JOURNAL OF ALGEBRA **202,** 367–403 (1998)
ARTICLE NO. JA977278

Sur les différentielles de torsion

P. Carbonne

Département de Mathématiques, Université de Toulouse le Mirail, 5 Allées Antonio Machado, 31058 Toulouse Cedex, France

Received July 9, 1996

1. INTRODUCTION

On note $\Omega_{X/k}$ le faisceau des 1-différentielles régulières sur la variété algébrique X sur le corps parfait k. Si X est non singulière, ce faisceau est localement libre. Par contre en un point singulier P, $(\Omega_{X/k})_P$ n'est plus libre. Il est alors intéressant d'étudier son sous-module de torsion T, invariant que l'on retrouve dans plusieurs questions, notamment dans l'étude des déformations [16, 17].

Dans le cas des courbes un article de R. Berger [4] a été à l'origine de nombreux travaux. Lorsque la courbe est une intersection complète E. Kunz [12] a précisé et simplifié les résultats de R. Berger. Avec J. Herzog il a calculé, au moyen du semi-groupe attaché au point singulier étudié, certains des invariants qui apparaissent.

Il résulte de ces travaux que, pour une courbe plane, la longueur $l(T)$ de T est majorée par le seuil c du semi-groupe, seuil qui est aussi l'exposant du conducteur de l'anneau dans son normalisé. O. Zariski a montré que les courbes planes telles que $l(T) = c$ sont les courbes monomiales (i.e., d'equation $y^n - x^m = 0$, avec: p.g.c.d. $(m, n) = 1$.) Ce résultat a fait l'objet de nombreuses géneralisations que nous rappelerons brièvement plus loin.

Dans une première partie qui reprend un travail effectué en collaboration avec J. Bertin, nous calculons T pour les hypersurfaces et précisons les relations entre T, l'idéal jacobien et la normalité au point.

Dans une deuxième partie nous partons des travaux de R. Berger et E. Kunz pour étudier les variations de $l(T)$ par transformation quadratique dans le cas des courbes intersections complètes.

0021-8693/98 $25.00

Dans une troisième partie nous introduisons une équivalence entre les courbes planes.

Dans une quatrième partie nous rappelons des résultats qui généralisent le théorème d'O. Zariski, donnons des contre-exemples et une géneralisation.

Dans la cinquième partie nous calculons $l(T)$ pour les courbes planes ayant deux paires de Puiseux.

Dans la dernière partie, utilisant la classification de S. Ebey [6], nous calculons $l(T)$ pour les premières valeurs de la multiplicité.

2. PREMIÈRE PARTIE

1. *Hypersurfaces*

Si R est un anneau commutatif avec unité, M un R-module, le sous module de torsion T de M, est l'ensemble des éléments x de M, annulés par un élément a non diviseur de zéro de R. Si R est intègre, de corps des fractions K, on a:

$$T = \ker\left(M \to M \bigotimes_R K\right).$$

THÉORÈME 1. *Soit* $M = (\oplus_{t=1}^n Re_i)/((\sum_{t=1}^n \alpha_i e_i)R)$ *où* $\alpha_i \in R$, *pour* $i = 1, \ldots, n$.

Soit J l'idéal $\sum_{i=1}^n \alpha_i R$ de R. Si J contient un élément non diviseur de zéro, le sous-module de torsion T de M vérifie:

$$T \simeq J^{-1}/R.$$

Preuve. Soit l'application ϕ: $J^{-1} \to M$, donnée par:

$$\phi(y) = \sum_{i=1}^n y\alpha_i e_i \qquad \operatorname{mod}\left[\left(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i\right)R\right].$$

Nous avons: $\ker(\phi) = R$: s'il existe $a \in R$ tel que $\sum_{i=1}^n y\alpha_i e_i = \sum_{i=1}^n a\alpha_i e_i$ on a $y\alpha_i = a\alpha_i$ pour tout i, donc $yx = ax$ pour tout x dans l'idéal $\sum_{i=1}^n \alpha_i R$. Si on prend x non diviseur de zéro, on a: $y = a \in R$.

Nous avons: $\operatorname{Im}(\phi) = T$: il est clair que $\operatorname{Im}(\phi) \subset T$. Si $\sum_{i=1}^n x_i e_i$ donne un élément de T, il existe un élément a non diviseur de zéro tel que $\sum_{i=1}^n ax_i e_i = \sum_{i=1}^n b\alpha_i e_i$ pour $b \in R$, donc $ax_i = b\alpha_i$ pour tout i. Par suite $y = \frac{b}{a} \in J^{-1}$; et alors: $\phi(y) = \sum_{i=1}^n x_i e_i \operatorname{mod}[(\sum_{i=1}^n \alpha_i e_i)R]$.

Donc $T \cong J^{-1}/R$.

COROLLAIRE 1. *Si en outre, R est local noethérien de dimension* 1:

$$l_R(T) = l_R(J^{-1}/R) < +\infty.$$

COROLLAIRE 2. *Si J est engendré par deux éléments et sous les hypothèses du corollaire précédent*:

$$l_R(T) = l_R(R/J).$$

Preuve. Voir [3, Th. 3, p. 101].

Les hypothèses du corollaire 2 sont satisfaites si R est l'anneau local d'une courbe algébrique irréductible, tracée, sur une surface algébrique, en un point qui est simple sur la surface, et si $M = \Omega_{R/k}$. Nous avons de plus:

COROLLAIRE 3. *Si $T = \{0\}$ le point est simple sur la courbe*.

Le théorème s'applique au calcul de T pour le module des différentielles en un point, dans le cas d'une hypersurface: $F \subset \mathbb{A}^n$, *le point étant l'origine*. *Soit $f = 0$ son équation*, $f(0) = 0$. *Alors*: $J = (\partial f/\partial x_1, \ldots, \partial f/\partial x_n) \subset R$ (R: *anneau local de F à l'origine*). *Donc*: $T = J^{-1}/R$.

EXEMPLE 1. Soit k un corps parfait, $f = x^2 + y^2 + z^2$, $M = \Omega_{R/k}$. Nous avons $J = (x, y, z)$, $J^{-1} = R$ et donc $T = \{0\}$.

EXEMPLE 2. $f = z^n - g(x, y), g(0,0) = 0$ et $n > 1$. Alors $T = \{0\}$ équivaut à: la série formelle g est sans facteurs multiples.

2. *Idéal jacobien et normalité*

On suppose l'anneau R intègre, de corps des fractions K. On note n le rang de M; $n = \dim_K(M \otimes_R K)$. On appelle idéal jacobien de M, le $n$ième idéal de Fitting de M; on le note J. Si R est l'anneau local d'une variété algébrique sur k, de dimension n, M le module des différentielles de R sur k, on retrouve la définition classique de l'idéal jacobien. Le critère jacobien usuel dit que $J = R$ caractérise les points simples. En particulier, si p est un idéal premier de R, R_p est régulier si et seulement si $J \not\subset p$. Le résultat essentiel de ce paragraphe est:

THÉORÈME 2. *Il y a équivalence entre les propriétés*:

(1) *R est normal*

(2) $J^{-1} = R$.

Preuve. Soit $\mathscr{L}$ le conducteur de R, donc $\mathscr{L}$ définit le lieu de non normalité de R. Par suite $J \subset \sqrt{\mathscr{L}}$. Nous avons $J^n \subset \mathscr{L}$ pour $n \geq 1$. Si $J^{-1} = R$ on a $\mathscr{L}^{-1} \subset (J^n)^{-1} = R$, c'est à dire $\mathscr{L}^{-1} = R$. Or $\mathscr{L}^{-1} = \overline{R}$ (la fermeture intégrale de R) donc $R = \overline{R}$. Si R est normal, donc non singulier en codimension 1, on a pour tout idéal premier p de hauteur 1, $p \not\subset J$. Par suite $J^{-1} = \bigcap_{\mathrm{ht}(p)=1}(JR_p)^{-1} = \bigcap_{\mathrm{ht}(p)=1} R_p = R$. L'hypothèse $J^{-1} = R$ peut s'énoncer: $g(J) \geq 2$, où $g(J)$ est le grade de J. En effet: $g(J) \leq 1$ équivaut à l'existence de x non nul dans J tel que $\frac{J}{xR} \subset \{$diviseurs de zero de $\frac{R}{xR}\}$. Il existe donc $y \in xR$ avec $yJ \subset xR$, d'où $\frac{y}{x} \in J^{-1}$ et $\frac{y}{x} \in R$.

Dans ce paragraphe, R est de nouveau un anneau intègre arbitraire, M un R-module. On suppose que M admet une présentation du type:

$$0 \to R^p \to R^q \to M \to 0.$$

On note J le $n$ieme idéal de Fitting de M, $n = q - p = \mathrm{rang}(M)$.

THÉORÈME 3. *Si T est le sous-module de torsion de M, il existe une suite exacte*:

$$0 \to T \xrightarrow{\phi} \left(\frac{J^{-1}}{R}\right)^p \xrightarrow{\psi} \left(\frac{J^{-1}}{R}\right)^q.$$

Preuve. On prend des bases $(e_1, \ldots, e_q)$ de R^q et $(u_1, \ldots, u_p)$ de R^p. Soit (u_{ij}) la matrice définie par: $u_i = \sum_{j=1}^q u_{ij} e_j$. Soit $x \in M$, de torsion, donc $Nx = 0$ avec $N \neq 0$. Si x est représenté par $\sum_{i=1}^q x_i e_i$, il existe $\mu_1, \ldots, \mu_p \in R$ avec:

$$N\left(\sum_1^q x_i e_i\right) = \sum_1^p \mu_j u_j. \tag{1}$$

On obtient le système linéaire:

$$Nx_i = \sum_{j=i}^p \mu_j u_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, q. \tag{2}$$

J est engendré par les sous $p \times p$ déterminants de la matrice (u_{ij}). Soit d un mineur non nul ($J \neq (0)$), par exemple: $d = \det(u_{ij})$ $1 \leq i \leq p$, $1 \leq j \leq p$. On peut extraire de (2) le système linéaire carré:

$$Nx_i = \sum_{j=1}^p \mu_j u_{ji}, \qquad i = 1, \ldots, p. \tag{3}$$

La règle de Cramer donne:

$$\frac{\mu_j}{N} \cdot d \in R, \qquad j = 1, \ldots, p \tag{4}$$

c'est à dire $\mu_j/N \in J^{-1}$ pour tout $j = 1, \ldots, p$. Il est clair que la classe de μ_j/N dans J^{-1}/R ne dépend que de x. On vient de définir une application linéaire:

$$T \xrightarrow{\phi} \left(\frac{J^{-1}}{R}\right)^p$$

et il est clair que c'est une injection. Seule la construction de ψ demande à être explicitée. Si on part d'un p-uple $(\xi_1, \ldots, \xi_p) \in (J^{-1}/R)^p$, soit $x_i = \sum_{j=1}^{p} \xi_j u_{ji}$, $i = 1, \ldots, q$. il est clair que $(\xi_j)_{j=1,\ldots,p}$ est un élément de T (via ϕ) si et seulement si $x_i \in R$ pour tout i.

Donc $\psi(\xi_1, \ldots, \xi_p) = (x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_q) = 0$ dans $(J^{-1}/R)^q$ et ψ est défini par:

$$\psi(\xi_1, \ldots, \xi_p) = \left(\sum_{j=1}^{p} \xi_j u_{ji} \right)_{1 \le i \le q}.$$

COROLLAIRE 4. *Sous les hypothèses du théorème précédent on a une équivalence entre*:

(i) $T = 0$

(ii) $J^{-1} = R$.

Preuve. Le théorème donne l'implication (ii) $\Rightarrow$ (i). Dans l'autre sens, nous utilisons le lemme élémentaire suivant:

LEMME. *Soit V un module de la forme F/U, F étant sans torsion.*

Soit U' un facteur direct de U. Si V est sans torsion, F/U', est sans torsion. Soit $\frac{\mu}{N} \in J^{-1}$. Fixons $(p-1)$ colonnes de la matrice (u_{ij}), et soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p)$ une colonne variable. Posons $d = \det(\varepsilon \mid (p-1)$ colonnes fixées). On developpe d suivant la première colonne; soit $d = \sum \varepsilon_i \delta_i$. Donc $\frac{\mu}{N} \cdot d = \sum_{i=1}^{q} \varepsilon_i (\frac{\mu}{N} \delta_i) \in R$. ε étant variable, on a donc $\psi(\xi_1, \ldots, \xi_p) = 0$ avec $\xi_i = \frac{\mu}{N} \delta_i$. Comme $T = (0)$, ψ est injectif. On a $\xi_i = \frac{\mu}{N} \delta_i \in R$ pour tout i. Ceci prouve que $\frac{\mu}{N} \cdot \delta \in R$ pour tout $\delta = (p-1)$-mineur de la matrice u_{ij}. Le lemme et un raisonnement par récurrence sur p, montrent que $J^{-1} = R$. Comme application, on a le résultat suivant qui est plus ou moins bien connu [13].

COROLLAIRE 5. *Si X est une variéte algébrique, localement intersection complète en un point x, il y a équivalence entre*:

(i) $(\Omega_{X/k})_x$ *est sans torsion*

(ii) *X est normale en x.*

3. *Réflexivité*

On se place dans les hypothèses du corollaire 5. Soit R l'anneau local de X en x et $M = \Omega_{R/k}$.

Nous avons vu (théorème 2) que: R normal équivaut à $J^{-1} = R$, ce qui se dit aussi: $g(J) \geq 2$. Comme R est de Cohen−Macauley: $g(J) = \mathrm{ht}(J)$. La condition se lit donc aussi: $\mathrm{ht}(J) \geq 2$. Nous allons caractériser les anneaux tels que $\mathrm{ht}(J) \geq 3$.

THÉORÈME 4. *Il y a équivalence entre*:

(i) *M est réflexif*

(ii) $\mathrm{ht}(J) \geq 3$.

Preuve. Un théorème de Samuel dit que si R est un anneau local de Cohen−Macauley, normal, et M un R-module de type fini sans torsion, alors: M réflexif équivaut à: pour tout $p \in \mathrm{Spec}(R)$, $\mathrm{prof}(M_p) \geq \inf(2, \mathrm{ht}(p))$.

