt, [4] und [3, p. 83]. Bei diesem Beispiel kommt nun hinzu, daß die Kategorien $\mathscr{Pic}(X)$ eine kohärente abelsche Gruppenstruktur [6] tragen, daß die Funktoren h^*: $\mathscr{Pic}(X) \to \mathscr{Pic}(Y)$ Homomorphismen im Sinn von [7] sind und daß die natürlichen Transformationen $\eta_{g,h}$ und η_X kohärent sind. Wir betrachten hier nun allgemein (kontravariante) Pseudofunktoren

$$\mathfrak{F}: \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to Cat$$

dieser Art über einer beliebigen Kategorie $\mathbf{T}$ und verallgemeinern die

0021-8693/84 $3.00

Kohärenzsätze aus [6], indem wir (a) die Strukturmorphismen $\eta_{g,h}$ und η_X des Pseudofunktors $\mathfrak{F}$ und (b) die Homomorphismen h^* einbeziehen. Danach untersuchen wir die Kohärenz von Homomorphismen zwischen solchen Pseudofunktoren sowie die Kohärenz von natürlichen Transformationen zwischen den Homomorphismen (die Pseudofunktoren bilden eine 2-Kategorie).

Ist S ein Funktor von $\mathbf{T}^{\mathrm{op}}$ in die Kategorie der Gruppen, so läßt sich der Begriff einer S-Modulstruktur auf einem Pseudofunktor $\mathfrak{A}\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathit{Cat}$ erklären; wir beweisen auch hierfür einen Kohärenzsatz als Verallgemeinerung von [7, Satz 4.1]. In [8] werden für solche S-Moduln $\mathfrak{A}$ Kohomologiegruppen $H^n(S, \mathfrak{A})$, $n \geqslant 0$, definiert und gezeigt, daß sich $H^3(S, \mathfrak{A})$ als eine Gruppe gewisser Erweiterungen von S mit $\mathfrak{A}$ beschreiben läßt; hierzu beweisen wir im folgenden als ein wesentliches Hilfsmittel einen Kohärenzsatz für 3-Kozykeln von S in $\mathfrak{A}$. Gewissermaßen als Vorbereitung auf diesen Satz untersuchen wir im ersten Abschnitt dieser Arbeit zunächst die Kohärenz eines 3-Kozykels einer Gruppe G in einer Kategorie $\mathscr{A}$ mit G-Modulstruktur; auch dies wird in [8] angewandt.

Im letzten Abschnitt der Arbeit untersuchen wir die Kohärenz von Morphismen zwischen Komplexen von Kategorien mit Gruppenstruktur; dies ist erforderlich in [8] für die Konstruktion eines Homomorphismus zwischen den abgeleiteten Kohomologiesequenzen.

Bezeichnungen. Wir nehmen hier einen Wechsel der in [6] und [7] benutzten Bezeichnungen vor: statt der Symbole $\cdot$ und $^{-1}$ für eine Gruppenstruktur auf einer Kategorie $\mathscr{C}$ benutzen wir die Symbole $\wedge$ und ^{0}; das neutrale Objekt bezeichnen wir mit $I_{\mathscr{C}}$; das Inverse (bzgl. der Komposition) eines Morphismus α (jeder $\mathscr{C}$-Morphismus ist invertierbar) wird dann wie üblich mit α^{-1} bezeichnet, eine Komposition $P \to^{\alpha} Q \to^{\beta} N$ mit $\beta\alpha = \beta \circ \alpha$. Mit a, c, e, f, i, j sind stets die Strukturmorphismen wie in [6] und [7] gemeint. Für $\alpha \in \mathrm{Mor}(\mathscr{C})$ ist die Klasse $\mathbf{E}(\alpha)$ der Expansionen von α rekursiv definiert durch: (a) α, α^0, $(\alpha^0)^0$,... ist in $\mathbf{E}(\alpha)$, (b) für $\beta \in \mathbf{E}(\alpha)$ und $P \in \mathscr{C}$ ist $\beta \wedge \mathrm{id}_P$ und $\mathrm{id}_P \wedge \beta$ in $\mathbf{E}(\alpha)$; $P \in \mathscr{C}$ bedeutet $P \in \mathrm{Ob}(\mathscr{C})$.

Eine Kategorie mit kohärenter (abelscher) Gruppenstruktur nennen wir in Analogie zu [1, p. 521], eine (symmetrische) Picard-Kategorie. Die Strukturmorphismen eines Homomorphismus $\Gamma\colon \mathscr{C} \to \mathscr{D}$ von Picard-Kategorien bezeichnen wir wie in [7] stets mit t, λ, κ oder genauer mit $t(\Gamma)$, $\lambda(\Gamma)$, $\kappa(\Gamma)$. Eine Kategorie heißt atomar, wenn zu je zwei Objekten u, v höchstens ein Morphismus $u \to v$ existiert.

1.

Es sei G eine Gruppe und $\mathscr{A}$ eine Kategorie mit einer kohärenten G-Linksmodulstruktur wie in [7] (dort als G^{op}-Rechtsmodulstruktur). Ferner sei $\mathbf{P} = (P_{\sigma,\tau}; \phi_{\sigma,\tau,\rho})$ ein Pseudo-Kozykel von G in $\mathscr{A}$ vom Grad 3; $\mathbf{P}$ besteht aus einer Familie von $\mathscr{A}$-Objekten $P_{\sigma,\tau}$, $\sigma, \tau \in G$, mit $\mathscr{A}$-Morphismen

$$\phi_{\sigma,\tau,\rho}\colon P^{\sigma}_{\tau,\rho} \wedge P_{\sigma,\tau\rho} \to P_{\sigma,\tau} \wedge P_{\sigma\tau,\rho}, \qquad \sigma, \tau, \rho \in G. \tag{1}$$

Wir untersuchen im folgenden die Kohärenz der Morphismen $\phi_{\sigma,\tau,\rho}$ vereinigt mit den Strukturmorphismen aus $\mathscr{A}$. Satz 1.1 und dessen Verallgemeinerung Satz 4.2 werden in [8] jeweils für die Interpretation der dritten Kohomologiegruppe benutzt.

Wir wollen die Objekte aus $\mathscr{A}$ durch Mengen $\mathbf{V}(\mathscr{A})$ gewisser Symbole repräsentieren; diese Symbole sollen die betrachtete Struktur widerspiegeln, und zwar gewissermaßen frei, das heißt ohne irgendwelche Relationen, die ja in $\mathrm{Ob}(\mathscr{A})$ eventuell gegeben sind. Wir wählen zunächst eine injektive Abbildung

$$\mathbf{p}\colon G \times G \to \mathbf{N}, \qquad (\sigma, \tau) \mapsto \mathbf{p}_{\sigma,\tau},$$

von $G \times G$ in eine Menge $\mathbf{N}$ mit $\mathbf{p}_{\sigma,\tau} \neq \mathbf{s}$ für alle $\sigma, \tau \in G$, $\mathbf{s}$ ein im folgenden fest gewähltes Element aus $\mathbf{N}$. Ferner sei nun $\varepsilon\colon \mathbf{N} \to \mathrm{Ob}(\mathscr{A})$ eine Abbildung mit

$$\varepsilon(\mathbf{s}) = I_{\mathscr{A}} \qquad \text{und} \qquad \varepsilon(\mathbf{p}_{\sigma,\tau}) = P_{\sigma,\tau}, \qquad \sigma, \tau \in G.$$

Wir definieren wie in [7, §4], eine Wortmenge $\mathbf{V}(\mathscr{A})$ über dem Alphabet $\mathbf{N} \perp\!\!\!\perp \{(,), \wedge, {}^0\} \perp\!\!\!\perp G$ rekursiv durch: $\mathbf{N} \subset \mathbf{V}(\mathscr{A})$, für $u, v \in \mathbf{V}(\mathscr{A})$ und $\sigma \in G$ sind $(u \wedge v)$, $(v)^0$ and $(v)^{\sigma}$ in $\mathbf{V}(\mathscr{A})$. Die Abbildung $\varepsilon\colon \mathbf{N} \to \mathrm{Ob}(\mathscr{A})$ können wir fortsetzen zu

$$\varepsilon\colon \mathbf{V}(\mathscr{A}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{A}) \tag{2}$$

durch $\varepsilon((u \wedge v)) = \varepsilon(u) \wedge \varepsilon(v)$, $\varepsilon((v)^0) = \varepsilon(v)^0$ und $\varepsilon((v)^{\sigma}) = \varepsilon(v)^{\sigma}$, $\forall u, v \in \mathbf{V}(\mathscr{A})$, $\sigma \in G$. Hiermit bilden wir die Kategorie $\mathbf{V}(\mathscr{A})^{\varepsilon}$ wie in [7]; es ist also

$$\mathrm{Ob}(\mathbf{V}(\mathscr{A})^{\varepsilon}) = \mathbf{V}(\mathscr{A}), \qquad \mathbf{V}(\mathscr{A})^{\varepsilon}(u, v) = \mathscr{A}(\varepsilon(u), \varepsilon(v)), \qquad u, v \in \mathbf{V}(\mathscr{A})$$

mit der von $\mathscr{A}$ induzierten Komposition, so daß man einen volltreuen Funktor

$$\varepsilon\colon \mathbf{V}(\mathscr{A})^{\varepsilon} \to \mathscr{A} \tag{3}$$

hat, der auf den Objekten mit der Abbildung (2) übereinstimmt. Die G-Modulstruktur auf $\mathscr{A}$ induziert eine G-Modulstruktur auf $\mathbf{V}(\mathscr{A})^{\varepsilon}$, und in $\mathbf{V}(\mathscr{A})^{\varepsilon}$ hat man die Morphismen

$$\phi_{\sigma,\tau,\rho}\colon \mathbf{p}^{\sigma}_{\tau,\rho} \wedge \mathbf{p}_{\sigma,\tau\rho} \to \mathbf{p}_{\sigma,\tau} \wedge \mathbf{p}_{\sigma\tau,\rho}, \qquad \sigma, \tau, \rho \in G. \tag{4}$$

welche durch den Funktor (3) auf die $\mathscr{A}$-Morphismen (1) abgebildet werden. Die Unterkategorie $\mathscr{K}(\mathbf{P})$ von $\mathbf{V}(\mathscr{A})^{\varepsilon}$ (mit $\mathrm{Ob}(\mathscr{K}(\mathbf{P})) = \mathbf{V}(\mathscr{A})$) sei rekursiv definiert durch:

(a) die Komponenten von a, c, e, i sind in $\mathscr{K}(\mathbf{P})$,

(b) die Morphismen $t\colon (u \wedge v)^{\sigma} \to u^{\sigma} \wedge v^{\sigma}$, $\xi\colon (v^{\tau})^{\sigma} \to v^{\sigma\tau}$, $\zeta\colon v^{1} \to v$ mit $u, v \in \mathbf{V}(\mathscr{A})$, $\sigma, \tau \in G$, sind in $\mathscr{K}(\mathbf{P})$,

(c) die Morphismen $\phi_{\sigma,\tau,\rho}$ sind in $\mathscr{K}(\mathbf{P})$,

(d) für $\alpha, \beta \in \mathrm{Mor}(\mathscr{K}(\mathbf{P}))$, $\sigma \in G$ sind $\alpha \wedge \beta$, α^{0}, α^{σ}, $\beta \circ \alpha$ (wenn definiert), α^{-1} in $\mathscr{K}(\mathbf{P})$.

Der folgende Satz besagt, daß die Morphismen $\phi_{\sigma,\tau,\rho}$ genau dann kohärent sind, wenn $\mathbf{P}$ ein (echter) 3-Kozykel im Sinn der Kohomologie von [8] ist; die Kommutativität des folgenden Diagramms bedeutet gewissermaßen $\delta(\phi) = 1$.

