View metadata, citation and similar papers at core.ac.uk
brought to you by CORE
provided by Elsevier - Publisher Connector

Available online at www.sciencedirect.com
ScienceDirect
J. Math. Pures Appl. 94 (2010) 433–446
JOURNAL DE MATHÉMATIQUES PURES ET APPLIQUÉES
www.elsevier.com/locate/matpur

Existence de l'application exponentielle riemannienne d'un groupe de difféomorphismes muni d'une métrique de Sobolev

Nadji Hermas [a,*], Smaïl Djebali [b]

[a] *Département de Mathématiques et d'Informatique, Université Kasdi Merbah, Ouargla, B.P. 511 Route de Ghardaïa, 30000 Ouargla, Algérie*
[b] *Département de Mathématiques, E.N.S., B.P. 92, Kouba, 16050 Alger, Algérie*

Reçu le 22 mars 2010

Disponible sur Internet le 26 novembre 2009

Résumé

Nous démontron l'existence de géodésiques des groupes de Lie riemanniens faibles,

$$\left(\mathit{Diff}\,H^{\infty}(\mathbb{R}^n), g_{H^k}\right) = \left(\mathit{Diff}(\mathbb{R}^n) \cap \left(Id + \bigcap_{k\in\mathbb{N}} H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\right), g_{H^k}\right),$$

où g_{H^k} est la métrique de Sobolev (faible) d'ordre k. Ensuite, nous étudions l'application exponentielle riemannienne induite par cette métrique. Pour $k=1$, le résultat obtenu implique l'existence locale et l'unicité de solution dans $C^{\infty}(\ \ ; H^{\infty}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$ de l'analogue n-dimensionnel de l'équation de Camassa–Holm sur $\mathbb{R}^n$.
© 2009 Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

Abstract

We prove the existence of geodesics of the weak Riemannian Lie group

$$\left(\mathit{Diff}\,H^{\infty}(\mathbb{R}^n), g_{H^k}\right) = \left(\mathit{Diff}(\mathbb{R}^n) \cap \left(Id + \bigcap_{k\in\mathbb{N}} H^k(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\right), g_{H^k}\right),$$

where g_{H^k} is the weak Sobolev metric of order k. Next, we study the Riemannian exponential mapping induced by this metric. For $k=1$, the result immediately gives the local existence of solution in $C^{\infty}(\ \ ; H^{\infty}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$ of the n-dimensional analog of the Camassa–Holm's equation on the Euclidean space $\mathbb{R}^n$.
© 2009 Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.

MSC : primary 58B20, 58D05, 58D15, 58E12

Mots-clés : Groupes de difféomorphismes ; Métriques de Sobolev ; Géodésiques ; Application exponentielle riemannienne

* Auteur correspondant.
Adresses e-mail : hermasnadji@yahoo.fr (N. Hermas), djebali@ens-kouba.dz (S. Djebali).

0021-7824/$ – see front matter © 2009 Elsevier Masson SAS. Tous droits réservés.
doi:10.1016/j.matpur.2009.11.004

1. Introduction

L'existence des géodésiques et de l'application exponentielle d'une variété riemannienne de dimension finie est l'un des résultats classiques de la géométrie riemannienne. Dans cet article, nous étendons ce résultat aux groupes de Lie riemanniens faibles,

$$\big(\mathit{Diff}\,H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big), g_{H^k}\big) = \big(\mathit{Diff}\big(\mathbb{R}^n\big) \cap \big(\mathit{Id} + H^\infty\big(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\big)\big), g_{H^k}\big), \quad k \in \mathbb{N}^*,$$

où $H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) = \bigcap_{j\in\mathbb{N}} H^j(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ et g_{H^k} est la H^k-métrique (faible) de Sobolev définie sur $\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ en utilisant la trivialisation droite de Maurer–Cartan du fibré tangent $T\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Pour $k = 1$, le résultat obtenue implique immédiatement l'existence locale et l'unicité de solution dans $C^\infty(\quad; H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$ de l'analogue n-dimensionnel de l'équation de Camassa–Holm [4] sur $\mathbb{R}^n$.

Nous avons vérifié, dans une première étape, que le groupe $\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de l'espace affine de Fréchet $\mathit{Id} + H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ et que les applications

$$(f,g) \in \mathit{Diff}\,H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big) \times \mathit{Diff}\,H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big) \mapsto f \circ g \in \mathit{Diff}\,H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big),$$

et

$$f \in \mathit{Diff}\,H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big) \mapsto f^{-1} \in \mathit{Diff}\,H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big),$$

sont de classe C^∞ au sens usuel de Fréchet, ce qui entraîne que $\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ est un groupe de Lie–Fréchet ouvert de $\mathit{Id} + H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. De plus, nous avons montré que ce groupe est « régulier au sens de Milnor ». Cette notion de régularité présentée de façon très claire dans [12] (paragraphe 38, chapitre VIII), est importante puisque elle affirme que la donnée de la vitesse d'une courbe suffit à déterminer à un facteur prés cette courbe ; ceci nous autorise par exemple à écrire l'équation des géodésiques en utilisant seulement les vitesse des courbes. Dans [12], on trouve une étude claire sur les groupes de Lie modelés sur les espaces convenables (c'est-à-dire les espaces localement convexes complets au sens de Mackey), et dans [11], on trouve une révision détaillée concernant la théorie des groupes de Lie–Fréchet et le théorème (hard) des fonctions implicites de Nash–Moser.

Dans cet article, nous avons utilisé, comme cadre abstrait, la théorie des groupes de Lie de dimension infinie exposée dans la référence [12]. Mais il y a lieu d'attirer l'attention sur le fait que les auteurs de cette monographie ont adopté la notion globale de la dérivabilité au sens de Hadamard dans la construction de la théorie des variétés différentielles de dimension infinie modelées sur les espaces convenables. Nous rappelons que la définition usuelle de Fréchet implique évidement la définition de Hadamard et que l'inverse est un énoncé flou dans le cas général des espaces vectoriels topologiques. Parallèlement on signale que la dérivabilité au sens de Hadamard est plus convenable aux questions d'analyse globale que celle de Fréchet. Dans le cadre des variétés de Banach, Faure [9] a montré que les différentes classes de Hölder $C^{k,s}$ avec $(k,s) \in (\mathbb{N} \cup \{\infty\}) \times]0,1]$ sont identiques pour les deux définitions.

Puisque la structure différentielle de $\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ n'est pas de Banach, nous ne pouvons pas appliquén directement le théorème classique de Cauchy–Lipschitz pour montrer l'existence de l'application exponentielle riemannienne de $(\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n), g_{H^k})$. Il faut signaler que ce théorème n'est en général pas vrai pour les variétés de Fréchet (voir [12]). A cet effet, nous avons introduit les espaces fonctionnels $HC_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ et les groupes de difféomorphismes $\mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n)$, $r \in [1,\infty[$. Dans notre étude sur ces ensembles, on a montré particulièrement que le groupe $\mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n)$, $r \geqslant 1$, est un groupe topologique ouvert de l'espace affine de Banach $\mathit{Id} + HC_0^r(\mathbb{R}^n)$.

Pour montrer l'existence de l'application exponentielle riemannienne du groupe de Lie riemannien (faible) $(\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n), g_{H^k})$, on applique le théorème de Cauchy–Lipschitz à une équation différentielle convenable définie sur $\mathit{Diff}\,HC_0^{2k+\tau}(\mathbb{R}^n)$ ($\tau \in]0,1[$), puis on démontre que, si la donnée initiale appartient à $T\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$, alors la solution obtenue prend ses valeurs dans $\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Dans [15], l'auteur a présenté des résultats analogues inspirés des articles [5] et [6] pour le groupe $\mathit{Diff}(S^1)$ et le groupe de Virasoro–Bott $S^1 \times_c \mathit{Diff}(S^1)$, plus précisément, il a montré par une méthode non complètement claire l'existence des géodésiques $\varphi \in C^3(]-2,2[; \mathit{Diff}(S^1))$ et $\psi \in C^3(]-2,2[; S^1 \times_c \mathit{Diff}(S^1))$ pour les H^k-métriques. D'autre part, il a signalé dans les énoncés 6.9, 6.10 et 6.11 de [15] que les applications,

$$(u,f) \in HC_0^{n+k}(\mathbb{R}) \times \big(\mathit{Id} + HC_0^n(\mathbb{R})\big) \mapsto u \circ f \in HC_0^n(\mathbb{R}),$$

et

$$f \in \mathit{Diff}\,HC_0^{n+k}(\mathbb{R}) \mapsto f^{-1} \in \mathit{Diff}\,HC_0^{n}(\mathbb{R}),$$

sont seulement de classe « C^k au sens faible », une notion de dérivabilité exposée dans [16], et on modifie ici ces énoncés en vérifiant que les applications précédentes sont de classe C^k au sens usuel de Fréchet.

Enfin, nous signalons que les difféomorphismes considérés dans cet article sont plus généraux que ceux utilisés dans les papiers [3] et [8].