(i) ⇒ (ii). Si M est réflexif ($M \cong M^{**}$), en particulier $T = (0)$, donc R est normal. Soit p un idéal premier contenant J et $\mathrm{ht}(p) \leq 2$. On a d'après un théorème d'Auslander:

$$\mathrm{dh}(M_p) + \mathrm{prof}(M_p) = \mathrm{prof}(R_p) = \dim(R_p).$$

On a: $\dim(R_p) = 2$, et $\mathrm{prof}(M_p) \geq 2$, donc $\mathrm{dh}(M_p) = 0$ et $\mathrm{prof}(M_p) = 2$. Le critère jacobien dit que R_p est régulier, (M_p étant libre). C'est une contradiction. Donc $\mathrm{ht}(J) \geq 3$.

(ii) ⇒ (i). Supposons $\mathrm{ht}(J) \geq 3$. Alors R est normal et M sans torsion. si $p \subset R$ et $\mathrm{ht}(p) \leq 2$, R_p est régulier, et M_p libre, donc $\mathrm{prof}(M_p) = \mathrm{ht}(p)$. Le théorème de Samuel, dit que M est réflexif.

Soit une surface intersection complète locale en un point x, R l'anneau local de ce point, $M = \Omega_{R/k}$. D'après ce qui précède, $T = (0)$ équivaut à: x est une singularité isolée, c'est à dire à: $\mathrm{ht}(J) = 2$, et donc à: J est un idéal primaire. Le théorème 3 montre que x est un point simple si et seulement si M est réflexif.

Considérons l'homomorphisme canonique: $M \to M^{**}$, (injectif ici). Soit $Q = \mathrm{coker}(M \to M^{**})$. Q est un R-module de longueur finie. Nous avons donc: x est non singulier si et seulement si: $l_R(Q) = 0$. On peut se demander quel rôle tient $l_R(Q)$ dans l'étude des singularités isolées des surfaces plongées dans $\mathbb{A}^3$.

3. TRANSFORMATIONS QUADRATIQUES

1. *Introduction*

R est un anneau local noethérien réduit de dimension 1, $\mathfrak{m}$ son idéal maximal X le schéma affine: $\mathrm{Spec}(R)$. p note le point fermé de X (c'est à dire: $p = [\mathfrak{m}]$). On sait que le schéma: $\overline{X} = \mathrm{Proj}(\oplus_{l=0}^{\infty} \mathfrak{m}^l)$ est birationnellement équivalent à X. Le morphisms birationnel propre, $\sigma: \overline{X} \to X$, est la transformation quadratique locale de X en p. La fibre exceptionnelle: $E = \sigma^{-1}(p)$ est un schéma fini et:

$$E \cong \mathrm{Proj}(\mathrm{gr}_{\mathfrak{m}}(R)).$$

D'après [11], il y a, pour $x \in \mathfrak{m}$, équivalence entre:

(i) $\mathfrak{m}^{\nu+1}: xR = \mathfrak{m}^{\nu}$ pour $\nu \geq \geq$ et

(ii) x ne divise pas 0 dans R et $R[\frac{\mathfrak{m}}{x}]$ est un R-module de type fini.

Un x satisfaisant à ces conditions est un élément superficiel d'ordre 1 pour m. Si le corps résiduel $k = R/\mathfrak{m}$ est infini il y a assez d'éléments superficiels dans R [11].

ANNEAU DE PREMIER VOISINAGE INFINITESIMAL. *Si x est superficiel d'ordre* 1 *pour m, le schéma $\overline{X}$ coincide avec le schéma affine* Spec$(R[\frac{m}{x}])$.

Preuve. Soit $D_+(x)$ l'ouvert spécial de $\overline{X}$ attaché à x. Alors $D_+(x) =$ Spec$(R[\frac{m}{x}])$ [22] et, $R[\frac{m}{x}]$ étant entier sur R, $\sigma(D_+(x)) = X$ d'après le théorème de Cohen−Seidenberg. Il suffit donc de voir que $D_+(x) \supset E$. Or $D_+(x) \cap E$ est l'ouvert $D_+(\bar{x})$ de E. $\bar{x}$ est un élément quasi-non diviseur de zéro dans l'anneau gradué $\oplus_{l \geq 0}(m^l/m^{l+1})$. Il est donc clair que $D_+(\bar{x}) = E$. Par suite $D_+(x) = \overline{X}$. $R^1 = R[\frac{m}{x}]$ est l'anneau semi-local de premier voisinage infinitésimal de R [14]. Ses localisés en les points fermés: $R_1, \ldots, R_t$, qui sont les points de E, sont les transformés quadratiques de R.

PROPOSITION 1. *Si R est une intersection complète locale, de corps résiduel k infini, les transformés quadratiques sont aussi des intersection complètes locales*.

Preuve. $R = A/\mathfrak{M}$ où A est local régulier, de dimension n, et un $\mathfrak{M}$ idéal de A engendré par $n-1$ éléments: $f_1, \ldots, f_{n-1}$ qui forment (th. de Cohen−Macauley) une suite régulière. $Y =$ Spec A et q est le point fermé de $Y \cdot q = [n]$. $k = R/m$ étant infini, il existe x dans n dont la classe dans $m = n/\mathfrak{M}$ est un élément superficiel d'ordre 1 pour m. Le schéma: Spec $A[\frac{n}{x}]$ est l'ouvert $D_+(x)$ de Proj$(\oplus_{l=0}^{+\infty} n^l)$. Le transformé propre $\mathfrak{M}'$ de $\mathfrak{M}$ dans $A[\frac{n}{x}]$ est:

$$\mathfrak{M}' = \left\{ \frac{\gamma}{x^r} \middle| \gamma \in \mathfrak{M} \text{ et } \operatorname{ord}_x(\gamma) \geq r \right\}.$$

R^1 est isomorphe à: $A[\frac{n}{x}]/\mathfrak{M}'$. Enfin: $\mathfrak{M} = (f_1, \ldots, f_{n-1})$ entraine: $\mathfrak{M}' = (g_1, \ldots, g_{n-1})$ en posant, pour $i = 1, \ldots, n-1$: $g_i = f_i/x^{r_i}$, avec: $r_i = \operatorname{ord}_x(f_i)$.

Remarque. L'hypothèse d'inversibilité de tel ou tel idéal apparaissant souvent dans [4] nous donnons le résultat suivant:

Soit B un anneau semi local intègre: $m_1, \ldots, m_q$ ses idéaux maximaux: $\mathfrak{M}$ un idéal de B. Il y a équivalence entre:

(1) $\mathfrak{M}$ est inversible (i.e., $\mathfrak{M}\mathfrak{M}^{-1} = B$)

(2) $\mathfrak{M}$ est principal.

Preuve. Soient, pour $i = 1, \dots, q$: $b_i \in \prod_{j \neq 1} m_j$ et $b_i \notin m_i$ inversible entraine: $\mathfrak{M} m_i \neq \mathfrak{M}$, pour $i = 1, \dots, q$. Il existe $a_i \in \mathfrak{M}$ et $a_i \notin \mathfrak{M} m_i$. $a = \sum_{i=1}^{q} a_i b_i \in \mathfrak{M}$. Soit: $I = a\mathfrak{M}^{-1} \subset B$. $\mathfrak{M}$ étant inversible, $a_i \mathfrak{M}^{-1} \not\subset m_i$. Donc: $b_i a_i \mathfrak{M}^{-1} \not\subset m_i$ et $I \not\subset m_i$. Il vient alors: $I = B$ et $\mathfrak{M} = (a)$. La réciproque est immédiate.

2. *Différentielles de torsion et idéal jacobien*

(a) Les notations sont celles de [4]. k est un corps algébriquement clos. R est un anneau local équicaractéristique qui, de plus, est une intersection complète, m son idéal maximal et $R/m = k$. R^1, l'anneau semi-local, du premier voisinage infinitésimal de R. $n_1, \dots, n_\tau$ ses idéaux maximaux. S la fermeture intégrale de R- et de R^1 dans le corps K des fractions de R- et de R^1-. $R_i = R^{(1)}_{n_i}$ $(i = 1, \dots, \tau)$, les transformés quadratiques de R, S_i leurs clôtures intégrales respectives, d la différentielle de R sur k, D la différentielle de K sur k.

$\Omega_{R/k}$ (resp. Ω_{R^1}/k, resp. $\Omega_{R_i/k}$) le module des différentielles de R (resp. R^1, resp. R_i) sur k et T (resp. T^1, resp. T_i) son sous-module de torsion; x_1 un élément superficiel d'ordre 1 pour m, $s = k[[x_1]]$.$\Omega_{R/s}$ le module des différentielles de R sur s. tr(.) est la trace de K relativement à $k((x_1))$. Pour un sous-module U, de type fini, on définit [3] le module complémentaire:

$$U^* = \{x \mid x \in K \text{ et } \operatorname{tr}(xU) \subset s\}.$$

Pour: $O = RU$, on pose: $O^* = RU^*$. La différente de Kähler (de rang 0), $D_K(R/s)$ est le 0-ième idéal de Fitting de $\Omega_{R/s}$. $D_K(R^1/s)$, $D_K(R_i/s)$, $D_K(S/s)$ sont définis de manière analogue. L'image de l'homomorphisme:

$$\Omega_{R/k} \to \Omega_{R/k} \bigotimes_k K \simeq \Omega_{K/k}$$

est noté:R D R. S D S note l'image de:

$$\Omega_{S/k} \to \Omega_{S/k} \bigotimes_k K \simeq \Omega_{K/k}.$$

$R^1 DR^1$, $R_i DR_i$ et $S_i DS_i$ sont définis semblablement. Notons:

$$A = D_K(R/s)^{-1} \qquad (\text{en tant que } R\text{-idéal}).$$

$$A^1 = D_K(R^1/s)^{-1} \qquad (\text{en tant que } R^1\text{-idéal}).$$

$$A_i = D_K(R_i/s)^{-1} \qquad (\text{en tant que } R_i\text{-idéal}).$$

J (resp. J^1, resp. J_i) est idéal jacobien de $\Omega_{R/k}$ (resp. $\Omega_{R^1/k}$, resp. $\Omega_{R_i/k}$).

(b) $R_i = R^{(1)}_{n_i}$ entraine:

$$S_i = S_{n_i};\ \Omega_{R_i/k} = \left(\Omega^{(1)}_R/k\right)_{n_i};\ T_i = T^1_{n_i};\ \Omega_{S_i/k} = \left(\Omega_{S/k}\right)_{n_i};$$

$$R_i DR_i = (R^1 DR^1)_{n_i};\ S_i DS_i = (SDS)_{n_i};\ \Omega_{R_i/s} = \left(\Omega_{R^1/s}\right)_{n_i};$$

$$D_K(R_i/s) = \left[D_K(R^1/s)\right]_{n_i};\ A_i = A^1_{n_i};\ R^{1*} = R^1 s^*;$$

$$R_i^* = R_i s^*;\ \text{d'où: } R_i^* = (R^{(1)*})_{n_i};\ J_i = J^1_{n_i} \text{ et } J_i^{-1} = (J^{1^{-1}})_{n_i}.$$

R^1 est semi-local. Pour tout R^1-module N tel que: $l_{R^1}(N) < +\infty$:

$$l_R(N) = l_{R^1}(N) = \sum_{i=1}^{\tau} l_{R_i}\left(N \bigotimes_{R^{(1)}} R_i\right).$$

R étant intersection complète:

$$D_K(R/s) = D_D(R/s) \qquad [12].$$

$D_D(R/s) = (R^{*-1})^{-1}$ est la différence de Dedekind de R sur s. D'où:

$$A = D_K(R/s)^{-1} = (R^{*-1})^{-1} = R^* \qquad [4]$$

il vient alors:

$$l_R(T) = l_R(SDS/RDR) + l_R(S/R).$$

R_i étant une intersection complète:

$$l_{R_i}(T_i) = l_{R_i}(S_i DS_i/R_i DR_i) + l_{R_i}(S_i/R_i).$$

D'où: $\sum_{i=1}^{\tau} l_{R_i}(T_i) = l_{R^1}(T^1) = l_R(T^1) = l_R(SDS/R^1DR^1) + l_R(S/R^1)$. Posons: $\mathscr{D} = \sum_{i=1}^{\tau} l_{R_i}(T_i) - l_R(T)$. $\mathscr{D} = -l_R(R^1DR^1/RDR) - l_R(R^1/R) \le 0$. si $\mathscr{D} = 0$, $l_R(R^1/R) = 0$, $R = R^1$ et R est régulier.

THÉORÈME 5. *Avec les notations introduites et si R est une intersection complète locale*:

$$\sum_{i=1}^{\tau} l_{R_i}(T_i) \le l_R(T)$$

et l'inégalité stricte est équivalente à: *R n'est pas régulier*.

Par itération on prouve le corollaire 6

COROLLAIRE 6. (1) *La somme des longueurs des sous-modules de torsion des modules des différentielles des anneaux transformés obtenus après* $p + 1$ *transformations quadratiques, longueurs prises par rapport aux anneaux transformés respectifs, est strictement inférieure à celle après p transformations* $(p \ge 0)$, *si cette dernière n'est pas nulle*.

(2) *Il existe un entier, ne dépendant que de R, tel qu'une succession de transformations quadratiques en un nombre supérieur à cet entier annule les modules des différentielles des transformés à la dernière étape.*

Remarque 1. Posons: $\overline{\mathscr{D}} = -l_R(R/J) + \sum_{i=1}^{\tau} l_{R_i}(R_i/J_i) = l_{R^1}(R^1/J^1) - l_R(R/J)$. Avec les notations introduites nous avons: $RDR = \frac{1}{a}J(d\bar{x}_1 \otimes 1)$, où: $a = (\partial f_i/\partial x_j)_{1 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq n}$, $d\bar{x}_i =$ la classe de dx_i (mod. $Rdf_i + \cdots + Rdf_{n-1}$). De même: $R^1DR^1 = \frac{1}{b}J^1(d\bar{x}_1 \otimes 1)$, où: $b = (\partial g_i/\partial u_j)_{1 \leq i \leq n-1, 2 \leq j \leq n}$, avec $u_j = x_j/x_1$, pour j de 2 à n. Nous avons: $a = x_1^{\theta}b$, avec $\theta = \sum_{i=1}^{n-1}(r_i - 1) \geq 0$. Par ailleurs $D_K(R/s) = aR$ et donc $R^* = D_K(R/s)^{-1} = \frac{1}{a}R$. De même: $R^{1*} = \frac{1}{b}R^1$. Par une démonstration identique à celle qui se trouve dans [4, p. 339] on prouve que: $l_R(R^1/R) = l_R(R^*/R^{1*})$. Il en résulte que: $l_R(R^1/R) = l_R(\frac{1}{a}R/\frac{1}{b}R^1) = l_R(R^1/x_1^{\theta}R^1) - l_R(R^1/R)$. D'où: $l_R(J^1/x_1^{\theta}J^1) = l_R(R^1/x_1^{\theta}R^1) + l_R(x_1^{\theta}R^1/x_1^{\theta}J^1) - l_R(R^1/J^1) = l_R(R^1/x_1^{\theta}R^1) = 2l_R(R^1/R)$.