SATZ 1.1. *Die Kategorie* $\mathscr{K}(\mathbf{P})$ *ist atomar, wenn in* $\mathscr{A}$ *für alle* σ, τ, ρ, $v \in G$ *das Diagramm* (D.1) *kommutativ ist* (*in dem wir* a, c, ξ *und* $t(\sigma)$ *gleich id gesetzt haben*).

$$
\begin{tikzcd}
P^{\sigma\tau}_{\rho,v}P^{\sigma}_{\tau,\rho v}P_{\sigma,\tau\rho v} \arrow[r, "1\wedge\phi_{\sigma,\tau,\rho v}"] \arrow[d, "\phi^{\sigma}_{\tau,\rho,v}\wedge 1"'] & P^{\sigma\tau}_{\rho,v}P_{\sigma,\tau}P_{\sigma\tau,\rho v} \arrow[r, "1\wedge\phi_{\sigma\tau,\rho,v}"] & P_{\sigma,\tau}P_{\sigma\tau,\rho}P_{\sigma\tau\rho,v} \\
P^{\sigma}_{\tau,\rho}P^{\sigma}_{\tau\rho,v}P_{\sigma,\tau\rho v} \arrow[rr, "1\wedge\phi_{\sigma,\tau\rho,v}"] & & P^{\sigma}_{\tau,\rho}P_{\sigma,\tau\rho}P_{\sigma\tau\rho,v} \arrow[u, "\phi_{\sigma,\tau,\rho}\wedge 1"']
\end{tikzcd}
$$

(D.1)

Beweis. Wir vereinfachen zunächst die Struktur der zu betrachtenden Kategorie, indem wir zu einer Faktorkategorie übergehen, in der das Produkt strikt assoziativ, kommutativ und unitär ist. Die Unterkategorie $\mathscr{K}(\mathbf{P})'$ von $\mathscr{K}(\mathbf{P})$ sei rekursiv definiert durch: (a) die Komponenten von a, c, e sind in $\mathscr{K}(\mathbf{P})'$, (b) Abgeschlossenheit wie für $\mathscr{K}(\mathbf{P})$ under (d). Offenbar ist $\mathscr{K}(\mathbf{P})'$ atomar, weil $\mathscr{A}$ kohärent ist, so daß wir die zu $\mathscr{K}(\mathbf{P})$ äquivalente Kategorie

$$\bar{\mathscr{K}}(\mathbf{P}) = \mathscr{K}(\mathbf{P})/\mathscr{K}(\mathbf{P})'$$

bilden können wie in [7]. $\mathscr{K}(\mathbf{P})$ induziert eine G-Modulstruktur auf $\bar{\mathscr{K}}(\mathbf{P})$, und das Produkt $\wedge$ ist nun strikt assoziativ, kommutativ und unitär. Die Restklassen von $\mathbf{p}_{\sigma,\tau}$ und $\mathbf{s}$ in $\mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\mathbf{P}))$ bezeichnen wir weiterhin mit $\mathbf{p}_{\sigma,\tau}$, bzw. $\mathbf{s}$, und die Restklassen der Morphismen (4) mit $\phi_{\sigma,\tau,\rho}$. Wir werden diese jedoch nicht direkt benutzen, sondern stattdessen die $\bar{\mathscr{K}}(\mathbf{P})$-Morphismen

$$\tilde{\phi}_{\sigma,\tau,\rho}\colon \mathbf{p}^{\sigma}_{\tau,\rho} \to \mathbf{p}_{\sigma,\tau}\mathbf{p}_{\sigma\tau,\rho}\mathbf{p}^{0}_{\sigma,\tau\rho}$$

definiert als $\phi_{\sigma,\tau,\rho}$ "multipliziert" mit $\mathbf{p}^0_{\sigma,\tau\rho}$. Die $\mathscr{H}(\mathbf{P})$-Morphismen

$$\gamma_{\sigma,\tau}\colon \mathbf{p}^{\sigma}_{\tau,1} \to \mathbf{p}_{\sigma\tau,1}, \qquad \beta_{\rho}\colon \mathbf{p}_{1,\rho} \to \mathbf{p}_{1,1}, \qquad \sigma, \tau, \rho \in G,$$

seien definiert durch die kommutativen Diagramme (5a) and (5b). Die

$$\begin{tikzcd} \mathbf{p}^{\sigma}_{\tau,1} \arrow[r, "\gamma"] \arrow[d, "\tilde{\phi}"'] & \mathbf{p}_{\sigma\tau,1} \\ \mathbf{p}_{\sigma,\tau}\mathbf{p}_{\sigma\tau,1}\mathbf{p}^0_{\sigma,\tau} \arrow[ur, "i\wedge 1"'] & \end{tikzcd} \quad (5a) \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{p}^1_{1,\rho}\mathbf{p}_{1,\rho} \arrow[r, "\phi"] \arrow[d, "\zeta\wedge 1"'] & \mathbf{p}_{1,1}\mathbf{p}_{1,\rho} \\ \mathbf{p}_{1,\rho}\mathbf{p}_{1,\rho} \arrow[ur, "\beta\wedge 1"'] & \end{tikzcd} \quad (5b)$$

Teilmenge $\mathscr{E}$ von $\mathrm{Mor}(\mathscr{H}(\mathbf{P}))$ bestehe aus allen Identitäten, den $\tilde{\phi}_{\sigma,\tau,\rho}$, $\gamma_{\sigma,\tau}$, β_ρ und den Morphismen (cf. [7])

$$i_v\colon v \wedge v^0 \to \mathbf{s}, \qquad \rho_v\colon (v^0)^0 \to v, \qquad k_{u,v}\colon (u \wedge v)^0 \to v^0 \wedge u^0,$$
$$t_{u,v}\colon (u \wedge v)^{\sigma} \to u^{\sigma} \wedge v^{\sigma}, \qquad \lambda\colon \mathbf{s}^{\sigma} \to \mathbf{s}, \qquad \kappa_v\colon (v^0)^{\sigma} \to (v^{\sigma})^0,$$
$$\xi_v\colon (v^{\tau})^{\sigma} \to v^{\sigma\tau}, \qquad \zeta_v\colon v^1 \to v \qquad \text{mit} \quad u, v \in \mathrm{Ob}(\mathscr{H}(\mathbf{P})),\ \sigma, \tau \in G,$$

wobei v bei ζ_v die Restklasse eines Elements aus $\mathbf{N}$ sei, und bei $k_{u,v}$ und $t_{u,v}$ stets $u, v \neq \mathbf{s}$ sei. Wir betrachten nun wie in [7] die Expansionen der Morphismen $\alpha \in \mathscr{E} \cup \mathscr{E}^{-1}$; es sei

$$\mathbf{E} = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{E}} \mathbf{E}(\alpha), \qquad \mathbf{E}^{-1} = \bigcup_{\alpha \in \mathscr{E}} \mathbf{E}(\alpha^{-1}). \tag{6}$$

Dann ist jeder $\mathscr{H}(\mathbf{P})$-Morphismus eine Komposition von Elementen aus $\mathbf{E} \cup \mathbf{E}^{-1}$. Dies folgt analog wie in [7, §4]; man hat sich hier nur davon zu überzeugen, daß speziell

$$\tilde{\phi}^v_{\sigma,\tau,\rho}, \qquad \gamma^v_{\sigma,\tau}, \qquad \beta^v_\rho, \qquad \sigma, \tau, \rho \in G,$$

Kompositionen von Elementen aus $\mathbf{E} \cup \mathbf{E}^{-1}$ sind. Für $\tilde{\phi}^v_{\sigma,\tau,\rho}$ besagt dies die Kommutativität von (D.1), und für $\gamma^v_{\sigma,\tau}$ und β^v_ρ zeigen dies die Diagramme (7a) und (7b), deren Kommutativität leicht aus der von (D.1) folgt. Wir

$$\begin{tikzcd} (\mathbf{p}^{\sigma}_{\tau,1})^v \arrow[r, "\gamma^v"] \arrow[d, "\xi"'] & \mathbf{p}^v_{\sigma\tau,1} \arrow[d, "\gamma"] \\ \mathbf{p}^{v\sigma}_{\tau,1} \arrow[r, "\gamma"] & \mathbf{p}_{v\sigma\tau,1} \end{tikzcd} \quad (7a) \qquad \begin{tikzcd} \mathbf{p}^v_{1,\rho} \arrow[r, "\tilde{\phi}"] \arrow[d, "\beta^v"'] & \mathbf{p}_{v,1}\mathbf{p}_{v,\rho}\mathbf{p}^0_{v,\rho} \arrow[d, "1\wedge i"] \\ \mathbf{p}^v_{1,1} \arrow[r, "\gamma"] & \mathbf{p}_{v,1} \end{tikzcd} \quad (7b)$$

definieren nun rekursiv eine Rangfunktion

$$\mathrm{rg}\colon \mathrm{Ob}(\mathscr{H}(\mathbf{P})) \to \mathbb{N} \tag{8}$$

durch: (a) $\mathrm{rg}(v) = 4$ für v Restklasse eines $\mathbf{v} \neq \mathbf{p}_{1,\rho}$ aus $\mathbf{N}$, $\rho \neq 1$, (b) $\mathrm{rg}(\mathbf{p}_{1,\rho}) = 5$ für $\rho \neq 1$, (c) $\mathrm{rg}(u \wedge v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ für $u, v \neq \mathbf{s}$ aus $\mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\mathbf{P}))$, (d) $\mathrm{rg}(v^0) = 2 \cdot \mathrm{rg}(v)^2$ und $\mathrm{rg}(v^\sigma) = \mathrm{rg}(v)^3$ für alle $v \in \mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\mathbf{P}))$, $\sigma \in G$.

Es ist klar, daß diese Abbildung auf $\mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\mathbf{P}))$ wohldefiniert ist. Man sieht nun leicht:

$$\text{für } \alpha\colon u \to v \text{ aus } \mathbf{E}, \qquad \alpha \neq id, \quad \text{gilt } \mathrm{rg}(u) > \mathrm{rg}(v). \tag{9}$$

Man beachte speziell, daß $\beta_1\colon \mathbf{p}_{1,1} \to \mathbf{p}_{1,1}$ die Identität ist, wie aus (D.1) für σ, τ, ρ, $\nu = 1$ folgt. Man kann nun einen Induktionsbeweis wie in [6] und [7] durchführen, wobei folgendes zu zeigen bleibt: sind $v_0 \xleftarrow{\alpha_0} v_1 \xrightarrow{\alpha_1} v_2$ Morphismen aus $\mathbf{E}$, die nicht die Identität sind, also $\mathrm{rg}(v_0) < \mathrm{rg}(v_1)$ und $\mathrm{rg}(v_1) > \mathrm{rg}(v_2)$, so läßt sich $\alpha_1 \circ \alpha_0^{-1}$ schreiben als eine Komposition

$$v_0 \xrightarrow{\delta_0} u_1 \xrightarrow{\delta_1} u_2 \xrightarrow{\delta_2} \cdots u_n \xrightarrow{\delta_n} v_2$$

mit $\delta_0, \ldots, \delta_n \in \mathbf{E} \cup \mathbf{E}^{-1}$ und $\mathrm{rg}(u_1), \ldots, \mathrm{rg}(u_n) < \mathrm{rg}(v_1)$. Dabei kann man sich auf die Fälle

$$\alpha_1 \text{ Expansion von } \tilde{\phi}_{\sigma,\tau,\rho},\ \gamma_{\sigma,\tau},\ \beta_\rho$$

beschränken, da die übrigen Fälle bereits in [7, §4], untersucht wurden. Es ist nun aber nur

$$\zeta = \gamma_{1,\tau}\colon \mathbf{p}^1_{\tau,1} \to \mathbf{p}_{\tau,1} \tag{10}$$

und die Kommutativität des folgenden Diagramms nachzuweisen; diese

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{p}_{1,\tau}\mathbf{p}_{\tau,\rho}\mathbf{p}^0_{1,\tau\rho} \arrow[d, "\beta\wedge 1"'] & \mathbf{p}^1_{\tau,\rho} \arrow[l, "\tilde{\phi}"'] \arrow[r, "\zeta"] & \mathbf{p}_{\tau,\rho} \\
\mathbf{p}_{1,1}\mathbf{p}_{\tau,\rho}\mathbf{p}^0_{1,\tau\rho} \arrow[rr, "1\wedge\beta^0"] & & \mathbf{p}_{1,1}\mathbf{p}_{\tau,\rho}\mathbf{p}^0_{1,1} \arrow[u, "1\wedge i"']
\end{tikzcd}$$

ergibt sich aus der von (D.1) für das Tupel 1, 1, τ, ρ, und (10) folgt sofort aus (7a) mit σ, $\nu = 1$. Q.E.D.

Im folgenden sei $\alpha\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ ein Morphismus von 3-Kozykeln von G in $\mathscr{A}$, für die (D.1) kommutativ sei; es sei $\mathbf{Q} = (Q_{\sigma,\tau}; \psi_{\sigma,\tau,\rho})$; α ist eine Familie von $\mathscr{A}$-Morphismen $\alpha_{\sigma,\tau}\colon Q_{\sigma,\tau} \to P_{\sigma,\tau}$ mit

$$(\alpha_{\sigma,\tau} \wedge \alpha_{\sigma\tau,\rho}) \circ \psi_{\sigma,\tau,\rho} = \phi_{\sigma,\tau,\rho} \circ (\alpha^\sigma_{\tau,\rho} \wedge \alpha_{\sigma,\tau\rho}), \tag{11}$$

für alle $\sigma, \tau, \rho \in G$. Man kann Satz 1.1 leicht zu einem Kohärenzsatz für die

Morphismen $\alpha_{\sigma,\tau}$ ergänzen. Dazu wähle man eine injektive Abbildung $\mathbf{q}\colon G \times G \to \mathbf{N}$ mit

$$\mathbf{q}(G \times G) \cap \mathbf{p}(G \times G) = \varnothing \qquad \text{und} \qquad \mathbf{q}_{\sigma,\tau} \neq \mathbf{s}, \qquad \forall \sigma, \tau \in G.$$

Für $\varepsilon\colon \mathbf{N} \to \mathrm{Ob}(\mathscr{A})$ verlangen wir nun zusätzlich $\varepsilon(\mathbf{q}_{\sigma,\tau}) = Q_{\sigma,\tau}$ und bilden wie zuvor die Wortmenge $\mathbf{V}(\mathscr{A})$, die Abbildung $\varepsilon\colon \mathbf{V}(\mathscr{A}) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{A})$ und die Kategorie $\mathbf{V}(\mathscr{A})^{\varepsilon}$. Die Unterkategorie $\mathscr{K}(\mathbf{P})$ von $\mathbf{V}(\mathscr{A})^{\varepsilon}$ vergrößern wir zur Kategorie $\mathscr{K}(\alpha)$, indem wir auch die $\mathbf{V}(\mathscr{A})^{\varepsilon}$-Morphismen

$$\psi_{\sigma,\tau,\rho}\colon \mathbf{q}^{\sigma}_{\tau,\rho} \wedge \mathbf{q}_{\sigma,\tau\rho} \to \mathbf{q}_{\sigma,\tau} \wedge \mathbf{q}_{\sigma\tau,\rho}. \qquad \alpha_{\sigma,\tau}\colon \mathbf{q}_{\sigma,\tau} \to \mathbf{p}_{\sigma,\tau}$$

für alle σ, τ, $\rho \in G$ hinzunehmen. Dann gilt:

