JOURNAL OF ALGEBRA 38, 146–162 (1976)

Primitive Permutationsgruppen mit einem zweifach primitiven Subkonstituenten

WOLFGANG KNAPP

Mathematisches Institut der Universität Tübingen, D 7400 Tübingen, Auf der Morgenstelle 10, Bundesrepublik, Deutschland

Communicated by B. Huppert

Received May 7, 1974

(G, Ω) sei eine endliche primitive Permutationsgruppe. Unter einem *Subkonstituenten* verstehen wir einen transitiven Konstituenten $G_\alpha^{\Gamma(\alpha)}$ vom Grad $d > 1$ des Punktstabilisators G_α für $\alpha \in \Omega$. Dabei ist Δ ein Orbital von (G, Ω), d.h. eine G-Bahn auf Ω^2 und $\Delta(\alpha) = \{\beta \mid (\alpha, \beta) \in \Delta\}$ die zugehörige G_α-Bahn. $|\Delta(\alpha)| = d$ heiße der zu Δ gehörige *Subgrad* von (G, Ω). $\Delta' = \{(\alpha, \beta) \mid (\beta, \alpha) \in \Delta\}$ bezeichne das zu Δ gespiegelte (gepaarte) Orbital. Δ heißt *symmetrisch* (selbstgepaart), falls $\Delta = \Delta'$ ist, andernfalls heißt Δ *unsymmetrisch*. Die Subkonstituenten $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ and $G_\alpha^{\Delta'(\alpha)}$ heißen gepaarte Subkonstituenten.

In der vorliegenden Arbeit wird gezeigt, daß $|G_\alpha|$ durch eine Funktion von d beschränkt ist wenn $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ 2-primitiv ist. Das Hauptergebnis ist

THEOREM A. *Wenn (G, Ω) primitiv ist und $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ ein 2-primitiver Subkonstituent vom Grad $d > 1$, so ist*

$$|G_\alpha| \leqslant \max\{d!(d-1)!^d, d(d-1)^6 (d-2)^2 ({}^2\log(d-1))^2\}.$$

Theorem A wird in 4.3 bewiesen. In 4.2. werden Bedingungen für eine bessere Abschätzung angegeben. Der schwierige Teil von Theorem A ist enthalten in

THEOREM B. *Sei (G, Ω) primitiv und $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ 2-primitiv vom Grad $d > 1$ derart, daß für $\beta \in \Delta(\alpha)$ die Fittinggruppe $\mathrm{F}(G_{\alpha\beta}^{\Delta(\alpha)}) \neq 1$ ist, so ist*

$$|G_\alpha| \leqslant d(d-1)^6 (d-2)^2 ({}^2\log(d-1))^2.$$

Theorem B wird in 4.2 abschließend bewiesen. Die Vorarbeiten zu seinem

Beweis umfassen die Abschnitte 2 und 3. Eine Folgerung aus den Ergebnissen, die zu Theorem B führen, ist

THEOREM C. *Wenn* (G, Ω) *primitiv mit Subgrad* $d \in \{4, 5\}$ *ist, so ist* $|G_\alpha| \leqslant d(d-1)^7 (d-2)^2$.

Theorem C wird in Abschnitt 5 bewiesen.

Nach Gardiner [1, 2] sind die Ergebnisse dieser Arbeit für den Fall eines symmetrischen Orbitals $\Delta = \Delta'$ schon bekannt. Es zeigt sich, daß einige Ergebnisse über die gepaarten Subkonstituenten $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ und $G_\alpha^{\Delta'(\alpha)}$ in [5] ausreichen, um für ein nicht notwendig symmetrisches Orbital Δ eine Theorie der s-Bögen analog zu Sims [9] zu entwickeln. Der Beweis von B läuft weitgehend parallel zu den entsprechenden Sätzen von Gardiner [1] und Sims [9].

Die Bezeichnungen orientieren sich an [4, 5, 11]. Eine ausführliche Liste der nicht allgemein begräuhlichen Begriffe und Bezeichnungen findet sich in [5].

Alle in dieser Arbeit auftretenden Mengen und Gruppen werden als *endlich* angenommen, ausgenommen $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Z}$, die natürlichen bzw. ganzen rationalen Zahlen. Eine Gruppe X heißt p-günstig (für eine Primzahl p) genau dann, wenn $C_X(O_p(X)) \leqslant O_p(X)$ gilt ("strongly p-constrained" in [5]). Zur Vereinfachung bezeichnet x^- das Inverse eines Elements x einer Gruppe X. Für jede binäre Relation P in einer Menge Σ bezeichne P' die zu P gespiegelte Relation und $P(\xi) := \{\eta \mid (\xi, \eta) \in P\}$ für jedes $\xi \in \Sigma$.

Das Ende eines Beweises wird mit $\square$ markiert.

1. Vorbereitende Hilfssätze

LEMMA 1.1. *Eine Gruppe G wirke transitiv auf einer Menge* Ω *und* $P \subseteq \Omega^2$ *sei eine G-invariante Halbäquivalenzrelation (d.h. P sei reflexiv und transitiv). Dann ist P eine Äquivalenzrelation.*

Beweis. Es bleibt noch zu zeigen, daß P symmetrisch ist. Sei $(\alpha, \beta) \in P$. Wegen der Transitivität von P gilt dann $P(\beta) \subseteq P(\alpha)$. Weil G transitiv auf Ω wirkt, ist $\alpha^g = \beta$ für ein $g \in G$, daher auch $P(\alpha)^g = P(\beta)$ wegen der G-Invarians von P. Wegen $|\Omega| < \infty$ ergibt sich daraus $P(\alpha) = P(\beta)$. $\alpha \in P(\alpha) = P(\beta)$ hat dann $(\beta, \alpha) \in P$ zufolge. $\square$

LEMMA 1.2. *Sei* $q = p^f \geqslant 3$ *eine Potenz der Primzahl* p *und* $N := PSL(2, q) \leqslant G \leqslant P\Gamma L(2, q)$. *Falls* $q = 3$ *ist, sei* $G = PGL(2, 3)$. $P\Gamma L(2, q)$ *und damit auch G wirken in der natürlichen Weise 2-primitiv auf der projektiven*

Geraden $\Pi = \Pi_{q+1} := GF(q) \cup \{\infty\}$. *Es sei* $\alpha \in \Pi$ *und* $H \leqslant G_\alpha$ *mit* $|G_\alpha : H| = p^r$ *für ein* $r \geqslant 0$.

BEHAUPTUNG.

(a) *Entweder ist* H *transitiv auf* $\Pi - \{\alpha\}$ *und* $N_\alpha \leqslant H$ *oder* H *ist intransitiv auf* $\Pi - \{\alpha\}$ *und es gibt genau ein* $\beta \in \Pi - \{\alpha\}$ *mit* $N_{\alpha\beta} \leqslant H \leqslant G_{\alpha\beta}$.

(b) *In jedem Fall wirkt*

$$H \textit{ irreduzibel auf } O_p(G_\alpha) \qquad \text{mit} \qquad \text{Kern } O_p(H).$$

(c) *Wenn* $O_p(H) = 1$ *oder* $O_{p'}(H) \neq 1$ *ist, so wirkt* H *intransitiv auf* $\Pi - \{\alpha\}$.

Beweis. Falls $q = 3$ oder $r = 0$ ist, so ist nichts zu zeigen. Sei also $q \geqslant 4$. Wegen $|N_\alpha : N_\alpha H| = p^s$ mit $s \leqslant r$ gilt entweder $N_\alpha \leqslant H$ (und H wirkt transitiv auf $\Pi - \{\alpha\}$) oder $N_\alpha \cap H = N_{\alpha\beta}$ für genau ein $\beta \in \Pi - \{\alpha\}$ (im zweiten Fall wirkt H intransitiv auf $\Pi - \{\alpha\}$). Gelte nun $N_\alpha \cap H = N_{\alpha\beta}$. Dann ist $K := N_\alpha H$ eine primitive auflösbare Gruppe und $H = K_\gamma$ für ein $\gamma \in \Pi - \{\alpha\}$ nach [4, II, 3.8]. Dann gilt aber $N_{\alpha\beta} \leqslant G_{\alpha\beta\gamma}$. Wäre nun $\beta \neq \gamma$, so folgte $N_{\alpha\beta} = 1$, da $N_{\alpha\beta}$ semiregulär auf $\Pi - \{\alpha, \beta\}$ wirkt, ein Widerspruch. Also ist $\beta = \gamma$ und $H \leqslant G_{\alpha\beta}$.

H wirkt in jedem Fall irreduzibel auf dem auf $\Pi - \{\alpha\}$ regulären und zentralisatorgleichen Normalteiler $O_p(G_\alpha)$. Daher ist $O_p(H)$ der Kern dieser Wirkung.

