

JOURNAL OF DIFFERENTIAL EQUATIONS **91**, 204–234 (1991)

Résonances dans l'approximation de Born–Oppenheimer I

ANDRÉ MARTINEZ

*Département de Mathématiques, Université de Paris-Nord,
Av. J. B. Clément, F-93430 Villetaneuse, France*

Communicated by Jack K. Hale

Received May 11, 1989; revised October 23, 1990

On étudie l'opérateur $P = -h^2\Delta_x - \Delta_y + V(x, y)$ sur $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^p$ lorsque h tend vers zéro, dans un cas où des résonances apparaissent. En utilisant la méthode de Feshbach, l'étude de P est d'abord ramenée à celle d'un opérateur matriciel sur $L^2(\mathbb{R}_x^n)$, de terme principal $\text{diag}(-h^2\Delta + \lambda_j(x))$ où les $\lambda_j(x)$ sont les valeurs propres de $-\Delta_y + V(x, y)$ sur $L^2(\mathbb{R}_y^p)$. Sous l'hypothèse que λ_2 admet un puits ponctuel non dégénéré (et des conditions supplémentaires sur λ_1), il est alors prouvé que P possède des résonances ayant un développement asymptotique réel en $h^{1/2}$, proches des valeurs propres de $-h^2\Delta + \lambda_2(x)$.

We study the operator $P = -h^2\Delta_x - \Delta_y + V(x, y)$ on $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^p$ when h tends to zero, in a case where resonances appear. Using the so-called Feshbach method, the study of P is first reduced to that of a matrix operator on $L^2(\mathbb{R}_x^n)$, with principal part $\text{diag}(-h^2\Delta + \lambda_j(x))$ where the λ_j 's are the eigenvalues of $-\Delta_y + V(x, y)$ on $L^2(\mathbb{R}_y^p)$. Under the assumption that λ_2 admits a non degenerate point well (and additional conditions on λ_1), it is then showed that P has resonances with a real asymptotic expansion in $h^{1/2}$, close to the eigenvalues of $-h^2\Delta + \lambda_2(x)$ (see Theorem 1.1). © 1991 Academic Press, Inc.

INTRODUCTION

Depuis l'article initial de M. Born et R. Oppenheimer [Bo–Op], la technique d'approximation qui porte leurs noms a suscité de nombreux travaux dont on trouvera en bibliographie un (petit) échantillon (on n'a cité que les papiers les plus récents, ainsi que celui devenu classique de H. Feshbach). Très brièvement, il s'agit d'étudier le comportement d'un système à plusieurs corps lorsqu'on fait tendre la masse de certaines particules (les noyaux) vers $+\infty$. (Voir [Ma2] pour un exposé plus détaillé des motivations, ainsi que les articles cités en bibliographie). On est ainsi ramené à l'étude d'un hamiltonien du type

$$P = -h^2\Delta_x - \Delta_y + V(x, y)$$

dans $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^p$, lorsque h tend vers zéro. L'idée est alors de remplacer dans l'expression de P l'opérateur $Q(x) = -\Delta_y + V(x, y)$ (dans \mathbb{R}_y^p à x fixé), par la famille $\lambda_1(x) < \lambda_2(x) \leq \dots$ de ses valeurs propres. Ceci ramène approximativement l'étude de P à celles des opérateurs

$$-h^2\Delta_x + \lambda_j(x)$$

dans \mathbb{R}_x^n , pour $j = 1, 2, \dots$. En fait, si on s'intéresse aux propriétés spectrales de P près d'un niveau d'énergie E_0 fixé, la méthode permet de se limiter aux $\lambda_j(x)$ vérifiant $\inf_{\mathbb{R}^n} \lambda_j(x) \leq E_0$.

Dans notre précédent article [Ma1], on s'est intéressé au cas où $\lambda_1(x)$ admettait un minimum strict non dégénéré, et on a étudié le spectre de P près de la valeur de ce minimum (il s'agit d'une situation déjà considérée par Combes, Duclos, et Seiler [CDS], et par Hagedorn [Ha1]). Ce spectre est alors discret, et on a montré en particulier que les valeurs propres admettent des développements asymptotiques en puissances de $h^{1/2}$, et les fonctions propres des développements de type BKW dans un voisinage (fixe) du point où $\text{Min } \lambda_1$ est atteint (puits).

On se propose d'étudier ici la situation où c'est λ_2 qui admet un minimum strict non dégénéré, λ_1 restant en dessous de la valeur de ce minimum. Ceci constitue a priori le cas le plus simple où vont apparaître des résonances pour P . Ces résonances seront accessibles à partir d'une dilatation analytique en x , et le premier pas consistera à montrer que l'on dispose ainsi d'une bonne théorie des résonances pour P . En principe, l'opérateur P provient d'un problème à plusieurs corps, pour lequel on dispose déjà d'une théorie des résonances (cf. [Ba-Co]). Mais même dans ce cas, il n'est pas habituel de ne dilater qu'un seul groupe de variables. (Ici, le potentiel V sera supposé régulier en x , à valeurs dans un espace L^∞ à poids en y . En particulier, le cas de potentiels Coulombiens est ici exclu, et demanderait une machinerie un peu différente, analogue à celle de [KMSW]).