2. Groupes de difféomorphismes

2.1. Conventions

Nous utiliserons les ensembles suivants d'applications.

$\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, l'espace de Hölder d'exposant $r \in \mathbb{R}_+$.
$\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, le complété de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ dans $\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$. On vérifie que $u \in \mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ si, et seulement si, $\partial^\alpha u(x) \to 0$, $\|x\|_2 \to \infty$, pour $|\alpha| \leqslant [r]$, et

$$\lim_{R\to\infty} \sup_{0<\|\xi-\eta\|\leqslant\delta,\, \|\xi\|\geqslant R} \frac{\|\partial^\alpha u(\xi) - \partial^\alpha u(\eta)\|_2}{\|\xi-\eta\|_2^{r-[r]}} = 0, \quad \forall\delta>0,\ |\alpha| = [r].$$

$\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) = \bigcap_{r\in\mathbb{R}_+} \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.
$\mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) = \bigcap_{r\in\mathbb{R}_+} \mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.
$H^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, l'espace de Sobolev d'exposant $r \in \mathbb{R}$.
$H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) = \bigcap_{r\in\mathbb{R}} H^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. D'après l'inégalité de Sobolev, on a

$$H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m).$$

$H\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) = H^{[r]}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \cap \mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $r \in \mathbb{R}_+$.
$H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) = H^{[r]}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \cap \mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, $r \in \mathbb{R}_+$. $H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ coïncide avec le complété de $\mathcal{C}_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$ dans $H\mathcal{C}^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.
$\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des $C^{[r]}$-difféomorphismes $Id + u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avec $u \in H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.
$\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$, l'ensemble des C^∞-difféomorphismes $Id + u : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ avec $u \in H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

2.2. Quelques résultats

Le lemme suivant est une variante d'un lemme de l'analyse globale nommé « Omega lemma » selon [1].

Lemme 2.1. *Soit r et τ des nombres réels tels que $r \geqslant 1$ et $0 \leqslant \tau \leqslant r$. Alors*

i) *Pour tout $(u, f) \in H\mathcal{C}_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \times (Id + \mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$, on a $u \circ f \in H\mathcal{C}_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, et*

$$\|u \circ f\|_{H\mathcal{C}_0^\tau} \leqslant \mathrm{const}(\tau, n, m, f)\|u\|_{H\mathcal{C}_0^\tau},$$

où la fonction $f \in Id + \mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) \mapsto \mathrm{const}(\tau, n, m, f) \in \mathbb{R}_+$ est localement bornée.

ii) *Quel que soit $j \in \mathbb{N}^*$, l'application $f \mapsto (u \mapsto u \circ f)$ est de classe Lip^{j-1} de $Id + \mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{L}(H\mathcal{C}_0^{\tau+j}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m); H\mathcal{C}_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m))$.*

iii) *Pour tout $j \in \mathbb{N}$, l'application,*

$$\begin{aligned}(u, f) \in\ & H\mathcal{C}_0^{\tau+j}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \times \big(Id + \mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\big),\\ & \mapsto u \circ f \in H\mathcal{C}_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\end{aligned}$$

est de classe C^j.

Démonstration. Soit $(u, f) \in H\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \times (Id + \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$. Il existe un nombre positif R_f tel que $f|_{\{\|x\|_2 > R_f\}}$ soit un difféomorphisme de $\{\|x\|_2 > R_f\}$ dans $f(\{\|x\|_2 > R_f\})$, et tel que $\|1/J_f\|_{L^\infty(\|x\|_2 > R_f)} < \infty$, donc on peut écrire :

$$\begin{aligned}
\|u\circ f\|_{L^2}^2 &= \int_{\mathbb{R}^n} \big\|u\circ f(x)\big\|_2^2\,dx \\
&= \int_{\{\|x\|_2\leqslant R_f\}} \big\|u\circ f(x)\big\|_2^2\,dx + \int_{\{\|x\|_2> R_f\}} \big\|u\circ f(x)\big\|_2^2\,dx \\
&\leqslant \|u\|_{L^\infty}^2 mes\big\{\|x\|_2\leqslant R_f\big\} + \int_{f(\|x\|_2>R_f)} \big\|u(y)\big\|_2^2 J_{f^{-1}}(y)\,dy \\
&\leqslant \|u\|_{L^\infty}^2 mes\big\{\|x\|_2\leqslant R_f\big\} + \|1/J_f\|_{L^\infty(\|x\|_2>R_f)}\|u\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

D'où $u\circ f\in H\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ puisque $u\circ f\in \mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}^m)$.

Soit $\tau\in\,]0,1[$ et $(u,f)\in H\mathcal{C}_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)\times(Id+\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$. Pour tout $(\delta,R)\in\mathbb{R}_+^*\times\mathbb{R}_+^*$, on a :

$$\sup_{\substack{0<\|x-y\|_2\leqslant\delta\\ \|x\|_2\geqslant R}} \frac{\|u\circ f(x)-u\circ f(y)\|_2}{\|x-y\|_2^\tau} \leqslant \big\|\big(\partial_k f^j\big)\big\|_{L^\infty}^\tau \sup_{\substack{0<\|\xi-\eta\|_2\leqslant\widetilde{\delta}\\ \|\xi\|_2\geqslant R-\|f-Id\|_{L^\infty}}} \frac{\|u(\xi)-u(\eta)\|_2}{\|\xi-\eta\|_2^\tau},$$

avec $\widetilde{\delta}=\delta\|(\partial_k f^j)\|_{L^\infty}$. Donc $u\circ f\in H\mathcal{C}_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, et

$$\|u\circ f\|_{H\mathcal{C}_0^\tau}\leqslant \mathrm{const}(\tau,n,m,f)\|u\|_{H\mathcal{C}_0^\tau}.$$

Le cas $\tau\in[1,r]$ résulte du cas précédent et du fait que $uv\in H\mathcal{C}_0^\ell(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ quel que soit

$$(u,v)\in H\mathcal{C}_0^\ell\big(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}\big)\times\mathcal{C}_0^\ell\big(\mathbb{R}^n;\mathbb{C}\big),\quad \ell\in\mathbb{R}_+.$$

Concernant ii), on pose $L(f)(u)=u\circ f$. Pour $j=1$, on écrit grâce à la formule de Taylor :

$$\begin{aligned}
\big\{L(f)-L(g)\big\}(u) &= u\circ f-u\circ g \\
&= \sum_{j=1}^n \big(f^j-g^j\big)\int_0^1 \partial_j u\big(g+\tau(f-g)\big)\,d\tau
\end{aligned}$$

avec $u\in H\mathcal{C}_0^{\tau+1}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ et $(f,g)\in(Id+\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))\times(Id+\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$. Ainsi donc,

$$\big\|\big\{L(f)-L(g)\big\}(u)\big\|_{H\mathcal{C}_0^\tau}\leqslant \mathrm{const}(\tau,n,f,g)\|f-g\|_{\mathcal{C}_0^r}\|u\|_{H\mathcal{C}_0^{\tau+1}},$$

et

$$\big\|L(f)-L(g)\big\|_{\mathcal{L}(H\mathcal{C}_0^{\tau+1};H\mathcal{C}_0^\tau)}\leqslant \mathrm{const}(\tau,n,f,g)\|f-g\|_{\mathcal{C}_0^r},$$

où la fonction « $(f,g)\mapsto\mathrm{const}(\tau,n,f,g)$ » est localement bornée. Ceci prouve le cas $j=1$.

D'autre part, on voit que l'application L est Gâteaux-différentiable de $Id+\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ dans $\mathcal{L}(H\mathcal{C}_0^{\tau+1};H\mathcal{C}_0^\tau)$, et que

$$DL(f)(v)(u)=\sum_{j=1}^n v^j\partial_j u\circ f.$$

Par conséquent,

$$DL(f)(v)(u)-DL(g)(v)(u)=\sum_{1\leqslant j,\ \ell\leqslant n} v^j\big(f^\ell-g^\ell\big)\int_0^1 \partial_\ell\partial_j u\big(g+\tau(f-g)\big)\,d\tau,$$

et

$$\big\|DL(f)(v)(u)-DL(g)(v)(u)\big\|_{H\mathcal{C}_0^\tau}\leqslant \mathrm{const}(\tau,n,f,g)\|v\|_{\mathcal{C}_0^r}\|u\|_{H\mathcal{C}_0^{\tau+2}}\|f-g\|_{\mathcal{C}_0^r},$$

ce qui prouve le cas $j=2$.

On démontre les cas $j \geqslant 3$ de la même manière.