Es ist des weiteren klar, daß $O_p(H) = 1$ oder $O_{p'}(H) \neq 1$ stets die Intransitivität von H auf $\Pi - \{\alpha\}$ zufolge hat. $\square$

PROPOSITION 1.3. *Sei* $G \leqslant S^\Omega$ *eine 2-primitive Permutationsgruppe,* $\alpha \in \Omega$ *und* $F(G_\alpha) \neq 1$.

Dann gilt genau eine der Aussagen:

(1) $|\Omega| = 2^f \geqslant 8$ *und* G *ist ähnlich zu* $\bar{G}$ *mit* $\bar{G} \in \{A(2^f), \Gamma(2^f)\}$, $2^f - 1$ *ist eine Mersennesche Primzahl und* f *ist eine ungerade Primzahl.*

(2) $|\Omega| = q + 1$ *für die Potenz* $q = p^f$ *einer Primzahl* p *und* G *ist ähnlich zu* $\bar{G}$ *mit* $PSL(2, q) \leqslant \bar{G} \leqslant P\Gamma L(2, q)$ *in der natürlichen Wirkung auf die projektive Gerade* Π_{q+1}.

Beweis. Wegen $F(G_\alpha) \neq 1$ *ist* $n := |\Omega| \geqslant 3$. Da G 2-primitiv ist, muß $F(G_\alpha)$ ein auf $\Omega - \{\alpha\}$ regulärer elementar abelscher p-Normalteiler sein. Nach Hering–Kantor–Seitz [3, Theorem 1.1] gibt es einen Normalteiler $M \trianglelefteq G$ derart, daß $M \leqslant G \leqslant \mathrm{Aut}(M)$ angenommen werden kann. Da $F(G_\alpha)$ elementar abelsch ist, sind die in [3] genannten Fälle $M \simeq Sz(q)$,

$M \cong PSU(3, q)$ und M vom Ree-Typ ausgeschlossen. Also bleiben $M \cong PSL(2, q)$ für eine Primzahlpotenz $q = p^f$ und M eine scharf 2-transitive Gruppe als einzige Möglichkeit. Wegen $\mathrm{Aut}(PSL(2, q)) \cong P\Gamma L(2, q)$ ist im ersten Fall G ähnlich zu einer Gruppe $\bar{G}$ mit $PSL(2, q) \leqslant \bar{G} \leqslant P\Gamma L(2, q)$ in der natürlichen Wirkung auf Π_{q+1}. Wir betrachten nun den Fall, daß M eine scharf 2-transitive Gruppe ist. Da M_α regulär auf $\Omega - \{\alpha\}$ wirkt, gilt $M_\alpha = \mathrm{F}(G_\alpha)$. Da M eine Frobeniusgruppe ist, ergibt sich, daß M_α eine zyklische Gruppe von Primzahlordnung r ist. Nach dem Satz von Frobenius besitzt M und damit auch G einen regulären Normalteiler N, welcher elementar abelsch von Primzahlpotenzordnung p^f ist. $p^f - 1 = r$ hat zufolge, daß f eine Primzahl ist und entweder $r \in \{2, 3\}$ und $p^f \in \{3, 4\}$ oder $r > 3$ und $p = 2$ und $2^f \geqslant 8$ ist. In jedem Falle ist nach [4, II, 3.12] G zu einer Untergruppe von $\Gamma(p^f)$ ähnlich. Im Falle $r \leqslant 3$ liegt wegen $\Gamma(3) \cong S^3 \cong PGL(2, 2)$ und $\Gamma(4) \cong S^4 \cong PGL(2, 3)$ der Fall (2) der Behauptung vor. Falls $r > 3$ ist, so liegt nach [4, II, 3.13] der Fall (1) der Bahauptung vor. $\square$

Bemerkung. [3, Corollary 10.1] ist offensichtlich inkorrekt und kann durch die unter schächeren Voraussetzungen formulierte Proposition 1.3 ersetzt werden.

LEMMA 1.4. *Sei P eine p-Gruppe zu einer Primzahl p und G wirke auf P als Gruppe von Automorphismen. P_1 sei eine echte G-invariante Untergruppe von P. Dann gibt es einen echten G-invarianten Normalteiler P_2 von P, welcher P_1 umfaßt. Wenn $|P : P_1|$ höchstens gleich der kleinsten Ordnung eines G-Kompositionsfaktors von P ist, so ist $P_1 = P_2 \lhd P$.*

Beweis. Es gibt einen echten Normalteiler Q von P mit $P_1 \leqslant Q$. Dann ist $P_2 := \bigcap_{g \in G} Q^g \geqslant P_1$ ein Normalteiler von P mit der geforderten Eigenschaft. Der Rest ist klar. $\square$

2. s-BÖGEN BEI 2-TRANSITIVEN SUBKONSTITUENTEN

In diesem Abschnitt entwickeln wir nach dem Vorbild von Sims [9] eine Theorie der s-Bögen, die dem vorliegenden Problem angepaßt ist. Um einer kürzeren Darstellung willen verzichten wir auf größtmögliche Allgemeinheit und setzen im ganzen Abschnitt voraus, daß (G, Ω) eine primitive Permutationsgruppe, $|\Omega| = n$, Δ ein Orbital von (G, Ω) der Länge $|\Delta(\alpha)| = d \geqslant 3$ und der Subkonstituent $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ 2-transitiv ist. Außerdem setzen wir voraus, daß die gepaarten Bahnen $\Delta(\alpha)$ und $\Delta'(\alpha)$ isomorphe G_α-Räume sind. Ein G_α-Isomorphismus τ_α von $\Delta(\alpha)$ auf $\Delta'(\alpha)$ ist dann eindeutig bestimmt, denn es gilt $G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta\tau_\alpha}$ für jedes $\beta \in \Delta(\alpha)$.

'-VEREINBARUNG. Wenn keine Unklarheiten entstehen, so schreiben wir $\beta' = \beta^{\tau_\alpha}$ (für $\beta \in \Delta(\alpha)$) und ebenso $\gamma' = \gamma^{\tau_\alpha^-}$ (für $\gamma \in \Delta'(\alpha)$). Es ist also stets $G_{\alpha\beta} = G_{\alpha\beta'}$ und $G_{\alpha\gamma} = G_{\alpha\gamma'}$.

DEFINITION 2.1. Sei $2 \leqslant s \in \mathbb{N}$ und $A = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_s) \in \Omega^s$. A heiße ein s-Bogen (im Graphen (Ω, Δ)) genau dann, wenn $(\alpha_{i-1}, \alpha_i) \in \Delta$ für $i = 1, ..., s$ und $\alpha_{i-1}^{\tau_{\alpha_i}} \neq \alpha_{i+1}$ für $i = 1, ..., s-1$ gilt.

Bemerkung. Die Definition steht im Einklang mit der in der Graphentheorie üblichen Definition bei ungerichteten Graphen. Denn im Fall $\Delta = \Delta'$ ist τ_α notwendig die Identität auf $\Delta(\alpha)$.

s-Bog bezeichne die Menge aller s-Bögen. Es ist klar, daß G vermöge $(\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_s)^g := (\alpha_0{}^g, \alpha_1{}^g, ..., \alpha_s{}^g)$ auf s-Bog in natürlicher Weise treu wirkt.

LEMMA 2.2. $|s\text{-Bog}| = nd(d-1)^{s-1}$.

DEFINITION 2.3. (a) G heiße s-bogentransitiv genau dann, wenn G transitiv auf s-Bog wirkt.

(b) Da nach 2.2 die Folge $(|s\text{-Bog}|)_{s\in\mathbb{N}}$ divergiert und $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ 2-transitiv und $\Delta(\alpha) \cong_{G_\alpha} \Delta'(\alpha)$ ist, existiert $b(G) := \max\{s \mid G\ s\text{-bogentransitiv}\}$. $b(G)$ heiße der Bogengrad von G (bezüglich (Ω, Δ)).

Nach dem Vorbild von Sims [9] führen wir nun in s-Bog verschiedene Relationen ein, die die Zusammenhangsverhältnisse im Graphen (Ω, Δ) beschreiben.

DEFINITION 2.4. Seien $X = (\alpha_0, \alpha_1, ..., \alpha_s)$ und $Y = (\beta_0, \beta_1, ..., \beta_s)$ s-Bögen.

(a) X heiße Vorgänger von Y (im Zeichen $X \prec Y$) genau dann, wenn $\alpha_i = \beta_{i-1}$ für $i = 1, ..., s$ gilt.

(b) X heiße Nachfolger von Y (i.Z. $X \succ Y$) genau dann, wenn $Y \prec X$. Es ist also $\prec' = \succ$.