Nous avons alors: $\mathscr{D} = -l_R(\frac{1}{b}J^1/\frac{1}{a}J) - l_R(R^1/k) = -l_R(x_1^{\theta}J^1/J) - l_R(R^1/R)$. Il vient alors:

$$\overline{\mathscr{D}} = l_R\big(R^1/x_1^{\theta}J^1\big) - l_R\big(J^1/x_1^{\theta}J^1\big) + l_R\big(R^1/R\big) - l_R\big(R^1/x_1^{\theta}J^1\big) - l_R\big(x_1^{\theta}J^1/J\big).$$

D'où:

$$\overline{\mathscr{D}} = -2l_R\big(R^1/R\big) + l_R\big(R^1/R\big) - l_R\big(x_1^{\theta}J^1/J\big) = \mathscr{D}.$$

C'est à dire: $l_R(T) - l_R(R/J) = \sum_{i=1}^{\tau}[l_{R_i}(T_i) - l_{R_i}(R_i/J_i)]$. Par itération on déduit le résultat:

$$l_R(T) = l_R(R/J) = l_R\big(J^{-1}/R\big)$$

([18] pour la deuxième égalité). Ce résultat est déja connu dans le cas des courbes planes [24].

Remarque 2. On peut démontrer directement ce résultat. Nous avons: $RDR = \sum_{j=1}^{n} R(dx_j \otimes 1)$ et $SDS = S(dt \otimes 1)$. Dans $\Omega_{S/\mathbb{C}}$: $\widetilde{dx}_1 = \beta_0 t^{\beta_0 - 1}\, dt$; d'où: $dt \otimes 1 = (1/\beta_0 t^{\beta_0-1})(\widetilde{dx}_1 \otimes 1)$ dans $\Omega_{K/\mathbb{C}}$ et $SDS = (1/t^{\beta_0-1})S(\widetilde{dx}_1 \otimes 1)$. Dans $\Omega_{R/\mathbb{C}}$ les égalités $\widetilde{df}_i = 0$ pour $i = 1, \ldots, n-1$ s'écrivent: $\sum_{j=2}^{n}(\partial f_i/\partial x_j)\widetilde{dx}_j = -(\partial f_i/\partial x_1)\widetilde{dx}_1$. D'où: $a\widetilde{dx}_j = (-1)^{j+1}a_j\widetilde{dx}_1$ et

$$RDR = \sum_{j=1}^{n} R(\widetilde{dx}_j \otimes 1) = \frac{1}{a}\Big(\sum_{j=1}^{n} a_j R\Big)(\widetilde{dx}_1 \otimes 1) = \frac{1}{a}J(\widetilde{dx}_1 \otimes 1).$$

Il vient alors:

$$SDS/RDR = \frac{1}{t^{\beta_0-1}}S\big(\widetilde{dx}_1 \otimes 1\big)\Big/\frac{1}{a}J\big(\widetilde{dx}_1 \otimes 1\big) \simeq aS/t^{\beta_0-1}J.$$

D'après [10] nous avons, pour une intersection complète, $\nu(a) = c + \beta_0 - 1$. D'où: $aS = t^{c+\beta_0-1}S$ et $SDS/RDR \simeq t^c S/J$. Par suite: $l(T) = l(S/R) + l(SDS/RDR) = l(S/R) + l(t^c S/J)$. Une intersection complète est de Gorenstein et donc: $l(S/R) = l(R/t^c S)$, (les deux valant $\frac{c}{2}$). D'où: $l(T) = l(R/t^c S) + l(t^c S/J) = l(R/J)$.

4. UNE ÉQUIVALENCE DES BRANCHES PLANES

1. *Longueur de certains modules*

R est un anneau intègre, local, de dimension 1, m son idéal maximal, K son corps des fractions. On suppose en outre que sa clôture intégrale S dans K est un anneau de valuation discrète. Soit ν la valuation correspondante et t une uniformisante. On suppose en outre que S est un R-module de type fini. Soit M un R-module tel que: $M \subset S$ et $l_R(S/M) < +\infty$. Posons $\wedge_0 = \{\nu(\mu) \mid \mu \in M$ et $\mu \neq 0\}$. $l_R(S/M) < +\infty$ entraîne: $\mathrm{Ann}_R(S/M) \neq 0$ [4] et donc: $uS \subset M$ pour un $u \neq 0$ appartenant à R. Par suite: $t^\alpha S \in M$ (avec: $\alpha = \nu(u)$, et: $C_{\mathbb{N}} \wedge_0 \subset \{0, \ldots, \alpha - 1\}$).

Nous pouvons écrire:

$$C_{\mathbb{N}} \wedge_0 = \{p_0, \ldots, p_\theta\}$$

avec:

$$0 \leq p_\theta < p_{\theta-1} < \cdots < p_0 < \alpha < +\infty.$$

Posons

$$M_0 = M, \qquad M_{i+1} = M_i + t^{p_i}R \; (0 \leq i \leq \theta).$$

et

$$\wedge_{i+1} = \{\nu(\mu) | \mu \cup M_{i+1} \text{ et } \mu \neq 0\} = \wedge_0 \cup \{p_0, \ldots, p_i\}.$$

Nous avons:

$$M = M_0 \subset \cdots \subset M_i \subset M_{i+1} \subset \cdots \subset M_\theta \subset M_{\theta+1} \subset S,$$

$\nu(M_{\theta+1}) = \mathbb{N}$ et $t^\alpha S \subset M \subset M_{\theta+1}$. Pour tout σ appartenant à S, on peut écrire une suite: $\psi_0, \ldots, \psi_l$ d'éléments de $M_{\theta+1}$ telle que:

$$\begin{aligned} \nu(\sigma) < \nu(\sigma - \psi_0) < \nu(\sigma - \psi_0 - \psi_1) < \cdots \\ < \nu(\sigma - \psi_0 - \cdots - \psi_l) > \alpha. \end{aligned}$$

D'où: $\sigma - \psi_0 - \cdots - \psi_l \in M_{\theta+1}$ et $M_{\theta+1} = S$. Tout $u \in R$ peut s'écrire: $u = u_0 + u_1$ avec $u_0 \in k$ et $\nu(u_1) > 0$. Il vient $\nu(t^{p_i}u_1) = p_i + \nu(u_1) > p_i$. D'où: $\nu(t^{p_i}u_1) \in \wedge_0 \cup \{p_0, \ldots, p_{i-1}\}$. Donc on peut écrire une suite:

$\psi_0, \ldots, \psi_1$ d'éléments de M_i telle que: $\nu(t^{p_i}u_1) < \nu(t^{p_i}u_1 - \psi_0) < \nu(t^{p_i}u_1 - \psi_0 - \psi_1) < \cdots < \nu(t^{p_i}u_1 - \psi_0 - \cdots - \psi_l \geq \alpha$. D'où: $t^{p_i}u_1 - \psi_0 - \cdots - \psi_l \in M \subset M_i$ et: $t^{p_i}u_1 \in M_i$.

Donc $t^p u \equiv t^p u_0 \pmod{M_i}$ et $M_{i+1}/M_i \simeq k = R/m$.

PROPOSITION 2. *Pour tout R-module, $M \subset S$ et tel que $l_R/S/M) < +\infty$:*

$$l_R(S/M) = \operatorname{card}[C_{\mathbb{N}} \Lambda_0], \qquad \text{avec } \Lambda_0 = \{\nu(\mu) | \mu \in M \text{ et } \mu \neq 0\}.$$

3. *Calcul de $l_R(T)$ pour une branche*

R est l'anneau local à l'origine d'une courbe algébroïde plane, le corps de base étant $\mathbb{C}$. On suppose que l'axe des x a été placé sur la tangente en 0. (Ceci se traduit par: x est un élément superficiel d'ordre 1 pour m). (i.e., $\nu(x) < \nu(y)$). $R = \mathbb{C}[[x, y]]/(f(x, y))$, avec: $f(0,0) = 0$, $S = \mathbb{C}[[t]]$. Nous notons x' et y' les dérivées formelles respectives de x et y. Il vient:

$$\Omega_{S/\mathbb{C}} = S\,dt = \frac{1}{x'} S\,dx.$$

D'où:

$$SDS = \frac{1}{x'} S(dx \otimes 1).$$

$$RDR = \frac{1}{f'_y}\big(f'_x R + f'_y R\big)(dx \otimes 1) \qquad ([4] \text{ ou } [24]).$$

Dans K:

$$\frac{f'_x}{f'_x} = -\frac{y'}{x'}.$$

D'où:

$$RDR = \frac{1}{x'}(x'R + y'R)(dx \otimes 1).$$

Finalement:

$$SDS/RDS \simeq S/x'R + y'R.$$

Posons: $\Lambda_0 = \{\nu(\omega) \mid \omega \in x'R + y'R,\ \omega \neq 0\}$ et $\Lambda = \{\nu(t\omega) \mid \omega \in x'R + y'R,\ \omega \neq 0\} \cup \{0\}$. ζ donne $\zeta + 1$ est une bijection de $C_{\mathbb{N}} \Lambda_0$ sur $C_{\mathbb{N}} \Lambda$. Nous avons:

$$l_R(SDS/RDR) = \operatorname{card} C_{\mathbb{N}} \Lambda.$$

Soit $\Gamma = \{\nu(u) \mid u \in R \text{ et } u \neq 0\}$. Si $\gamma \in \Gamma$ et $\gamma \neq 0$, $\gamma = \nu(u)$ pour un u appartenant à R. $\gamma > 0$ entraîne: $\nu(t\frac{du}{dt}) = \gamma$. $\frac{du}{dt} = u'_x x' + u'_y y' \in x'R + y'R$, d'où: $\gamma \in \wedge$ et $\Gamma \subset \wedge$.

PROPOSITION 3. *Si c désigne l'exposant du conducteur de S dans R*

$$l_R(T) = c - \operatorname{card} C_{\wedge}\Gamma$$

avec: $\wedge = \{\nu(t\omega) \mid \omega \in x'R + y'R,\ \omega \neq 0\} \cup \{0\}$.

Preuve. La proposition 2 appliquée à $M = R$ donne $\operatorname{card} C_{\mathbb{N}}\Gamma = l_R(S/R) = \frac{c}{2}$ (résultat connu). Par ailleurs comme $\Gamma \subset \wedge$ nous avons:

$$\operatorname{card} C_{\mathbb{N}} \wedge = \operatorname{card} C_{\mathbb{N}}\Gamma - \operatorname{card} C_{\wedge}\Gamma = \frac{c}{2} - \operatorname{card} C_{\wedge}\Gamma.$$

$l_R(T) = l_R(S/R) + l_R(SDS/RDR)$ [4] permet alors de conclure.

3. *Application à la classification des branches planes*

Il existe une suite finie d'entiers λ_i tels que:

(1) $0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_s < \lambda_{s+1} = +\infty$

(2) $\wedge = \bigcup_{i=0}^{s}(\lambda_i + \Gamma)$

(3) $\lambda_{j+1} \notin \bigcup_{i=0}^{j}(\lambda_i + \Gamma)$ $(0 \leq j \leq s-1)$.

on pose: $\Sigma = \{\lambda_1, \ldots, \lambda_s\}$. Γ, $l_R(T)$, $\wedge$, Σ sont des invariants analytiques de R. On définit une relation d'équivalence entre anneaux, et donc entre les branches correspondantes, en disant que R et R' sont équivalents si $\Gamma = \Gamma'$ et $\Sigma = \Sigma'$. Cette relation peut être appelée équidifférentiabilité.

Deux branches isomorphes sont équidifférentiables et deux branches équidifférentiables sont équisingulières mais les propriétés réciproques sont fausses. Nous donnerons des contre-exemples dans la dernière partie.

5. EXPOSANT DU CONDUCTEUR ET DIFFÉRENTIELLES DE TORSION

Nous noterons désormais $l(T)$ pour $l_R(T)$.

1. *Le théorème de Zariski*

Le corps de base est $\mathbb{C}$. R désigne l'anneau local d'une courbe plane en un point singulier, T le sous-module de torsion du modules des différentielles $\Omega_{R/\mathbb{C}}$. Le normalisé S de R est un anneau de valuation $S = \mathbb{C}[[t]]$. Nous notons c le seuil du semi-groupe $\Gamma = \nu(R - \{0\})$, seuil qui est aussi l'exposant du conducteur $F = t^c S$ de S dans R. La longueur $l(T)$ du R-module T, longueur qui est aussi $\dim_{\mathbb{C}} T$, vérifie: $l(T) \leq c$.

THÉORÈME 6 [24]. *Les courbes (planes) telles que* $l(T) = c$ *sont les courbes isomorphes aux courbes* $y^n - x^m = 0$ *(avec*: p.g.c.d$(m, n) = 1$).

Ces courbes sont dites monomiales car elles admettent un paramétrage du type: $x = t^n$, $y = t^m$. Nous avons: $\Gamma = \langle n, m \rangle$ et $l(T) = c = (m-1) \cdot (n-1)$. Ce sont les seules courbes telles que $\Lambda = \Gamma$; *i.e.*, $\Sigma = \emptyset$.

Par ailleurs [25] O. Zariski a donné l'expression de Γ en fonction de la série de Puiseux de la courbe et prouvé ainsi que Γ caractérise la classe d'equisingularité de la courbe. Le théorème 6 permet de dire qu'il n'existe pas d'expression de $l(T)$ au moyen de la série de Puiseux. Les courbes de paramétrage respectifs: $x = t^4$, $y = t^5$, et $x = t^4$, $y = t^5 + t^7$ ne sont pas isomorphes [6]. Pour la première: $l(T) = 12$. L'autre vérifie: $l(T) < 12$. Nous verrons que: $l(T) = 11$.

2. *Généralisations*

Les semi-groupes d'intersection complète sont étudiés dans [5, 10]. La courbe monomiale associée est d'intersection complète. Si le semi-groupe d'un anneau est d'intersection complète, cet anneau est lui même d'intersection complète. La réciproque est fausse [10]. Les semi-groupes symétriques (i.e., card$(\Gamma \cap [0, c-1]) = $ card$(\mathbb{N} \setminus \Gamma) = \frac{c}{2}$) caractérise les anneaux de Gorenstein. Les intersections complètes sont de Gorenstein. D'après un théorème de J. P. Serre [19], la réciproque est vraie si la dimension de plongement q de la courbe vérifie: $q \leq 3$. Dans ce cas l'anneau R est d'intersection complète si son semi-groupe est symétrique.