Pour montrer iii), il suffit de vérifier la continuité des applications :

$$\begin{aligned}(u,f) \in\ & HC_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \times \left(Id + \mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\right)\\ & \mapsto u\circ f \in HC_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m), \quad 0 \leqslant \tau \leqslant r.\end{aligned}$$

On fixe $\tau \in [0,r]$ et on considère $u \in HC_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ et une suite (f_ζ) convergeant vers f dans $Id + \mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ avec $f_0 = f$. Soit $\varepsilon > 0$. Comme l'espace $C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ est dense dans $HC_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$, on peut trouver $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ telle que

$$\|u-v\|_{HC_0^\tau} \leqslant \frac{\varepsilon}{3+3\sup\{\mathrm{const}(\tau,n,m,f_\zeta)\colon \zeta\in\mathbb{N}\}},$$

« const » étant comme dans (1). D'autre part, comme l'application $f \mapsto v\circ f$ est de classe C^∞, donc continue, de $Id + \mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$ dans $HC_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ selon (2), il existe $\zeta_0 \in \mathbb{N}$ tel que $\|v\circ f_\zeta - v\circ f\|_{HC_0^\tau} \leqslant \varepsilon/3$ pour $\zeta \geqslant \zeta_0$. D'où

$$\begin{aligned}\|u\circ f_\zeta - u\circ f\|_{HC_0^\tau} &\leqslant \|u\circ f_\zeta - v\circ f_\zeta\|_{HC_0^\tau} + \|v\circ f_\zeta - v\circ f\|_{HC_0^\tau} + \|v\circ f - u\circ f\|_{HC_0^\tau}\\ &\leqslant \varepsilon\end{aligned}$$

quel que soit $\zeta \geqslant \zeta_0$, ce qui montre que $u\circ f_\zeta \longrightarrow u\circ f$ dans $HC_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$.

Soit $(u_\zeta, f_\zeta) \longrightarrow (u,f)$ dans $HC_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \times (Id + \mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n))$. On a :

$$\begin{aligned}\|u_\zeta\circ f_\zeta - u\circ f\|_{HC_0^\tau} &\leqslant \|u_\zeta\circ f_\zeta - u\circ f_\zeta\|_{HC_0^\tau} + \|u\circ f_\zeta - u\circ f\|_{HC_0^\tau}\\ &\leqslant \mathrm{const}(\tau,n,m,f_\zeta)\|u_\zeta - u\|_{HC_0^\tau} + \|u\circ f_\zeta - u\circ f\|_{HC_0^\tau}.\end{aligned}$$

D'où $u_\zeta\circ f_\zeta \longrightarrow u\circ f$ dans $HC_0^\tau(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$. $\square$

Proposition 2.2. *Soit $r \in [1,\infty[$. Alors $\mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n)$ est un groupe topologique ouvert de l'espace affine de Banach $Id + HC_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.*

Démonstration. – Soit $f \in \mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n)$. En utilisant les deux relations $f\circ f^{-1} = Id$ et $(\partial_j(f^{-1})^i)\circ f = (\partial_j f^i)^{-1}$, et le fait que $0 < \inf_{\mathbb{R}^n} J_f \leqslant J_f \leqslant \sup_{\mathbb{R}^n} J_f < \infty$, on vérifie que $f^{-1} \in \mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n)$.

– Pour montrer que $\mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n)$ est un ensemble ouvert de $Id + HC_0^r(\mathbb{R}^n)$, on utilise l'affirmation suivante : étant donné un ensemble $\Omega \subset Id + HC_0^r(\mathbb{R}^n)$, Ω est un ouvert de $Id + HC_0^r(\mathbb{R}^n)$ si, et seulement si, pour toute courbe $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}; Id + HC_0^r(\mathbb{R}^n))$, $\varphi^{-1}(\Omega)$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ (voir le théorème 4.11 dans [12]).

On considère alors une courbe $t \in \mathbb{R} \mapsto \varphi(t,\cdot) \in HC_0^r(\mathbb{R}^n)$ de classe C^∞ telle que $Id(\cdot) + \varphi(0,\cdot) \in \mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n)$. Si $Id(\cdot) + \varphi(t,\cdot)$ n'est pas injective pour t suffisamment petit, il existe des suites : $(t_\zeta) \subset \mathbb{R}$, (x_ζ), $(y_\zeta) \subset \mathbb{R}^n$ telles que

$$(\star)\quad t_\zeta \longrightarrow 0, \quad x_\zeta \neq y_\zeta, \quad x_\zeta + \varphi(t_\zeta, x_\zeta) = y_\zeta + \varphi(t_\zeta, y_\zeta).$$

Soit $K \subset \mathbb{R}$ un ensemble compact tel que $(t_\zeta) \subset K$. Il existe un nombre positif R_K tel que $\{Id(\cdot) + \varphi(t,\cdot)\}|_{\{\|x\|_2 \geqslant R_K\}}$ soit injective quel que soit $t \in K$. Ceci implique que les deux suites (x_ζ) et (y_ζ) sont bornées dans $\mathbb{R}^n$, donc on peut supposer que $x_\zeta \longrightarrow x_0$ et $y_\zeta \longrightarrow y_0$. Par suite $x_0 + \varphi(0,x_0) = y_0 + \varphi(0,y_0)$ et $x_0 = y_0$. Selon le théorème d'inversion locale, $(t,x) \longmapsto (t, x + \varphi(t,x))$ est un difféomorphisme au voisinage de $(0,x_0)$, d'où $x_\zeta + \varphi(t_\zeta, x_\zeta) \neq y_\zeta + \varphi(t_\zeta, y_\zeta)$ pour ζ suffisamment grand, ce qui contredit $(\star)$.

D'autre part, comme l'application $Id(\cdot) + \varphi(t,\cdot)$ est à la fois ouverte et fermée pour t suffisamment petit, on a $\{Id(\cdot) + \varphi(t,\cdot)\}(\mathbb{R}^n) = \mathbb{R}^n$, et par conséquent $Id(\cdot) + \varphi(t,\cdot) \in \mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n)$, pour t proche de 0. Maintenant, il suffit d'appliquer l'affirmation précédente pour conclure que $\mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n)$ est un ouvert de $Id + HC_0^r(\mathbb{R}^n)$.

– On montre que l'application $f \in \mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n) \mapsto f^{-1} \in \mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n)$ est continue.

Soit $r \in [2,\infty[$. Alors grâce au théorème des fonctions implicites et au Lemme 2.1, l'application $f \mapsto f^{-1}$ est de classe C^1 de $\mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathit{Diff}\,HC_0^{r-1}(\mathbb{R}^n)$. Par conséquent, les applications,

$$f \in \mathit{Diff}\,HC_0^r(\mathbb{R}^n) \mapsto \left(\partial_j f^i \circ f^{-1}\right) \in \mathbb{I}_n + HC_0^{r-1}\left(\mathbb{R}^n; L\left(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\right)\right),$$

$$\begin{aligned} f &\in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n) \\ &\mapsto \big(\partial_j\big(f^{-1}\big)^i\big) = \big(\partial_j f^i \circ f^{-1}\big)^{-1} \in \mathbb{I}_n + H\mathcal{C}_0^{r-1}\big(\mathbb{R}^n; L\big(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\big)\big), \end{aligned}$$

et

$$f \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r\big(\mathbb{R}^n\big) \mapsto \partial^\alpha f \circ f^{-1} \in H\mathcal{C}_0^{r-|\alpha|}\big(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\big), \quad 2 \leqslant |\alpha| \leqslant [r],$$

sont continues, où $L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ désigne l'espace des matrices de type $n \times n$ à coefficients dans $\mathbb{R}$. En utilisant ce résultat, la relation $f \circ f^{-1} = Id$, et la continuité des applications $(u,v) \in H\mathcal{C}_0^\ell(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \times \mathcal{C}_0^\ell(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \mapsto uv \in H\mathcal{C}_0^\ell(\mathbb{R}^n;\mathbb{R})$ ($\ell \in \mathbb{R}_+$), on déduit que l'application $f \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n) \mapsto f^{-1} \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$ est continue.

Soit $(f,g) \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n) \times \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$. En tenant compte l'inégalité,

$$\big\|X^{-1}\big\|_2 \leqslant \frac{(n-1)!n}{|\det X|}\|X\|_2^{n-1}, \quad X \in GL(n;\mathbb{R}),$$

$\|X\|_2 = (\sum_{ij}(X_j^i)^2)^{1/2}$ étant la norme de Frobenius de $X = (X_j^i)$, on obtient les estimations :

$$\begin{aligned} \big\|g^{-1} - f^{-1}\big\|_{L^\infty} &\leqslant \big\|\big(\partial_j\big(f^{-1}\big)^i\big)\big\|_{L^\infty}\|g-f\|_{L^\infty} \\ &\leqslant (n-1)!n\|1/J_f\|_{L^\infty}\big\|\big(\partial_j f^i\big)\big\|_{L^\infty}^{n-1}\|g-f\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \big\|g^{-1} - f^{-1}\big\|_{L^2} &\leqslant \|J_g\|_{L^\infty}^{1/2}\big\|\big(\partial_j\big(f^{-1}\big)^i\big)\big\|_{L^\infty}\|g-f\|_{L^2} \\ &\leqslant (n-1)!n\|1/J_f\|_{L^\infty}\|J_g\|_{L^\infty}^{1/2}\big\|\big(\partial_j f^i\big)\big\|_{L^\infty}^{n-1}\|g-f\|_{L^2}, \end{aligned}$$

qui montrent que l'application $f \mapsto f^{-1}$ est localement lipschitzienne de $\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$ dans $\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n)$.