(c) $\sim$ bezeichne die reflexive und transitive Hülle von $\prec$. Wir sagen Y ist zugänglich von X genau dann, wenn $X \sim Y$.

N.B. Es gilt $X \sim Y$ genau dann, wenn $X = Y$ oder es eine endliche Folge $X = X_0, X_1, ..., X_t = Y$ gibt mit $X_{i-1} \prec X_i$ für $i = 1, ..., t$.

LEMMA 2.5. $\prec$ *und* $\succ$ *sind G-invariante Relationen in* s-Bog *und* $\sim$ *ist eine G-invariante Halbäquivalenzrelation in* s-Bog. *Wenn G s-bogentransitiv ist, so ist* $\sim$ *eine G-invariante Äquivalenzrelation.*

Beweis. Die ersten beiden Behauptungen sind klar. Die dritte Behauptung folgt aus Lemma 1.1. □

Lemma 2.6. *Jeder s-Bogen X hat benau $d - 1$ Vorgänger und Nachfolger.*

Beweis. $|\prec(X)| = d - 1$ ergibt sich aus der Definition der s-Bögen. Weiter ist offenbar $|s\text{-Bog}|\,|\prec(X)| = |\prec| = |\succ| = \sum_{Y \in s\text{-Bog}} |\succ(Y)| \leqslant |s\text{-Bog}|\,(d-1)$, wobei die Gleichheit nur gilt, wenn für alle $Y \in s\text{-Bog}$ $|\succ(Y)| = d - 1$ ist. Somit ergibt sich auch $|\succ(X)| = d - 1$. □

Theorem 2.7. *Wenn G s-bogentransitiv ist, so ist jeder s-Bogen Y von jedem s-Bogen X zugänglich.*

Wir führen den Beweis von 2.7 in einer Reihe von Hilfssätzen. Für den Rest des Abschnitts seien die Voraussetzungen von 2.7 gegeben.

Lemma 2.8. *Seien* $X = (\alpha_0, \ldots, \alpha_s)$ *und* $Y = (\beta_0, \ldots, \beta_s)$ *s-Bögen und für* $i, j \in \{0, \ldots, s-1\}$ *gelte* $\alpha_i = \beta_j$ *und* $\alpha_{i+1} = \beta_{j+1}$. *Dann ist* $X \sim Y$.

Beweis. Da G s-bogentransitiv ist, ist nach 2.5 die Relation $\sim$ eine G-invariante Äquivalenzrelation. Insbesondere ist $\succ \cup \prec \subseteq \sim$. Somit können wir, indem wir Vorgänger von X und Nachfolger von Y nehmen, $i = s - 1$ und $j = 0$ annehmen. Dann gilt aber $X = (\alpha_0, \ldots, \alpha_s) \prec (\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \beta_2) \prec (\alpha_2, \ldots, \alpha_s, \beta_2, \beta_3) \prec \cdots \prec (\alpha_{s-1}, \alpha_s, \beta_2, \ldots, \beta_s) = Y$ und $X \sim Y$ folgt. □

Lemma 2.9. *Seien* $X = (\alpha_0, \ldots, \alpha_s)$ *und* $Y = (\beta_0, \ldots, \beta_s)$ *s-Bögen und für* $i, j \in \{0, \ldots, s\}$ *gelte* $\alpha_i = \beta_j$. *Dann ist* $X \sim Y$.

Beweis. Wie in 2.8 können wir annehmen, daß $i = j = s$ ist. Es gibt ein $\gamma \in \Delta(\alpha_s)$ derart, daß $Z_1 := (\alpha_1, \ldots, \alpha_s, \gamma)$ und $Z_2 := (\beta_1, \ldots, \beta_s, \gamma)$ s-Bögen sind. Denn sonst gälte wegen $\alpha_s = \beta_s$ nach 2.6 die Beziehung $d = |\Delta(\alpha_s)| \geqslant 2(d-1) = 2d - 2$ im Widerspruch zu $d \geqslant 3$. Aus $X \prec Z_1$, $Y \prec Z_2$ und $Z_1 \sim Z_2$ nach 2.8 ergibt sich dann $X \sim Y$. □

Schluß des Beweises von 2.7.

Sei X ein s-Bogen. Wir definieren $\Psi := \{\alpha \in \Omega \mid$ Für jeden s-Bogen $Y = (\beta_0, \ldots, \beta_s)$ mit $\alpha \in \{\beta_0, \ldots, \beta_s\}$ gilt $X \sim Y\}$. Nach 2.9 ist $\Psi \neq \varnothing$. Sei $\alpha \in \Psi$ und $\beta \in \Delta(\alpha)$. Dann gibt es einen s-Bogen $Z = (\alpha, \beta, \ldots)$. Wegen $\alpha \in \Psi$ gilt dann $X \sim Z$. Für jeden s-Bogen $U = (v_0, \ldots, v_s)$ mit $\beta \in \{v_0, \ldots, v_s\}$ gilt dann nach 2.9 auch $Z \sim U$, und daher $X \sim U$. Damit ist $\beta \in \Psi$ gezeigt. Ψ enthält also eine Zusammenhangskomponente des Graphen (Ω, Δ). Da G

primitiv auf Ω wirkt, ist $\Psi = \Omega$ nach [9, Proposition 4.4]. Theorem 2.7 folgt nun ohne weiteres. $\square$

3. Subkonstituenten vom Typ $PSL(2, q)$

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, daß (G, Ω) eine primitive Permutationsgruppe ist mit einem Orbital Δ der Länge $|\Delta(\alpha)| = d \geqslant 4$. Ferner sei $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ ähnlich zu einer Permutationsgruppe H mit $PSL(2, q) \leqslant H \leqslant P\Gamma L(2, q)$ in der natürlichen Darstellung auf der projektiven Geraden Π_{q+1}. Dabei ist $q = p^f$ eine Potenz einer Primzahl p und $d = q + 1$, $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ ist 2-primitiv und $F(G_{\alpha\beta}^{\Delta(\alpha)}) = O_p(G_{\alpha\beta}^{\Delta(\alpha)})$ wirkt regulär auf $\Delta(\alpha) - \{\beta\}$ für jedes $\beta \in \Delta(\alpha)$. Falls $d = 4$ ist, nehmen wir außerdem an, daß $H = PGL(2, 3) \simeq S^4$ ist. Dies ist keine wesentliche Einschränkung, ebensowenig die Bedingung $d \geqslant 4$, da in den ausgeschlossenen Fällen die Struktur von G_α und sogar von G schon vollständig geklärt ist (siehe Abschnitt 4). Es bezeichne $K(\alpha) = G_{\Delta(\alpha)}$ und $K'(\alpha) = G_{\Delta'(\alpha)}$ für $\alpha \in \Omega$. Sei $(\alpha, \beta) \in \Delta$.

Lemma 3.1. *$\Delta(\alpha)$ und $\Delta'(\alpha)$ sind isomorphe G_α-Räume. Insbesondere ist $K(\alpha) = K'(\alpha)$. $E(\alpha, \beta) := K(\alpha) \cap K(\beta)$ ist eine p-Gruppe. Wenn $E(\alpha, \beta) \neq 1$ ist, so sind G_α und $G_{\alpha\beta}$ p-günstig und eine p-Sylowgruppe von $G_{\alpha\beta}$ ist nicht abelsch und keine verallgemeinerte Quaternionengruppe.*

Beweis. Aus [5, Theorem 3.5] ergibt sich $K(\alpha) = K'(\alpha)$. Da $PSL(2, q)$ genau eine Konjugiertenklasses von Untergruppen vom Index $q + 1$ enthält, nämlich die p-Sylownormalisatoren, ergibt sich aus den Voraussetzungen dieses Abschnitts, daß $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ genau eine Konjugiertenklasse von Untergruppen vom Index $d = q + 1$ besitzt. Dies hat $\Delta(\alpha) \simeq_{G_\alpha} \Delta'(\alpha)$ zufolge. Der Rest folgt nun aus [5] Corollary 4.12.

Nach 3.1 sind insbesondere die Voraussetzungen des Abschnitts 2 erfüllt. Wir übernehmen nun im folgenden die Begriffe und die Bezeichnungen des 2. Abschnitts, insbesondere die *'-Vereinbarung*.

Theorem 3.2. *Sei $(\alpha_0, \alpha_1) \in \Delta$ und $P := O_p(G_{\alpha_0\alpha_1})$. Dann wirkt P transitiv auf den 2-Bögen mit Anfang (α_0, α_1). Sei s die größte natürliche Zahl derart, daß P transitiv auf den s-Bögen mit Anfang (α_0, α_1), aber intransitiv auf den $(s + 1)$-Bögen mit Anfang (α_0, α_1) wirkt.*

Behauptung.