B. Tessier a démontré que $l(T) \leq c$ pour les anneaux dont le semi-groupe est d'intersection complète et que dans cette classe $l(T) = c$ caractérise les courbes monomiales.

R. Waldi a démontré [23] que $l(T) \leq c$ pour les anneaux de Gorenstein lorsque $q \leq 4$. Dans cette classe aussi l'égalité caractérise les courbes monomiales.

3. *Contre-exemples*

Pour $s = 5$, R. Waldi donne l'anneau $R = \mathbb{C}[[t^6, t^7, t^8, t^9, t^{10}]]$ qui est de Gorenstein et vérifie: $l(T) = 15 > c = 12$.

Nous notons: $g = $ card$(\mathbb{N} \setminus \Gamma)$ le nombre de lacunes de Γ. Pour $q = 4$, R. Waldi donne l'anneau $R = \mathbb{C}[[t^4, t^5, t^6, t^7]]$ qui vérifie: $c = 4 < 2g = 6 < l(T) = 9$.

Voici un exemple de ce type pour $q = 3$. Nous prenons: $R = \mathbb{C}[[t^5, t^6, t^8]]$. Nous avons: $\Gamma = \langle 5, 6, 8 \rangle$, $g = 6$ et $c = 10$. Nous rappelons que s note l'anneau: $s = \mathbb{C}[[t^5]]$, que le normalisé de R est: $S = \mathbb{C}[[t]]$. L'anneau R s'écrit: $R = \mathbb{C}([[X, Y, Z]]/(X^2Y - Z^2, Y^3 - X^2Z, ZY^2 - X^4)$. R est donc une intersection presque complète. Nous avons: $D_K(R/s) = t^{20}R + t^{22}R + t^{24}R$, $D_K^{-1}(R/s) = t^{14}R + t^{12}R + t^{-10}R$, $R^* =$

$\oplus_{\gamma \in (\Gamma \setminus 5+\Gamma)} st^{-\gamma}$ (voir [10]), $SDS/RDR \simeq S/t^4R + t^5R + t^7R$. Nous avons donc [4]: $l(T) = l(S/R) + l(SDS/RDR) + l(D_K^{-1}(R/s)/R^*) = 6 + 6 + 3 = 15$. Il s'en suit que: $c = 10 < 2g = 12 < l(T) = 15$.

4. *Généralisation aux intersections complètes*

Le calcul fait en III.2 se transpose aux intersections complètes et permet de généraliser le résultat de O. Zariski à celles-ci sans restrictions. Nous avons vu plus haut que dans $\Omega_{K/\mathbb{C}}$: $a_j/a = (-1)^{j+1}(\widetilde{dx_j} \otimes 1)/(\widetilde{dx_1} \otimes 1)$. Comme $\widetilde{dx_j} = x_j'\,dt$, nous en déduisons: $a_j/a = (-1)^{j+1}(x_j'/x_1')$. Par suite: $J = \sum_{j=1}^n a_jR = (a/x_1')\sum_{j=1}^n x_j'R$ et: $SDS/RDR = aS/t^{\beta_0-1}J = aS/x_j'J = S/\sum_{j=1}^n x_j'R$. D'où:

$$l(T) = l(S/R) + l(S/x_1'R + \cdots + x_n'R).$$

Posant $\Lambda_0 = \{\nu(\omega) \mid \omega \neq 0 \text{ et } \omega \in x_1'R + \cdots + x_n'R\}$, nous avons: $l(T) = \frac{c}{2} + \operatorname{card}(\mathbb{N} \setminus \Lambda_0)$. Posant alors: $\Lambda = \{\nu(t\omega) \mid \omega \neq 0 \text{ et } \omega \in x_1'R + \cdots + x_n'R\} \cup \{0\}$ on en déduit que $l(T) = c - \operatorname{card}(\Lambda \setminus \Gamma)$. D'où:

THÉORÈME 7. *Pour une intersection complète nous avons* $l(T) = c - \operatorname{card}((\Lambda \setminus \Gamma)$ *et donc* $l(T) \leq c$.

Remarque. Le semi-groupe Γ d'une branche plane s'exprime au moyen de la série de Puiseux de la branche. Il n'y a aucun espoir d'arriver à un résultat analogue pour $q \geq 3$. Si nous prenons les anneaux:

$$\begin{aligned} R_\lambda &= \mathbb{C}[[t^{12}, t^{18} + t^{34} + t^{40} + t^{41}, t^{26} + \lambda t^{32}]] \\ &= \mathbb{C}[[x, y, z]] \qquad (\lambda \text{ fixé dans } \mathbb{C}), \end{aligned}$$

les exposants de t dans x, y et z sont indépendants de λ (pour: $\lambda \neq 0$). Le calcul des semi-groupes Γ_λ des R_λ donne: $\Gamma_\lambda = \langle 12, 18, 26, 58, 71, 77, 85, 117\rangle$, pour $\lambda \neq \frac{1}{2}$ (y compris $\lambda = 0$), et: $\Gamma_{1/2} = \langle 12, 18, 26, 59, 117\rangle$. Ces semi-groupes sont différents et ne peuvent donc se calculer au moyen des seuls exposants.

6. COURBES PLANES AYANT DEUX PAIRES DE PUISEUX

1. *But et notations*

Le théorème de Zariski (théorème 6) donne $l(T)$ pour les anneaux $R = \mathbb{C}[[t^n, t^m]] = \mathbb{C}[[x, y]]$, avec: $n < m$ et m et n premiers entre eux. Ces anneaux sont ceux des branches ayant une seule paire de Puiseux et n'ayant pas de termes complémentaires dans le développement de y.

L'étape suivante est le calcul de $l(T)$ pour les anneaux $R = \mathbb{C}[[t^n, t^m + bt^{\beta_2}]] = \mathbb{C}[[x, y]]$, avec: $n < m < \beta_2$, $n = n_1n_2$, $m = m_1n_2$, p.g.c.d(n_1, m_1)

$=$ p.g.c.d$(n_2, \beta_2) = 1$ et $b \neq 0$. Ces courbes admettent deux paires de Puiseux et il n'y a pas de termes complémentaires dans le développement de y.

Nous avons: $\Gamma = \langle n, m, \overline{\beta}_2 \rangle$, avec: $\overline{\beta}_2 = \beta_2 + m(n_1 - 1)$. Le seuil est: $c = (n_2 - 1)\overline{\beta}_2 + (n_1 - 1)m - (n - 1)$. Tout élément γ de Γ admet une décomposition unique: $\gamma = \lambda_2 \overline{\beta}_2 + \lambda_1 m + \lambda_0 n$, avec: $0 \leq \lambda_2 \leq n_2 - 1$, $0 \leq \lambda_1 \leq n_1 - 1$, $\lambda_0 \geq 0$. Nous notons ζ l'application de Γ dans $\{0, \dots, n_2 - 1\}$ définie par $\zeta(\gamma) = \lambda_2$.

Nous posons:

$$\theta_i = i(\beta_2 - m) + (i-1)\overline{\beta}_2 \qquad (i \geq 1)$$

$$U_i = \{\xi n \mid 0 \leq \xi \leq m_1 - 1\} \cup \{\eta m \mid 0 \leq \eta \leq n_1 - 1\} \cup \left\{\zeta \overline{\beta}_2 \mid 0 \leq \zeta \leq n_2 - 2i\right\}$$

et $\Gamma_i = \{\gamma \in \Gamma \mid \gamma < c$ et $\zeta(\gamma) \leq n_2 - 2i\}$ $(1 \leq i \leq n_2/2)$.

$$\Omega = (n + m + \Gamma) \cup \left(n + \overline{\beta}_2 + \Gamma\right) \cup \left(m + \overline{\beta}_2 + \Gamma\right) \cup (mn_1 + \Gamma).$$

$\Omega_i = \Gamma_i \cap \Omega$ $(1 \leq i \leq n_2/2)$. On vérifie aussitôt que: $U_i = C_{\Gamma_i}\Omega_i$. Nous posons encore: $\delta = \beta_2 - m$, $z = y^{n_1} - x^{m_1} = t^{\overline{\beta}_2}(n_1 b + c_{n_1}^2 b^2 t^\delta + \cdots)$. Nous avons: $\nu(z) = \overline{\beta}_2$. Il vient:

$$y = t^m(1 + bt^{\beta_2 - m}) = t^m(1 + bt^\delta).$$

d'où:

$$H = \frac{ty'}{my} = \frac{1}{1 + bt^\delta}\left(1 + \frac{\beta_2}{m} bt^\delta\right).$$

2. *Calcul de* $\wedge$ (*préliminaires*)

2.1. Nous avons vu que:

$$\wedge = \{0\} \cup \left\{\nu(\omega_1) \mid \omega_1 = Anx + BmyH \neq 0, A \in R, B \in R\right\}.$$

Il est clair que: $\wedge + \Gamma \subset \wedge$

2.2. $p > n_2$ entraine $p - 1 \geq n_2$ et $\theta_p \geq c$. Donc: $\theta_p + \Omega \subset \Gamma$.

2.3. Si $n_2/2 < p < n_2$ (ce qui suppose $n_2 \geq 3$). Alors:

$$\theta_p = (2p - 1 - n_2)\overline{\beta}_2 + n_2[\beta_2 - m + m_1 n_1(n_2 - p)]$$

$\varphi = \beta_2 - m + (n_2 - p)m_1 n_1 > m_1 n_1 > (m_1 - 1)(n_1 - 1)$. Donc: $\varphi \in n_1\mathbb{N} + m_1\mathbb{N}$. $2p - 1 - n_2 \in \mathbb{N}$ et $\theta_p + \Omega \subset \Gamma$.

2.4. Si $p = n_2 > 2$,

$$\theta_p = \theta_{n_2} = \theta_{n_2 - 1} + \beta_2 - m + \overline{\beta}_2$$

$n_2/2 < n_2 - 1 < n_2$ donc (2.3) $\theta_{n_2-1} \in \Gamma$ et:

$$\theta_{n_2} \in \beta_2 - m + \Gamma = \theta_1 + \Gamma; \qquad \theta_{n_2} + \Omega \subset \theta_1 + \Omega.$$

2.5. Si $p = n_2 = 2$,

$$\theta_p = \theta_2 = 2(\beta_2 - m) + \overline{\beta}_2 = \beta_2 - m + 2[\beta_2 + m_1(n_1 - 2)]$$

$$\varphi = \beta_2 + m_1(n_1 - 2) = \beta_2 - m + m_1 n_1 > m_1 n_1 > (m_1 - 1)(n_1 - 1)$$

$$\varphi \in n_1\mathbb{N} + m_1\mathbb{N}, \qquad \theta_2 \in \beta_2 - m + \Gamma = \theta_1 + \Gamma$$

$$\theta_2 + \Gamma \subset \theta_1 + \Omega$$

2.6. Si $1 \leq p \leq n_2/2$,

$$\text{alors } \Gamma \cup (\theta p + \Omega) = \Gamma \cup (\theta p + \Omega p).$$

En effet:

$$\varphi = \theta_p + (n_2 - 2p + 1)\overline{\beta}_2 = n_2[\beta_2 - m + (n_2 - p)m_1 n_1]$$
$$> n_2(m_1 - 1)(n_1 - 1).$$

Donc: $\varphi \in \Gamma$.

2.7. Les résultats précedents donnent:

$$\Gamma \cup \left[\bigcup_{p \geq 1} (\theta_p + \Omega)\right] = \Gamma \cup \left[\bigcup_{1 \leq p \leq n_2/2} (\theta_p + \Omega_p)\right].$$

3. *Calcul de* $\wedge$ (*une inclusion*)

3.1. Pour $p \geq 1$, nous posons:

$$u_i = y^{(p-i)n_1 - 1} z^i \qquad (0 \leq i \leq p - 1)$$
$$u'_i = x^{(p-i)m_1 - 1} \qquad (0 \leq i \leq p - 1).$$

Alors:

$$\nu(u_i) = \gamma_i = [(p - i)n_1 - 1]m + i\overline{\beta}_2 = \gamma_0 + i\delta$$
$$\nu(u'_i) = \gamma'_i = [(p - i)m_1 - 1]n + i\overline{\beta}_2 = \gamma'_0 + i\delta$$
$$\gamma'_i = \gamma_i + m - n.$$

Nous prenons:

$$A = l_0 u'_0 + \cdots + l_{p-1} u'_{p-1}$$

et

$$B = k_0 u_0 + \cdots + k_{p-1} u_{p-1}.$$

Il vient:

$$xu'_i = t^{pnm_1}\left[(1+bt^{\delta})^{n_1} - 1\right]^i$$

$$yu_i = xu'_i (1+bt^{\delta})^{n_1(p-i)}.$$

D'où:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= Anx + BmyH \\ &= t^{pnm_1} \sum_{i=0}^{p-1} \left[(1+bt^{\delta})^{n_1} - 1\right]^i \\ &\qquad \times \left[nl_i + mk_i (1+bt^{\delta})^{n_1(p-i)-1}\left(1 + \frac{\beta_2}{m} bt^{\delta}\right)\right].\end{aligned}$$

Soit:

$$\tau = \left[(1+bt^{\delta})^{n_1} - 1\right]^{1/\delta} = (n_1 b)^{1/\delta} t[1 + \cdots]$$

$$\nu(\tau) = \nu(t) = 1.$$

Posant:

$$\omega_2 = \frac{\omega_1}{t^{nm_1\beta}}, \qquad \text{il vient sans mal:}$$

$$\omega_2 = \sum_{i=0}^{p-1} \tau^{i\delta}[nl_i + mk_i \varphi_i],$$

avec

$$\varphi_i = (1+\tau^{\delta})^{p-i-1/n_1}\left[1 - b\frac{\beta_2}{m} + b\frac{\beta_2}{m}(1+\tau^{\delta})^{1/n_1}\right].$$

D'où l'on tire: $\omega_2 = \sum_{j \geq 0} C_j \tau^{j\delta}$ $(C_j \in \mathbb{C})$. Considérons alors le système de $2p$ équations à $2p$ inconues $(l_0, \ldots, l_{p-1}, k_0, \ldots, k_{p-1})$:

$$\begin{cases} C_0 = \cdots = C_{p-1} = 0 \\ k_0 = -n \\ C_p = \cdots = C_{2(p-1)} = 0. \end{cases}$$

On effectue le changement d'inconnues:

$$\begin{cases} \pi_i = nl_i + mk_i \\ \rho_i = mk_i \qquad (0 \leq i \leq p-1). \end{cases}$$

Résoudre le système précédent en k_i et l_i revient à résoudre:

$$\begin{cases} C_0 = \cdots = C_{p-1} = 0 \\ \rho_0 = -mn \\ C_p = \cdots = C_{2(p-1)} = 0 \end{cases}$$

en π_i et ρ_i. Le déterminant de ce système s'écrit:

$$\Delta = \begin{vmatrix} I & \vdots & \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & \vdots & M \end{vmatrix}$$

où I est la matrice identité d'ordre p, 0 est la matrice nulle d'ordre p et M une matrice que nous allons calculer.