Satz 1.2. *Die Kategorie $\mathscr{K}(\alpha)$ ist für jeden Morphismus $\alpha\colon \mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ zwischen 3-Kozykeln von G in $\mathscr{A}$ atomar.*

Beweis. Es genügt, den Beweis von Satz 1.1 wie folgt zu ändern. Die Menge $\mathscr{E}$ enthalte nun auch die $\bar{\mathscr{K}}(\alpha)$-Morphismen $\alpha_{\sigma,\tau}$, $\tilde{\psi}_{\sigma,\tau,\rho}$ und

$$\gamma_{\sigma,\tau}\colon \mathbf{q}^{\sigma}_{\tau,1} \to \mathbf{q}_{\sigma\tau,1}, \qquad \beta_{\rho}\colon \mathbf{q}_{1,\rho} \to \mathbf{q}_{1,1},$$

definiert durch die $\psi_{\sigma,\tau,\rho}$. Nach (11) ist offenbar auch $\alpha^{\sigma}_{\tau,\rho}$ eine Komposition von Elementen aus $\mathbf{E} \cup \mathbf{E}^{-1}$. Die Definition der Rangfunktion (8) ändere man für $\mathbf{q}_{\sigma,\tau}$ ab durch $\mathrm{rg}(\mathbf{q}_{1,1}) = 6$, $\mathrm{rg}(\mathbf{q}_{\sigma,\tau}) = 7$ für σ, $\tau \neq 1$ aus G; damit gilt (9) auch hier. Als einzige neue Gleichung tritt auf:

$$\beta_{\rho} \circ \alpha_{1,\rho} = \alpha_{1,1} \circ \beta_{\rho}\colon \mathbf{q}_{1,\rho} \to \mathbf{p}_{1,1}, \qquad \rho \in G,$$

die jedoch leicht aus (11) mit $\sigma = \tau = 1$ folgt.

2.

Wir beginnen nun mit der in der Einleitung erläuterten Verallgemeinerung der Sätze aus [6] und [7]. Im folgenden sei $\mathbf{T} \neq \varnothing$ eine kleine Kategorie (bezüglich eines festen Universums) und *Cat* die Kategorie der kleinen Kategorien. Unter einem Pseudofunktor $\mathfrak{F}\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathit{Cat}$ verstehen wir eine Abbildung, welche zuordnet:

(a) jedem $X \in \mathbf{T}$ eine Kategorie $\mathfrak{F}(X)$,

(b) jedem $\mathbf{T}$-Morphismus $g\colon Y \to X$ einen Funktor $g^*\colon \mathfrak{F}(X) \to \mathfrak{F}(Y)$,

(c) je zwei $\mathbf{T}$-Morphismen $h\colon Z \to Y$, $g\colon Y \to X$ einen natürlichen

Isomorphismus $\eta_{g,h}\colon h^* \circ g^* \to (g \circ h)^*$, derart daß für $f\colon X \to W$ aus $\mathbf{T}$ und $P \in \mathfrak{F}(W)$ gilt:

$$\eta_{fg,h}(P) \circ h^*(\eta_{f,g}(P)) = \eta_{f,gh}(P) \circ \eta_{g,h}(f^*(P)), \tag{12}$$

(d) jedem $X \in \mathbf{T}$ einen natürlichen Isomorphismus $\eta_X\colon \mathrm{id}_X^* \to \mathrm{Id}_{\mathfrak{F}(X)}$, derart daß für alle $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$ und $P \in \mathfrak{F}(X)$ gilt:

$$\eta_{g,\mathrm{id}_Y}(P) = \eta_Y(g^*(P)), \qquad \eta_{\mathrm{id}_X,g}(P) = g^*(\eta_X(P)). \tag{13}$$

Die natürlichen Transformationen in (c) und (d) werden wir für jeden Pseudofunktor mit $\eta_{g,h}$ und η_X bezeichnen. Wir nehmen nun an, daß zusätzlich folgende Daten gegeben sind:

(e) jede Kategorie $\mathfrak{F}(X)$ ist eine Picard-Kategorie,

(f) für jeden $\mathbf{T}$-Morphismus $g\colon Y \to X$ ist der Funktor $g^*\colon \mathfrak{F}(X) \to \mathfrak{F}(Y)$ ein Homomorphismus von Picard-Kategorien, derart daß für alle P, $Q \in \mathfrak{F}(X)$ und $h\colon Z \to Y$ aus $\mathbf{T}$ das Diagramm (14) kommutativ ist.

$$\begin{tikzcd}
h^*g^*(P \wedge Q) \arrow[r, "h^*(t)"] \arrow[d, "\eta"'] & h^*(g^*(P) \wedge g^*(Q)) \arrow[r, "t"] & h^*g^*(P) \wedge h^*g^*(Q) \arrow[d, "\eta \wedge \eta"] \\
(gh)^*(P \wedge Q) \arrow[rr, "t"] & & (gh)^*(P) \wedge (gh)^*(Q)
\end{tikzcd} \tag{14}$$

Einen solchen Pseudofunktor nennen wir einen Picard-Pseudofunktor. Die Kommutativität von (14) für $h = g = \mathrm{id}_X$ ergibt mit (13):

$$\eta_X(P \wedge Q) = (\eta_X(P) \wedge \eta_X(Q)) \circ t(\mathrm{id}_X^*)_{P,Q}.$$

Dies bedeutet, daß η_X und $\eta_{g,h}$ kohärent sind im Sinn von [7, §2], so daß ferner $\eta_X(I_{\mathfrak{F}(X)}) = \lambda(\mathrm{id}_X^*)$, $\eta_X(P^0) = \eta_X^0(\mathrm{id}_X^*(P)) \circ \kappa(\mathrm{id}_X^*)_P$,

$$\lambda(h^*) \circ h^*(\lambda(g^*)) = \lambda((gh)^*) \circ \eta_{g,h}(I_{\mathfrak{F}(X)}) \tag{15}$$

gelten und (16) kommutativ ist für alle $P \in \mathfrak{F}(X)$, $h\colon Z \to Y$, $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$.

$$\begin{tikzcd}
h^*g^*(P^0) \arrow[r, "h^*(\kappa)"] \arrow[d, "\eta"'] & h^*(g^*(P)^0) \arrow[r, "\kappa"] & h^*g^*(P)^0 \arrow[d, "\eta^0"] \\
(gh)^*(P^0) \arrow[rr, "\kappa"] & & (gh)^*(P)^0
\end{tikzcd} \tag{16}$$

Im folgenden wird nun gezeigt, daß die natürlichen Transformationen

$$a,\ e,\ f,\ i,\ j,\ \eta_{g,h},\ \eta_X,\ t(g^*) \tag{17}$$

in den einzelnen Kategorien $\mathfrak{F}(X)$, $X \in \mathbf{T}$, kohärent sind unter den Operatoren $\wedge$, ^{0}, $\circ$, ${}^{-1}$, g^* (mit $g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{T})$).

Um die Objekte aus $\mathfrak{F}(X)$ durch "freie" Symbole zu repräsentieren, wählen wir zunächst disjunkte Mengen $\mathbf{N}_X$ und Abbildungen $\varepsilon\colon \mathbf{N}_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{F}(X))$, $X \in \mathbf{T}$, mit $\varepsilon(\mathbf{s}_X) = I_{\mathfrak{F}(X)}$, $\mathbf{s}_X$ ein ausgezeichnetes Element aus $\mathbf{N}_X$. Wir definieren Wortmengen $\mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$, $X \in \mathbf{T}$, über der disjunkten Vereinigung

$$\left(\coprod_X \mathbf{N}_X\right) \amalg \{(,), \wedge, {}^0, *\} \amalg \mathrm{Mor}(\mathbf{T}) \tag{18}$$

rekursiv durch: (a) $\mathbf{N}_X \subset \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$, für $u, v \in \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$ ist $(u \wedge v)$, $(v)^0$ in $\mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$, (b) für $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$ und $v \in \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$ ist $g^*(v)$ in $\mathbf{V}(\mathfrak{F})_Y$. Die Abbildungen $\varepsilon\colon \mathbf{N}_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{F}(X))$ setzen wir fort zu Abbildungen

$$\varepsilon\colon \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{F}(X)), \qquad X \in \mathbf{T},$$

durch $\varepsilon((u \wedge v)) = \varepsilon(u) \wedge \varepsilon(v)$, $\varepsilon((u)^0) = \varepsilon(u)^0$ und $\varepsilon(g^*(v)) = g^*(\varepsilon(v))$ für alle $u, v \in \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$ und $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$. Zu diesen Abbildungen ε bilden wir die Kategorien $\mathbf{V}(\mathfrak{F})_X^\varepsilon$ mit $\mathrm{Ob}(\mathbf{V}(\mathfrak{F})_X^\varepsilon) = \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$ und den volltreuen Funktoren

$$\varepsilon\colon \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X^\varepsilon \to \mathfrak{F}(X), \qquad X \in \mathbf{T}, \tag{19}$$

wie in Abschnitt 1. Wir erhalten nun einen Pseudofunktor

$$\mathbf{V}(\mathfrak{F})^\varepsilon\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathit{Cat}, \qquad X \mapsto \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X^\varepsilon,$$

bei dem der Funktor $g^*\colon \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X^\varepsilon \to \mathbf{V}(\mathfrak{F})_Y^\varepsilon$ für $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$ ein Objekt v aus

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X^\varepsilon & \xrightarrow{g^*} & \mathbf{V}(\mathfrak{F})_Y^\varepsilon \\ {\scriptstyle\varepsilon}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\varepsilon} \\ \mathfrak{F}(X) & \xrightarrow{g^*} & \mathfrak{F}(Y) \end{array}$$

$\mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$ auf das Wort $g^*(v)$ in $\mathbf{V}(\mathfrak{F})_Y$ abbildet und auf den Morphismen so definiert ist, daß das obenstehende Diagramm in Cat kommutativ ist. Entsprechend seien die zugehörigen Morphismen

$$\eta_{g,h}(v)\colon h^*g^*(v) \to (gh)^*(v), \qquad \eta_X(v)\colon \mathrm{id}_X^*(v) \to v \tag{20}$$

für $v \in \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$ die Urbilder der $\eta_{g,h}$ und η_X für $\varepsilon(v)$ unter den volltreuen Funktoren (19). Wir können nun ferner $\mathbf{V}(\mathfrak{F})^\varepsilon$ zu einem Picard-Pseudofunktor erklären: die Gruppenstruktur auf $\mathfrak{F}(X)$ induziert eine Gruppenstruktur auf $\mathbf{V}(\mathfrak{F})_X^\varepsilon$, und die $\mathbf{V}(\mathfrak{F})_Y^\varepsilon$-Morphismen

$$t(g^*)\colon g^*(u \wedge v) \to g^*(u) \wedge g^*(v), \qquad u, v \in \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X, \tag{21}$$

$g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$, seien so definiert, daß sie unter den Funktoren (19) auf die entsprechenden $\mathfrak{F}(Y)$-Morphismen abgebildet werden.