(1) *G ist s-bogentransitiv und der Bogengrad $b(G) = s$.*

(2) *Sei $X = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ ein s-Bogen mit Anfang (α_0, α_1). Sei $G_i := G_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_i}$ für $0 \leqslant i \leqslant s$ und $P_i := P \cap G_i$ für $1 \leqslant i \leqslant s$. Dann ist*

$|P_i : P_{i+1}| = q$ *für* $1 \leqslant i \leqslant s-1$ *und* $P_s = 1$. *Also ist* $|P| = q^{s-1}$ *und* $|G_0| = (q+1)rq^{s-1}$, *wobei* r *ein Teiler von* $(q-1)^2 f^2$ *ist.*

(3) *Es gilt* $P_1 = P$, $P_2 = O_p(G_{\alpha_1})$ *und für* $3 \leqslant i \leqslant s$ *ist*

$$\begin{aligned} P_i &= E(\alpha_1, \alpha_2) \cap E(\alpha_2, \alpha_3) \cap \cdots \cap E(\alpha_{s-2}, \alpha_{s-1}) \\ &= K(\alpha_1) \cap K(\alpha_2) \cap \cdots \cap K(\alpha_{s-1}). \end{aligned}$$

$$P_i \trianglelefteq G_i = P_i G_s \qquad \text{und} \qquad G_i/P_i \cong G_1/P_1 \qquad \text{für } i = 1,\ldots, s.$$

(4) $P_{i+1} \trianglelefteq P_i$ *und* P_i/P_{i+1} *ist elementar abelsch der Ordnung* $q = p^f$ *für* $i = 1,\ldots, s-1$. G_s *wirkt irreduzibel auf jedem Faktor* P_i/P_{i+1} *für* $i = 1,\ldots, s-1$.

Eine unmittelbare Folgerung des vorstehenden Satzes ist

KOROLLAR 3.3. *Unter den Voraussetzungen dieses Abschnitts ist* $|G_\alpha|$ *ein Teiler von* $d(d-1)^{s-1}(d-2)^2({}^p\log(d-1))^2$, *wobei* $s = b(G)$ *der Bogengrad von* G *ist.*

Für den Rest des Abschnitts übernehmen wir die in Theorem 3.2 eingeführten Bezeichnungen. Wir führen den Beweis dieses Satzes in einer Folge von Hilfssätzen.

LEMMA 3.4. P *wirkt transitiv auf den 2-Bögen mit Anfang* (α_0, α_1). *Also ist* s *definiert und* G *ist s-bogentransitiv.*

Beweis. Da $G_{\alpha_1}^{\Delta(\alpha_1)}$ 2-primitiv und $G_{\alpha_1\alpha_0} = G_{\alpha_0\alpha_1}{}'$ ist, wirkt $P = O_p(G_{\alpha_0\alpha_1}) = O_p(G_{\alpha_1\alpha_0}{}')$ transitiv auf $\Delta(\alpha_1) - \{\alpha_0'\}$. □

LEMMA 3.5. (a) *Es ist* $|P_i : P_{i+1}| = |G_i : G_{i+1}| = q$ *für* $1 \leqslant i \leqslant s-1$, *während* $|G_0 : G_1| = d = q+1$ *ist.*

(b) $|G_i : P|$ *teilt* $(q-1)^2 f^2$, $|G_0 : P_s| = (q+1)rq^{s-1}$, *wobei* r *ein Teiler von* $(q-1)^2 f^2$ *ist.*

(c) $P_i \trianglelefteq G_i = P_i G_s$ *und* $G_i/P_i \cong G_1/P_1$ *für* $i = 1,\ldots, s$. $P_i = O_p(G_i)$.

Beweis. (a) folgt aus der Definition von s. (b) folgt aus (a) und der Tatsache, daß P regulär auf $\Delta(\alpha_0) - \{\alpha_1\}$ und $\Delta'(\alpha_1) - \{\alpha_0\}$ wirkt. (c) ergibt sich aus $P = O_p(G_1)$. □

LEMMA 3.6. *Seien* $\alpha \in \Omega$ *und* $(\alpha, \beta) \in \Delta$.

(a) $O_p(G_\alpha) = O_p(K(\alpha)) \leqslant O_p(G_{\alpha\beta})$.

(b) $O_p(G_{\alpha\beta})$ *wirkt regulär auf* $\Delta(\beta) - \{\alpha'\}$ *und* $\Delta'(\beta) - \{\alpha\}$. *Wenn* $K(\alpha) \neq 1$ *ist, so gilt* $O_p(G_{\alpha\beta}) = O_p(G_\alpha)\, O_p(G_\beta)$ *und* $O_p(G_\alpha)$ *wirkt ebenfalls regulär auf* $\Delta(\beta) - \{\alpha'\}$ *und* $\Delta'(\beta) - \{\alpha\}$.

Beweis. (a): Wegen $p \mid d - 1 = q$ gilt $O_p(G_\alpha) \leqslant K(\alpha)$. (b): $O_p(G_\alpha)\, O_p(G_\beta) \leqslant O_p(G_{\alpha\beta})$ gilt nach (a) wegen $K(\beta) = K'(\beta)$. Wenn $K(\alpha) \neq 1$ ist, gilt auch $O_p(G_\alpha) \neq 1$ und $O_p(G_\beta) \leqslant K(\alpha)$. Da $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ und $G_\beta^{\Delta'(\beta)}$ 2-primitiv sind, ergibt sich dann die Behauptung. □

LEMMA 3.7. *Es ist* $P_1 = P = O_p(G_{\alpha_0\alpha_1})$ *und* $P_2 = O_p(G_{\alpha_1})$.

Beweis. $P_1 = P$ ist klar. P_1 wirkt regulär auf $\Delta(\alpha_1) - \{\alpha_0'\}$. Daher ist $P_2 = P_1 \cap G_{\alpha_0\alpha_1\alpha_2} \leqslant K(\alpha_1)$ und somit $O_p(G_{\alpha_1}) = P_2$. □

LEMMA 3.8. $s = 2$ *genau dann, wenn* $K(\alpha) = 1$.

Beweis. Wenn $K(\alpha) = 1$ ist, so ist $|P| = q$ und daher $P_2 = 1$, was $s = 2$ zufolge hat. Sei $s = 2$ und $K(\alpha) \neq 1$. Nach 3.6(b) wirkt dann $O_p(G_{\alpha_0})$ regulär auf $\Delta(\alpha_1) - \{\alpha_0'\}$ und $O_p(G_{\alpha_1})$ regulär auf $\Delta(\alpha_2) - \{\alpha_1'\}$. Somit wirkt $P = O_p(G_{\alpha_0\alpha_1}) = O_p(G_{\alpha_0})\, O_p(G_{\alpha_1})$ transitiv auf den 3-Bögen mit Anfang (α_0, α_1). Dann ist aber $s \geqslant 3$, ein Widerspruch. □

LEMMA 3.9. *Sei* (α, β, γ) *ein 2-Bogen und* $E(\alpha, \beta) \neq 1$. *Dann ist* $O_p(G_\beta) = E(\alpha, \beta)\, E(\beta, \gamma)$. *Insbesondere wirken* $O_p(G_\beta)$ *und* $E(\alpha, \beta)$ *regulär auf* $\Delta(\gamma) - \{\beta'\}$ *und* $\Delta'(\gamma) - \{\beta\}$. $|E(\alpha, \beta) : E(\alpha, \beta) \cap E(\beta, \gamma)| = |E(\beta, \gamma) : E(\alpha, \beta) \cap E(\beta, \gamma)| = q$. $G_{\alpha\beta\gamma}$ *wirkt irreduzibel auf den* $G_{\alpha\beta\gamma}$*-isomorphen Faktorgruppen*

$$O_p(G_\beta)\, K(\gamma)/K(\gamma) \cong O_p(G_\beta)/E(\beta, \gamma) \cong E(\alpha, \beta)/E(\alpha, \beta) \cap E(\beta, \gamma).$$

Beweis. Wäre $E(\alpha, \beta) \leqslant E(\beta, \gamma)$, so folgte $E(\alpha, \beta) = E(\beta, \gamma) \trianglelefteq \langle G_{\alpha\beta}, G_{\beta\gamma}\rangle = G_\beta$ wegen $\alpha' \neq \gamma$. $E(\alpha, \beta) \trianglelefteq G_\beta$ hat aber $E(\beta, \gamma) \trianglelefteq G_\gamma$ zufolge, und so ergibt sich $E(\alpha, \beta) = E(\beta, \gamma) \trianglelefteq \langle G_\beta, G_\gamma\rangle = G$ im Widerspruch zu $E(\alpha, \beta) \neq 1$.