En développant l'expression de φ_i on obtient pour M une matrice triangulaire inférieure dont tous les termes de la diagonale principale sont égaux à 1.

D'où: $\Delta = \det M = 1$. Le système est donc de Cramer et admet une solution qui n'est pas identiquement nulle ($\rho_0 = -mn$).

Si maintenant nous envisageons le système:

$$C_0 = \cdots = C_{2p-1} = 0$$

les mêmes calculs montrent que ce système est aussi de Cramer et admet donc pour unique solution la solution nulle.

Donc si l'on donne aux k_i et aux l_i les valeurs trouvées en résolvant le premier système:

$$C_{2p-1} \neq 0$$

et:

$$\nu(\omega_1) = pn_1 m + (2p-1)\delta = \theta_p + mn_1.$$

Donc:

$$\theta_p + mn_1 + \Gamma \subset \Lambda .$$

3.2. On procède de même en posant, pour $p \geq 1$:

$$u_i = x^{(p-i-1)m_1+1} z^i \qquad (0 \leq i \leq p-1)$$

$$u_i' = y^{(p-i-1)n_1+1} z^i \qquad (0 \leq i \leq p-1).$$

D'où:

$$\nu(u_i) = \gamma_i = [(p-i-1)m_1 + 1]n + i\overline{\beta}_2 = \gamma_0 + i\delta$$

$$\nu(u_i') = \gamma_i' = [(p-i-1)n_1 + 1]m + i\overline{\beta}_2 = \gamma_0' + i\delta$$

$$\gamma_i' = \gamma_i + m - n.$$

On est amené à résoudre un système de Cramer de $2p$ équations à $2p$ inconnues $(l_0, \dots, l_{p-1}, k_0, \dots, k_{p-1})$. En donnant aux k_i et l_i les valeurs ainsi obtenues, on obtient:

$$\nu(\omega_1) = \gamma_0 + m + (2p-1)\delta = n + m + \theta_p.$$

Donc:

$$\theta_p + n + m + \Gamma \subset \Lambda.$$

3.3. Prenant maintenant, pour $p \geq 1$:

$$u_i = xy^{(p-i)n_1 - 1} z^i \qquad (0 \leq i \leq p-1)$$
$$u'_i = x^{(p-i)m_1} z^i \qquad (0 \leq i \leq p),$$

nous avons:

$$\nu(u_i) = \gamma_i = [(p-i)n_1 - 1]m + n + i\overline{\beta}_2 = \gamma_0 + i\delta$$
$$\nu(u'_i) = \gamma'_i = (p-i)m_1 n + i\overline{\beta}_2 = \gamma'_0 + i\delta$$
$$\gamma'_i = \gamma_i + m - n \qquad \text{pour: } 0 \leq i \leq p-1.$$

Le système:

$$\begin{cases} C_0 = \cdots = C_{p-1} = 0 \\ k_0 = -n \\ C_p = \cdots = C_{2p-1} = 0 \end{cases}$$

est ici aussi un système de Cramer et si l'on donne aux $2p+1$ inconnues $k_0, \dots, k_{p-1}, l_0, \dots, l_p$, les valeurs ainsi trouvées:

$$C_{2p} \neq 0.$$

Donc:

$$\nu(\omega_1) = \gamma_0 + m + 2p\delta = n + \overline{\beta}_2 + \theta_p.$$

Par suite:

$$\theta_p + n + \overline{\beta}_2 + \Gamma \subset \Lambda.$$

3.4. Enfin si nous prenons, toujours pour $p \geq 1$:

$$u_i = y^{(p-i)n_1} z^i \qquad (0 \leq i \leq p)$$
$$u'_i = x^{(p-i)m_1 - 1} z^i \quad (0 \leq i \leq p-1),$$

nous avons:

$$\nu(u_i) = \gamma_i = (p-i)mn_1 + i\overline{\beta}_2 = \gamma_0 + i\delta$$
$$\nu(u_i') = \gamma_i' = [(p-i)m_1 - 1]n + i\overline{\beta}_2 = \gamma_0' + i\delta$$
$$\gamma_i' = \gamma_i + m - n \qquad \text{pour: } 0 \leq i \leq p-1.$$

Le même type de calculs amène à un système de Cramer de $2p+1$ équations à $2p+1$ inconnues $(k_0, \ldots, k_p, l_0, \ldots, l_{p-1})$. Les valeurs obtenues en résolvant ce système donnent alors:

$$\nu(\omega_1) = \gamma_0 + m + 2p\delta = \overline{\beta}_2 + m + \theta_p.$$

Donc:

$$\theta_p + m + \overline{\beta}_2 + \Gamma \subset \Lambda.$$

3.5. Finalement:

$$\Gamma \cup \left[\bigcup_{p \geq 1} (\theta_p + \Omega)\right] \subset \Lambda.$$

4. *Calcul de* Λ (*l'inclusion inverse*)

4.1. ε_0 appartenant à Γ fixé.
Pour γ appartenant à Γ tel que: $0 \leq \gamma \leq c+n-1$ et $\zeta(\varepsilon_0) \leq \zeta(\gamma)$.
Je pose:

$$\rho = \zeta(\gamma) - \zeta(\varepsilon_0) \text{ et } \sigma(\gamma) = \gamma - \rho(\beta_2 - m).$$

Alors:

(1) $\sigma(\gamma)$ appartient à Γ

(2) $\zeta(\sigma(\gamma)) = \zeta(\varepsilon_0)$

(3) $0 \leq \rho \leq n_2 - 1$.

4.2. *Preuve*. (1) $\sigma(\gamma) = \gamma - \rho(\beta_2 - m) = \gamma - \zeta(\gamma)\overline{\beta}_2 + \zeta(\varepsilon_0)\overline{\beta}_2 + \rho m n_1$ et $\gamma - \zeta(\gamma)\overline{\beta}_2 \in n\mathbb{N} + m\mathbb{N} \subset \Gamma$
(2) $\sigma(\gamma) \leq \gamma \leq c+n-1. \zeta(\sigma(\gamma)) = \zeta(\gamma) - \rho = \zeta(\varepsilon_0)$
(3) $\rho = \zeta(\gamma) - \zeta(\varepsilon_0) \leq \zeta(\gamma) \leq n_2 - 1$.

4.3. $\sigma(\gamma)$ est dit la ε_0-souche de γ. ε étant une ε_0-souche donnée, on pose:

$$a(\varepsilon) = \{\varepsilon + \rho(\beta_2 - m) \mid 0 \leq \rho \leq n_2 - 1$$
$$\text{et } \varepsilon + \rho(\beta_2 - m) \leq c + n - 1\}.$$

4.4. ε et ε' deux ε_0-souches. Alors: $\varepsilon \neq \varepsilon'$ entraîne:

$$a(\varepsilon) \cap a(\varepsilon') = \emptyset.$$

4.5. *Preuve.* Si: $\varepsilon + \rho(\beta_2 - m) = \varepsilon' + \rho'(\beta_2 - m)$ alors:

$$\varepsilon - \varepsilon' = (\rho' - \rho)(\beta_2 - m)$$

$\zeta(\varepsilon) = \zeta(\varepsilon_0) = \zeta(\varepsilon')$ (4.1). Donc $\varepsilon \equiv \varepsilon' \pmod{n_2}$ $\rho \equiv \rho' \pmod{n_2}$. D'où: $\rho = \rho'$ et donc: $\varepsilon = \varepsilon'$.

4.6. Si $\nu(A) + n \neq \nu(B) + m$, il vient:

$$\nu(\omega_1) = \nu(Anx + BmyH) = \inf(\nu(A) + n, \nu(B) + m) \in \Gamma.$$

Si $\nu(A) + n = \nu(B) + m \geq c$, $\nu(\omega_1) \in \Gamma$.

4.7. Plaçons nous deans le cas où:

$$\nu(A) + n = \nu(B) + m < c.$$

On peut toujours écrire:

$$B = \psi_0 + \cdots + \psi_s + r_1$$

avec:

$$\psi_i = a_i x^{\xi_i} y^{\eta_i} z^{\zeta_i}\ (a_i \neq 0), \qquad \nu(\psi_i) = \xi_i n + \eta_i m + \zeta_i \overline{\beta}_2$$

$$\nu(B) = \nu(\psi_0) < \cdots < \nu(\psi_s) < c \leq \nu(r_1)$$

et:

$$A = \varphi_0 + \cdots + \varphi_{s'} + r_2$$

avec:

$$\varphi_i = a'_i x^{\xi'_i} y^{\eta'_i} z^{\zeta'_i}\ (a'_i = 0), \qquad \nu(\varphi_i) = \zeta'_i n + \eta'_i m + \zeta'_i \overline{\beta}_2$$

$$\nu(A) = \nu(\varphi_i) < \cdots < \nu(\varphi_{s'}) < c \leq \nu(r_2).$$

Posant: $\lambda_0 = \inf(\{\zeta_i \mid 0 \leq i \leq s\} \cup \{\zeta'_i \mid 0 \leq i \leq s'\})$, il vient: $A = z^{\lambda_0} A_1 + r_2$ et $B = z^{\lambda_0} B_1 + r_1$, avec A_1 et B_1 dans R, $\nu(r_1) \geq c$, $\nu(r_2) \geq c$.

On pose alors:

$$\omega_2 = A_1 nx + B_1 ymH.$$

4.8. $\varepsilon_0 = \nu(B_1) - \zeta[\nu(B_1)]\overline{\beta}_2$ appartient à $n\mathbb{N} + m\mathbb{N}$. Dans toute la suite nous envisagerons des ε_0-souches. ε, une ε_0-souche vérifie:

$$\zeta(\varepsilon) = \zeta(\varepsilon_0) = 0, \qquad \text{i.e., } \varepsilon \in n\mathbb{N} + m\mathbb{N}.$$

Tout élément γ de Γ, inférieur à $c + n - 1$ admet une ε_0-souche, $\sigma(\gamma)$.

4.9. Posons:

$$p(\varepsilon) = \sup\{ p \mid \varepsilon + m - pmn_1 \neq 0 \text{ et } \varepsilon + m - pmn_1 \in n\mathbb{N} + m\mathbb{N}\},$$

et

$$\tau(\varepsilon) = \varepsilon + m - p(\varepsilon)mn_1, \qquad \tau(\varepsilon) \text{ appartient à } n\mathbb{N} + m\mathbb{N}.$$

4.10. $p(\varepsilon) = 0$ entraîne: $\tau(\varepsilon) = m + \varepsilon$, i.e., $\tau(\varepsilon) \in m + n\mathbb{N} + m\mathbb{N}$.
4.11. Distinguons 4 cas:

Cas 1. $\tau(\varepsilon) \in m + n + \Gamma$. Je pose: $\gamma_0(\varepsilon) = p(\varepsilon)mn_1 + n$.

Cas 2. $\tau(\varepsilon) \in n + \Gamma$ et $\notin m + \Gamma$ (d'où: $p(\varepsilon) \geq 1$, par 4.10). Je pose: $\gamma_0(\varepsilon) = (p(\varepsilon)n_1 - 1)m + n$.

Cas 3. $\tau(\varepsilon) \in m + \Gamma$ et $\notin n + \Gamma$. Je pose: $\gamma_0(\varepsilon) = p(\varepsilon)mn_1$.

Cas 4. $\tau(\varepsilon) = mn_1 = m_1 n$. Je pose: $\gamma_0(\varepsilon) = [(p(\varepsilon) + 1)n_1 - 1]m$.

4.12. Pour: $\gamma < c$ et $\varepsilon = \sigma(\gamma)$, il y a équivalence entre:

(i) $\tau(\varepsilon) = mn_1$

(ii) $\gamma \in \{[(p + 1 - i)n_1 - 1]m + i\overline{\beta}_2 \mid 0 \leq i \leq p\}$.

Preuve. $\tau(\varepsilon) = mn_1$ entraîne: $\varepsilon = -m + (p(\varepsilon) + 1)mn_1$, et:

$$\gamma = ([p(\varepsilon) + 1 - \zeta(\gamma)]n_1 - 1)m + \zeta(\gamma)\overline{\beta}_2 \quad \text{et} \quad \zeta(\gamma) < p(\varepsilon) + 1.$$

4.13. Réciproquement:

$$\varepsilon = \sigma(\gamma) = (p + 1 - i)n_1 m + imn_1 = (p + 1)mn_1 - m$$

$\varepsilon + m = (p + 1)mn_1$. Donc: $p(\varepsilon) = p$ et $\tau(\varepsilon) = mn_1$.

4.14. Je pose: $\tilde{\varepsilon} = \varepsilon - \gamma_0(\varepsilon)$. Il vient sans mal:

Cas 1. $\tilde{\varepsilon} = \tau(\varepsilon) - n - m$.

Cas 2. $\tilde{\varepsilon} = \tau(\varepsilon) - n$.

Cas 3. $\tilde{\varepsilon} = \tau(\varepsilon) - m$.

Cas 4. $\tilde{\varepsilon} = 0$. (Voir calcul 4.13 qui prouve: $\varepsilon = \gamma_0(\varepsilon)$).
Dans les 4 cas: $\tilde{\varepsilon}$ appartient à: $n\mathbb{N} + m\mathbb{N}$.

4.15. Il y a équivalence entre:

(i) $\varepsilon \in n + \Gamma$

(ii) $\gamma_0(\varepsilon) \in n + \Gamma$

(iii) Nous sommes dans le cas 3 ou 4 avec $p(\varepsilon) \geq 1$, ou bien dans l'un des cas 1 ou 2 sans condition sur $p(\varepsilon)$.

4.16. *Preuve.* (i) résulte de (ii) par $\varepsilon = \tilde{\varepsilon} + \gamma_0(\varepsilon)$.