Wir definieren nun die Kategorien $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_X \subset \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X^{\varepsilon}$ rekursiv durch:

(a) die Komponenten der a, e, f, i, j, $\eta_{g,h}$, η_X, $t(g^*)$ sind in $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_X$, $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_Y$, bzw. $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_Z$ für alle $h\colon Z \to Y$ $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$,

(b) mit α, β in $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_X$ sind auch $\alpha \wedge \beta$, α^0, $\beta \circ \alpha$ (wenn definiert), α^{-1} in $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_X$, und für α in $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_X$ und $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$ ist $g^*(\alpha)$ in $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_Y$. Damit haben wir zugleich einen Picard-Pseudofunktor

$$\mathscr{K}(\mathfrak{F})\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to Cat, \qquad X \mapsto \mathscr{K}(\mathfrak{F})_X.$$

SATZ 2.1. *Die Kategorien* $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_X$, $X \in \mathbf{T}$, *sind für jeden Picard-Pseudofunktor* $\mathfrak{F}\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to Cat$ *atomar.*

Beweis. Wir definieren Unterkategorien $\mathscr{K}(\mathfrak{F})'_X$ von $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_X$ rekursiv durch: (a) die Komponenten von a, e, f sind in $\mathscr{K}(\mathfrak{F})'_X$, (b) Abgeschlossenheit unter $\wedge$, ^{0}, $\circ$, ${}^{-1}$, g^* wie für $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_X$ unter (b). Man stellt leicht fest, daß die Kategorien $\mathscr{K}(\mathfrak{F})'_X$ atomar sind, so daß es genügt, die Faktorkategorien $\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X = \mathscr{K}(\mathfrak{F})_X/\mathscr{K}(\mathfrak{F})'_X$ zu betrachten. Durch Restklassenbildung erhalten wir nach Konstruktion den Picard-Pseudofunktor

$$\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to Cat, \qquad X \mapsto \bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X.$$

Die Gruppenstruktur auf $\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X$ ist dabei nun strikt assoziativ und unitär. Man betrachte die Teilmengen $\mathscr{E}(\mathfrak{F})_X$ von $\mathrm{Mor}(\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X)$, die aus den Identitäten und den folgenden Morphismen bestehe:

$$i\colon v \wedge v^0 \to \mathbf{s}_X, \quad j\colon v^0 \wedge v \to \mathbf{s}_X, \quad \rho\colon (v^0)^0 \to v, \quad k\colon (u \wedge v)^0 \to v^0 \wedge u^0,$$
$$t\colon g^*(u \wedge v) \to g^*(u) \wedge g^*(v), \quad \lambda\colon g^*(\mathbf{s}_X) \to \mathbf{s}_Y, \quad \kappa\colon g^*(v^0) \to g^*(v)^0,$$
$$\eta_{g,h}\colon h^*g^*(v) \to (gh)^*(v), \qquad \eta_X\colon \mathrm{id}_X^*(v) \to v,$$

mit $u, v \in \mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X)$, $h\colon Z \to Y$, $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$ (also t, λ, κ in $\mathscr{E}(\mathfrak{F})_Y$ und $\eta_{g,h}$ in $\mathscr{E}(\mathfrak{F})_Z$), wobei jedoch stets gelte:

$$\text{bei } k_{u,v} \quad \text{und} \quad t_{u,v} \quad \text{ist } u, v \neq \mathbf{s}_X. \tag{22}$$

Wir definieren nun mit $\mathscr{E}(\mathfrak{F})_X$ die Mengen $\mathbf{E}(\mathfrak{F})_X$ und $\mathbf{E}(\mathfrak{F})_X^{-1}$ wie in (6) und betrachten die Menge $\mathscr{L}(\mathfrak{F})_X$ aller Kompositionen von Morphismen aus $\mathbf{E}(\mathfrak{F})_X \cup \mathbf{E}(\mathfrak{F})_X^{-1}$. Nach (D.4), (D.5) aus [7], sowie den obigen (12)–(16) gilt offenbar $g^*(\mathscr{E}(\mathfrak{F})_X) \subset \mathscr{L}(\mathfrak{F})_Y$ für $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$. Hieraus folgt allgemeiner $g^*(\mathbf{E}(\mathfrak{F})_X) \subset \mathscr{L}(\mathfrak{F})_Y$, indem man die Morphismen $t(g^*)$, $\lambda(g^*)$, $\kappa(g^*)$ benutzt, und damit gilt $g^*(\mathscr{L}(\mathfrak{F})_X) \subset \mathscr{L}(\mathfrak{F})_Y$. Ferner sind die $\mathscr{L}(\mathfrak{F})_X$ abgeschlossen in bezug auf $\wedge$ und ^{0}, wie nach dem Beweis von Lemma 2 in

[6] klar ist. Dies zeigt aber, daß die Kategorien $\mathscr{L}(\mathfrak{F})_X$ die Eigenschaft (b) für $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_X$ besitzen, und daher gilt $\mathscr{L}(\mathfrak{F})_X = \bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X$ für alle $X \in \mathbf{T}$. Wir definieren nun rekursiv Abbildungen

$$\mathrm{rg}: \mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X) \to \mathbb{N}, \qquad X \in \mathbf{T}, \tag{23}$$

durch: (a) $\mathrm{rg}(v) = 2$ falls v Restklasse eines Elements aus $\mathbf{N}_X$ ist, (b) $\mathrm{rg}(u \wedge v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ für u, $v \neq \mathbf{s}_X$ aus $\mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X)$, (c) $\mathrm{rg}(v^0) = 2 \cdot \mathrm{rg}(v)^2$ und $\mathrm{rg}(g^*(v)) = \mathrm{rg}(v)^3$ für $v \in \mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X)$, $g: Y \to X$ aus $\mathbf{T}$.

Man sieht leicht, daß jeder Morphismus $\neq \mathrm{id}$ aus $\mathbf{E}(\mathfrak{F})_X$ diesen Rang erniedrigt. Damit kann man nun fortfahren wie am Ende des Beweises von Satz 1.1, wobei jedoch bei den Fallunterscheidungen keine neuen Diagramme auftreten. Q.E.D.

Im folgenden sei ein Homomorphismus $\Gamma: \mathfrak{F} \to \mathfrak{D}$ zwischen Picard-Pseudofunktoren $\mathfrak{F}$, $\mathfrak{D}: \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathit{Cat}$ gegeben; dieser besteht nach Definition aus den folgenden Daten:

(a) zu jedem $X \in \mathbf{T}$ ein Homomorphismus $\Gamma_X: \mathfrak{F}(X) \to \mathfrak{D}(X)$ von Picard-Kategorien,

(b) zu jedem $\mathbf{T}$-Morphismus $g: Y \to X$ eine kohärente natürliche Transformation $u_g: g^* \circ \Gamma_X \to \Gamma_Y \circ g^*$, derart daß für alle $P \in \mathfrak{F}(X)$ und h: $Z \to Y$ aus $\mathbf{T}$ das Diagramm (24) kommutativ ist.

$$\begin{array}{ccccc} h^*g^*\Gamma_X(P) & \xrightarrow{h^*(u_g)} & h^*\Gamma_Y g^*(P) & \xrightarrow{u_h} & \Gamma_Z h^*g^*(P) \\ \downarrow{\scriptstyle \eta} & & & & \downarrow{\scriptstyle \Gamma_Z(\eta)} \\ (gh)^*\Gamma_X(P) & & \xrightarrow{\quad u_{gh} \quad} & & \Gamma_Z(gh)^*(P) \end{array} \tag{24}$$

Indem man in (24) $h = g = \mathrm{id}_X$ setzt und (13) anwendet, erhält man:

$$\eta_X(\Gamma_X(P)) = \Gamma_X(\eta_X(P)) \circ u_{\mathrm{id}_X}(P), \qquad P \in \mathfrak{F}(X). \tag{25}$$

Wir zeigen im folgenden, daß die natürlichen Transformationen

$$a,\ e,\ f,\ i,\ j,\ \eta_{g,h},\ \eta_X,\ t(g^*),\ u_g,\ t(\Gamma_X)$$

zusammen mit den $\Gamma_X(\alpha)$, α aus (17), in den einzelnen Kategorien $\mathfrak{D}(X)$, $X \in \mathbf{T}$, kohärent sind.

Wir vereinigen das Alphabet (18) disjunkt mit (nichtleeren) Mengen $\mathbf{M}_X$ und Symbolen $\mathbf{\Gamma}_X$ und definieren Wortmengen $\mathbf{V}(\Gamma)_X$ über diesem Alphabet durch:

> $\mathbf{M}_X \subset \mathbf{V}(\Gamma)_X$; für $v \in \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$ ist $\mathbf{\Gamma}_X(v)$ in $\mathbf{V}(\Gamma)_X$; für u, $v \in \mathbf{V}(\Gamma)_X$ ist $(u \wedge v)$ und $(v)^0$ in $\mathbf{V}(\Gamma)_X$; für $g: Y \to X$ aus $\mathbf{T}$ und $v \in \mathbf{V}(\Gamma)_X$ ist $g^*(v)$ in $\mathbf{V}(\Gamma)_Y$.

Man wähle für jedes $X \in \mathbf{T}$ außer der Abbildung $\varepsilon: \mathbf{N}_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{F}(X))$ eine Abbildung $\varepsilon: \mathbf{M}_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{D}(X))$ mit $\varepsilon(\mathbf{s}_X) = I_{\mathfrak{D}(X)}$, $\mathbf{s}_X \in \mathbf{M}_X$ fest gewählt, und setze diese fort zu

$$\varepsilon: \mathbf{V}(\Gamma)_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{D}(X)), \qquad X \in \mathbf{T}, \tag{26}$$

durch: (a) $\varepsilon(\mathbf{\Gamma}_X(u)) = \Gamma_X(\varepsilon(u))$ für $u \in \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$, (b) $\varepsilon((u \wedge v)) = \varepsilon(u) \wedge \varepsilon(v)$, $\varepsilon((v)^0) = \varepsilon(v)^0$ und $\varepsilon(g^*(v)) = g^*(\varepsilon(v))$ für u, $v \in \mathbf{V}(\Gamma)_X$; $g: Y \to X$ aus $\mathbf{T}$. Man definiere nun mit den Kategorien $\mathbf{V}(\Gamma)^\varepsilon_X$, $X \in \mathbf{T}$, wie zuvor einen Picard-Pseudofunktor

$$\mathbf{V}(\Gamma)^\varepsilon: \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to Cat, \qquad X \mapsto \mathbf{V}(\Gamma)^\varepsilon_X.$$

Dann hat man einen Homomorphismus von Picard-Pseudofunktoren Γ: $\mathbf{V}(\mathfrak{F})^\varepsilon \to \mathbf{V}(\Gamma)^\varepsilon$, der $v \in \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$ auf das Wort $\mathbf{\Gamma}_X(v)$ in $\mathbf{V}(\Gamma)_X$ abbildet, und für den das nachstehende Diagramm kommutativ ist;

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{V}(\mathfrak{F})^\varepsilon_X \arrow[r, "\Gamma_X"] \arrow[d, "\varepsilon"'] & \mathbf{V}(\Gamma)^\varepsilon_X \arrow[d, "\varepsilon"] \\
\mathfrak{F}(X) \arrow[r, "\Gamma_X"] & \mathfrak{D}(X)
\end{tikzcd}$$

für $g: Y \to X$ aus $\mathbf{T}$, u, $v \in \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X$ und $w \in \mathbf{V}(\Gamma)_X$ sind die zugehörigen Morphismen

$$t(\Gamma): \Gamma_X(u \wedge v) \to \Gamma_X(u) \wedge \Gamma_X(v), \qquad u_g: g^*\Gamma_X(w) \to \Gamma_Y g^*(w)$$

die Urbilder der entsprechenden Morphismen aus $\mathfrak{D}(X)$, bzw. $\mathfrak{D}(Y)$ unter ε. Wir definieren nun die Unterkategorien $\mathscr{H}(\Gamma)_X \subset \mathbf{V}(\Gamma)^\varepsilon_X$ durch:

(a) die Komponenten der a, e, f, i, j, $\eta_{g,h}$, η_X, $t(g^*)$, $t(\Gamma_X)$, u_g sind in $\mathscr{H}(\Gamma)_X$, $\mathscr{H}(\Gamma)_Y$, bzw. $\mathscr{H}(\Gamma)_Z$ für alle $\mathbf{T}$-Morphismen $h: Z \to Y$, $g: Y \to X$,

(b) für α in $\mathscr{H}(\mathfrak{F})_X$ ist $\Gamma_X(\alpha)$ in $\mathscr{H}(\Gamma)_X$,

(c) die Kategorien $\mathscr{H}(\Gamma)_X$ sind abgeschlossen in bezug auf die Operatoren $\wedge$, ^{0}, $\circ$, ${}^{-1}$ und g^* (mit $g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{T})$).

Damit erhalten wir durch Restriktion offenbar einen Picard-Pseudofunktor $\mathscr{H}(\Gamma): \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to Cat$, $X \mapsto \mathscr{H}(\Gamma)_X$, sowie einen Homomorphismus Γ: $\mathscr{H}(\mathfrak{F}) \to \mathscr{H}(\Gamma)$.

SATZ 2.2. *Die Kategorien $\mathscr{H}(\Gamma)_X$, $X \in \mathbf{T}$, sind für jeden Homomorphismus $\Gamma: \mathfrak{F} \to \mathfrak{D}$ von Picard-Pseudofunktoren $\mathfrak{F}, \mathfrak{D}: \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to Cat$ atomar.*

Beweis. Die Unterkategorien $\mathscr{H}(\Gamma)'_X$ von $\mathscr{H}(\Gamma)_X$ seien definiert durch:

(a) die Komponenten von a, e, f sind in $\mathscr{K}(\Gamma)'_X$, (b) mit α in $\mathscr{K}(\mathfrak{F})'_X$ ist $\Gamma_X(\alpha)$ in $\mathscr{K}(\Gamma)'_X$, (c) Abgeschlossenheit wie für $\mathscr{K}(\Gamma)_X$ unter (c). Man zeigt leicht, daß die Kategorien $\mathscr{K}(\Gamma)'_X$ atomar sind, so daß man ohne Einschränkung zu den Kategorien $\bar{\mathscr{K}}(\Gamma)_X = \mathscr{K}(\Gamma)_X/\mathscr{K}(\Gamma)'_X$ übergehen kann. Durch Restklassenbildung erhält man den Picard-Pseudofunktor $\bar{\mathscr{K}}(\Gamma)\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathit{Cat}$, $X \mapsto \bar{\mathscr{K}}(\Gamma)_X$, und der Homomorphismus $\Gamma\colon \mathscr{K}(\mathfrak{F}) \to \mathscr{K}(\Gamma)$ induziert einen Homomorphismus

$$\Gamma\colon \bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F}) \to \bar{\mathscr{K}}(\Gamma).$$

Die Teilmengen $\mathscr{E}(\Gamma)_X$ von $\mathrm{Mor}(\bar{\mathscr{K}}(\Gamma)_X)$ definieren wir nun so, daß $\bigcup_X \mathscr{E}(\Gamma)_X$ aus den Identitäten und den folgenden Morphismen besteht:

(E_1) den Komponenten der $i, j, \rho, k, \eta_{g,h}, \eta_X, t(g^*), \lambda(g^*), \kappa(g^*), u_g$,

(E_2) den Komponenten der $\Gamma_Z(\eta_{g,h}), \Gamma_Y(t(g^*)), \Gamma_Y(\lambda(g^*)), \Gamma_Y(\kappa(g^*))$,

(E_3) den Komponenten der $t(\Gamma_X), \lambda(\Gamma_X), \kappa(\Gamma_X)$,

mit $h\colon Z \to Y$, $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$, wobei für k und für alle t's die Einschränkung (22) gelte.