Maintenant, on fixe $f \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$. Pour toute g appartenant à un voisinage convexe de f dans $\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)$, on a les estimations suivantes :

$$\begin{aligned} &\big\|\big(\partial_j\big(g^{-1}\big)^i\big) - \big(\partial_j\big(f^{-1}\big)^i\big)\big\|_{L^\infty} \\ &\quad\leqslant \big\|\big(\partial_j g^i\big)^{-1} - \big(\partial_j f^i\big)^{-1}\big\|_{L^\infty} + \big\|\big(\partial_j\big(f^{-1}\big)^i \circ g - \partial_j\big(f^{-1}\big)^i \circ f\big)\big\|_{L^\infty} \\ &\quad\leqslant \mathrm{const}(n,f,g)\big\|\big(\partial_j g^i - \partial_j f^i\big)\big\|_{L^\infty} + \big\|\big(\partial_j\big(f^{-1}\big)^i \circ g - \partial_j\big(f^{-1}\big)^i \circ f\big)\big\|_{L^\infty}, \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} &\big\|\big(\partial_j\big(g^{-1}\big)^i\big) - \big(\partial_j\big(f^{-1}\big)^i\big)\big\|_{L^2} \\ &\quad\leqslant \mathrm{const}(n,f,g)\|J_g\|_{L^\infty}^{1/2}\big\|\big(\partial_j g^i\big) - \big(\partial_j f^i\big)\big\|_{L^2} + \|J_g\|_{L^\infty}^{1/2}\big\|\big(\partial_j\big(f^{-1}\big)^i\big) \circ g - \big(\partial_j\big(f^{-1}\big)^i\big) \circ f\big\|_{L^2}, \end{aligned}$$

avec

$$\mathrm{const}(n,f,g) = \big((n-1)!n\big)^2\big(\big\|\big(\partial_j f^i\big)\big\|_{L^\infty} + \big\|\big(\partial_j g^i\big)\big\|_{L^\infty}\big)^{2(n-1)} \sup_{0 \leqslant t \leqslant 1}\left\|\frac{1}{J_{tf+(1-t)g}^2}\right\|_{L^\infty}.$$

D'où la continuité de l'application $f \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n) \mapsto (\partial_j(f^{-1})^i) \in \mathbb{I}_n + H\mathcal{C}_0^0(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$.

Etant donné $r \in\,]1,2[$, la continuité de l'application $f \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n) \mapsto f^{-1} \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$ découle du résultat précédent, de l'égalité,

$$\begin{aligned} \big(\partial_j\big(g^{-1}\big)^i\big) - \big(\partial_j\big(f^{-1}\big)^i\big) &= \big(\big(\partial_j g^i\big)^{-1} - \big(\partial_j f^i\big)^{-1}\big) \circ g^{-1} \\ &\quad + \big(\partial_j\big(f^{-1}\big)^i\big) \circ f \circ g^{-1} - \big(\partial_j\big(f^{-1}\big)^i\big), \end{aligned}$$

et du fait que l'application $X \mapsto X^{-1}$ est de classe C^∞, donc continue, de l'espace de Banach $\mathcal{C}^0(\mathbb{R}; GL(n;\mathbb{R})) \cap (\mathbb{I}_n + H\mathcal{C}_0^\ell(\mathbb{R}^n; L(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)))$ ($\ell \in \mathbb{R}_+$) dans lui même. $\square$

Remarque 2.3. Etant donné $(r, j) \in [1, \infty[\times \mathbb{N}$, l'application,

$$f \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{r+j}\big(\mathbb{R}^n\big) \mapsto f^{-1} \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{r}\big(\mathbb{R}^n\big),$$

est de classe C^j selon le Lemme 2.1 et la démonstration précédente.

Lemme 2.4. *L'espace $C^\infty(\mathbb{R}; H^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$ est constitué des fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ telles que*

$$\big\| \partial_t^j \partial_x^\alpha \varphi(t, \cdot)\big\|_{HC^0} \leqslant const_{j,\alpha,K} < \infty, \quad t \in K,\ j \in \mathbb{N},\ \alpha \in \mathbb{N}^n,$$

où K est un compact de $\mathbb{R}^n$.

Démonstration. On note E l'espace des fonctions $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ vérifiant la condition donnée dans le lemme.

On a évidement $C^\infty(\mathbb{R}; H^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)) \subset E$.

On montre que $E \subset C^\infty(\mathbb{R}; H^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$. Si $\varphi \in E$, on pose :

$$\gamma(t) = \gamma_0(t) = \varphi(t, \cdot), \qquad \gamma_j(t) = \partial_t^j \varphi(t, \cdot), \qquad ev_x \circ \gamma_j(t) = \partial_t^j \varphi(t, x).$$

Il est clair que, pour tout $j \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}^n$, $ev_x \circ \gamma \in C^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$, $(ev_x \circ \gamma)^{(j)} = ev_x \circ \gamma_j$, et γ_j est localement bornée de $\mathbb{R}$ dans $H^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$. Ainsi donc, puisque $H^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m)$ est reflexif, le théorème 4.1.19 dans [10] assure que $\gamma \in C^\infty(\mathbb{R}; H^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^m))$. $\square$

On rappelle maintenant la notion d'un groupe de Lie régulier, qui est due essentiellement à Milnor [17].

Soit G un groupe de Lie modelé sur des espaces convenables (voir [12]), et $\mathfrak{g}$ son algèbre de Lie. Si $a \in G$, on note, respectivement, L_a et R_a les translations $x \in G \mapsto ax \in G$ et $x \in G \mapsto xa \in G$.

Le groupe G est dit régulier si, pour tout $X \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{g})$, le problème,

$$\begin{cases} \varphi'(t) = DR_{\varphi(t)}(e)\big(X(t)\big), \\ \varphi(0) = e, \end{cases}$$

admet une solution locale de classe C^∞.

D'après lemme 28.3 dans [12], G est régulier si, et seulement si, pour toute $X \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{g})$, le problème précé dent possède une solution globale unique $evol(X) \in C^\infty(\mathbb{R}; G)$. Les auteurs de [12] ont exigé aussi, dans la définition d'un goupe régulier, la condition que l'application $X \in C^\infty(\mathbb{R}; \mathfrak{g}) \to evol(X) \in C^\infty(\mathbb{R}; G)$ soit de classe C^∞ selon une notion de dérivabilité adoptée dans [10].

D'après le théorème de Cauchy–Lipschitz, tout groupe de Lie–Banach est régulier.

Théorème 2.5. *$\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ est un groupe de Lie régulier et ouvert de l'espace affine de Fréchet $Id + H^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$; les applications,*

$$(f, g) \in \mathit{Diff}\, H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big) \times \mathit{Diff}\, H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big) \mapsto f \circ g \in \mathit{Diff}\, H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big),$$

et

$$f \in \mathit{Diff}\, H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big) \mapsto f^{-1} \in \mathit{Diff}\, H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big),$$

sont de classe C^∞ au sens usuel de Fréchet et l'algèbre de Lie de $\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ est,

$$\mathfrak{g}_{\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)} = H^\infty\big(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n\big) = \left\{ \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} u^j \partial/\partial x^j\!:\ u^j \in H^\infty\big(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}\big) \right\},$$

munie du crochet $[u, v] = \sum_{1 \leqslant i,j \leqslant n} (v^i \frac{\partial u^j}{\partial x^i} - u^i \frac{\partial v^j}{\partial x^i}) \frac{\partial}{\partial x^j}$.

Démonstration. Il est clair, selon le Lemme 2.1, la Proposition 2.2 et la Remarque 2.3, que $\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ est un groupe de Lie ouvert de $Id + H^\infty(\mathbb{R}^n)$, d'où $T\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n) = \mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n) \times H^\infty(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n)$, ce qui entraîne que l'algèbre de Lie de $\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ est,

$$\mathfrak{g}_{\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)} = H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n) = \left\{ \sum_{1\leqslant j\leqslant n} u^j\partial/\partial x^j:\ u^j \in H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}) \right\},$$

munie du crochet

$$[u,v] = \sum_{1\leqslant i,j\leqslant n} \left(v^i\frac{\partial u^j}{\partial x^i} - u^i\frac{\partial v^j}{\partial x^i} \right)\frac{\partial}{\partial x^j},$$

où $u = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} u^j\partial/\partial x^j$ et $v = \sum_{1\leqslant j\leqslant n} v^j\partial/\partial x^j$.

En connaissant la relation $D(R_g)(f)(u) = R_g(u) = u\circ g$, le groupe $\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ est régulier si, et seulement si, quelle que soit $X \in C^\infty(\mathbb{R}; H^\infty(\mathbb{R}^n))$, le problème

$$(\mathcal{P})\quad \begin{cases} \varphi(0) = Id, \\ \varphi'(t) = X(t)\circ\varphi(t), \end{cases}$$

possède une solution locale $\varphi \in C^\infty(I_X; Id + H^\infty(\mathbb{R}^n))$.