Les formules donnant $\gamma_0(\varepsilon)$ prouvent l'equivalence de (ii) et (iii). Le cas 3 avec $p(\varepsilon) = 0$ et $\varepsilon \in n + \Gamma$ donne: $\tau(\varepsilon) = \varepsilon + m \in n + m + \Gamma$ ce qui est absurde. Donc (i) entraîne (iii). Le cas 4 avec $p(\varepsilon) = 0$ donne: $\varepsilon = m(n_1 - 1)$ et donc: $\varepsilon \notin n + \Gamma$.

4.17. Je pose: $p'(\varepsilon) = p(\varepsilon)$ pour les cas 1, 3, 4 et $p'(\varepsilon) = p(\varepsilon) - 1$ pour le cas 2.

Si $\varepsilon \in n + \Gamma, p''(\varepsilon) = p(\varepsilon)$ pour les cas 1, 2, 4 et $p''(\varepsilon) = p(\varepsilon) - 1$ pour le cas 3 (voir 4.15).

Posons $\gamma_i(\varepsilon) = \gamma_0(\varepsilon) + i(\beta_2 - m)$ $(0 \le i \le p'(\varepsilon))$. Alors: $\gamma_i(\varepsilon)$ est dans Γ.

Si: $\gamma_0(\varepsilon) \in n + \Gamma$ (i.e., $\varepsilon \in n + \Gamma$), posons $\gamma'_0(\varepsilon) = \gamma_0(\varepsilon) + m - n$ et $\gamma'_i(\varepsilon) = \gamma'_0(\varepsilon) + i(\beta_2 - m)$ $(0 \le i \le p''(\varepsilon))$. Alors $\gamma'_i(\varepsilon)$ est dans Γ.

4.18. (1) Si $p(\varepsilon) < n_2$:

$$a(\varepsilon) \cap \Gamma = \{\tilde{\varepsilon} + \gamma_i(\varepsilon) \mid 0 \le i \le p'(\varepsilon)\},$$

si en outre: $\varepsilon \in n + \Gamma$, alors:

$$[a(\varepsilon) + m - n] \cap \Gamma = \{\tilde{\varepsilon} + \gamma'_i(\varepsilon) \mid 0 \le i \le p''(\varepsilon)\}.$$

(2) Si $p(\varepsilon) \ge n_2$:

$$a(\varepsilon) \cap \Gamma = \{\tilde{\varepsilon} + \gamma_i(\varepsilon) \mid 0 \le i \le n_2 - 1\},$$

si en outre: $\varepsilon \in n + \Gamma$, alors:

$$[a(\varepsilon) + m - n] \cap \Gamma = \{\tilde{\varepsilon} + \gamma'_i(\varepsilon) \mid 0 \le i \le n_2 - 1\}.$$

4.19. *Preuve.* (1) Vu que $\zeta(\varepsilon_0) \le \zeta(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$ et $\gamma \le c + n - 1$ entraîne: $\gamma \in a(\sigma(\gamma))$ et donc d'après (4.4):

$$\gamma \in a(\varepsilon) \cap \Gamma \qquad \text{entraîne } \varepsilon = \sigma(\gamma),$$

donc:

$$\gamma = \varepsilon + \rho(\beta_2 - m) \qquad \text{avec } \rho = \zeta(\gamma) \le n_2 - 1.$$

Donc:

$$\varepsilon - \rho m n_1 = \gamma - \rho\overline{\beta}_2 = \gamma - \zeta(\gamma)\overline{\beta}_2 \in n\mathbb{N} + m\mathbb{N},$$

c'est à dire: $\varepsilon + m - \rho m n_1 \in m + n\mathbb{N} + m\mathbb{N}$. D'où:

$$\rho \le p(\varepsilon) = p'(\varepsilon) \qquad \text{(cas 1, 3 et 4)}$$

$$\rho \le p(\varepsilon) - 1 = p'(\varepsilon) \qquad \text{(cas 2)}.$$

On a alors:

$$\gamma = \tilde{\varepsilon} + \gamma_0(\varepsilon) + \rho(\beta_2 - m) = \tilde{\varepsilon} + \gamma_\rho(\varepsilon).$$

(2) Réciproquement:

$$\gamma = \tilde{\varepsilon} + \gamma_i(\varepsilon) \text{ est dans } \Gamma,$$

$$\gamma = \tilde{\varepsilon} + \gamma_0(\varepsilon) + i(\beta_2 - m) = \varepsilon + i(\beta_2 - m)$$

$i \leq n_2 - 1$ (que ce soit pour $p(\varepsilon) \leq n_2 - 1$ ou pour $p(\varepsilon) \geq n_2$). On arrive alors sans mal à (dans les 4 cas):

$$\gamma \leq n_2 \bar{\beta}_2 - \beta_2 = c + n - 1.$$

Enfin: $\zeta(\gamma) = \zeta(\tilde{\varepsilon}) + \zeta(\gamma_0(\varepsilon)) + i = i \leq n_2 - 1$. Donc:

$$\gamma \in a(\varepsilon) \cap \Gamma.$$

(3) Sous l'hypothèse: $\varepsilon \in n + \Gamma$ les égalités relatives à $[a(\varepsilon) + m - n] \cap \Gamma$ s'en déduisent aussitôt par (4.15).

4.20. Soit $\gamma < c$ appartenant à Γ et $\varepsilon = \sigma(\gamma)$ sa ε_0-souche. Si $\tau(\varepsilon) \neq mn_1$, il y a équivalence entre:

(i) $\varepsilon \notin n + \Gamma$ et

(ii) $\gamma = \lambda m$ avec: $0 \leq \lambda \leq (n_1 - 2)$.

4.21. *Preuve*. Il est immédiat que (ii) entraîne (i). (i) résulte de (ii) compte tenu de:

$$\varepsilon = \sigma(\gamma) = \gamma - \zeta(\gamma)\bar{\beta}_2 + \zeta(\gamma)mn_1 \in \zeta(\gamma)mn_1 + \Gamma$$

et de ce que si: $\varepsilon = \gamma = (n_1 - 1)m$, alors $\tau(\varepsilon) = \gamma + m = mn_1$.

4.22. Soit $\gamma < c$ appartenant à Γ. Il y a équivalence entre:

(i) $\gamma \notin [a(\varepsilon) + m - n] \cap \Gamma$ pour toute ε_0-souche, ε

(ii) $\gamma = \mu n$ avec: $0 \leq \mu \leq m_1 - 2$.

4.23. *Preuve*. (1) Si $\gamma \in m + \Gamma, \gamma - m < c$ est dans Γ ainsi que $\gamma - m + n$. Posons: $\varepsilon = \sigma(\gamma - m + n) = \sigma(\gamma - m) + n \in n + \Gamma$. $\gamma - m + n \in a(\varepsilon)$ donc $\gamma \in [a(\varepsilon) + m - n] \cap \Gamma$.
(2) Si $\gamma \in \bar{\beta}_2 + \Gamma$, $\varepsilon = \sigma(\gamma) + n - m$ appartient à: $n + \Gamma$. Par ailleurs, $\varepsilon = \sigma(\varepsilon)$ est une ε_0-souche et:

$$\gamma = m - n + \varepsilon + \zeta(\gamma)(\beta_2 - m) \in [a(\varepsilon) + m - n] \cap \Gamma.$$

(3) Si $\gamma = (m_1 - 1)n, \gamma \in [a(\varepsilon) + m - n] \cap \Gamma$ avec $\varepsilon = m(n_1 - 1)$. Donc (i) entraîne (ii). (ii) entraîne (i) est immédiat.

4.24. Il resulte alors de (4.7) et de (4.8) que l'on peut écrire:

$$B_1 = \sum_{\substack{\varepsilon \\ \varepsilon_0\text{-souche}}} \left(\sum_{\gamma \in a(\varepsilon) \cap \Gamma} k_\gamma u_\gamma \right) + r_1'$$

avec: $u_\gamma = x^\xi y^\eta z^\nu$, d'où $\gamma = \nu(u_\gamma) = \xi n + \eta m + \nu\overline{\beta}_2$, $k_\gamma \in \mathbb{C}$ (éventuellement nul), $r_1' \in R$ et $\nu(r_1') \geq c$.

Utilisant (4.18) nous pouvons écrire:

$$\gamma = \tilde{\varepsilon} + \gamma_i(\varepsilon) \qquad \text{avec } i \in I_\varepsilon$$
$$I_\varepsilon = \{0, \ldots, p'(\varepsilon)\} \qquad \text{si } p'(\varepsilon) < n_2.$$

Puis: $I_\varepsilon = \{0, \ldots, n_2 - 1\}$ si $p'(\varepsilon) \geq n_2$

$$u_\gamma = u(\tilde{\varepsilon}) u_{i,\varepsilon} \qquad \text{avec } u(\tilde{\varepsilon}) = x^\alpha y^\beta \text{ si } \tilde{\varepsilon} = \alpha n + \beta m$$
$$u_{i,\varepsilon} = x^{(p(\varepsilon)-i)m_1+1} z^i \qquad \text{dans le premier cas}$$
$$u_{i,\varepsilon} = xy^{(p(\varepsilon)-i)n_1-1} z^i \qquad \text{dans le deuxième cas}$$
$$u_{i,\varepsilon} = y^{(p(\varepsilon)-i)n_1} z^i \qquad \text{dans le troisième cas}$$
$$u_{i,\varepsilon} = y^{(p(\varepsilon)+1-i)n_1} z^i \qquad \text{dans le quatrième cas.}$$

Posant: $K = \{\varepsilon \mid \varepsilon \in n + \Gamma \text{ ou bien } \tau(\varepsilon) = mn_1\}$ et utilisant (4.20) nous pouvons écrire:

$$B_1 = \sum_{\varepsilon \in K} \left[u(\tilde{\varepsilon}) \left(\sum_{i \in I_\varepsilon} k_{i,\varepsilon} u_{i,\varepsilon} \right) \right] + \sum_{0 \leq \lambda \leq n_1 - 2} k_\lambda y^\lambda + r_1'$$

avec: $k_{i,\varepsilon}$, k_λ dans $\mathbb{C}$; $r_1' \in R$ et $\nu(r_1') \geq c$. De même (en utilisant 4.22) on peut écrire:

$$A_1 = \sum_{\varepsilon \in K} \left[u(\tilde{\varepsilon}) \left(\sum_{i \in J_\varepsilon} l_{i,\varepsilon} u'_{i,\varepsilon} \right) \right] + \sum_{0 \leq \mu \leq m_1 - 2} l_\mu x^\mu + r_2'$$

avec:

$$l_{i,\varepsilon}, l_\mu \text{ dans } \mathbb{C}; \qquad r_2' \in R \text{ et } \nu(r_2') \geq c.$$
$$J_\varepsilon = \{0, \ldots, p''(\varepsilon)\} \qquad \text{si } p''(\varepsilon) < n_2$$
$$J_\varepsilon = \{0, \ldots, n_2 - 1\} \qquad \text{si } p''(\varepsilon) \geq n_2$$

et:

Cas 1. $u'_{i,\varepsilon} = y^{(p(\varepsilon)-i)n_1+1}z^i$.

Cas 2. $u'_{i,\varepsilon} = x^{(p(\varepsilon)-i)m_1}z^i$.

Cas 3. $u'_{i,\varepsilon} = x^{(p(\varepsilon)-i)m_1-1}yz^i$.

Cas 4. $u'_{i,\varepsilon} = x^{(p(\varepsilon)+1-i)m_1-1}z^i$.

4.25. Il vient alors:

$$\omega_2 = \sum_{\varepsilon\in K} u(\tilde{\varepsilon})\,\phi_\varepsilon(k_{i,\varepsilon}, l_{i,\varepsilon}) + \sum_{0\leq\lambda\leq n_1-2} mk_\lambda y^{\lambda+1}H + \sum_{0\leq\mu\leq m_1-2} nl_\mu x^{\mu+1} + \Omega'$$

avec: $\nu(\Omega') \geq c$ et:

$$\Phi_\varepsilon(k_{i,\varepsilon}, l_{i,\varepsilon}) = \left(\sum_{i\in J_\varepsilon} l_{i,\varepsilon}u'_{i,\varepsilon}\right)nx + \left(\sum_{i\in I_\varepsilon} k_{i,\varepsilon}u_{i,\varepsilon}\right)myH.$$

4.26. Les calculs du paragraphe 3 montrent que:

$$\delta_\varepsilon = \nu\big(\Phi_\varepsilon(k_{i,\varepsilon}l_{i,\varepsilon})\big) = \gamma_0(\varepsilon) + m + \rho(\beta_2 - m)$$

avec

$$0 \leq \rho \leq p'(\varepsilon) + p''(\varepsilon) + 1 = \begin{cases} 2p(\varepsilon) & \text{(cas 2 et 3)} \\ 2p(\varepsilon)+1 & \text{(cas 1 et 4)}, \end{cases}$$

i.e., $\tilde{\varepsilon} + \delta_\varepsilon \in (m + a(\varepsilon)) \cup \{c, c+1, \cdots\}$.

4.27. $\nu(nl_\mu x^{\mu+1}) = (\mu+1)n$ avec: $1 \leq \mu + 1 \leq m_1 - 1$. On vérifie immédiatement que: $(\mu+1)n \notin m + a(\varepsilon)$ quel que soit ε dans K.

4.28. De même: $\nu(mk_\lambda y^{\lambda+1}H) = (\lambda+1)m$ avec: $1 \leq \lambda + 1 \leq n_1 - 1$. $(\lambda+1)m \notin a(\varepsilon) + m$ pour tout ε de K.

4.29. Compte tenu de (4.4) on en déduit que:

ou bien: $\nu(\omega_2) \geq c$. Donc $\nu(\omega_2)$ est dans Γ.

ou bien: $\nu(\omega_2) = (\mu+1)n$, pour un μ. Donc $\nu(\omega_2)$ est dans Γ.

ou bien: $\nu(\omega_2) = (\lambda+1)m$, pour un λ. Donc $\nu(\omega_2)$ est dans Γ.

ou bien: $\nu(\omega_2) = \delta_{\varepsilon_1} + \tilde{\varepsilon}_1$, pour une ε_0-souche, ε_1.

C'est à dire: $\nu(\omega_2) = \tilde{\varepsilon}_1 + \gamma_0(\varepsilon_1) + \rho(\beta_2 - m) + m$ avec: $0 \leq \rho \leq p'(\varepsilon) + p''(\varepsilon) + 1$.