Es sei wieder $\mathbf{E}(\Gamma)_X$ definiert wie in (6), und $\mathscr{L}(\Gamma)_X \subset \bar{\mathscr{K}}(\Gamma)_X$ sei die Menge aller Kompositionen von Morphismen aus $\mathbf{E}(\Gamma)_X \cup \mathbf{E}(\Gamma)_X^{-1}$. Wir behaupten, daß $\mathscr{L}(\Gamma)_X = \bar{\mathscr{K}}(\Gamma)_X$ gilt. Es ist $\Gamma_X(\mathscr{E}(\mathfrak{F})_X)$ enthalten in $\mathscr{L}(\Gamma)_X$, denn es sind $\Gamma_X(i_v)$ und $\Gamma_X(j_v)$, also auch $\Gamma_X(\rho_v)$ und $\Gamma_X(k_{u,v})$, in $\mathscr{L}(\Gamma)_X$, weil die Morphismen (E_3) in $\mathscr{L}(\Gamma)_X$ sind, cf. [7]; außerdem beachte man, daß $\Gamma_X(\eta_X)$ nach (25) in $\mathscr{L}(\Gamma)_X$ ist. Damit folgt allgemeiner $\Gamma_X(\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X) \subset \mathscr{L}(\Gamma)_X$ wegen $\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X = \mathscr{L}(\mathfrak{F})_X$. Es bleibt zu zeigen: $g^*(\mathscr{E}(\Gamma)_X) \subset \mathscr{L}(\Gamma)_Y$ für alle $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$. Für die Morphismen unter (E_1), bis auf u_g, sieht man dies wie im Beweis von Satz 2.1, und für u_g beachte man (24); für die Morphismen unter (E_2) folgt dies daraus, daß für $\alpha\colon v \to w$ aus $\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X$ mit der Natürlichkeit von u_g gilt:

$$g^*(\Gamma_X(\alpha)) = u_g^{-1}(w) \circ \Gamma_Y(g^*(\alpha)) \circ u_g(v).$$

Für die Morphismen (E_3) schließlich beachte man, daß nach Voraussetzung u_g kohärent ist, und hiermit nach [7, (D.10) und (D.11)] auch

$$g^*(\lambda(\Gamma_X)) = \lambda(g^*)^{-1} \circ \lambda(\Gamma_Y) \circ \Gamma_Y(\lambda(g^*)) \circ u_g(\mathbf{s}_X)$$

gilt und das folgende Diagramm kommutativ ist für $v \in \bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X$. Damit ist

$$\begin{array}{ccccc}
g^*\Gamma_X(v^0) & \xrightarrow{g^*(\kappa)} & g^*(\Gamma_X(v)^0) & \xrightarrow{\kappa} & (g^*\Gamma_X(v))^0 \\
{\scriptstyle u_g}\downarrow & & & & \downarrow{\scriptstyle u_g^0} \\
\Gamma_Y g^*(v^0) & \xrightarrow{\Gamma_Y(\kappa)} & \Gamma_Y(g^*(v)^0) & \xrightarrow{\kappa} & (\Gamma_Y g^*(v))^0
\end{array}$$

$\mathscr{L}(\Gamma)_X = \bar{\mathscr{K}}(\Gamma)_X$ bewiesen. Wir definieren nun Abbildungen

$$\mathrm{rg}\colon \mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\Gamma)_X) \to \mathbb{N}$$

durch: (a) $\mathrm{rg}(u) = 2$ für u Restklasse eines Elements aus $\mathbf{M}_X$, (b) $\mathrm{rg}(u \wedge v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$, $\mathrm{rg}(w^0) = 2 \cdot \mathrm{rg}(w)^2$, $\mathrm{rg}(g^*(w)) = \mathrm{rg}(w)^4$ für $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$, u, v, $w \in \bar{\mathscr{K}}(\Gamma)_X$ mit $u, v \neq \mathbf{s}_X$, (c) $\mathrm{rg}(\Gamma_X(v)) = \mathrm{rg}(v)^3$ für $v \in \bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X$ mit $\mathrm{rg}(v)$ definiert wie in (23).
Jeder Morphismus $\neq \mathrm{id}$ aus $\mathscr{E}(\Gamma)_X$ erniedrigt diesen Rang, und beim Induktionsschluß wie im Beweis von Satz 1.1 haben wir nur die Morphismen aus (E_2) und (E_3) zu betrachten; hierbei treten jedoch keine neuen Diagramme auf, deren Kommutativität noch zu prüfen wäre. Q.E.D.

Es seien im folgenden zwei Homomorphismen $\Gamma, \Lambda\colon \mathfrak{F} \to \mathfrak{D}$ von Picard-Pseudofunktoren $\mathfrak{F}, \mathfrak{D}\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathit{Cat}$ gegeben und zwischen diesen ein Morphismus $\chi\colon \Gamma \to \Lambda$ wie in [8]; χ ist definiert als eine Familie von natürlichen Transformationen

$$\chi_X\colon \Gamma_X \to \Lambda_X, \qquad X \in \mathbf{T},$$

derart daß für alle $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$ und $P, Q \in \mathfrak{F}(X)$ die folgenden beiden Diagramme kommutativ sind; (mit diesen Morphismen als 2-Zellen und den

$$\begin{array}{ccc} g^*\Gamma_X(P) & \xrightarrow{g^*(\chi)} & g^*\Lambda_X(P) \\ {\scriptstyle u_g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle u_g} \\ \Gamma_Y g^*(P) & \xrightarrow{\chi} & \Lambda_Y g^*(P) \end{array} \quad (27\mathrm{a}) \qquad \begin{array}{ccc} \Gamma_X(P \wedge Q) & \xrightarrow{\chi} & \Lambda_X(P \wedge Q) \\ {\scriptstyle t}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ \Gamma_X(P) \wedge \Gamma_X(Q) & \xrightarrow{\chi \wedge \chi} & \Lambda_X(P) \wedge \Lambda_X(Q) \end{array} \quad (27\mathrm{b})$$

Homomorphismen als 1-Zellen bilden die Picard-Pseudofunktoren von $\mathbf{T}^{\mathrm{op}}$ nach Cat eine 2-Kategorie [3]). Im folgenden ergänzen wir Satz 2.2 zu einem Kohärenzsatz für χ. Wir vergrößern das benutzte Alphabet nochmals durch Symbole $\mathbf{\Lambda}_X$, bilden $\mathbf{V}(\Lambda)_X$ analog wie $\mathbf{V}(\Gamma)_X$ und definieren nun Wortmengen $\mathbf{V}(\chi)_X$ rekursiv durch:

(a) $\mathbf{V}(\Gamma)_X \subset \mathbf{V}(\chi)_X$ und $\mathbf{V}(\Lambda)_X \subset \mathbf{V}(\chi)_X$,

(b) mit $u, v \in \mathbf{V}(\chi)_X$ ist $(u \wedge v)$ und $(v)^0$ in $\mathbf{V}(\chi)_X$, sowie $g^*(v)$ in $\mathbf{V}(\chi)_Y$ für alle $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$.

Man kann nun die Abbildungen $\varepsilon\colon \mathbf{V}(\Gamma)_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{D}(X))$ und $\varepsilon\colon \mathbf{V}(\Lambda)_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{D}(X))$, cf. (26), eindeutig fortsetzen zu Abbildungen

$$\varepsilon\colon \mathbf{V}(\chi)_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{D}(X)), \qquad X \in \mathbf{T},$$

indem man verlangt: $\varepsilon((u \wedge v)) = \varepsilon(u) \wedge \varepsilon(v)$, $\varepsilon((v)^0) = \varepsilon(v)^0$, $\varepsilon(g^*(v)) =$

$g^*(\varepsilon(v))$ für alle u, $v \in \mathbf{V}(\chi)_X$, $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$. Dann hat man den Picard-Pseudofunktor

$$\mathbf{V}(\chi)^{\varepsilon}\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathit{Cat}, \qquad X \mapsto \mathbf{V}(\chi)^{\varepsilon}_X,$$

und die Homomorphismen Γ, $\Lambda\colon \mathbf{V}(\mathfrak{F})^{\varepsilon} \to \mathbf{V}(\chi)^{\varepsilon}$. Zwischen diesen erhält man den Morphismus $\chi\colon \Gamma \to \Lambda$, dessen Komponenten

$$\chi_X(v)\colon \Gamma_X(v) \to \Lambda_X(v), \qquad v \in \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X,$$

unter den volltreuen Funktoren $\varepsilon\colon \mathbf{V}(\chi)^{\varepsilon}_X \to \mathfrak{D}(X)$ abgebildet werden auf $\chi_X(\varepsilon(v))$.

Die Unterkategorien $\mathscr{K}(\chi)_X$ von $\mathbf{V}(\chi)^{\varepsilon}_X$ seien definiert durch:

(a) $\mathscr{K}(\Gamma)_X \subset \mathscr{K}(\chi)_X$ und $\mathscr{K}(\Lambda)_X \subset \mathscr{K}(\chi)_X$,

(b) die Komponenten von a, e, f, i, j, $\eta_{g,h}$, η_X, $t(g^*)$, χ_X sind in $\mathscr{K}(\chi)_X$, $\mathscr{K}(\chi)_Y$, bzw. $\mathscr{K}(\chi)_Z$ für alle $h\colon Z \to Y$, $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$,

(c) die Kategorien $\mathscr{K}(\chi)_X$ sind abgeschlossen unter den Operatoren $\wedge$, ^{0}, $\circ$, ${}^{-1}$, g^* (mit $g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{T})$).

SATZ 2.3. *Die Kategorien $\mathscr{K}(\chi)_X$, $X \in \mathbf{T}$, sind für jeden Morphismus χ: $\Gamma \to \Lambda$ zwischen Homomorphismen von Picard-Pseudofunktoren atomar.*

Beweis. Wir definieren zunächst wieder Unterkategorien $\mathscr{K}(\chi)'_X$ von $\mathscr{K}(\chi)_X$ durch: (a) die Komponenten von a, e, f sind in $\mathscr{K}(\chi)'_X$, (b) für α in $\mathscr{K}(\mathfrak{F})'_X$ ist $\Gamma_X(\alpha)$ und $\Lambda_X(\alpha)$ in $\mathscr{K}(\chi)'_X$, (c) Abgeschlossenheit in bezug auf $\wedge$, ^{0}, $\circ$, ${}^{-1}$, g^* $(g \in \mathrm{Mor}(\mathbf{T}))$. Da die $\mathscr{K}(\chi)'_X$ atomar sind, kann man die Faktorkategorien $\bar{\mathscr{K}}(\chi)_X = \mathscr{K}(\chi)_X/\mathscr{K}(\chi)'_X$ bilden, und man hat den Picard-Pseudofunktor $\bar{\mathscr{K}}(\chi)\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathit{Cat}$. Ferner erhält man durch Übergang zu den Restklassen die Homomorphismen

$$\Gamma, \Lambda\colon \bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F}) \to \bar{\mathscr{K}}(\chi)$$

und zwischen diesen den Morphismus $\chi\colon \Gamma \to \Lambda$. Die Kategorien $\bar{\mathscr{K}}(\Gamma)_X$ und $\bar{\mathscr{K}}(\Lambda)_X$ können wir als Unterkategorien von $\bar{\mathscr{K}}(\chi)_X$ auffassen. Wir definieren nun Teilmengen $\mathscr{E}(\chi)_X$ von $\mathrm{Mor}(\bar{\mathscr{K}}(\chi)_X)$, derart daß $\bigcup_X \mathscr{E}(\chi)_X$ aus den Identitäten und den folgenden Morphismen besteht:

(a) den Komponenten von i, j, ρ, k, $\eta_{g,h}$, η_X, $t(g^*)$, $\lambda(g^*)$, $\kappa(g^*)$, χ_X mit $h\colon Z \to Y$, $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$,

(b) den Morphismen aus $\mathscr{E}(\Gamma)_X$ und $\mathscr{E}(\Lambda)_X$, $X \in \mathbf{T}$,

wobei für k und $t(g^*)$ wieder (22) gelte. Wie im Beweis von Satz 2.2 sieht man nun, daß sich jeder $\bar{\mathscr{K}}(\chi)_X$-Morphismus als eine Komposition von

Expansionen der Morphismen aus $\mathscr{E}(\chi)_X$ und deren Inversen schreiben läßt. Indem man dann passende Rangfunktionen $\mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\chi)_X) \to \mathbb{N}$ definiert, kann man die Behauptung wie zuvor beweisen.

3.