Soit $X \in C^\infty(\mathbb{R}; H^\infty(\mathbb{R}^n))$. Comme l'application,

$$(t,f) \in \mathbb{R}\times\big(Id + H\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\big) \mapsto X(t)\circ f \in H\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n),$$

est de classe C^∞ d'après le Lemme 2.1, le théorème de Cauchy–Lipschitz montre que le problème $(\mathcal{P})$ possède une solution locale $\varphi \in C^\infty(I_X; \mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}^n)) \cap C^\infty(I_X\times\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. En dérivant la relation,

$$\varphi(t,x) = x + \int_0^t X\big(s,\varphi(s,x)\big)\,ds, \quad t\in I_X,\ x\in\mathbb{R}^n,$$

et en utilisant le Lemme 2.4, on vérifie que $\varphi \in C^\infty(I_X; \mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n))$. □

Remarque 2.6. Soit $A : C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m \to C_c^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m)$ un opérateur différentiel à coefficients constants. On note k l'ordre de A. Etant donné $r\in[\max(k,1),\infty[$, Comme l'expression $A(u\circ f^{-1})\circ f$ est une expression rationnelle en les dérivées de u et de f, l'application

$$\begin{aligned} (f,u) \ &\in\ \mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)\times H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m), \\ &\mapsto A\big(u\circ f^{-1}\big)\circ f \in H\mathcal{C}_0^{r-k}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m) \end{aligned}$$

est de classe C^∞. En particulier, si $A = A_k\mathbb{I}_m = (\sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}\partial^{2\alpha})\mathbb{I}_m$, $\mathbb{I}_m$ étant la matrice unitaire d'ordre m, le théorème d'inversion locale montre que, quel que soit $r\in[2k,\infty[-\mathbb{N}$, l'application

$$\begin{aligned} (f,u) \ &\in\ \mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)\times H\mathcal{C}_0^{r-2k}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m), \\ &\mapsto A^{-1}\big(u\circ f^{-1}\big)\circ f \in H\mathcal{C}_0^{r}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^m), \end{aligned}$$

est de classe C^∞.

3. Métriques de Sovolev faibles sur $\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$

3.1. Définitions et propriétés générales

On rappelle d'abord quelques notions abstraites.

Soit G un groupe de Lie modelé sur des espaces convenables. La représentation adjointe Ad de G dans $GL(\mathfrak{g}) \subset L(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ (espace des applications linéaires et bornées de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{g}$) est définie par :

$$Ad(x) = D(L_x\circ R_{x^{-1}})(e), \quad x\in G.$$

L'application tangente $ad = D(Ad)(e) : \mathfrak{g} \to L(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$ est par définition la représentation adjointe de $\mathfrak{g}$ dans $L(\mathfrak{g};\mathfrak{g})$.

Si $\langle\cdot,\cdot\rangle$ est un produit scalaire borné sur $\mathfrak{g}$, on définit une métrique riemannienne faible g sur G par la relation :

$$g(x)(\xi,\eta) = \big\langle D(R_{x^{-1}})(x)(\xi), D(R_{x^{-1}})(x)(\eta)\big\rangle, \quad x\in G,\ \xi,\eta\in T_xG. \tag{3.1}$$

On suppose que, pour tout $\xi \in \mathfrak{g}$, l'adjoint $\{ad(\xi)\}^\top$ de $ad(\xi)$ par rapport à $\langle\cdot,\cdot\rangle$ existe, et que l'application linéaire $\xi \mapsto \{ad(\xi)\}^\top$ est bornée. Dans ce cas, l'équation des géodésiques $\varphi \in C^\infty(I_\varphi; G)$ de (G, g) est donnée comme suit :

$$u'(t) + ad\big(u(t)\big)^\top\big(u(t)\big) = 0, \tag{3.2}$$

avec $u(t) = D(R_{\varphi(t)^{-1}})(\varphi(t))(\varphi'(t))$ (voir [12]). Si on suppose, en plus, que, pour tout $x \in G$, l'adjoint $\{Ad(x)\}^\top$ de $Ad(x)$ par rapport à $\langle\cdot,\cdot\rangle$ existe et que l'application $x \mapsto \{Ad(x)\}^\top$ est classe C^∞, alors l'équation (3.2) est équivalente à l'équation suivante,

$$E'(t) = 0, \tag{3.3}$$

où $E(t) = Ad(\varphi(t))^\top(u(t))$. Cette équivalence s'interprète comme une sorte de généralisation du premier théorème d'Euler sur la conservation du moment cinétique.

On suppose maintenant que $G = \mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ et on munit l'algèbre de Lie $\mathfrak{g}_{\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)} = H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ du produit scalaire faible :

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle_{H^k} &= \int u(x)\cdot A_k(v)(x)\,dx = \int A_k(u)(x)\cdot v(x)\,dx\\ &= \sum_{|\alpha|\leqslant k}\int \partial^\alpha u(x)\cdot\partial^\alpha v(x)\,dx,\end{aligned}$$

où $A_k = \sum_{|\alpha|\leqslant k}(-1)^{|\alpha|}\partial^{2\alpha}$. La métrique riemannienne faible g_{H^k} définie par la relation (3.1) à partir de $\langle\cdot,\cdot\rangle_{H^k}$ est de classe C^∞ (au sens usuel de Fréchet) de $\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans l'espace des applications bilinéaires continues $L(H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n), H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n);\mathbb{R})$ et possède la forme suivante :

$$\begin{aligned}g_{H^k}(f)(u,v) &= \big\langle u\circ f^{-1}, v\circ f^{-1}\big\rangle_{H^k}\\ &= \int u(x)\cdot A_k\big(v\circ f^{-1}\big)\circ f(x)J_f(x)\,dx\\ &= \int A_k\big(u\circ f^{-1}\big)\circ f(x)\cdot v(x)J_f(x)\,dx\end{aligned}$$

avec $f \in \mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $(u,v) \in H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\times H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$.

Après un calcul simple, on obtient :

$$\big(ad(u)^\top(v)\big)^j = A_k^{-1}\big\{A_k(v)\cdot\partial_{x^j}u + A_k\big(v^j\big)\operatorname{div}u + A_k\big(\nabla v^j\big)\cdot u\big\},$$

et

$$Ad(f)^\top(u) = A_k^{-1}\big\{J_f\mathbf{M}_f A_k(u)\circ f\big\}, \tag{3.4}$$

où $\mathbf{M}_f$ dénote la matrice transposée de la matrice jacobienne de f. Ainsi donc, l'équation générale (3.2) des géodésiques prend pour le groupe riemannien faible $(\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n), g_{H^k})$ la forme suivante :

$$\begin{aligned}\partial_t u^j &= -\big(ad(u)^\top(u)\big)^j\\ &= -A_k^{-1}\big\{A_k(u)\cdot\partial_{x^j}u + A_k\big(u^j\big)\operatorname{div}u + A_k\big(\nabla u^j\big)\cdot u\big\},\end{aligned} \tag{3.5}$$

avec $u(t) = \varphi'(t)\circ\varphi(t)^{-1}$.

On considère une courbe arbitraire $\varphi \in C^\infty(I; \mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n))$ et soit $u(t) = \varphi'(t)\circ\varphi(t)^{-1}$ sa vitesse. On a :

$$A_k\big\{\nabla\big(u^j(t)\big)\cdot u(t)\big\} = A_k\big\{\nabla\big(u^j(t)\big)\big\}\cdot u(t) + B_k^j\big(u(t)\big),$$

où B_k^j est un opérateur différentiel d'ordre $2k$, et par conséquent :

$$\begin{aligned}&A_k^{-1}\big\{A_k\big(u(t)\big)\cdot\partial_{x^j}\big(u(t)\big) + A_k\big(u^j(t)\big)\operatorname{div}\big(u(t)\big) + A_k\big(\nabla u^j(t)\big)\cdot u(t)\big\}\\ &\quad= \nabla\big(u^j(t)\big)\cdot u(t) + A_k^{-1}\big\{A_k\big(u(t)\big)\cdot\partial_{x^j}\big(u(t)\big) + A_k\big(u^j(t)\big)\operatorname{div}\big(u(t)\big) - B_k^j\big(u(t)\big)\big\}\\ &\quad= \nabla\big(u^j(t)\big)\cdot u(t) - A_k^{-1}C_k^j\big(u(t)\big),\end{aligned}$$

avec

$$C_k^j\big(u(t)\big) = -\big(A_k\big(u(t)\big)\cdot\partial_{x^j}\big(u(t)\big) + A_k\big(u^j(t)\big)\operatorname{div}\big(u(t)\big) - B_k^j\big(u(t)\big)\big).$$

D'autre part,

$$\begin{aligned}
\partial_t^2\varphi^j(t) &= \partial_t\big\{u^j(t)\circ\varphi(t)\big\}\\
&= \partial_t u^j(t)\circ\varphi(t) + \sum_{i=1}^n \partial_{x^i}\big(u^j(t)\big)\circ\varphi(t)\partial_t\varphi^i(t)\\
&= \partial_t u^j(t)\circ\varphi(t) + \big\{\nabla\big(u^j(t)\big)\circ\varphi(t)\big\}\cdot\varphi'(t)\\
&= \big\{\partial_t u^j(t) + \nabla\big(u^j(t)\big)\cdot u(t)\big\}\circ\varphi(t).
\end{aligned}$$

D'où, selon (3.5), la courbe φ est une géodésique pour la métrique g_{H^k} si, et seulement si, elle vérifie,

$$\partial_t^2\varphi^j(t) = A_k^{-1}C_k^j\big\{\varphi'(t)\circ\varphi(t)^{-1}\big\}\circ\varphi(t),$$

ou encore

$$\varphi''(t) = A_k^{-1}C_k\big\{\varphi'(t)\circ\varphi(t)^{-1}\big\}\circ\varphi(t), \tag{3.6}$$

avec $C_k = (C_k^1,\dots,C_k^n)$. On peut voir que cette équation est une conséquence du théorème de Noether sur les systèmes lagrangiens.