4.30. En explicitant il vient aussitôt:

$$\nu(\omega_2) \in \Gamma \cup \left[\bigcup_{p\geq 1} (\theta_p + \Omega)\right]$$

$$\nu(\omega_1) = \lambda_0 \bar{\beta}_2 + \nu(\omega_2).$$

Donc:

$$\wedge \subset \Gamma \cup \left[\bigcup_{p\geq 1} (\theta_p + \Omega)\right].$$

4.31. Il vient alors

$$\wedge = \Gamma \cup \left[\bigcup_{1\leq p\leq n_2/2} (\theta_p + \Omega_p)\right].$$

THÉORÈME. *De facon plus précise nous avons les valeurs des nombres λ_i introduits dans la troisiéme partie.*

THÉORÈME 8. *Pour $y = x^{m/n} + bx^{2/n}$ $(b \neq 0)$ nous avons*:

$$\lambda_1 = n + m + \theta_1$$

$$\lambda_{4i} = n + m + \theta_i + 1 \qquad (i \geq 1)$$

$$\lambda_{4i+1} = m_1 n + \theta_i + 1 \qquad (i \geq 1)$$

$$\lambda_{4i+2} = n + \bar{\beta}_2 + \theta_{i+1} \qquad (i \geq 0)$$

$$\lambda_{4i+3} = m + \bar{\beta}_2 + \theta_{i+1} \qquad (i \geq 0).$$

Si n_2 est impair, $s = 2n_2 - 3$.
Si n_2 est pair,

$$s = 2n_2 - 1 \qquad \text{lorsque } \beta_2 \leq \frac{mn}{2} - m - n$$

$$s = 2n_2 - 2 \qquad \text{lorsque } \frac{mn}{2} - m - n \leq \beta_2 \leq \frac{mn}{2} - 2n$$

$$s = 2n_2 - 3 \qquad \text{lorsque } \frac{mn}{2} - 2n < \beta_2.$$

6. *Lemmes de dénombrement*

6.1. *Soit i un entier tel que*: $1 \leq i \leq n_2/2$. *Pour ξ, η, ζ appartenant à $\mathbb{N}$, avec*: $0 \leq \zeta \leq n_2 - 2i$, *il y a équivalence entre*:

(1) $$\theta_i + \xi n + \eta m + \zeta\bar{\beta}_2 \in \theta_j + \Gamma \; (1 \leq j \leq i - 1)$$

et

(2) $$\xi n + \eta m \in (i - j) m n_1 + n\mathbb{N} + m\mathbb{N}.$$

Il y a aussi équivalence entre:

(3) $$\theta_i + \xi n + \eta m + \zeta \overline{\beta}_2 \in \Gamma$$

et

(4) $$\xi n + \eta m \in imn_1 + n\mathbb{N} + m\mathbb{N}.$$

6.2. *Ceci résulte immédiatement de*: $\overline{\beta}_2 > (m_1 - 1)(n_1 - 1)$ *et donc* $n_2 \overline{\beta}_2 \in n\mathbb{N} + m\mathbb{N}$.

6.3. *Pour*: $1 \leq j < i \leq n_2/2$, $(\theta_j + \Gamma) \cap (\theta_i + U_i) = \emptyset$.

Pour: $1 \leq i \leq n_2/2$, $\Gamma \cap (\theta_i + U_i) = \emptyset$.

6.4. *Preuve*. (1) Si $(\theta_j + \Gamma) \cap (\theta_i + U_i) \neq \emptyset$, nous avons un γ de U_i tel que: $(i-j)(\beta_2 - m) + (i-j)\beta_2 + \gamma \in \Gamma$. Ce qui est impossible car:

$$i - j > 0 \qquad \text{et} \qquad 2(i-j) + \zeta(\gamma) \leq n_2 - 2j < n_2.$$

(2) De même si:

$\Gamma \cap (\theta_i + U_i) \neq \emptyset$, nous avons un γ de U_i tel que:

$$i(\beta_2 - m) + (i-1)\overline{\beta}_2 + \gamma \in \Gamma.$$

Ce qui est aussi impossible car: $i > 0$ et $2i - 1 + \zeta(\gamma) \leq n_2 - 1 < n_2$.

6.5. Nous avons:

(1) Pour: $1 \leq i \leq n_2/2$, $(\theta_i + \Omega_i) \cap \Gamma = (\theta_i + \Gamma_i) \cap \Gamma$.

(2) Pour: $1 \leq j \leq i \leq n_2/2$, $(\theta_j + \Omega_j) \cap (\theta_i + \Omega_i) = (\theta_j + \Omega_j) \cap (\theta_i + \Gamma_i)$.

(3) Pour: $1 \leq j \leq i \leq n_2/2$, $(\theta_i + \Gamma_i) \cap (\theta_j + \Gamma_j) = (\theta_i + \Gamma_i) \cap (\theta_j + \Gamma)$.

(1) et (2) viennent de 6.3 et (3) vient de 6.1.

6.6. Il est par ailleurs évident que pour $j \leq i$:

$$\theta_i + \Gamma_i \subset \theta_i + \Gamma \subset \theta_j + \Gamma.$$

6.7. Pour: $1 \leq j \leq i \leq n_2/2$, nous avons aussi:

$$\begin{aligned}\left(\theta_j + U_j\right) \cap (\theta_i + \Gamma_i) &= \left(\theta_j + U_j\right) \cap (\theta_i + \Omega_i) \\ &= \left\{\theta_i + (i-j)mn_1 + \zeta\overline{\beta}_2 \,|\, 0 \leq \zeta \leq n_2 - 2i\right\}.\end{aligned}$$

6.8. La première égalité vient de (6.3).

Soit:

$$\varphi \in \left(\theta_j + U_j\right) \cap (\theta_i + \Gamma_i)$$

$$\varphi = \theta_j + \gamma_j \qquad \text{avec } \gamma_j \in U_j,\ \gamma_j = an + bm + d\overline{\beta}_2$$

$$\varphi = \theta_i + \xi n + \eta m + \zeta\overline{\beta}_2 \qquad \text{avec: } 0 \leq \zeta \leq n_2 - 2i.$$

D'où: $d \equiv \zeta + 2(i-j) \pmod{n_2}$. Or: $0 \leq d \leq n_2 - 2j < n_2$ et $0 \leq \zeta + 2(i-j) < n_2$.

Donc:

$$d = \zeta + 2(i-j) \geq 2; \qquad \text{par suite } a = b = 0.$$

Il vient:

$$\xi n + \eta m = (i-j)\left(\overline{\beta}_2 - \beta_2 + m\right) = (i-j)mn_1.$$

La réciproque est immédiate.

6.9. Nous avons:

(1) Pour $i \geq 2$: $\Gamma \cap (\theta_i + \Omega_i) \subset \theta_{i-1} + \Omega_{i-1}$ et

(2) Pour $1 \leq j \leq i-1$: $(\theta_j + \Omega_j) \cap (\theta_i + \Omega_i) \subset \theta_{i-1} + \Omega_{i-1}$.

6.10. *Preuve*. (1) Soit $\Delta = \Gamma \cap (\theta_{i-1} + \Omega_{i-1}) \cap (\theta_i + \Omega_i)$.

$$\Delta = \Gamma \cap (\theta_{i-1} + \Gamma_{i-1}) \cap (\theta_i + \Gamma_i) \qquad (\text{par } 6.5\ (1))$$

$$\Delta = \Gamma \cap (\theta_{i-1} + \Gamma) \cap (\theta_i + \Gamma_i) \qquad (\text{par } 6.5(3))$$

$$\Delta = \Gamma \cap (\theta_i + \Gamma_i) \qquad (\text{par } 6.6.)$$

$$\Delta = \Gamma \cap (\theta_i + \Omega_i) \qquad (\text{par } 6.5.(1)).$$

D'où la conclusion.

(2) Soit: $\Delta' = (\theta_j + \Omega_j) \cap (\theta_{i-1} + \Omega_{i-1}) \cap (\theta_i + \Omega_i)$

$$\Delta' = \left(\theta_j + \Omega_j\right) \cap (\theta_{i-1} + \Gamma_{i-1}) \cap (\theta_i + \Gamma_i) \qquad (\text{par: } 6.5.(2))$$

$$\Delta' = \left[C_{\theta_j + \Gamma_j}\left(\theta_j + U_j\right)\right] \cap \left(\theta_j + \Gamma_j\right) \cap (\theta_{i-1} + \Gamma_{i-1}) \cap (\theta_i + \Gamma_i)$$

$$\Delta' = \left[C_{\theta_j + \Gamma_j}\left(\theta_j + U_j\right)\right] \cap \left(\theta_j + \Gamma_j\right) \cap (\theta_i + \Gamma_i)$$

(D'après le calcul de (1)). D'où:

$$\Delta' = \left(\theta_j + \Omega_j\right) \cap (\theta_i + \Gamma_i) \supset \left(\theta_j + \Omega_j\right) \cap (\theta_i + \Omega_i).$$

La conclusion suit immédiatement.

6.11. $\operatorname{card}\{(n\mathbb{N} + m\mathbb{N}) \cap C_{\mathbb{N}}(mn_1 + n\mathbb{N} + m\mathbb{N})\} = m_1 n_1$.

Preuve. $x \to x/n_2$ est une bijection de l'ensemble considéré sur:

$$E = (n_1\mathbb{N} + m_1\mathbb{N}) \cap C_{\mathbb{N}}(m_1 n_1 + n_1\mathbb{N} + m_1\mathbb{N}).$$

$\operatorname{card} E = \operatorname{card}(E_1) + \operatorname{card}(E_2)$ avec: $E_1 = E \cap ([0, m_1 n_1[)$, $E_2 = E \cap ([m_1 n_1, +\infty[)$.

Soit $c_1 = (m_1 - 1)(n_1 - 1)$. Alors:

$$\operatorname{card}(E_1) = m_1 n_1 - c_1 + \frac{c_1}{2} = m_1 n_1 - \frac{c_1}{2}.$$

$x \to x - m_1 n_1$ est une bijection de E_2 sur $C_{\mathbb{N}}(m_1\mathbb{N} + n_1\mathbb{N})$. Donc:

$$\operatorname{card}(E_2) = \frac{c_1}{2} \qquad \text{et} \qquad \operatorname{card}(E) = m_1 n_1.$$

7. *Calcul de $l_R(T)$*

7.1. $C_\wedge \Gamma = (C_{\mathbb{N}}\Gamma) \cap \wedge = (C_{\mathbb{N}}\Gamma) \cap (\bigcup_{1 \le i \le n_2/2}(\theta_i + \Omega_i))$ (voir 4.29).
7.2. Si je pose:

$$\pi_1 = \operatorname{card}\{(\theta_1 + \Omega_1) \cap C_{\mathbb{N}}\Gamma\}$$

et

$$\pi_i = \operatorname{card}\{(\theta_i + \Omega_i) \cap C_{\mathbb{N}}[\Gamma \cup (\theta_1 + \Omega_1) \cup \cdots \cup (\theta_{i-1} + \Omega_{i-1})]\} \qquad (i \ge 2).$$

Alors:

$$\pi = \operatorname{card} C_\wedge \Gamma = \sum_{i=1}^{[n_2/2]} \pi_i.$$

7.3. Pour $i \ge 2$, notons:

$$F_i = (\theta_i + \Omega_i) \cap [\Gamma \cup (\theta_1 + \Omega_1) \cup \cdots \cup (\theta_{i-1} + \Omega_{i-1})].$$

Il vient:

$$F_i = (\theta_i + \Omega_{i-1}) \cap (\theta_i + \Omega_i) \qquad (\text{Par } 6.9)$$

et:

$$F_i = (\theta_i + \Theta_{i-1}) \cap (\theta_i + \Gamma_i) \qquad (\text{Par } 6.3).$$

Pour $i = 1$:

$$F_1 = (\theta_1 + \Omega_1) \cap \Gamma = \Gamma \cap (\theta_1 + \Gamma_1) \qquad (\text{Par } 6.5(1)).$$

7.4. Pour $i \ge 1$ il vient alors:

$$\begin{aligned}\pi_i &= \operatorname{card}(\theta_i + \Omega_i) - \operatorname{card} F_i \\ &= \operatorname{card}(\theta_i + \Gamma_i) - \operatorname{card}(\theta_i + U_i) - \operatorname{card} F_i.\end{aligned}$$

7.5. Pour $i \geq 2$ nous avons:

$$\pi_i = \operatorname{card}(\theta_i + \Gamma_i) - \operatorname{card}(\theta_i + U_i)$$
$$- \operatorname{card}\{(\theta_{i-1} + \Gamma_{i-1}) \cap (\theta_i + \Gamma_i)\}$$
$$+ \operatorname{card}\{(\theta_{i-1} + U_{i-1}) \cap (\theta_i + \Gamma_i)\}$$
$$\pi_i = \operatorname{card}\{\theta_i + \Gamma_i\} - \operatorname{card}(U_i) - \operatorname{card}\{(\theta_{i-1} + \Gamma) \cap (\theta_i + \Gamma_i)\}$$
$$+ \operatorname{card}\{(\theta_{i-1} + U_{i-1}) \cap (\theta_i + \Gamma_i)\}.$$
$$\pi_i = \operatorname{card}\{C_{\theta_i + \Gamma_i}(\theta_{i-1} + \Gamma)\} - \operatorname{card}(U_i)$$
$$+ \operatorname{card}\{(\theta_{i-1} + U_{i-1}) \cap (\theta_i + \Gamma_i)\}.$$

D'après (3.5), (6.11) et (6.1):

$$\operatorname{card}\{C_{\theta_i + \Gamma_i}(\theta_{i-1} + \Gamma)\} = (n_2 - 2i + 1)m_1 n_1$$
$$\operatorname{card}(U_i) = m_1 - 1 + n_1 - 1 + n_2 - 2i + 1 = m_1 + n_1 + n_2 - 2i - 1.$$

D'après (3.5) et (6.7):

$$\operatorname{card}\{(\theta_{i-1} + U_{i-1}) \cap (\theta_i + \Gamma_i)\} = n_2 - 2i + 1.$$

7.6. Il vient finalement, pour $i \geq 2$:

$$\pi_i = (n_2 - 2i + 1)m_1 n_1 - m_1 - n_1 + 2.$$

7.7. De même:

$$\pi_1 = \operatorname{card} C_{\theta_1 + \Gamma_1}\Gamma - \operatorname{card}(U_1)$$
$$\operatorname{card} C_{\theta_1 + \Gamma_1}\Gamma = (n_2 - 1)m_1 n_1$$
$$\operatorname{card}(U_1) = m_1 + n_1 + n_2 - 3.$$

7.8. $\pi_1 = (n_2 - 1)m_1 n_1 - m_1 - n_1 + 2 - (n_2 - 1)$.