Es gelte nun, daß $\mathfrak{F}: \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathit{Cat}$ ein abelscher Picard-Pseudofunktor ist, i.e., die Kategorien $\mathfrak{F}(X)$, $X \in \mathbf{T}$, sind mit einer kohärenten, abelschen Gruppenstruktur versehen, und die Homomorphismen $g^*: \mathfrak{F}(X) \to \mathfrak{F}(Y)$ sind auch mit den Kommutativitätsmorphismen verträglich [7, (D.12)]. Man hat dann auch in den Kategorien $\mathbf{V}(\mathfrak{F})_X^{\varepsilon}$ Kommutativitätsmorphismen

$$c_{u,v}: u \wedge v \to v \wedge u, \qquad u, v \in \mathbf{V}(\mathfrak{F})_X,$$

die wir bei der Definition von $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_X$ in (a) hinzunehmen. *Dann gilt Satz 2.1 auch für diese Kategorien* $\mathscr{K}(\mathfrak{F})_X$. Der Beweis läßt sich wie der von Satz 2.1 führen, indem man die Kategorien $\mathscr{K}(\mathfrak{F})'_X$ durch die $c_{u,v}$ vergrößert; $\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{F})_X$ ist dann strikt kommutativ.

Es seien Γ, $\Lambda: \mathfrak{F} \to \mathfrak{D}$ Homomorhismen von abelschen Picard-Pseudofunktoren, so daß für die Funktoren Γ_X, $\Lambda_X: \mathfrak{F}(X) \to \mathfrak{D}(X)$ auch das Diagramm (D.12) in [7] kommutativ ist. Ferner sei $\chi: \Gamma \to \Lambda$ ein Morphismus zwischen diesen Homomorphismen, definiert wie zuvor. Wir vergrößern nun auch die Kategorien $\mathscr{K}(\Gamma)_X$ und $\mathscr{K}(\chi)_X$ durch Hinzunahme der Kommutativitätsmorphismen. *Dann sind auch die so definierten Kategorien* $\mathscr{K}(\Gamma)_X$ *und* $\mathscr{K}(\chi)_X$ *atomar.* Auch die Beweise von Satz 2.2 und 2.3 lassen sich ohne weiteres übertragen, indem man $\mathscr{K}(\Gamma)'_X$ und $\mathscr{K}(\chi)'_X$ durch die Kommutativitätsmorphismen erweitert.

4.

Im folgenden sei S ein Funktor von $\mathbf{T}^{\mathrm{op}}$ in die Kategorie der Gruppen. Für $g: Y \to X$ aus $\mathbf{T}$ schreiben wir

$$s' = S(g)(s), \qquad s \in S(X).$$

Es sei ferner $\mathfrak{A}: \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to \mathit{Cat}$ ein abelscher Picard-Pseudofunktor, und jede Kategorie $\mathfrak{A}(X)$, $X \in \mathbf{T}$, sei mit einer kohärenten $S(X)$-Linksmodulstruktur versehen. Speziell haben wir also für jedes $X \in \mathbf{T}$ die $\mathfrak{A}(X)$-Morphismen

$$t: (P \wedge Q)^s \to P^s \wedge Q^s, \qquad \xi: (P^t)^s \to P^{st}, \qquad \zeta: P^1 \to P,$$

P, $Q \in \mathfrak{A}(X)$, s, $t \in S(X)$. Wir nehmen nun weiter an, daß für jeden $\mathbf{T}$-Morphismus $g\colon Y \to X$ und jedes $s \in S(X)$ natürliche $\mathfrak{A}(Y)$-Morphismen

$$\omega_{s,g}(P)\colon g^*(P^s) \to g^*(P)^{s'}, \qquad P \in \mathfrak{A}(X),$$

gegeben sind, derart daß (28) und (29) kommutativ sind für alle P, $Q \in \mathfrak{A}(X)$, $s \in S(X)$, $h\colon Z \to Y$, $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$; (29) bedeutet, daß die

$$\begin{array}{ccccc} h^*g^*(P^s) & \xrightarrow{h^*(\omega)} & h^*(g^*(P)^{s'}) & \xrightarrow{\omega} & h^*g^*(P)^{s''} \\ \downarrow{\scriptstyle \eta} & & & & \downarrow{\scriptstyle \eta^{s''}} \\ (gh)^*(P^s) & & \xrightarrow{\qquad\omega\qquad} & & (gh)^*(P)^{s''} \end{array} \tag{28}$$

$$\begin{array}{ccccc} g^*((P \wedge Q)^s) & \xrightarrow{\omega} & g^*(P \wedge Q)^{s'} & \xrightarrow{t^{s'}} & (g^*(P) \wedge g^*(Q))^{s'} \\ \downarrow{\scriptstyle g^*(t)} & & & & \downarrow{\scriptstyle t} \\ g^*(P^s \wedge Q^s) & \xrightarrow{t} & g^*(P^s) \wedge g^*(Q^s) & \xrightarrow{\omega \wedge \omega} & g^*(P)^{s'} \wedge g^*(Q)^{s'} \end{array} \tag{29}$$

natürliche Transformation $\omega_{s,g}$ kohärent ist im Sinn von [7, §2], und (28) können wir als ein Diagramm der Form (24) interpretieren [8]. Wir nennen die so definierte Struktur eine S-Modulstruktur auf (dem Pseudofunktor) $\mathfrak{A}$ und untersuchen im folgenden die Kohärenz dieser Struktur.

Wir repräsentieren zunächst wieder die Objekte der einzelnen Kategorien $\mathfrak{A}(X)$ als Wörter über einem Alphabet, und zwar über (18), disjunkt vereinigt mit der Menge $\coprod_X S(X)$. Die Wortmengen $\mathbf{V}(\mathfrak{A})_X$, $X \in \mathbf{T}$, seien definiert durch:

(a) $\mathbf{N}_X \subset \mathbf{V}(\mathfrak{A})_X$; für u, $v \in \mathbf{V}(\mathfrak{A})_X$ und $s \in S(X)$ sind $(v)^s$, $(u \wedge v)$, $(v)^0$ in $\mathbf{V}(\mathfrak{A})_X$,

(b) für $v \in \mathbf{V}(\mathfrak{A})_X$ und $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$ ist $g^*(v)$ in $\mathbf{V}(\mathfrak{A})_Y$.

Es seien nun Abbildungen $\varepsilon\colon \mathbf{N}_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{A}(X))$ mit $\varepsilon(\mathbf{s}_X) = I_{\mathfrak{A}(X)}$ gegeben; diese lassen sich fortsetzen zu

$$\varepsilon\colon \mathbf{V}(\mathfrak{A})_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{A}(X)), \qquad X \in \mathbf{T},$$

durch: $\varepsilon((v)^s) = \varepsilon(v)^s$, $\varepsilon((u \wedge v)) = \varepsilon(u) \wedge \varepsilon(v)$, $\varepsilon((v)^0) = \varepsilon(v)^0$ und $\varepsilon(g^*(v)) = g^*(\varepsilon(v))$ für alle u, $v \in \mathbf{V}(\mathfrak{A})_X$, $s \in S(X)$, $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$. Mit den Kategorien $\mathbf{V}(\mathfrak{A})_X^\varepsilon$ bilden wir den Picard-Pseudofunktor

$$\mathbf{V}(\mathfrak{A})^\varepsilon\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to Cat, \qquad X \mapsto \mathbf{V}(\mathfrak{A})_X^\varepsilon, \tag{30}$$

und versehen ihn kanonisch mit einer S-Modulstruktur. Insbesondere definieren wir $\mathbf{V}(\mathfrak{A})_Y^\varepsilon$-Morphismen

$$\omega_{s,g}(v)\colon g^*(v^s) \to g^*(v)^{s'}, \qquad v \in \mathbf{V}(\mathfrak{A})_X,$$

als die Urbilder der Morphismen $\omega_{s,g}(\varepsilon(v))$ unter den volltreuen Funktoren $\varepsilon\colon \mathbf{V}(\mathfrak{A})_Y^{\varepsilon} \to \mathfrak{A}(Y)$.

Man definiere nun die Unterkategorien $\mathscr{K}(\mathfrak{A})_X$ von $\mathbf{V}(\mathfrak{A})_X^{\varepsilon}$ rekursiv durch:

(a) die Komponenten von a, e, c, i, η_X, $t(s)$, ξ, ζ, $t(g^*)$, $\omega_{s,g}$, $\eta_{g,h}$ sind in $\mathscr{K}(\mathfrak{A})_X$, $\mathscr{K}(\mathfrak{A})_Y$ bzw. $\mathscr{K}(\mathfrak{A})_Z$,

(b) mit α, β in $\mathscr{K}(\mathfrak{A})_X$ sind auch $\alpha \wedge \beta$, α^0, α^s, $\beta \circ \alpha$ (wenn definiert), α^{-1} in $\mathscr{K}(\mathfrak{A})_X$,

(c) für α in $\mathscr{K}(\mathfrak{A})_X$ ist $g^*(\alpha)$ in $\mathscr{K}(\mathfrak{A})_Y$, für alle $s \in S(X)$, $h\colon Z \to Y$, $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$.

Damit haben wir offenbar einen Picard-Pseudofunktor

$$\mathscr{K}(\mathfrak{A})\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to Cat, \qquad X \mapsto \mathscr{K}(\mathfrak{A})_X,$$

auf dem ebenfalls eine S-Modulstruktur gegeben ist.

SATZ 4.1. *Die Kategorien $\mathscr{K}(\mathfrak{A})_X$, $X \in \mathbf{T}$, sind atomar, wenn für alle g: $Y \to X$ aus $\mathbf{T}$, s, $t \in S(X)$ und $P \in \mathfrak{A}(X)$ zusätzlich das folgende Diagramm kommutativ ist.*

$$\begin{tikzcd}
g^*((P^s)^t) \arrow[r, "\omega"] \arrow[d, "g^*(\xi)"'] & g^*(P^s)^{t'} \arrow[r, "\omega^{t'}"] & (g^*(P)^{s'})^{t'} \arrow[d, "\xi"] \\
g^*(P^{ts}) \arrow[rr, "\omega"] & & g^*(P)^{t's'}
\end{tikzcd} \tag{31}$$

Beweis. Wir gehen zunächst über zu den vereinfachten Kategorien $\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{A})_X = \mathscr{K}(\mathfrak{A})_X / \mathscr{K}(\mathfrak{A})'_X$, wobei die atomaren Unterkategorien $\mathscr{K}(\mathfrak{A})'_X$ von $\mathscr{K}(\mathfrak{A})_X$ definiert sind durch: (a) die Komponenten von a, c, e sind in $\mathscr{K}(\mathfrak{A})'_X$, (b) für α, β in $\mathscr{K}(\mathfrak{A})'_X$, $s \in S(X)$ und $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$ sind auch $\alpha \wedge \beta$, α^0, $\beta \circ \alpha$, α^{-1}, α^s in $\mathscr{K}(\mathfrak{A})'_X$ und $g^*(\alpha)$ in $\mathscr{K}(\mathfrak{A})'_Y$. Dann hat man den abelschen Picard-Pseudofunktor $\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{A})\colon \mathbf{T}^{\mathrm{op}} \to Cat$, $X \mapsto \bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{A})_X$, der wie $\mathscr{K}(\mathfrak{A})$ eine S-Modulstruktur trägt. Wir definieren Teilmengen $\mathscr{E}(\mathfrak{A})_X$ von $\mathrm{Mor}(\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{A})_X)$, derart daß $\bigcup_X \mathscr{E}(\mathfrak{A})_X$ aus den Identitäten und den Komponenten der folgenden natürlichen Transformationen besteht:

(E_1) i, ρ, k, $t(s)$, $\lambda(s)$, $\kappa(s)$, ξ, ζ (mit $s \in S(X)$),

(E_2) $\eta_{g,h}$, η_X, $t(g^*)$, $\lambda(g^*)$, $\kappa(g^*)$, $\omega_{s,g}$ mit $h\colon Z \to Y$, $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$, $s \in S(X)$,

(E_3) α^s für α aus (E_2) und $s \in S(Z)$, $S(X)$, bzw. $S(Y)$;

für k, $t(s)$ und $t(g^*)$ gelte dabei wieder (22). Es sei $\mathscr{L}(\mathfrak{A})_X$ die Menge aller Kompositionen von Expansionen der Morphismen aus $\mathscr{E}(\mathfrak{A})_X \cup \mathscr{E}(\mathfrak{A})_X^{-1}$. Dann gilt $\mathscr{L}(\mathfrak{A})_X = \mathrm{Mor}(\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{A})_X)$, wie man folgendermaßen einsieht. Für jedes $\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})_X$ ist α^s, $s \in S(X)$, in $\mathscr{L}(\mathfrak{A})_X$, denn für die Morphismen unter (E_1) sieht man dies wie in [7, §4], und für die Morphismen unter (E_3), indem man ξ anwendet. Hieraus folgt, daß $\mathscr{L}(\mathfrak{A})_X$ abgeschlossen ist unter den Operatoren $s \in S(X)$. Es gilt weiter, daß für $\alpha \in \mathscr{L}(\mathfrak{A})_X$ und $g: Y \to X$ aus $\mathbf{T}$ auch $g^*(\alpha)$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{A})_Y$ ist; für $\alpha = \iota(s)$, $\lambda(s)$, $\kappa(s)$ gilt dies, weil (29) kommutativ ist; für $\alpha = \omega_{s,g}$ oder ξ besagt dies (28), bzw. (31), und für $\alpha = \zeta$ beachte man

$$g^*(\zeta_v) = \zeta_{g^*(v)} \circ \omega_{1,g}(v), \qquad v \in \bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{A})_X,$$

das aus (31) für $s = t = 1$ folgt; für die übrigen Morphismen aus (E_1) und (E_2) sieht man dies wie in Abschnitt 2 und 3. Ist nun aber $g^*(\alpha)$ in $\mathscr{L}(\mathfrak{A})_Y$, so auch $g^*(\alpha^s)$, $s \in S(X)$, wie die Natürlichkeit von $\omega_{s,g}$ zeigt. Damit folgt $g^*(\mathscr{L}(\mathfrak{A})_X) \subset \mathscr{L}(\mathfrak{A})_Y$, und schließlich $\mathscr{L}(\mathfrak{A})_X = \mathrm{Mor}(\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{A})_X)$, für alle $X \in \mathbf{T}$. Wir definieren nun Rangfunktionen $\mathrm{rg}: \mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{A})_X) \to \mathbb{N}$ durch folgende Bedingungen:

(a) $\mathrm{rg}(u) = 2$ für jede Restklasse u eines Elements aus $\mathbf{N}_X$,

(b) $\mathrm{rg}(u \wedge v) = \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$ für $u, v \neq \mathbf{s}_X$ aus $\mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{A})_X)$,

(c) $\mathrm{rg}(v^0) = 2 \cdot \mathrm{rg}(v)^2$, $\mathrm{rg}(v^s) = 2 \cdot \mathrm{rg}(v)^3$ und $\mathrm{rg}(g^*(v)) = \mathrm{rg}(v)^4$ für $v \in \mathrm{Ob}(\bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{A})_X)$, $s \in S(X)$, $g: Y \to X$ aus $\mathbf{T}$.