Also ist $E(\alpha, \beta) \nleqslant E(\beta, \gamma)$. Setze $R := E(d, \beta) E(\beta, \gamma)$. $R \leqslant O_p(G_\beta)$ ist klar. Ferner ist $E(\beta, \gamma) < R \trianglelefteq G_{\alpha\beta\gamma}$, also $R \nleqslant K(\gamma)$. Nun ist $|G_{\gamma\beta} : G_{\alpha\beta\gamma}| = q = p^f$, daher $|G_{\gamma\beta}^{\Delta'(\gamma)} : G_{\alpha\beta\gamma}^{\Delta'(\gamma)}| = p^r$ für ein $r \leqslant f$. $1 \neq R^{\Delta'(\gamma)} \leqslant O_p(G_{\alpha\beta\gamma}^{\Delta'(\gamma)})$ ergibt dann nach Lemma 1.2, daß $R = O_p(G_\beta)$ ist. Der Rest ist klar. □

LEMMA 3.10. $s = 3$ *genau dann, wenn* $K(\alpha) \neq 1$ *und* $E(\alpha, \beta) = 1$.

Beweis. Sei $s = 3$ *und* $E(\alpha, \beta) \neq 1$. Nach 3.9 wirkt $E(\alpha_1, \alpha_2)$ regulär auf $\Delta(\alpha_3) - \{\alpha_2'\}$. P_3 wirkt deshalb transitiv auf den 4-Bögen mit Anfang $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$. P ist somit transitiv auf den 4-Bögen mit Anfang (α_0, α_1) und somit $s \geqslant 4$, ein Widerspruch. Sei nun $K(\alpha) \neq 1 = E(\alpha, \beta)$. Nach 3.8 ist dann $s \geqslant 3$. Wegen $E(\alpha, \beta) = 1$ ist aber $|P| = q^2$ und deshalb $s \leqslant 3$. □

LEMMA 3.11. *Wenn* $s \geqslant 3$ *ist, so gilt* $P_3 = E(\alpha_1, \alpha_2)$.

Beweis. Wenn $s = 3$ ist, so ist $P_3 = 1 = E(\alpha_1, \alpha_2)$ nach 3.10. Sei also

$s > 3$ und daher $E(\alpha, \beta) \neq 1$. Klar ist $E(\alpha_1, \alpha_2) \leqslant P_3$. Nach 3.9 ist $|P: E(\alpha_1, \alpha_2)| = q^2$, daher die Behauptung. $\square$

Da der Fall $s \leqslant 3$ nun hinreichend geklärt ist, nehmen wir im folgenden (bis Lemma 3.17) an, daß

$$s \geqslant 4 \text{ und somit auch } E(\alpha, \beta) \neq 1 \text{ ist.}$$

LEMMA 3.12. *Sei (α, β, γ) ein 2-Bogen und $H, K \leqslant E(\alpha, \beta)$ derart, daß $H \cap E(\beta, \gamma) \leqslant K < H \leqslant E(\alpha, \beta)$ und $|H: K| = q$ gilt. Dann ist $HE(\beta, \gamma) = E(\alpha, \beta)\, E(\beta, \gamma) = O_p(G_\beta)$ und $K = H \cap E(\beta, \gamma)$. Insbesondere ist H/K operatorisomorph zu $O_p(G_\beta)/E(\beta, \gamma)$ und zu $O_p(G_\beta)\, K(\gamma)/K(\gamma)$, wobei als Operatorenbereich jede Untergruppe von $G_{\alpha\beta\gamma} \cap N_G(H)$ zulässig ist.*

Beweis. Wegen $E(\alpha, \beta) \neq 1$ ist nach 3.9 $O_p(G_\beta) = E(\alpha, \beta)\, E(\beta, \gamma)$. $|H: K| = q = |O_p(G_\beta): E(\beta, \gamma)|$ ergibt die Behauptung. $\square$

LEMMA 3.13. *Für $2 \leqslant t \leqslant s$ ist $|G_{\alpha_{t-1}, \alpha_t}: G_t| = q^{t-1} = p^{f(t-1)}$.*

Beweis. Nach 3.5 ist $|G_1: G_t| = q^{t-1}$. Wegen $|G_{\alpha_{t-1}, \alpha_t}| = |G_1|$ ergibt sich das Lemma. $\square$

LEMMA 3.14. *Sei $U \leqslant G_{\alpha\beta}$ und $|G_{\alpha\beta}: U| = p^r$. Dann wirkt U irreduzibel auf den $G_{\alpha\beta}$-zulässigen Faktorgruppen $O_p(G_\alpha)/E(\alpha, \beta) \cong O_p(G_\alpha)\, K(\beta)/K(\beta)$.*

Beweis. Klar ist $O_p(G_\alpha)\, K(\beta)/K(\beta) \cong_{G_{\alpha\beta}} O_p(G_\alpha)/E(\alpha, \beta)$. Sei $\bar{U} := UK(\beta)$. Dann ist $|G_{\alpha\beta}: \bar{U}|$ ein Teiler von $|G_{\alpha\beta}: U|$. Das Lemma folgt nun aus 1.2. $\square$

LEMMA 3.15. *Für $3 \leqslant t \leqslant s$ gilt*

$$P_t = \bigcap_{i=1}^{t-2} E(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = \bigcap_{i=1}^{t-1} K(\alpha_i)$$

und G_s wirkt irreduzibel auf P_{t-1}/P_t für $2 \leqslant t \leqslant s$.

Beweis. Für alle $t \in \{1, \ldots, s\}$ ist $G_t = P_t G_s$. Für $t \leqslant 3$ ist das Lemma also nach 3.7, 3.9, 3.11, und 1.2 richtig. Sei nun $3 < t \leqslant s$ und die Behauptung richtig für $t - 1$ anstelle von t. Es ist also

$$P_{t-1} = \bigcap_{i=1}^{t-3} E(\alpha_i, \alpha_{i+1}).$$

Nun ist $|P_{t-1}: P_t| = |G_{t-1}: G_t| = q$ und $P_{t-1} \cap E(\alpha_{t-2}, \alpha_{t-1}) \leqslant P_{t-1} \cap G_t = P_t$. Setze $H := P_{t-1}$, $K := P_t$ und $(\alpha, \beta, \gamma) := (\alpha_{t-3}, \alpha_{t-2}, \alpha_{t-1})$.

Dann ergibt such nach 3.12

$$P_t = P_{t-1} \cap E(\alpha_{t-2}, \alpha_{t-1}) = \bigcap_{i=1}^{t-2} E(\alpha_i, \alpha_{i+1})$$

und $P_{t-1}/P_t \cong O_p(G_{\alpha_{t-2}})/E(\alpha_{t-2}, \alpha_{t-1})$ als G_{t-1}-Operatorgruppen. Nach 3.13 und 3.14 wirkt G_{t-1} irreduzibel auf

$$O_p(G_{\alpha_{t-2}})/E(\alpha_{t-2}, \alpha_{t-1}) \underset{G_{t-1}}{\cong} P_{t-1}/P_t .$$

Da $G_{t-1} = P_{t-1}G_s$, $P_{t-1}G_s \leqslant P_t$ und P_{t-1}/P_t abelsch ist, wirkt G_s irreduzibel auf P_{t-1}/P_t. □

Lemma 3.16. $P_s = 1$.

Beweis. Angenommen $P_s \nleqslant E(\alpha_{s-1}, \alpha_s)$. Dann gilt

$$E(\alpha_{s-1}, \alpha_s) < E(\alpha_{s-1}, \alpha_s)\, P_s \leqslant E(\alpha_{s-2}, \alpha_{s-1})\, E(\alpha_{s-1}\alpha_s) = O_p(G_{\alpha_{s-1}}),$$

da $P \leqslant E(\alpha_{s-2}, \alpha_{s-1})$ nach 3.15. Nach 3.13 und 3.14 wirkt aber G_s irreduzibel auf $O_p(G_{\alpha_{s-1}})/E(\alpha_{s-1}, \alpha_s)$. Wegen $P_s \lhd G_s$ ist dann aber $E(\alpha_{s-1}, \alpha_s)\, P_s = O_p(G_{\alpha_{s-1}})$ und P_s wirkt transitiv auf $\Delta(\alpha_s) - \{\alpha'_{s-1}\}$ nach 3.9 im Widerspruch zur Definition von s. Somit gilt $P_s \leqslant E(\alpha_{s-1}, \alpha_s) \leqslant K(\alpha_s)$. Nach 3.15 ergibt sich daraus

$$O_p(G_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_s}) = P_s = \bigcap_{i=1}^{s-2} E(\alpha_i, \alpha_{i+1}) \cap E(\alpha_{s-1}, \alpha_s)$$

$$\leqslant \bigcap_{i=2}^{s-1} E(\alpha_i, \alpha_{i+1}) = O_p(G_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s\xi})$$

für jedes $\xi \in \Delta(\alpha_s) - \{\alpha'_{s-1}\}$.