Etant donné $t_0\in\mathbb{R}$, comme le groupe $\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ est régulier, l'équation (3.6) possède une solution locale au voisinage de t_0 si, et seulement si, l'équation (3.5) possède une solution locale au voisinage de t_0 vérifiant la condition du Lemme 2.4.

3.2. Existence de géodésiques

Dans la suite, on supposera que $k\geqslant 1$.

Théorème 3.1. *Soit* $\tau\in\,]0,1[$. *Alors*

a) *Pour tout* $(f_0,\xi_0)\in T\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^{2k+\tau}(\mathbb{R}^n)$, *il existe un voisinage ouvert* $U\subset T\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^{2k+\tau}(\mathbb{R}^n)$ *de* (f_0,ξ_0) *et un* $\delta>0$ *tels que, pour toute* $(f,\xi)\in U$, *le problème*

$$(\mathcal{P}_1)\quad \begin{cases}\varphi''(t) = A_k^{-1}C_k\big\{\varphi'(t)\circ\varphi(t)^{-1}\big\}\circ\varphi(t),\\ \varphi(0)=f,\quad \varphi'(0)=\xi,\end{cases}$$

admet une unique solution $\varphi\in C^\infty(]-\delta,\delta[;\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^{2k+\tau}(\mathbb{R}^n))$. *De plus, si* $r\in[\tau,\infty[-\mathbb{N}$, *alors* $\varphi(]-\delta,\delta[)\subset\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^{2k+r}(\mathbb{R}^n)$ *quel que soit* $(f,\xi)\in U\cap T\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^{2k+r}(\mathbb{R}^n)$, *et l'application*

$$(t,f,\xi)\in\,]-\delta,\delta[\,\times\big\{U\cap T\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^{2k+r}\big(\mathbb{R}^n\big)\big\}\mapsto\varphi(t)\in\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^{2k+r}\big(\mathbb{R}^n\big),$$

est de classe C^∞.

b) *Pour tout* $(f_0,\xi_0)\in T\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^{2k+\tau}(\mathbb{R}^n)$, *il existe un voisinage ouvert* U *de* (f_0,ξ_0) *dans* $T\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^{2k+\tau}(\mathbb{R}^n)$ *et un nombre réel* $\delta>0$ *tels que, pour toute* $(f,\xi)\in U\cap T\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$, *il existe une unique géodésique* $\varphi\in C^\infty(]-\delta,\delta[;\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n))$ *pour la métrique* g_{H^k} *vérifiant* $\varphi(0)=f$ *et* $\varphi'(0)=\xi$. *De plus, l'application*

$$(t,f,\xi)\in\,]-\delta,\delta[\,\times\big\{U\cap T\mathit{Diff}\,H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big)\big\}\mapsto\varphi(t)\in\mathit{Diff}\,H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big),$$

est de classe C^∞.

c) *Pour tout* $\xi_0\in H\mathcal{C}_0^{2k+\tau}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, *il existe un voisinage ouvert* V *de* ξ_0 *dans* $H\mathcal{C}_0^{2k+\tau}(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ *et un nombre réel* $\delta>0$ *tels que, pour tout* $\xi\in V\cap H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, *le problème*

$$(\mathcal{P}_2)\quad \begin{cases}\partial_t A_k\big(u^j\big) + A_k(u)\cdot\partial_{x^j}u + A_k\big(u^j\big)\operatorname{div}u + A_k(\nabla u^j)\cdot u = 0,\\ u(0)=\xi,\end{cases}$$

$(1 \leqslant i \leqslant n)$ possède une unique solution $u \in C^\infty(]-\delta,\delta[; H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$. De plus, l'application $(t,\xi) \in]-\delta,\delta[\times \{V \cap H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)\} \mapsto u(t) \in H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ est de classe C^∞.

Démonstration. Démontrons l'énoncé a). Soit $\tau \in]0,1[$. Les deux applications,

$$(f,\xi) \in T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{2k+\tau} \mapsto C_k\big(\xi \circ f^{-1}\big) \circ f \in H\mathcal{C}_0^\tau,$$

et

$$(f,\eta) \in T\mathrm{Diff} H\mathcal{C}_0^{2k+\tau} \mapsto A_k\big(\eta \circ f^{-1}\big) \circ f \in H\mathcal{C}_0^\tau,$$

sont de classe C^∞ puisque $C_k(\xi \circ f^{-1}) \circ f$ et $A_k(\eta \circ f^{-1}) \circ f$ sont des expressions rationnelles en les dérivées de ξ, de η et de f. D'après le théorème d'inversion locale, l'application

$$(f,\eta) \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{2k+\tau} \times H\mathcal{C}_0^\tau \mapsto A_k^{-1}\big(\eta \circ f^{-1}\big) \circ f \in H\mathcal{C}_0^{2k+\tau},$$

est de classe C^∞. Par suite, les deux applications,

$$(f,\xi) \in T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{2k+\tau} \mapsto A_k^{-1}C_k\big(\xi \circ f^{-1}\big) \circ f \in H\mathcal{C}_0^{2k+\tau},$$

et

$$(f,\xi) \in T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{2k+\tau} \mapsto \big(\xi, A_k^{-1}C_k\big(\xi \circ f^{-1}\big) \circ f\big) \in H\mathcal{C}_0^{2k+\tau} \times H\mathcal{C}_0^{2k+\tau},$$

sont de classe C^∞. Donc le théorème de Cauchy–Lipschitz affirme qu'il existe un voisinage ouvert U de (f_0,ξ_0) dans $T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{2k+\tau}$ et un $\delta > 0$ tels que le problème

$$\begin{cases} \varphi'(t) = v(t), \\ v'(t) = A_k^{-1}C_k\big\{v(t) \circ \varphi(t)^{-1}\big\} \circ \varphi(t), \\ v(0) = \xi, \quad \varphi(0) = f, \end{cases}$$

possède une unique solution (φ, v) de classe C^∞ définie sur $]-\delta,\delta[$ quel que soit $(f,\xi) \in U$, et que l'application

$$(t,f,\xi) \in]-\delta,\delta[\times U \mapsto \big(\varphi(t), v(t)\big) \in T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{2k+\tau},$$

est de classe C^∞.

Maintenant, on considère $r \in [\tau, 2k-1+\tau] - \mathbb{N}$ et on suppose que $(f,\xi) \in U \cap T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{2k+r}$. Soit $t \in]-\delta,\delta[$. D'après les relations (3.3) et (3.4), on a :

$$\begin{aligned} J_{\varphi(t)}\mathbf{M}_{\varphi(t)}A_k\big\{\varphi'(t) \circ \varphi(t)^{-1}\big\} \circ \varphi(t) &= J_{\varphi(0)}\mathbf{M}_{\varphi(0)}A_k\big\{\varphi'(0) \circ \varphi(0)^{-1}\big\} \circ \varphi(0) \\ &= J_f\mathbf{M}_f A_k\big\{\xi \circ f^{-1}\big\} \circ f \in H\mathcal{C}_0^r. \end{aligned}$$

D'où $\varphi'(t) \circ \varphi(t)^{-1} \in H\mathcal{C}_0^{2k+r}$.

On applique encore le théorème de Cauchy–Lipschitz pour montrer qu'il existe une solution $\psi_t \in C^\infty(I_t; \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{2k+r})$ de (3.6) vérifiant $\psi_t(t) = Id$ et $\psi_t'(t) = \varphi'(t) \circ \varphi(t)^{-1}$; I_t étant un intervalle ouvert contenant t. Grâce à l'unicité, on a $\varphi(s) = \psi_t(s) \circ \varphi(t)$ pour $s \in I_t \cap]-\delta,\delta[$. En utilisant ce résultat, on vérifie que l'ensemble,

$$\big\{t \in]-\delta,\delta[: \varphi(t) \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{2k+r}\big\}$$

est à la fois fermé et ouvert dans $]-\delta,\delta[$, donc il est égal à $]-\delta,\delta[$ tout entier.