Dann gilt, daß jede Expansion eines Morphismus $\neq \mathrm{id}$ aus $\mathscr{E}(\mathfrak{A})_X$ diesen Rang erniedrigt, und man kann die übliche Induktion anwenden. Dabei tritt als neues Diagramm nur auf:

$$\eta_X(v^s) = \eta_X(v)^s \circ \omega_{s,\mathrm{id}_X}(v), \qquad v \in \bar{\mathscr{K}}(\mathfrak{A})_X;$$

dies entspricht aber der Gleichung (25), wenn man (28) als ein Diagramm der Form (24) interpretiert. Q.E.D.

Wir können nun als Verallgemeinerung von Satz 1.1 einen Kohärenzsatz für 3-Kozykeln von S in $\mathfrak{A}$ beweisen. Es gelte weiterhin, daß (31) kommutativ sei (einen solchen Pseudofunktor $\mathfrak{A}$ nennen wir einen (kohärenten) S-Modul). Ein 3-Kozykel $\mathbf{P}$ von S in $\mathfrak{A}$ besteht nach Definition [8] aus den folgenden Daten:

(a) zu jedem $X \in \mathbf{T}$ eine Abbildung

$$P: S(X) \times S(X) \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{A}(X)), \qquad (s, t) \mapsto P_{s,t},$$

(b) zu jedem $\mathbf{T}$-Morphismus $g: Y \to X$ ein $\mathfrak{A}(Y)$-Morphismus

$$\mu_g(s, t): g^*(P_{s,t}) \to P_{s',t'}, \qquad s, t \in S(X),$$

derart daß für $h\colon Z \to Y$ aus $\mathbf{T}$ gilt

$$\mu_h(s', t') \circ h^*(\mu_g(s, t)) = \mu_{gh}(s, t) \circ \eta_{g,h}(P_{s,t}), \tag{32}$$

(c) zu s, t, $r \in S(X)$ ein $\mathfrak{A}(X)$-Morphismus

$$\phi_{s,t,r}\colon P^s_{t,r} \wedge P_{s,tr} \to P_{s,t} \wedge P_{st,r},$$

derart daß (33) kommutativ ist und in jeder Komponente $X \in \mathbf{T}$ (D.1).

$$\begin{tikzcd}
g^*(P^s_{t,r} \wedge P_{s,tr}) \arrow[r, "g^*(\phi)"] \arrow[d, "(\omega \wedge 1) \circ t"'] & g^*(P_{s,t} \wedge P_{st,r}) \arrow[r, "t"] & g^*(P_{s,t}) \wedge g^*(P_{st,r}) \arrow[d, "\mu \wedge \mu"] \\
g^*(P_{t,r})^{s'} \wedge g^*(P_{s,tr}) \arrow[r, "\mu^{s'} \wedge \mu"] & P^{s'}_{t',r'} \wedge P_{s',t'r'} \arrow[r, "\phi"] & P_{s',t'} \wedge P_{s't',r'}
\end{tikzcd} \tag{33}$$

Wir betrachten nun wieder den in (30) gebildeten S-Modul $\mathbf{V}(\mathfrak{A})^\varepsilon$. Um auch die Objekte $P_{s,t}$ zu repräsentieren, wählen wir für jedes $X \in \mathbf{T}$ eine injektive Abbildung

$$\mathbf{p}\colon S(X) \times S(X) \to \mathbf{N}_X, \qquad (s, t) \mapsto \mathbf{p}_{s,t}, \tag{34}$$

mit der Eigenschaft $\mathbf{p}_{s,t} \neq \mathbf{s}_X$ für alle s, $t \in S(X)$. Für die Abbildungen ε: $\mathbf{N}_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{A}(X))$ gelte dann $\varepsilon(\mathbf{p}_{s,t}) = P_{s,t}$ für alle s, $t \in S(X)$. Wir vergrößern nun die Kategorien $\mathscr{K}(\mathfrak{A})_X$ zu Kategorien $\mathscr{K}(\mathbf{P})_X \subset \mathbf{V}(\mathfrak{A})^\varepsilon_X$, indem wir zusätzlich verlangen:

(f) die $\mu_g(s, t)\colon g^*(\mathbf{p}_{s,t}) \to \mathbf{p}_{s',t'}$ sind in $\mathscr{K}(\mathbf{P})_Y$,

(g) die $\phi_{s,t,r}\colon \mathbf{p}^s_{t,r} \wedge \mathbf{p}_{s,tr} \to \mathbf{p}_{s,t} \wedge \mathbf{p}_{st,r}$ sind in $\mathscr{K}(\mathbf{P})_X$ für alle s, t, r aus $S(X)$, $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$.

Satz 4.2. *Die Kategorien $\mathscr{K}(\mathbf{P})_X$, $X \in \mathbf{T}$, sind für jeden 3-Kozykel $\mathbf{P}$ von S in $\mathfrak{A}$ atomar.*

Beweis. Wir können ohne Einschränkung annehmen, daß die a, c, e in $\mathscr{K}(\mathbf{P})_X$ Identitäten sind (indem wir zu den Kategorien $\mathscr{K}(\mathbf{P})_X/\mathscr{K}(\mathfrak{A})'_X$ übergehen). Die $\mathscr{K}(\mathbf{P})_X$-Morphismen

$$\tilde{\phi}_{s,t,r}\colon \mathbf{p}^s_{t,r} \to \mathbf{p}_{s,t} \wedge \mathbf{p}_{st,r} \wedge \mathbf{p}^0_{s,tr}, \qquad s, t, r \in S(X),$$

seien definiert als $\phi_{s,t,r}$ "multipliziert" mit $\mathbf{p}^0_{s,tr}$. Auch die $\mathscr{K}(\mathbf{P})_X$-Morphismen

$$\gamma_{s,t}\colon \mathbf{p}^s_{t,1} \to \mathbf{p}_{st,1}, \qquad \beta_r\colon \mathbf{p}_{1,r} \to \mathbf{p}_{1,1}, \qquad s, t, r \in S(X),$$

seien definiert wie in Abschnitt 1. Wir vergrößern nun die Mengen $\mathscr{E}(\mathfrak{A})_X$ aus dem Beweis von Satz 4.1 zu Teilmengen $\mathscr{E}(\mathbf{P})_X$, indem wir für alle s, t, $r \in S(X)$, $z \in S(Y)$ und $g\colon Y \to X$ aus $\mathbf{T}$ die Morphismen

$$\tilde{\phi}_{s,t,r}, \qquad \gamma_{s,t}, \qquad \beta_r, \qquad \mu_g(s,t), \qquad \mu_g(s,t)^z$$

hinzunehmen. Man sieht wie im Beweis von Satz 4.1, bzw. Satz 1.1, daß jeder $\mathscr{K}(\mathbf{P})_X$-Morphismus eine Komposition von Expansionen der Morphismen aus $\mathscr{E}(\mathbf{P})_X$ und deren Inversen ist; insbesondere gilt dies für $g^*(\gamma)$ und $g^*(\beta)$ in $\mathscr{K}(\mathbf{P})_Y$ wegen

$$\mu_g(st, 1) \circ g^*(\gamma_{s,t}) = \gamma_{s',t'} \circ \mu_g(t, 1)^{s'} \circ \omega_{s,g}(\mathbf{p}_{t,1}),$$
$$\mu_g(1,1) \circ g^*(\beta_r) = \beta_{r'} \circ \mu_g(1, r),$$

was aus (33) für $r = 1$, bzw. für $s = t = 1$ folgt. Indem man dann passende Rangfunktionen rg: $\mathrm{Ob}(\mathscr{K}(\mathbf{P})_X) \to \mathbb{N}$ definiert, kann man die Behauptung wie in Satz 1.1 beweisen. Zu erwähnen bleibt lediglich die Gleichheit

$$\eta_X = \mu_{\mathrm{id}}(s,t)\colon \mathrm{id}_X^*(\mathbf{p}_{s,t}) \to \mathbf{p}_{s,t}, \qquad s, t \in S(X),$$

die sich aus (32) für $h = g = \mathrm{id}_X$ ergibt. Q.E.D.

Es sei nun $\mathbf{Q} = (Q_{s,t}; \mu_g; \psi_{s,t,r})$ ein weiterer 3-Kozykel von S in A, und α: $\mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ sei ein Morphismus von 3-Kozykeln wie in [8]. Dieser besteht aus $\mathfrak{A}(X)$-Morphismen

$$\alpha_X(s,t)\colon Q_{s,t} \to P_{s,t}, \qquad s, t \in S(X),$$

derart daß die folgenden beiden Diagramme kommutativ sind für alle $\mathbf{T}$-Morphismen $g\colon Y \to X$.

$$\begin{tikzcd} g^*(Q_{s,t}) \arrow[r, "g^*(\alpha)"] \arrow[d, "\mu"'] & g^*(P_{s,t}) \arrow[d, "\mu"] \\ Q_{s',t'} \arrow[r, "\alpha"] & P_{s',t'} \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd} Q^s_{t,r} \wedge Q_{s,tr} \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\alpha^s \wedge \alpha"'] & Q_{s,t} \wedge Q_{st,r} \arrow[d, "\alpha \wedge \alpha"] \\ P^s_{t,r} \wedge P_{s,tr} \arrow[r, "\phi"] & P_{s,t} \wedge P_{st,r} \end{tikzcd}$$

Satz 4.2 läßt sich wie folgt zu einem Kohärenzsatz für die Morphismen $\alpha_X(s,t)$ ergänzen. Außer den Abbildungen (34) wählen wir injektive Abbildungen

$$\mathbf{q}\colon S(X) \times S(X) \to \mathbf{N}_X, \qquad (s,t) \mapsto \mathbf{q}_{s,t},$$

mit $\mathbf{q}_{s,t} \neq \mathbf{s}_X$ und $\mathbf{q}(S(X) \times S(X))$ disjunkt zu $\mathbf{p}(S(X) \times S(X))$. Für die Abbildungen $\varepsilon\colon \mathbf{N}_X \to \mathrm{Ob}(\mathfrak{A}(X))$ gelte dann

$$\varepsilon(\mathbf{q}_{s,t}) = Q_{s,t}, \qquad s, t \in S(X).$$

Die Unterkategorien $\mathscr{K}(\mathbf{P})_X$ von $\mathscr{K}(\mathfrak{A})_X$ erweitern wir nun zu Unterkategorien $\mathscr{K}(\alpha)_X$, indem wir noch verlangen:

(h) die $\psi_{s,t,r}$: $\mathbf{q}^s_{t,r} \wedge \mathbf{q}_{s,tr} \to \mathbf{q}_{s,t} \wedge \mathbf{q}_{st,r}$ und $\alpha_{s,t}$: $\mathbf{q}_{s,t} \to \mathbf{p}_{s,t}$ sind in $\mathscr{K}(\alpha)_X$,

(i) die $\mu_g(s,t)$: $g^*(\mathbf{q}_{s,t}) \to \mathbf{q}_{s',t'}$ sind in $\mathscr{K}(\alpha)_Y$ für alle s, t, $r \in S(X)$ und g: $Y \to X$ aus $\mathbf{T}$.

SATZ 4.3. *Die Kategorien* $\mathscr{K}(\alpha)_X$, $X \in \mathbf{T}$, *sind atomar für jeden Morphismus* α: $\mathbf{Q} \to \mathbf{P}$ *zwischen* 3-*Kozykeln* $\mathbf{Q}$, $\mathbf{P}$ *von* S *in* $\mathfrak{A}$.

Der Beweis ergibt sich leicht, indem man die Beweise von Satz 4.2 und Satz 1.2 entsprechend ergänzt.

5.

Wir beweisen in diesem Abschnitt einen Kohärenzsatz für Morphismen zwischen Komplexen symmetrischer Picard-Kategorien. Aus solchen Morphismen erhält man Homomorphismen zwischen den abgeleiteten Kohomologiesequenzen, wie in [8] ausgeführt wird.