Da G s-bogentransitiv ist, folgt, daß für $X \prec Y$ stets $O_p(G_X) = O_p(G_Y)$ gilt. Nach Theorem 2.7 gilt dann aber für alle s-Bögen X stets $P_s = O_p(G_X) \lhd G$ und $P_s = 1$ folgt. □

Lemma 3.17. *Der Bogengrad* $b(G) = s$.

Beweis. Angenommen $b(G) \geqslant s + 1$. Dann wirkt G_s transitiv auf $\Delta(\alpha_s) - \{\alpha'_{s-1}\}$ und $H_s := O_{p'}(G_s)$ wirkt 1/2-transitiv auf $\Delta(\alpha_s) - \{\alpha'_{s-1}\}$. Wegen $|\Delta(\alpha_s) - \{\alpha'_{s-1}\}| = q = p^f$ folgt $H_s \leqslant K(\alpha_s)$ und deshalb $O_{p'}(G_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_s}) \leqslant O_{p'}(G_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s\xi})$ für jedes $\xi \in \Delta(\alpha_s) - \{\alpha'_{s-1}\}$. Da G s-bogentransitiv ist, ergibt sich mit den gleichen Schlüssen wie in 3.16 $H_s = 1$. Wegen $G_s \cong G_1/P_1$ und der Auflösbarkeit von G_1 ist dies aber nicht möglich. □

Bemerkung. Für $q \neq 4{,}16$ ist 3.17 unmittelbar klar.

Damit haben wird den Beweis von Theorem 3.2 abgeschlossen. Um eine Schranke für $|G_\alpha|$ zu erhalten, müssen wir nun nach dem Vorbild von Tutte, Sims, und Gardiner zeigen, daß $s = b(G)$ beschränkt ist.

Sei im folgenden die Situation von Theorem 3.2 gegeben, $s = b(G)$ der Bogengrad von G und $X = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s)$ und $G_s = G_s(X) = G_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_s}$.

LEMMA 3.18. *G_s hat genau einen Fixpunkt α_{s+1} in $\Delta(\alpha_s) - \{\alpha'_{s-1}\}$.*

Beweis. Wegen $b(G) = s$ wirkt G_s intransitiv auf $\Delta(\alpha_s) - \{\alpha'_{s-1}\}$. $|G_{\alpha_{s-1}\alpha_s} : G_s| = q^{s-1}$ ergibt nach Lemma 1.2 die Behauptung. □

Einen t-Bogen $Y = (\beta_0, \ldots, \beta_t)$ nennen wir einen *t-Kreisbogen* genau dann, wenn $\beta_0 = \beta_t$ und $\beta_{t-1} \neq \beta_1$ ist.

LEMMA 3.19. *Es gibt einen t-Kreisbogen $Y = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \ldots, \alpha_t)$, welcher X enthält und der nur aus Fixpunkten von G_s besteht. Es gibt ein $g \in N_G(G_s)$, das Y als Zyklus besitzt, also $g = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \ldots, \alpha_t)\ldots$.*

Beweis. Sei α_{s-1} nach 3.18 ein Fixpunkt von G_s in $\Delta(\alpha_s) - \{\alpha'_{s-1}\}$. Dann ist $Z = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1})$ ein s-Bogen, der nur aus Fixpunkten von G_s besteht. Wegen $b(G) = s$ gibt es ein $g \in G$ mit $X^g = Z$, also $g = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_s, \alpha_{s+1}, \ldots)\ldots$, in der Zyklendarstellung. Setze $\alpha_i := \alpha_0^{g^i}$ für alle $i \in \mathbb{Z}$. Da g endliche Ordnung besitzt, gibt es ein kleinstes $t > 0$ mit der Eigenschaft $\alpha_t = \alpha_0$ und es ist $\alpha_m = \alpha_n$ genau dann, wenn $m \equiv n$ modulo t ist. Es ist klar, daß $Y := (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t)$ ein t-Kreisbogen ist.

Wegen $G_s = G_{\alpha_0\alpha_1\cdots\alpha_s} = G_{\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_s\alpha_{s+1}}$ und $X^g = Z$ gilt $g \in N_G(G_S)$. Wenn aber $\xi \in \Omega_{G_s}$ ist, so gilt $\xi^{gG_s} = \xi^{G_s g} = \xi^{g_s}$ also auch $\xi^g \in \Omega_{G_s}$. Daher sind alle α_i Fixpunkte von G_s. □

Bemerkung. Mit 3.18 läßt sich zeigen, daß Y eindeutig bestimmt ist.

Sei nun $g = (\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_t)\ldots$, ein gemäß 3.19 bestimmtes Element von $N_G(G_s)$ und $X_1 := P_{s-1} = O_p(G_{\alpha_0,\alpha_1,\ldots,\alpha_{s-1}})$ (nach 3.2). Wir definieren weiter für alle $i \in \mathbb{Z}$ $X_i := X_1^{g^{1-i}}$ und für $i \geqslant 0$ sei $H_i := \langle X_j \mid 1 \leqslant j \leqslant i \rangle$, dabei $H_0 = 1$.

LEMMA 3.20. (a) *G_s normalisiert alle X_i und H_i.*

(b) *Für $1 \leqslant i \leqslant s-1$ gilt $H_i = P_{s-i} = H_{i-1}X_i$ und $H_{i-1} \cap X_i = 1$.*

Beweis. Nach 3.2 wird X_1 von G_s normalisiert. Aus $g \in N_G(G_S)$ ergibt sich dann (a). X_i läßt den s-Bogen $(\alpha_{-i+1}, \ldots, \alpha_{s-i})$ punktweise fest. Daher gilt $X_i \leqslant P_{s-i}$ und $H_i \leqslant P_{s-i}$ für $i = 1, \ldots, s-1$ nach 3.2. $H_1 = X_1 = P_{s-1}$ gilt nach Definition. Sei also $1 < i \leqslant s-1$ und (b) sei richtig für $i-1$ anstelle von i.

$X_i = O_p(G_{\alpha_{-i+1},\ldots,\alpha_{s-i}})$ wirkt transitiv auf $\Delta(\alpha_{s-i}) - \{\alpha'_{s-i-1}\}$. Daher ist $X_i \not\leqslant H_{i-1} = P_{s-i+1}$, also $P_{s-i+1} < H_{i-1}X_i = H_i \leqslant P_{s-i}$. Da G_s irreduzibel auf P_{s-i}/P_{s-i+1} wirkt, folgt $H_i = P_{s-i}$. $H_{i-1} \cap X_i = 1$ ergibt sich aus demselben Grund. $\square$

LEMMA 3.21. *H_s ist ein auf den s-Bögen mit Anfang α_0 transitiver Normalteiler von G_{α_0}. H_{s+1} ist ein auf s-*Bog *und auf Ω transitiver Normalteiler von G.*

Beweis. $H_{s-1} = O_p(G_{\alpha_0\alpha_1})$ wirkt transitiv auf $\Delta(\alpha_0) - \{\alpha_1\}$. X_s wirkt transitiv auf $\Delta(\alpha_0) - \{\alpha'_{-1}\}$. Da $(\alpha_{-1}, \alpha_0, \alpha_1)$ ein 2-Bogen ist, gilt $\alpha'_{-1} \neq \alpha_1$. Wegen $d > 2$ hat dies zufolge, daß $H_s = \langle H_{s-1}, X_s\rangle$ 2-transitiv auf $\Delta(\alpha_0)$ wirkt. Da H_{s-1} transitiv auf den s-Bögen mit Anfang (α_0, α_1) ist, wirkt H_s transitiv auf den s-Bögen mit Anfang α_0. Insbesondere gilt $G_{\alpha_0} = H_sG_s$. Da H_s von G_s normalisiert wird, gilt $K(\alpha_0) < H_s \leq G_{\alpha_0}$. Nun ist $H_{s+1} = \langle H_s, H_s^{g^-}\rangle$ und daher $H_{s+1}G_s = \langle H_sG_s, H_s^{g^-}G_s\rangle = \langle G_{\alpha_0}, G_{\alpha_{-1}}\rangle = G$. Somit ist H_{s+1} ein auf s-Bog und daher auch auf Ω transitiver Normalteiler von G. $\square$

LEMMA 3.22. *Sei $i \leqslant j \leqslant i + s - 2$. Dann ist $[X_i, X_j] \leqslant \langle X_{i+1}, \ldots, X_{j-1}\rangle$. Falls $s \geqslant 3$ ist, ist insbesondere $[X_i, X_{i+1}] = 1$ und H_2 abelsch.*