Etant donné $r \in [\tau, 2k-1+\tau] - \mathbb{N}$, on utilise la procédure précédente et l'induction sur $j \geqslant 0$ pour prouver que si $(f,\xi) \in U \cap T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{2k+j+r}(\mathbb{R}^n)$, alors $\varphi(t) \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^{2k+j+r}(\mathbb{R}^n)$ quel que soit $t \in]-\delta,\delta[$.

L'énoncé b), qui implique l'énoncé c) puisque le groupe $\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ est régulier, découle immédiatement de a). □

Remarque 3.2. Pour $k = 0$, l'équation aux dérivées partielles dans le Théorème 3.2 est l'analogue n-dimensionnel de l'équation Burgers [2] et s'écrit comme suit :

$$\partial_t u^j + u \cdot \partial_{x^j} u + u^j \operatorname{div} u + u \cdot \nabla u^j = 0, \quad 1 \leqslant j \leqslant n,$$

et pour $k = 1$, elle est l'analogue n-dimensionnel de l'équation Camassa–Holm (voir [4] et [13]) et possède la forme suivante :

$$\partial_t u^j - \sum_{k=1}^{n} \partial_t \partial_{x^k}^2 u^j + u \cdot \partial_{x^j} u - \sum_{k=1}^{n} \partial_{x^k}^2 u \cdot \partial_{x^j} u$$
$$+ \left(u^j - \sum_{k=1}^{n} \partial_{x^k}^2 u^j\right) \operatorname{div} u + u \cdot \nabla u^j - \sum_{k=1}^{n} u \cdot \partial_{x^k}^2 \nabla u^j = 0.$$

On signale que des résultats analogues ont été obtenus dans [7] pour l'équation de Burger.

Remarque 3.3. Etant donné $f \in \mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$, Comme la courbe $t \in \mathbb{R} \mapsto f$ est une solution stationnaire de l'équation (3.6), on peut choisir δ dans le Théorème 3.1 plus grand ou égale à 2 pour $(f_0, \xi_0) = (f, 0)$.

Théorème 3.4.

1) *Pour tout $(f, \xi) \in T\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$, il existe un intervalle ouvert unique $I_{(f,\xi)}$ contenant* 0 *et vérifiant* :
   (i) *Il existe une g_{H^k}-géodésique $\varphi_{(f,\xi)} : I_{(f,\xi)} \longrightarrow \mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ de classe C^∞ telle que*
   $$\big(\varphi_{(f,\xi)}(0), \varphi'_{(f,\xi)}(0)\big) = (f, \xi).$$
   (ii) *Si $\varphi \in C^\infty(I; \mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n))$ est une autre géodésique pour la métrique g_{H^k} vérifiant $0 \in I$ et $(\varphi(0), \varphi'(0)) = (f, \xi)$, alors $I \subset I_{(f,\xi)}$ et $\varphi = \varphi_{(f,\xi)}|_I$.*
2) *L'ensemble $\Lambda_{g_{H^k}} = \{(t, f, \xi) \in \mathbb{R} \times T\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n){:}\ t \in I_{(f,\xi)}\}$ est un ouvert de $\mathbb{R} \times T\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ et l'application $(t, f, \xi) \in \Lambda_{g_{H^k}} \mapsto \varphi_{(f,\xi)}(t) \in \mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ est de classe C^∞. En particulier, l'ensemble*
   $$\widetilde{\Lambda}_{g_{H^k}} = \big\{(f, \xi) \in T\mathit{Diff}\, H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big){:}\ 1 \in I_{(f,\xi)}\big\}$$
   est un ouvert de $T\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ contenant $\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n) \times \{0\}$ et l'application exponentielle riemannienne $(f, \xi) \in \widetilde{\Lambda}_{g_{H^k}} \mapsto \exp_{g_{H^k}}(f, \xi) = \varphi_{(f,\xi)}(1) \in \mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ est de classe C^∞.
3) *Il existe un voisinage ouvert $\mathcal{V}$ de $\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n) \times \{0\}$ dans $T\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que l'application $(\pi_{\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)}, \exp_{g_{H^k}})$ soit un diffiomophisme de $\mathcal{V}$ dans un voisinage ouvert $\widetilde{\mathcal{V}} \subset \mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n) \times \mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ de la diagonale $\Delta_{\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)} = \{(f, f){:}\ f \in \mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)\}$.*
   L'application inverse de $(\pi_{\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)}; \exp_{g_{H^k}})$ est donnée comme suit :
   $$(\pi_{\mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)}; \exp_{g_{H^k}})^{-1}(f_1, f_2) = \big(f_1, \varphi'_{(f_1,f_2)}(0)\big), \quad (f_1, f_2) \in \widetilde{\mathcal{V}}$$
   où $\varphi_{(f_1,f_2)}$ est l'unique géodésique vérifiant les conditions $\varphi_{(f_1,f_2)}(0) = f_1$, $\varphi_{(f_1,f_2)}(1) = f_2$ et $(f_1, \varphi'_{(f_1,f_2)}(0)) \in \mathcal{V}$. Par suite, la carte normale riemannienne centrée en $f_1 \in \mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n)$ est définié par :
   $$f_2 \in \widetilde{\mathcal{V}}(f_1) \subset \mathit{Diff}\, H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big) \mapsto \varphi'_{(f_1,f_2)}(0) \in \mathcal{V}(f_1) \subset H^\infty\big(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n\big),$$
   avec
   $$\widetilde{\mathcal{V}}(f_1) = \big\{f_2 \in \mathit{Diff}\, H^\infty\big(\mathbb{R}^n\big){:}\ (f_1, f_2) \in \widetilde{\mathcal{V}}\big\}, \qquad \mathcal{V}(f_1) = \big\{u \in H^\infty\big(\mathbb{R}^n; \mathbb{R}^n\big){:}\ (f_1, u) \in \mathcal{V}\big\}.$$

Démonstration. Démontrons les énoncés 1) et 2). Soit $r \in [2k, \infty[- \mathbb{N}$. En utilisant le fait que $T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$ est une variété de Banach et des techniques inspirées de [14], on montre les affirmations suivantes :

a) Pour tout $(f, \xi) \in T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$, il existe un intervalle ouvert maximal $I_{(r,f,\xi)}$ contenant 0 et une solution unique $I_{(r,f,\xi)} \xrightarrow{\varphi_{(r,f,\xi)}} \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$ de classe C^∞ du problème $(\mathcal{P}_1)$.
b) $\Lambda_r = \{(t, f, \xi) \in \mathbb{R} \times T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n){:}\ t \in I_{(r,f,\xi)}\}$ est un ensemble ouvert du produit $\mathbb{R} \times T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$ et l'application $(t, f, \xi) \in \Lambda_r \mapsto \varphi_{(r,f,\xi)}(t) \in \mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$ est de classe C^∞. Par conséquent, l'ensemble $\widetilde{\Lambda}_r = \{(f, \xi) \in T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n){:}\ 1 \in I_{(r,f,\xi)}\}$ est un ouvert de $T\mathit{Diff}\, H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$ et l'application

$$(f,\xi)\in\widetilde{\Lambda}_r\mapsto \exp_r(f,\xi)=\varphi_{(r,f,\xi)}(1)\in \mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r\big(\mathbb{R}^n\big),$$

est de classe C^∞.

On utilise maintenant le Théorème 3.1 pour conclure que, si $r\in[2k,\infty[-\mathbb{N}$ et $s\in[2k,\infty[-\mathbb{N}$ avec $s\leqslant r$, alors

c) Pour tout $(f,\xi)\in T\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$, $I_{(r,f,\xi)}=I_{(s,f,\xi)}$ et $\varphi_{(r,f,\xi)}=\varphi_{(s,f,\xi)}$.
d) $\Lambda_r=\Lambda_s\cap(\mathbb{R}\times T\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n))$ et $\widetilde{\Lambda}_r=\widetilde{\Lambda}_s\cap T\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$.

Etant donné $(f,\xi)\in T\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $r\in[2k,\infty[-\mathbb{N}$, on pose $I_{(f,\xi)}=I_{(r,f,\xi)}$ et $\varphi_{(f,\xi)}=\varphi_{(r,f,\xi)}$. D'après ce qui précède, les ensembles $\Lambda_{g_{H^k}}=\Lambda_r\cap(\mathbb{R}\times T\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n))$ et $\widetilde{\Lambda}_{g_{H^k}}=\widetilde{\Lambda}_r\cap T\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont des ouverts respectifs de $\mathbb{R}\times T\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ et de $T\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$, et les applications $(t,f,\xi)\in\Lambda_{g_{H^k}}\mapsto\varphi_{(f,\xi)}(t)\in\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ et $\exp_{g_{H^k}}:(f,\xi)\in\widetilde{\Lambda}_{g_{H^k}}\mapsto\varphi_{(f,\xi)}(1)\in\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$ sont de classe C^∞.