Gegeben seien zwei kohärente Sequenzen

$$\mathscr{C}_0 \rightrightarrows \mathscr{C}_1 \substack{\to\\\to\\\to} \mathscr{C}_2 \substack{\to\\\to\\\to\\\to} \mathscr{C}_3 \cdots, \qquad \mathscr{D}_0 \rightrightarrows \mathscr{D}_1 \substack{\to\\\to\\\to} \mathscr{D}_2 \substack{\to\\\to\\\to\\\to} \mathscr{D}_3 \cdots$$

symmetrischer Picard-Kategorien wie in [5, §3]. Die hiermit gegebenen Homomorphismen von $\mathscr{C}_n$ nach $\mathscr{C}_{n+1}$ und von $\mathscr{D}_n$ nach $\mathscr{D}_{n+1}$ bezeichnen wir mit $d_0, \ldots, d_{n+1}$; ferner bezeichne

$$\alpha_{i,j}\colon d_i \circ d_j \to d_{j+1} \circ d_i, \qquad i \leqslant j,$$

die zugehörigen kohärenten natürlichen Transformationen. Zwischen diesen Sequenzen sei ein Morphismus (Θ, π) gegeben,

$$\begin{tikzcd} \cdots \arrow[r] & \mathscr{C}_n \arrow[r, "d_j"] \arrow[d, "\Theta_n"] & \mathscr{C}_{n+1} \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\Theta_{n+1}"] \arrow[dl, phantom, "\pi_j"] & \mathscr{C}_{n+2} \arrow[r] \arrow[d, "\Theta_{n+2}"] \arrow[dl, phantom, "\pi_i"] & \cdots \\ \cdots \arrow[r] & \mathscr{D}_n \arrow[r, "d_j"'] & \mathscr{D}_{n+1} \arrow[r, "d_i"'] & \mathscr{D}_{n+2} \arrow[r] & \cdots, \end{tikzcd} \tag{35}$$

bestehend aus Homomorphismen $\Theta_n\colon \mathscr{C}_n \to \mathscr{D}_n$, $n \geqslant 0$, und kohärenten natürlichen Transformationen $\pi_j: d_j \circ \Theta_n \to \Theta_{n+1} \circ d_j$, $0 \leqslant j \leqslant n+1$. Man wähle paarweise disjunkte Mengen $\mathbf{M}_n$ und $\mathbf{N}_n$, $n \geqslant 0$, und Abbildungen

$$\varepsilon: \mathbf{M}_n \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_n), \qquad \varepsilon: \mathbf{N}_n \to \mathrm{Ob}(\mathscr{D}_n) \tag{36}$$

mit $\varepsilon(\mathbf{s}_n) = I_{\mathscr{C}_n}$, bzw. $\varepsilon(\mathbf{s}_n) = I_{\mathscr{D}_n}$, wobei $\mathbf{s}_n$ ein ausgezeichnetes Element in $\mathbf{M}_n$, bzw. $\mathbf{N}_n$ sei. Wir definieren Wortmengen $\mathbf{V}(\mathscr{C}_n)$ und $\mathbf{V}(\Theta_n)$ über dem Alphabet

$$\left(\coprod_n \mathbf{M}_n \amalg \mathbf{N}_n\right) \amalg \{(\ ,\ ), \wedge, {}^0\} \amalg \{\mathbf{d}_0, \mathbf{\Theta}_0, \mathbf{d}_1, \mathbf{\Theta}_1, \ldots\}$$

rekursiv durch folgende Bedingungen:

(a) $\mathbf{M}_n \subset \mathbf{V}(\mathscr{C}_n)$ und $\mathbf{N}_n \subset \mathbf{V}(\Theta_n)$,

(b) mit u, $v \in \mathbf{V}(\mathscr{C}_n)$, bzw. $\mathbf{V}(\Theta_n)$ ist $(u \wedge v)$ und $(v)^0$ in $\mathbf{V}(\mathscr{C}_n)$, bzw. $\mathbf{V}(\Theta_n)$ und $\mathbf{d}_0(v), \ldots, \mathbf{d}_{n+1}(v)$ in $\mathbf{V}(\mathscr{C}_{n+1})$, bzw. $\mathbf{V}(\Theta_{n+1})$,

(c) für $v \in \mathbf{V}(\mathscr{C}_n)$ ist $\mathbf{\Theta}_n(v)$ in $\mathbf{V}(\Theta_n)$ für alle $n \geqslant 0$.

Die Abbildungen (36) setze man fort zu Abbildungen

$$\varepsilon: \mathbf{V}(\mathscr{C}_n) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{C}_n), \qquad \varepsilon: \mathbf{V}(\Theta_n) \to \mathrm{Ob}(\mathscr{D}_n)$$

durch $\varepsilon((u \wedge v)) = \varepsilon(u) \wedge \varepsilon(v)$, $\varepsilon((v)^0) = \varepsilon(v)^0$, $\varepsilon(\mathbf{d}_i(v)) = d_i(\varepsilon(v))$ und $\varepsilon(\mathbf{\Theta}_n(v)) = \Theta_n(\varepsilon(v))$ für alle u, $v \in \mathbf{V}(\mathscr{C}_n)$, bzw. $\mathbf{V}(\Theta_n)$ und $n \geqslant 0$. Mit den Kategorien $\mathbf{V}(\mathscr{C}_n)^\varepsilon$ und $\mathbf{V}(\Theta_n)^\varepsilon$ erhält man nun auf kanonische Weise die Sequenzen

$$\mathbf{V}(\mathscr{C}_0)^\varepsilon \rightrightarrows \mathbf{V}(\mathscr{C}_1)^\varepsilon \mathrel{\substack{\to\\ \to\\ \to}} \mathbf{V}(\mathscr{C}_2)^\varepsilon \cdots, \qquad \mathbf{V}(\Theta_0)^\varepsilon \rightrightarrows \mathbf{V}(\Theta_1)^\varepsilon \mathrel{\substack{\to\\ \to\\ \to}} \mathbf{V}(\Theta_2)^\varepsilon \cdots$$

mit Homomorphismen d_i und natürlichen Transformationen $\alpha_{i,j}$, cf. [5]. Ferner induziert (35) einen Morphismus zwischen diesen Sequenzen:

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathbf{V}(\mathscr{C}_n)^\varepsilon \arrow[r, "d_j"] \arrow[d, "\mathbf{\Theta}_n"] \arrow[dr, phantom, "\pi_j"] & \mathbf{V}(\mathscr{C}_{n+1})^\varepsilon \arrow[r, "d_i"] \arrow[d, "\mathbf{\Theta}_{n+1}"] \arrow[dr, phantom, "\pi_i"] & \mathbf{V}(\mathscr{C}_{n+2})^\varepsilon \arrow[r] \arrow[d, "\mathbf{\Theta}_{n+2}"] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathbf{V}(\Theta_n)^\varepsilon \arrow[r, "d_j"'] & \mathbf{V}(\Theta_{n+1})^\varepsilon \arrow[r, "d_i"'] & \mathbf{V}(\Theta_{n+2})^\varepsilon \arrow[r] & \cdots.
\end{tikzcd}$$

Wir definieren nun rekursiv die folgenden Unterkategorien $\mathscr{K}(\mathscr{C}_n) \subset \mathbf{V}(\mathscr{C}_n)^\varepsilon$ und $\mathscr{K}(\Theta_n) \subset \mathbf{V}(\Theta_n)^\varepsilon$:

(a) die Komponenten von a, c, e, i sind in $\mathscr{K}(\mathscr{C}_n)$, bzw. $\mathscr{K}(\Theta_n)$,

(b) die Komponenten der $t(d_0), \ldots, t(d_{n+1})$ sind in $\mathscr{K}(\mathscr{C}_{n+1})$, bzw. $\mathscr{K}(\Theta_{n+1})$,

(c) die Komponenten der $\alpha_{i,j}$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$, sind in $\mathscr{K}(\mathscr{C}_{n+2})$, bzw. $\mathscr{K}(\Theta_{n+2})$,

(d) die Komponenten von $t(\Theta_n)$ sind in $\mathscr{K}(\Theta_n)$, $n \geqslant 0$,

(e) die Komponenten der π_j, $0 \leqslant j \leqslant n+1$, sind in $\mathscr{K}(\Theta_{n+1})$,

(f) für β in $\mathscr{K}(\mathscr{C}_n)$, bzw. $\mathscr{K}(\Theta_n)$ sind $d_0(\beta), \dots, d_{n+1}(\beta)$ in $\mathscr{K}(\mathscr{C}_{n+1})$, bzw. $\mathscr{K}(\Theta_{n+1})$,

(g) für β in $\mathscr{K}(\mathscr{C}_n)$ ist $\Theta_n(\beta)$ in $\mathscr{K}(\Theta_n)$,

(h) mit α, β in $\mathscr{K}(\mathscr{C}_n)$, bzw. $\mathscr{K}(\Theta_n)$, sind $\alpha \wedge \beta$, α^0, $\beta \circ \alpha$ (wenn definiert) und α^{-1} in $\mathscr{K}(\mathscr{C}_n)$, bzw. in $\mathscr{K}(\Theta_n)$.

Nach [5] wissen wir bereits, daß die Kategorien $\mathscr{K}(\mathscr{C}_n)$, $n \geqslant 0$, atomar sind.

SATZ 5.1. *Die Kategorien $\mathscr{K}(\Theta_n)$, $n \geqslant 0$, sind atomar, wenn für alle $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$ das folgende Diagramm kommutativ ist.*

$$\begin{array}{ccccc} d_i d_j \Theta_n & \xrightarrow{d_i(\pi)} & d_i \Theta_{n+1} d_j & \xrightarrow{\pi} & \Theta_{n+2} d_i d_j \\ {\scriptstyle \alpha_{i,j}} \big\downarrow & & & & \big\downarrow {\scriptstyle \Theta_{n+2}(\alpha_{i,j})} \\ d_{j+1} d_i \Theta_n & \xrightarrow{d_{j+1}(\pi)} & d_{j+1} \Theta_{n+1} d_i & \xrightarrow{\pi} & \Theta_{n+2} d_{j+1} d_i \end{array}$$

Beweis. Ohne Einschränkung nehmen wir an, daß die Kategorien $\mathscr{K}(\mathscr{C}_n)$ und $\mathscr{K}(\Theta_n)$ strikt assoziativ, kommutativ und unitär sind (man gehe zu geeigneten Faktorkategorien über). Die Teilmengen $\mathscr{E}(\Theta_n)$ von $\mathrm{Mor}(\mathscr{K}(\Theta_n))$ definieren wir rekursiv durch:

(a) die Komponenten von i, ρ, k, $t(\Theta_n)$, $\lambda(\Theta_n)$, $\kappa(\Theta_n)$ sind in $\mathscr{E}(\Theta_n)$,

(b) die Komponenten von π_i, $t(d_i)$, $\lambda(d_i)$, $\kappa(d_i)$, $0 \leqslant i \leqslant n+1$, sind in $\mathscr{E}(\Theta_{n+1})$,

(c) die Komponenten der $\alpha_{i,j}$, $0 \leqslant i \leqslant j \leqslant n+1$, sind in $\mathscr{E}(\Theta_{n+2})$,

(d) für $\beta \in \mathscr{E}(\Theta_n)$, $\beta \neq i_v, \rho_v, k_{u,v}$, ist $d_i(\beta)$, $0 \leqslant i \leqslant n+1$, in $\mathscr{E}(\Theta_{n+1})$;

für alle $k_{u,v}$ und $t_{u,v}$ gelte dabei stets wieder $u, v \neq \mathbf{s}_n$, und ohne Einschränkung enthalte $\mathscr{E}(\Theta_n)$ auch die Identitäten. Man sieht nun mit derselben Methode wie in den vorangegangenen Beweisen, daß jeder Morphismus aus $\mathscr{K}(\Theta_n)$ eine Komposition von Expansionen der Morphismen aus $\mathscr{E}(\Theta_n) \cup \mathscr{E}(\Theta_n)^{-1}$ ist. Mit passenden Rangfunktionen $\mathrm{Ob}(\mathscr{K}(\Theta_n)) \to \mathbb{N}$ kann man dann den Beweis mit der üblichen Induktion abschließen.

LITERATUR

1. M. ARTIN, A. GROTHENDIECK, ET J. L. VERDIER, S.G.A. 4, "Lecture Notes in Mathematics No. 305," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1973.
2. A. GROTHENDIECK, S.G.A. 1, "Lecture Notes in Mathematics No. 224," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1971.
3. G. M. KELLY AND R. STREET, Review of the elements of 2-categories, Category Seminar, *in* "Lecture Notes in Mathematics No. 420," Springer-Verlag, Berlin/New York, 1974.
4. R. STREET, Two constructions on lax functors, *Cahiers Topologie Géom. Différentielle* **13** (1972), 217–264.
5. M. TAKEUCHI AND K.-H. ULBRICH, Complexes of categories with abelian group structure, *J. Pure Appl. Algebra* **27** (1983), 61–73.
6. K.-H. ULBRICH, Kohärenz in Kategorien mit Gruppenstruktur, *J. Algebra* **72** (1981), 279–295.
7. K.-H. ULBRICH, Kohärenz in Kategorien mit Gruppenstruktur, II, *J. Algebra* **81** (1983), 279–294.
8. K.-H. ULBRICH, Group cohomology for Picard categories, *J. Algebra*, in press.

Printed in Belgium