Beweis. Es genügt, die Behauptung für $i = 1$ zu beweisen. Sei $1 \leqslant j \leqslant s - 1$. Wegen $[X_1, X_1] = 1$ können wir $s \geqslant 3$ und $j \geqslant 2$ annehmen. Nach 3.20 ist $H_{j-1} \lhd H_j$ und $K_{j-1} := \langle X_2, \ldots, X_j\rangle = H_{j-1}^{g^-}$ ist eine G_s-invariante Untergruppe von H_j. Aus Lemma 1.4 und Theorem 3.2 folgt aber, daß K_{j-1} sogar ein G_s-invarianter Normalteiler von H_j ist. Klar ist $\langle X_2, \ldots, X_{j-1}\rangle \leqslant H_{j-1} \cap K_{j-1} < K_{j-1}$. Da G_s nach 3.2 irreduzibel auf $H_{j-1}/H_{j-2} \cong_{G_s} K_{j-1}/\langle X_2, \ldots, X_{j-1}\rangle$ wirkt, ist $\langle X_2, \ldots, X_{j-1}\rangle = H_{j-1} \cap K_{j-1}$. Aus $[X_1, X_j] \leqslant H_{j-1} \cap K_{j-1}$ ergibt sich dann die Behauptung. $\square$

LEMMA 3.23. *Wenn $2i \geqslant s + 2$ ist, so ist H_i nicht abelsch.*

Beweis. Wäre $2i - 1 \geqslant s + 1$ und H_i abelsch, so wäre auch $H_i^{g^{-i}} = \langle X_i, X_{i+1}, \ldots, X_{2i-1}\rangle$ abelsch und $H_{s+1} = \langle X_1, \ldots, X_{s+1}\rangle \leqslant C_G(X_i)$ im Widerspruch zur Transitivität von H_{s+1} auf Ω. $\square$

LEMMA 3.24. *Wenn $3i \leqslant 2s$ ist, so ist H_i abelsch.*

Beweis. Falls $s = 2$ ist, ist das Lemma richtig. Sei also $s \geqslant 3$. Nach 3.22 ist dann H_2 abelsch. Wir wählen i mit $2 < i < s$ so, daß H_{i-1} abelsch, aber H_i nicht abelsch ist. Dann gilt $[X_j, X_k] = 1$, when $|j - k| \leqslant i - 2$ ist, doch gibt es $x_1 \in X_1$, $x_i \in X_i$ mit $[x_1, x_i] \neq 1$. Nach 3.22 ist $[X_1, X_i] \leqslant \langle X_2, \ldots, X_{i-1}\rangle$, es gibt also $2 \leqslant m \leqslant n \leqslant i - 1$ so, daß $[x_1, x_i] = x_m x_{m-1} \cdots x_n$ mit $x_j \in X_j$ $(m \leqslant j \leqslant n)$ und $x_m \neq 1 \neq x_n$ ist. Dabei ist zu beachten, daß $\langle X_2, \ldots, X_{i-1} \rangle$ abelsch ist. Wir wollen zeigen, daß $m \geqslant s + 1 - i$ und $n \leqslant 2i - s$ gilt.

(a) Angenommen $k := i + m - 1 \leqslant s - 1$. Nach 3.22 ist $[X_1, X_k] \leqslant \langle X_2, \ldots, X_{k-1} \rangle$ und daher $[X_1, X_k, X_i] = 1$, da für $2 \leqslant j \leqslant k - 1$ stets $|i - j| \leqslant i - 2$ ist. $[X_i, X_k] = 1$ wegen $|i - k| = m - 1 \leqslant i - 2$ hat $[X_i, X_k, X_1] = 1$ zufolge. Nach dem Drei-Untergruppen-Satz von Hall [4. III, 1.10] ergibt sich $[X_1, X_i, X_k] = 1$. Dann ist aber für beliebige $x_k \in X_k$ stets $1 = [x_1, x_i, x_k] = [x_1, x_i]^- [x_1, x_i]^{x_k} = (x_m \cdots x_n)^- (x_m \cdots x_n)^{x_k} = x_m^-(x_{m+1} \cdots x_n)^- (x_{m+1} \cdots x_n) x_m^{x_k} = [x_m, x_k]$, da für $m + 1 \leqslant j \leqslant n$ stets $|j - k| \leqslant i - 2$ ist. Daher ist $[x_m, X_k] = 1$ und somit auch $1 = [x_m, X_k]^{G_s} = [x_m^{G_s}, X_k] = [X_m, X_k]$, da G_s auf X_m irreduzibel wirkt. Dies hat aber den Widerspruch $[X_m, X_k]^{g^{m-1}} = [X_1, X_i] = 1$ zufolge. Also ist $m \geqslant s + 1 - i$.

(b) Angenommen $l := n + 1 - i \geqslant i - s + 2$. Nach 3.22 ist $[X_i, X_l] \leqslant \langle X_{l+1}, \ldots, X_{i-1} \rangle$ und daher $[X_i, X_l, X_1] = 1$, da für $l + 1 \leqslant j \leqslant i - 1$ stets $|j - 1| \leqslant i - 2$ ist. $[X_1, X_l] = 1$ wegen $|l - 1| = 1 - l \leqslant i - 2$ hat $[X_1, X_l, X_i] = 1$ zufolge. Wie in (a) erhalten wir $[X_1, X_i, X_l] = 1$. Für beliebige $x_l \in X_l$ ist aber dann $1 = [x_1, x_i, x_l] = [x_1, x_i]^- [x_1, x_i]^{x_l} = (x_m \cdots x_n)^- x_m \cdots x_{n-1} x_n^{x_l} = [x_n, x_l]$, da für $m \leqslant j \leqslant n - 1$ stets $|j - l| \leqslant i - 2$ ist. Daher ist $[x_n, X_l] = 1$ und wie in (a) ergibt sich $[X_n, X_l] = 1$. Dies hat aber den Widerspruch $[X_n, X_l]^{g^{i-n}} = [X_i, X_1] = 1$ zufolge. Also ist $n \leqslant 2i - s$.

(c) Aus $s + 1 - i \leqslant m \leqslant n \leqslant 2i - s$ folgt nun $3i \geqslant 2s + 1$ und die Behauptung folgt. $\square$

Nun sind wir in der Lage, eine Schranke für s anzugeben.

THEOREM 3.25. *Mit den Bezeichnungen von 3.2 gilt folgendes: Es ist $b(G) = s \in \{2, 3, 4, 5, 7\}$. In jedem Fall ist P_3 eine elementar abelsche p-Gruppe. Wenn $s < 7$ ist, so ist P_2 elementar abelsch.*

$$|G_\alpha| \quad \textit{teilt} \quad (q + 1)\, q^6 (q - 1)^2 f^2.$$

Beweis. Sei x die kleinste natürliche Zahl $\geqslant (s + 2)/2$. Nach 3.23 und 3.24 ist $x \geqslant (2s + 1)/3$, und wie in [9] folgt $s \leqslant 7$ und $s \neq 6$. Aus 3.24 ergibt sich nun, daß P_3 abelsch ist, und im Fall $s < 7$, daß P_2 abelsch ist. Die genannten Gruppen sind dann auch elementar abelsch. Der Rest der Behauptung ergibt sich nun aus Theorem 3.2. $\square$

KOROLLAR 3.26. *Unter den Voraussetzungen dieses Abschnitts ist $|G_\alpha|$ ein Teiler von $d(d - 1)^6 (d - 2)^2 ({}^p\log(d - 1))^2$.*

Beweis. Das Korollar folgt aus 3.3 und 3.25. $\square$

4. Zweifach primitive Subkonstituenten

In diesem Abschnitt setzen wir voraus, daß (G, Ω) eine primitive Permutationsgruppe mit einem Orbital Δ der Länge $|\Delta(\alpha)| = d > 1$ ist, $\alpha \in \Omega$. Wir zeigen, daß $|G_\alpha|$ durch eine Funktion von d beschränkt ist, wenn $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ 2-primitiv ist. Stets sei $(\alpha, \beta) \in \Delta$, $K(\xi) = G_{\Delta(\xi)}$ und $K'(\xi) = G_{\Delta'(\xi)}$ für $\xi \in \Omega$.

In [7, Satz 1] wurde gezeigt, daß $|G_\alpha|$ ein Teiler von $d!(d-1)!^d$ ist, falls $\mathrm{F}(G_{\alpha\beta}^{\Delta(\alpha)}) = 1$ ist. (Dabei war $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ ein beliebiger Subkonstituent vom Grad $d > 1$.) Wir geben nun einige Bedingungen an, die für 2-transitive $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ eine bessere Abschätzung ergeben.