Démontrons l'énoncé 3). On fixe un nombre réel $r\in[2k,\infty[-\mathbb{N}$, et soit $\varepsilon>0$ et $(f,\xi)\in T\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$. Si $\varphi_{(r,f,\xi)}\in C^\infty(I_{(r,f,\xi)};\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n))$ est l'unique solution du problème $(\mathcal{P}_1)$, alors

$$t\in\frac{1}{\varepsilon}I_{(f,\xi)}\mapsto\varphi_{(f,\xi)}(\varepsilon t)\in\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r\big(\mathbb{R}^n\big)$$

est l'unique solution du problème,

$$\begin{cases}\varphi''(t)=A_k^{-1}C_k\big\{\varphi'(t)\circ\varphi(t)^{-1}\big\}\circ\varphi(t),\\ \varphi(0)=f,\quad \varphi'(0)=\varepsilon\xi,\end{cases}$$

puisque $C_k(\lambda u)=\lambda^2u$ quel que soit $(\lambda,u)\in\mathbb{R}\times H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. Donc

$$\exp_r(f,\varepsilon\xi)=\varphi_{(f,\xi)}(\varepsilon),\quad \varepsilon\in I_{(f,\xi)}\cap\,]0,\infty[.$$

Par suite,

$$D(\exp_r)(f,\varepsilon\xi)(0,\xi)=\varphi'_{(f,\xi)}(\varepsilon),\quad \varepsilon\in I_{(f,\xi)}\cap\,]0,\infty[,$$

et $D(\exp_r)(f,0)(0,\xi)=\varphi'_{(f,\xi)}(0)=\xi$. Si Π_r dénote l'application $(f,\xi)\mapsto(f,\exp_r(f,\xi))$, alors

$$D\Pi_r(f,0)(\eta_1,\eta_2)=\big(\eta_1,D(\exp_r)(f,0)(\eta_1,0)+\eta_2\big),\quad(\eta_1,\eta_2)\in H\mathcal{C}_0^r\big(\mathbb{R}^n\big)\times H\mathcal{C}_0^r\big(\mathbb{R}^n\big).$$

Il est évident que $D\Pi_r(f,0)$ est un isomorphisme des espaces de Banach de $H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)\times H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)$ dans lui même. Donc le théorème d'inversion locale montre qu'il existe un ouvert,

$$\mathcal{U}_f=\mathcal{V}_f\times\big\{\xi\in H\mathcal{C}_0^r\big(\mathbb{R}^n\big):\ \|\xi\|_{H\mathcal{C}^r}<r_f\big\}\subset T\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r\big(\mathbb{R}^n\big),$$

contenant $(f,0)$ tel que l'application Π_r soit un diffiomophisme de $\mathcal{U}_f$ dans $\Pi_r(\mathcal{U}_f)$. Par suite Π_r est un diffiomophisme de $\mathcal{U}=\bigcup_{f\in\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)}\mathcal{U}_f$ dans $\widetilde{\mathcal{U}}=\bigcup_{f\in\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^r(\mathbb{R}^n)}\Pi(\mathcal{U}_f)$ puisque elle est injective.

De même, on vérifie que Π_r est un diffiomophisme de $\mathcal{U}\cap T\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^s(\mathbb{R}^n)$ dans $\widetilde{\mathcal{U}}\cap(\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^s(\mathbb{R}^n)\times\mathit{Diff}\,H\mathcal{C}_0^s(\mathbb{R}^n))$ quel que soit $s\in[r,\infty[-\mathbb{N}$. D'où on peut prendre $\widetilde{\mathcal{V}}=\widetilde{\mathcal{U}}\cap(\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)\times\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n))$ et $\mathcal{V}=\mathcal{U}\cap T\mathit{Diff}\,H^\infty(\mathbb{R}^n)$. $\square$

Corollaire 3.5.

1. *Pour tout $\xi\in H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, il existe un intervalle ouvert unique I_ξ contenant* 0 *et vérifiant* :
   (iii) *Il existe une solution $u_\xi\in C^\infty(I_\xi;H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$ du problème $(\mathcal{P}_2)$.*
   (iv) *Si $u\in C^\infty(I;H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$ est une autre solution du problème $(\mathcal{P}_2)$, alors $I\subset I_\xi$ et $u=u_\xi|_I$.*
2. *L'ensemble $\Omega=\{(t,\xi)\in\mathbb{R}\times H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n):\ t\in I_\xi\}$ est un ouvert de $\mathbb{R}\times H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$, et l'application $(t,\xi)\in\Omega\mapsto u_\xi(t)\in H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ est de classe C^∞. En particulier, l'application*

$$(t,\xi,x)\in\Omega\times\mathbb{R}^n\mapsto u_\xi(t,x)=u_\xi(t)(x)\in\mathbb{R}^n$$

est de classe C^∞.

Démonstration. Soit $\xi \in H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$. On pose :

$$u_\xi(t) = \varphi'_{(Id,\xi)}(t) \circ \bigl(\varphi_{(Id,\xi)}(t)\bigr)^{-1}, \quad t \in I_\xi = I_{(Id,\xi)}.$$

D'après le Théorème 3.4, $u_\xi \in C^\infty(I_\xi; H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$ est une solution du problème $(\mathcal{P}_2)$, l'ensemble

$$\Omega = \bigl\{(t,\xi) \in \mathbb{R} \times H^\infty\bigl(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n\bigr):\ t \in I_\xi\bigr\}$$

est un ouvert de $\mathbb{R} \times H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ et l'application $(t,\xi) \in \Omega \mapsto u_\xi(t) \in H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n)$ est de classe C^∞. Il reste donc à montrer l'énoncé (iv).

Soit $u \in C^\infty(I; H^\infty(\mathbb{R}^n;\mathbb{R}^n))$ une solution de $(\mathcal{P}_2)$. L'unique solution $\varphi \in C^\infty(I; \mathit{Diff}\, H^\infty(\mathbb{R}^n))$ du problème

$$\begin{cases} \varphi'(t) = u(t) \circ \varphi(t), \\ \varphi(0) = Id, \end{cases}$$

est une solution de $(\mathcal{P}_1)$ avec $f = Id$. Donc $I \subset I_{(Id,\xi)}$ et $\varphi = \varphi_{(Id,\xi)}|_I$. Par suite, $u = u_\xi|_I$. $\square$

Remerciements

L'auteur correspondant remercie le référé pour sa lecture attentive et minutieuse de la première version du manuscrit et pour avoir signalé quelques références importantes.

Références

[1] R. Abraham, Lectures of Smale on Differential Topology, Notes, Columbia University, 1963.
[2] J. Burgers, A mathematical model illustrating the theory of turbulence, Adv. Appl. Mech. 1 (1948) 171–199.
[3] M. Cantor, Perfect fluid flows over $\mathbb{R}^n$ with asymtotic conditions, J. Funct. Anal. 18 (1975) 73–84.
[4] R. Camassa, D. Holm, An integrable shallow equation with peaked solutions, Phys. Rev. Lett. 71 (1993) 1661–1664.
[5] A. Constantin, B. Kolev, Geodesic flow on the diffeomorphism group of the circle, Comm. Math. Helv. 78 (2003) 787–804.
[6] A. Constantin, T. Kappeler, B. Kolev, On the geodesic exponential maps of the Virasoro group, Ann. Global Anal. Geom. 31 (2007) 321–362.
[7] A. Constantin, B. Kolev, On the geometric approach to the motion of inertial mechanical systems, J. Phys. A 35 (2002) R51–R79.
[8] A. Constantin, Existence of permanent and breaking waves for a shallow water equation: a geometric approach, Ann. Inst. Fourier 50 (2000) 321–362.
[9] C.-A. Faure, Théorie de la différentiation dans les espaces convenables, Thèse PhD, Université de Genève, 1991.
[10] A. Frölicher, A. Kriegl, Linear Spaces and Differentiation Theory, Pure and Applied Mathematics, J. Wiley, Chichester, 1988.
[11] R.S. Hamilton, The inverse function theorem of Nash and Moser, Bull. Amer. Math. Soc. 7 (1982) 65–222.
[12] A. Kriegl, P. Michor, The Convenient Setting for Global Analysis, Surveys and Monographs, vol. 53, AMS, Providence, 1997.
[13] S. Kouranbaeva, The Camassa–Holm equation as a geodesic flow on the diffeomorphism group, J. Math. Phys. 40 (1999) 857–868.
[14] S. Lang, Introduction to differentiable manifolds, second edition, Springer-Verlag New York, Inc., 2002.
[15] P. Michor, Some geometric evolution equations arising as geodesic equations on groups of diffeomorphisms including the Hamiltonian approach, in: Bove Antonio, Ferruccio Colombini, Daniele Del Santo (Eds.), Phase Space Analysis of Partial Differential Equations, in: Progress in Non-Linear Differential Equations and Their Applications, vol. 69, Birkhauser Verlag, 2006, pp. 133–215, arXiv:math/0609077.
[16] P. Michor, Manifolds of Differentiable Mappings, Shiva, Orpington, 1980.
[17] J. Milnor, Remarks on infinite dimensional Lie groups, in: B.S. DeWitt, R. Stora (Eds.), Relativity, Groups, and Topology II, Les Houches, 1983, Elsevier, Amsterdam, 1984.