7.9. On obtient alors:

$$\pi = \sum_{i=1}^{[n_2/2]} \pi_i = \left[\frac{n_2}{2}\right]\left(m_1 n_1\left(n_2 - \left[\frac{n_2}{2}\right]\right) - m_1 - n_1 + 2\right) - n_2 + 1.$$

7.10. Théorème 9. *Il suit que pour une branche du type*: $y = x^{m/n} + bx^{\beta_2/n}$ $(b \neq 0)$.

$$l_R(T) = c - \left[\frac{n_2}{2}\right]\left(m_1 n_1\left(n_2 - \left[\frac{n_2}{2}\right]\right) - m_1 - n_1 + 2\right) + n_2 - 1.$$

En particulier, pour $n_2 = 2$:

$$l_R(T) = c - c_1, \qquad \text{avec: } c_1 = (m_1 - 1)(n_1 - 1).$$

8. *Remarque* 3

Le résultat trouvé est indépendant du coefficient b (b dans $\mathbb{C}^*$). Ceci n'était pas évident à priori. Pour cette famille de branche nous avons donc une expression de $l(T)$ en fonction des seuls exposants n, m et β_2.

7. CALCULS POUR LES PREMIÈRES VALEURS DE LA MULTIPLICITÉ

1. *Calcul de* $l(T)$ *pour certaines branches ayant une seule paire de Puiseux*

Soit une branche de développement de Puiseux:

$$y = x^{m/n} + ax^{\lambda/n}, \qquad n < m < \lambda, (n, m) = 1, a \neq 0.$$

La série caractéristique est: (n, m), le semi-groupe associé: $\Gamma = n\mathbb{N} + m\mathbb{N}$ et l'exposant du conducteur: $c = (n-1)(m-1)$.

Si $n \geq 4$, nous nous placerons dans le cas où: $\lambda = c - np - 1$, où p est un entier compris entre 1 et $[\frac{m}{n}]$.

Si $n = 3$, nous ferons de même avec: $1 \leq p \leq [\frac{m-4}{3}]$. On vérifie sans mal que:

PROPOSITION 4. *Pour ces branches*: $C_{\wedge}\Gamma = \{\lambda + in \mid 1 \leq i \leq p\}$, *et*: $l(T) = c - p$.

2. *Calcul effictif de* $l(T)$ *lorsque la multiplicité est* 2 *ou* 3 *ou lorsque la multiplicité est* 4 *et* $m \leq 11$

La liste complète à isomorphisme près des branches de multiplicité 2 ou 3 et de celles de multiplicité 4 et de deuxième terme de la série caractéristique $m \leq 11$ se trouve dans [6]. Dans le tableau I nous inscrivons, dans la colonne "méthode":

(1) Si le résultat est: $l(T) = c$ (d'après O. Zariski).

(2) Si nous utilisons le théorème 8.

(3) Si nous utilisons la proposition 4.

(3′) Si nous utilisons un raisonnement tout à fait analogue à celui du cas précédent.

(4) Dans les autres cas. Nous précisons alors quels sont les éléments de $C_{\wedge}\Gamma$ et nous laissons au lecteur le soin de vérifier.

TABLE I

Branche	Serie caracteristique	Γ	c	Methode	$l(T)$
$y = x^{\frac{m}{2}}$ (m impair)	$(2, m)$	$2\mathbb{N} + m\mathbb{N}$	$m - 1$	1	$m - 1$
$y = x^{\frac{4}{3}}$	$(3, 4)$	$3\mathbb{N} + 4\mathbb{N}$	6	1	6
$y = x^{\frac{5}{3}}$	$(3, 5)$	$3\mathbb{N} + 5\mathbb{N}$	8	1	8
$y = x^{\frac{3q+1}{3}}$	$(3, 3q + 1)$	$3\mathbb{N} + (3q + 1)\mathbb{N}$	$6q$	1	$6q$
$y = x^{\frac{3q+1}{3}} + x^{\frac{6q-3p-1}{3}}$ $1 \leq p \leq q - 1$	$(3, 3q + 1)$	$3\mathbb{N} + (3q + 1)\mathbb{N}$	$6q$	3	$6q - p$
$y = x^{\frac{3q+2}{3}}$	$(3, 3q + 2)$	$3\mathbb{N} + (3q + 2)\mathbb{N}$	$2(3q + 1)$	1	$2(3q + 1)$
$y = x^{\frac{3q+2}{3}} + x^{\frac{6q-3p+1}{3}}$ $1 \leq p \leq q - 1$	$(3, 3q, +2)$	$3\mathbb{N} + (3q + 2)\mathbb{N}$	$2(3q + 1)$	3	$2(3q + 1) - p$
$y = x^{\frac{5}{4}}$	$(4, 5)$	$4\mathbb{N} + 5\mathbb{N}$	12	1	12
$y = x^{\frac{5}{4}} + x^{\frac{7}{4}}$	$(4, 5)$	$4\mathbb{N} + 5\mathbb{N}$	12	3	11
$y = x^{\frac{6}{4}} + x^{\frac{\beta_2}{4}}$ $\beta_2 \geq 7$ et impair	$(4, 6, \beta_2)$	$4\mathbb{N} + 6\mathbb{N} + (\beta_2 + 6)\mathbb{N}$	$\beta_2 + 9$	2	$\beta_2 + 7$
$y = x^{\frac{7}{4}}$	$(4, 7)$	$4\mathbb{N} + 7\mathbb{N}$	18	1	18
$y = x^{\frac{7}{4}} + x^{\frac{13}{4}}$	$(4, 7)$	$4\mathbb{N} + 7\mathbb{N}$	18	3	17

$y = x^{\frac{7}{4}} + x^{\frac{9}{4}}$	$(4,7)$	$4\mathbb{N} + 7\mathbb{N}$	18	3	16
$y = x^{\frac{9}{4}}$	$(4,9)$	$4\mathbb{N} + 9\mathbb{N}$	24	1	24
$y = x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{19}{4}}$	$(4,9)$	$4\mathbb{N} + 9\mathbb{N}$	24	3	23
$y = x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{15}{4}}$	$(4,9)$	$4\mathbb{N} + 9\mathbb{N}$	24	3	22
$y = x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{10}{4}} + ax^{\frac{11}{4}}$ $a \neq \frac{18}{19} a \neq \frac{19}{18}$	$(4,9)$	$4\mathbb{N} + 9\mathbb{N}$	24	$4 \mid C_\Lambda \Gamma = \{14, 19, 23\}$	21
$y = x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{10}{4}} + \frac{19}{18} x^{\frac{11}{4}}$	$(4,9)$	$4\mathbb{N} + 9\mathbb{N}$	24	$4 \mid C_\Lambda \Gamma = \{14, 23\}$	22
$y = x^{\frac{9}{4}} + x^{\frac{10}{4}} + \frac{18}{19} x^{\frac{11}{4}} + bx^{\frac{15}{4}}$	$(4,9)$	$4\mathbb{N} + 9\mathbb{N}$	24	$4 \mid C_\Lambda \Gamma = \{14, 19, 23\}$	21
$y = x^{\frac{10}{4}} + x^{\frac{11}{4}}$	$(4,10,11)$	$4\mathbb{N} + 10\mathbb{N} + 21\mathbb{N}$	28	2	24
$y = x^{\frac{10}{4}} + x^{\frac{11}{4}} + bx^{\frac{13}{4}} (b \neq 0)$	$(4,10,11)$	$4\mathbb{N} + 10\mathbb{N} + 21\mathbb{N}$	28	$4 \mid C_\Lambda \Gamma = \{15, 19, 23, 27\}$	24
$y = x^{\frac{10}{4}} + x^{\frac{10+2j+1}{4}} \quad (j \geq 1)$	$(4, 10, 10 + 2j + 1)$	$4\mathbb{N} + 10\mathbb{N} + (21 + 2j)\mathbb{N}$	$28 + 2j$	2	$24 + 2j$
$y = x^{\frac{10}{4}} + ax^{\frac{10+2j+1}{4}} + bx^{\frac{10+2j+3}{4}}$ $a^{j+1} = b^j \neq 0$	$(4, 10, 10 + 2j + 1)$	$4\mathbb{N} + 10\mathbb{N} + (21 + 2j)\mathbb{N}$	$28 + 2j$	$4 \mid C_\Lambda(\Gamma) = \begin{Bmatrix} 15 + 2j, 19 + 2j \\ 23 + 2j, 27 + 2j \end{Bmatrix}$	$24 + 2j$
$y = x^{\frac{11}{4}}$	$(4,11)$	$4\mathbb{N} + 11\mathbb{N}$	30	1	30
$y = x^{\frac{11}{4}} + x^{\frac{25}{4}}$	$(4,11)$	$4\mathbb{N} + 11\mathbb{N}$	30	3	29
$y = x^{\frac{11}{4}} + x^{\frac{21}{4}}$	$(4,11)$	$4\mathbb{N} + 11\mathbb{N}$	30	3	28
$y = x^{\frac{11}{4}} + x^{\frac{17}{4}}$	$(4,11)$	$4\mathbb{N} + 11\mathbb{N}$	30	$3'$	27
$y = x^{\frac{11}{4}} + x^{\frac{14}{4}}$	$(4,11)$	$4\mathbb{N} + 11\mathbb{N}$	30	$4 \mid C_\Lambda(\Gamma) = \{18, 25, 29\}$	27
$y = x^{\frac{11}{4}} + ax^{\frac{13}{4}} + ax^{\frac{14}{4}} \ (a \neq 0)$	$(4,11)$	$4\mathbb{N} + 11\mathbb{N}$	30	$4 \mid C_\Lambda(\Gamma) = \{17, 21, 25, 29\}$	26
$y = x^{\frac{11}{4}} + ax^{\frac{14}{4}} + a^2 x^{\frac{18}{4}} \ (a \neq 0)$	$(4,11)$	$4\mathbb{N} + 11\mathbb{N}$	24	$4 \mid C_\Lambda(\Gamma) = \{18, 25, 29\}$	27

3. *Application à un contre-exemple*

Deux branches équisingulières peuvent avoir la même valeur pour $l(T)$, ainsi que leurs transformés successives respectives par transformation quadratique, sans être isomorphes.

$$(C) \qquad y = x^{\frac{10}{4}} + ax^{\frac{13}{4}} + bx^{\frac{15}{4}} \qquad (a^2 = b \neq 0).$$

$$(D) \qquad y = x^{\frac{10}{4}} + x^{\frac{13}{4}}.$$

(C) et (D) ont même série caractéristique: (4, 10, 13).
(C) et (D) ne sont pas isomorphes [6].
$l(T) = 26$ pour (C) et pour (D). Après transformation quadratique:

$$(C_1) \qquad y = x^{\frac{6}{4}} + ax^{\frac{9}{4}} + bx^{\frac{11}{4}}$$

$$(D_1) \qquad y = x^{\frac{6}{4}} + x^{\frac{9}{4}}$$

sont isomorphes.

$$l(T_1) = 16 \qquad \text{pour } (C_1) \text{ et } (D_1).$$

III.4.7. Les transformées suivantes sont bien sûr isomorphes et ont donc le même $l(T_i)$: $l(T_2) = 6$, $l(T_3) = 4$, $l(T_4) = 2$, $l(T_5) = 0$.

RÉFÉRENCES

1. R. Bassein, Covered deformations and curve singularities, *J. Algebra* **48** (1977), 89–95.
2. R. Bassein, On smoothable curve singularities: Local Methods, *Math. Ann.* **230** (1977), 273–277.
3. R. Berger, Über eine klasse unvergalbelter lokaler Ringe, *Math. Ann.* **146** (1962), 97–115.
4. R. Berger, Differentialmoduln eindimensionaler lokaler Ringe, *Math. Z.* **81** (1963), 326–354.
5. C. Delorme, Sous-monoïdes d'intersection complète de N, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* **9** (1976), 145–154.
6. S. Ebey, The classification of singular points of algebraic curves, *Trans. Amer. Math. Soc.* **118** (1965), 454–471.
7. D. Ferrand, Suite régulière et intersection complète, *C.R. Acad. Sci. Paris* **264** (1967), 427–428.
8. H. Fitting, Die Determinantenideale eines Moduls, *Jahresber. Deutsch. Math. Verein.* **46** (1936), 195–228.
9. J. Herzog, Generators and relations of abelian semigroups and semigroups rings, *Manuscripta Math.* **3** (1970), 175–193.
10. J. Herzog et E. Kunz, Die Wertehalbgruppe eines lokalen Rings der Dimension 1, *Ber. Heidelberger Akad. Wiss.* **2** (1971), 1–46.
11. H. Hironaka, On the arithmetic genera and the effective genera of algebraic curves, *Mem. College Sci. Univ. Kyoto* **30,** No. 2 (1957), 177–199.

12. E. Kunz, Vollständige Durchschnitte und Differenten, *Arch. Math.* **19** (1968), 47–58.
13. J. Lipman, Free derivation modules an algebraic varieties, *Amer. J. Math.* **87** (1965), 874–898.
14. D. G. Northcott, The neighbourhood of a local ring, *J. London Math. Soc.* (1955), 360–382.
15. D. G. Northcott, On the notion of first neighbourhoods ring with an application to the AF + BØ theorem, *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* **53** (1957), 43–56.
16. H. Pinkham, Deformations of algebraic varieties with Gm action, *Astérique* **20** (1974), 1–131.
17. D. S. Rim, Torsion differentials and deformation, *Trans. Amer. Math. Soc.* **169** (1972), 257–278.
18. P. Roquette, Über den Singularitätsgrad eindimensionaler Ringe, II, *J. Reine Angew. Math.* **209** (1962), 12–16.
19. J. P. Serre, Sur les modules projectifs, *in* ''Sem. Dubreil-Pisot 2, Nov. 1960,'' pp. 1–16.
20. S. Susiki, On torsion of the module of differentials of a locality which is a complete intersection, *J. Math. Kyoto Univ.* **4** (1965), 471–475.
21. B. Teissier, Appendice, *in* ''Le problème des modules pour les branches planes,'' pp. 153–212, Hermann, Paris, 1986.
22. B. Urlich, Torsion des Differentialmodulus und Kotangentenmodul von Kurvensingularitäten, *Arch. Math.* **36** (1981), 510–523.
23. R. Waldi, Deformation von Gorenstein-Singularitäten der Kodimension 3. *Math. Ann.* **242** (1979), 201–208.
24. O. Zariski, Characterization of plane algebraid curves whose module of differentials has maximum torsion, *Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A.* **56**, No. 3 (1966), 781–786.
25. O. Zariski, ''Le problème des modules pour les branches planes,'' Hermann, Paris, 1986.