Theorem 4.1. *Sei $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ 2-transitiv und $\mathrm{F}(G_{\alpha\beta}^{\Delta(\alpha)}) = 1$. Dann hat jede der folgenden Bedingungen zufolge, daß $E(\alpha, \beta) = K(\alpha) \cap K'(\beta) = 1$ und $|G_\alpha|$ ein Teiler von $d!(d-1)!$ ist:*

(1) $K(\alpha) = K'(\alpha)$. *(Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn $\Delta = \Delta'$ ist.)*

(2) $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ *besitzt einen regulären Normalteiler.*

(3) $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}/\mathrm{soc}(G_\alpha^{\Delta(\alpha)})$ *ist auflösbar. (Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn die äußere Automorphismengruppe von* $\mathrm{soc}(G_\alpha^{\Delta(\alpha)})$ *auflösbar ist.)*

(4) $|G_\alpha^{\Delta(\alpha)}| < |\mathrm{soc}(G_\alpha^{\Delta(\alpha)})|^2$.

(5) $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ *und* $G_\alpha^{\Delta'(\alpha)}$ *sind beide 2-quasiprimitiv.*

Beweis. Nach [7, Satz 1] ist $\mathrm{F}(G_{\alpha\beta}) = 1$. Die Behauptung ergibt sich nun aus [5, 4.5, 4.7]. (Dabei sei hier noch einmal vermerkt, daß die Bedingung (4) von [5, Theorem 3.6] richtig lauten soll: "$G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ and $G_\alpha^{\Delta'(\alpha)}$ are 2-quasi-primtive".) Den Fall $\mathrm{F}(G_{\alpha\beta}^{\Delta(\alpha)}) \neq 1$ können wir klären, wenn wir zusätzlich annehmen, daß $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ 2-primitiv ist. □

Theorem 4.2. *Wenn $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ 2-primitiv und $\mathrm{F}(G_{\alpha\beta}^{\Delta(\alpha)}) \neq 1$ ist, so ist $|G_\alpha|$ ein Teiler von $d(d-1)\,({}^2\log d)$ oder von $d(d-1)^6\,(d-2)^2\,({}^p\log(d-1))^2$, wobei im ersten Fall d eine 2-Potenz und im zweiten Fall $d-1$ eine Potenz einer Primzahl p ist. In jedem Fall ist $|G_\alpha| \leqslant d(d-1)^6\,(d-2)^2\,({}^2\log(d-1))^2$.*

Beweis. Nach Proposition 1.3 können für $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ zwei Fälle eintreten. Wenn $d = 2^f \geqslant 8$ und $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ ähnlich zu $A(2^f)$ oder $\Gamma(2^f)$ ist, so ist nach [6, Theorem 3.1] der Subkonstituent $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ treu; daher ist $|G_\alpha|$ ein Teiler von $|\Gamma(2^f)| = 2^f(2^f-1)f = d(d-1)\,({}^2\log d)$. Wenn $d = q+1$ für eine Primzahlpotenz $q = p^f$ ist und $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ ähnlich zu einer Gruppe $\bar{G}$ mit $PSL(2,q) \leqslant \bar{G} \leqslant P\Gamma L(2,q)$, so unterscheiden wir zwei Fälle: Wenn $d = 3$ oder $d = 4$ und $G_\alpha^{\Delta(\alpha)} \simeq A^4$ ist, so ist die Behauptung nach [9, Corollary 5.14; 8, Proposition 4.3] richtig. Wenn $d > 4$ oder $d = 4$ und $G_\alpha^{\Delta(\alpha)} \simeq S^4$ ist, so ergibt sich die

Behauptung aus Korollar 3.26. (Wegen ${}^p\log x \leqslant {}^2\log x \leqslant x - 1$ für $x \in \mathbb{N}$ folgt, daß $|G_\alpha| \leqslant d(d-1)^6 (d-2)^2 ({}^2\log(d-1))^2$ in jedem Fall gilt.) □

THEOREM 4.3. *Wenn $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ 2-primitiv ist, so ist $|G_\alpha| \leqslant \max\{d!(d-1)!^d, d(d-1)^6 (d-2)^2 ({}^2\log(d-1))^2\}$. Ist darüberhinaus noch eine der Bedingungen (1),..., (5) von 4.1 erfüllt, so gilt*

$$|G_\alpha| \leqslant \max\{d!(d-1)!, d(d-1)^6 (d-2)^2 ({}^2\log(d-1))^2\}.$$

Beweis. Wenn $F(G_{\alpha\beta}^{\Delta(\alpha)}) = 1$ ist, so ist nach [7, Satz 1] $|G_\alpha|$ ein Teiler von $d!(d-1)!^d$. Der Rest der Behauptung folgt nun aus 4.1 und 4.2. □

Für bestimmte Subkonstituenten könne bessere Schranken angegeben werden. Beispiele dafür finden sich in [5, 6.1–6.3].

5. DIE SUBGRADE $d = 4$ UND $d = 5$.

In [8] wird vermerkt, daß Sims und Thompson im Fall einer primitiven Permutationsgruppe (G, Ω) mit einem Subkonstituenten ähnlich zu S^4 eine Schranke für $|G_\alpha|$ gefunden haben. Wir können dieselbe Schranke aus den Ergebnissen des 3. Abschnitts gewinnen. Ebenfalls können wir für Subkonstituenten vom Grad 5, die ähnlich zu A^5 oder S^5 sind, eine Schranke angeben. Mit diesen Ergebnissen läßt sich für die Subgrade $d = 4$ und $d = 5$ für $|G_\alpha|$ eine nur von d abhängige Schranke angeben, da die übrigen Fälle schon geklärt sind.

THEOREM 5.1. *Sei (G, Ω) eine primitive Permutationsgruppe mit einem Orbital Δ der Länge $|\Delta(\alpha)| = d = 4$. Dann gilt: Wenn $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ eine 2-Gruppe ist, so ist $|G_\alpha|$ ein Teiler von 2^5. Wenn 3 ein Teiler von $|G_\alpha^{\Delta(\alpha)}|$ ist, so ist $|G_\alpha|$ ein Teiler von $2^4 3^6$.*

In jedem Fall ist $|G_\alpha| \leqslant 2^4 3^6 = d^2(d-1)^6$.

Beweis. Wenn 3 ein Teiler von $|G_\alpha^{\Delta(\alpha)}|$ ist, so ist $G_\alpha^{\Delta(\alpha)} \geqslant A^{\Delta(\alpha)}$ 2-primitiv. Die Behauptung ergibt sich nun unmittelbar aus [10] und Theorem 4.2.

THEOREM 5.2. *Sei (G, Ω) eine primitive Permutationsgruppe mit einem Orbital Δ der Länge $|\Delta(\alpha)| = d = 5$. Dann gilt: Wenn $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ auflösbar ist, so ist $|G_\alpha|$ ein Teiler von $5 \cdot 2^4$. Wenn $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ nicht auflösbar ist, so ist $|G_\alpha|$ ein Teiler von $5 \cdot 3^2 \cdot 2^{14}$. In jedem Fall ist $|G_\alpha| = 5 \cdot 3^2 \cdot 2^{14} = d(d-1)^7 (d-2)^2$.*

Beweis. Wenn $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ auflösbar ist, so folgt die Behauptung aus [8, Theorem 2.2]. Wenn $G_\alpha^{\Delta(\alpha)}$ nicht auflösbar ist, so ist $G_\alpha^{\Delta(\alpha)} \geqslant A^{\Delta(\alpha)}$ 3-transitiv und die Behauptung folgt aus Theorem 4.2. □

LITERATUR

1. A. GARDINER, Doubly primitive vertex stabilisers in graphs, *Math. Z.* **135** (1974), 257–266.
2. A. GARDINER, Arc transitivity in graphs II, *Quart. J. Math. Oxford Ser.* (2) **25** (1974), 163–167.
3. C. HERING, W. M. KANTOR, AND G. SEITZ, Finite groups with a split BN-pair of rank 1, *J. Algebra* **20** (1972), 345–394.
4. B. HUPPERT, Endliche Gruppen I, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1967.
5. W. KNAPP, On the point stabilizer in a primitive permutation group, *Math. Z.* **133** (1973), 137–168.
6. W. KNAPP, Primitive Permutationsgruppen mit einem Subkonstituenten vom Grad 2^f, *Math. Z.* **136** (1974), 261–275.
7. W. KNAPP, Primitive Permutationsgruppen mit einem Subkonstituenten, dessen Stabilisatorgruppe Fitting-frei ist, *Archiv Math. (Basel)* **25** (1974), 472–475.
8. W. L. QUIRIN, Primitive permutation groups with small orbitals, *Math. Z.* **122** (1971), 267–274.
9. C. C. SIMS, Graphs and finite permutation groups, *Math. Z.* **95** (1967), 76–86.
10. C. C. SIMS, Graphs and finite permutation groups II, *Math. Z.* **103** (1968), 276–281.
11. H. WIELANDT, "Finite Permutation Groups," Academic Press, New York, 1964.