La méthode de Feshbach pour l'opérateur dilaté (présentée ici par le biais d'un problème de Grushin) permet ensuite de se ramener à un système 2×2 dont le terme principal est le dilaté de $\text{diag}(-h^2\Delta_x + \lambda_1(x), -h^2\Delta_x + \lambda_2(x))$. Comme on ne s'intéresse ici qu'aux résonances provenant des valeurs propres de $-h^2\Delta_x + \lambda_2(x)$, on met en plus une condition de viriel sur $\lambda_1(x)$, de telle sorte que l'opérateur $-h^2\Delta_x + \lambda_1(x)$ n'admette pas de résonance près de $E_0 = \text{Min } \lambda_2$. Le résultat principal de cet article est alors que les résonances de P dans $[E_0 - \varepsilon, E_0 + C_0 h] + i[-\varepsilon, \varepsilon]$, ($\varepsilon > 0$ assez petit, $C_0 > 0$ arbitraire) admettent des développements asymptotiques réels en puissances de $h^{1/2}$. En particulier, la partie imaginaire de ces résonances est $\mathcal{O}(h^\infty)$.

La technique consiste à utiliser les constructions BKW faites dans

[Ma1] (à l'aide d'un calcul pseudo-différentiel formel) qui donnent des valeurs propres formelles pour P près du niveau E_0 , et que l'on démontre ensuite correspondre en fait à des résonances de P . On montre aussi que toutes les résonances dans $[E_0 - \varepsilon, E_0 + C_0 h] + i[-\varepsilon, \varepsilon]$ sont ainsi atteintes.

La démonstration se déroule en quatre étapes: la première (méthode de Feshbach) consiste à ramener l'étude du dilaté de P à celle d'un système 2×2 sur $L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$. Ensuite (deuxième étape) on utilise l'hypothèse de viriel faite sur $\lambda_1(x)$ pour se ramener en fait à un opérateur scalaire H_E^θ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ (de terme principal $-h^2 e^{-2\theta} A_x + \lambda_2(xe^\theta)$). Cet opérateur ayant une dépendance non linéaire en le paramètre d'énergie E , on étudie alors plus précisément (troisième étape) cette dépendance. On utilise finalement les constructions BKW (dernière étape) pour obtenir successivement tous les termes des développements asymptotiques cherchés.

Le plan est le suivant:

1. Hypothèses et résultats.
2. Méthode de Feshbach.
3. Résonances.
4. Constructions BKW.
5. Réduction de l'opérateur de Feshbach.
6. Propriétés de H_E^θ .
7. Fin de la démonstration.

1. HYPOTHÈSES ET RÉSULTATS

On considère l'opérateur différentiel

$$P = -h^2 A_x - A_y + V(x, y) = -h^2 A_x + Q(x)$$

dans $\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_y^p$, et on étudie les propriétés spectrales de P lorsque h tend vers 0.

Si $m = m(y)$ est une fonction continue sur \mathbb{R}^p , avec $m \geq 1$, on posera

$$mL^\infty(\mathbb{R}^p) = \{f \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^p) \mid m(y)^{-1} f \in L^\infty(\mathbb{R}^p)\},$$

muni de sa norme naturelle qui en fait un Banach.

Pour $\delta > 0$, on notera aussi $\mathcal{A}(\delta, m)$ l'espace des fonctions de $D_\delta = \{x \in \mathbb{C}^n \mid |\text{Im } x| \leq \delta \langle \text{Re } x \rangle\}$ dans mL^∞ , qui sont holomorphes et bornées en x dans D_δ .

L'hypothèse que l'on fait sur le potentiel V (réel sur \mathbb{R}^{n+p}) est alors:

(H1) $\exists m(y) \geq 1$ continue sur \mathbb{R}^p , $\delta > 0$, $V_1 \in \mathcal{A}(\delta, 1)$
 et $V_2 \in \mathcal{A}(\delta, m)$ tels que $V = V_1 + V_2$, et avec:

$\exists C > 0$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^n$ $V_2(x, y) m(y)^{-1} \geq \frac{1}{C}$ p.p. sur \mathbb{R}^p ,
 et $|\nabla_y V_2| m(y)^{-1} \leq C$ p.p. sur \mathbb{R}^p .

(En particulier, l'hypothèse (H1) est toujours satisfaite pour $V \in \mathcal{A}(\delta, 1)$. De plus, par les formules de Cauchy, (H1) implique que $m(y)^{-1} \partial_x^\alpha V = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-|\alpha|})$ pour $x \in D_{\delta'}$, $\delta' < \delta$).

Les opérateurs P et $Q(x)$ sont alors essentiellement auto-adjoints sur $L^2(\mathbb{R}^{n+p})$ (resp. $L^2(\mathbb{R}^p)$) et on note par les mêmes lettres leurs extensions auto-adjointes, qui sont de domaines respectifs:

$$\mathcal{D}_P = \{u \in H^2(\mathbb{R}^{n+p}) \mid m(y)u \in L^2(\mathbb{R}^{n+p})\}$$

$$\mathcal{D}_Q = \{v \in H^2(\mathbb{R}^p) \mid m(y)v \in L^2(\mathbb{R}^p)\},$$

que l'on munit de leurs structures naturelles d'espaces de Hilbert. (Cela se démontre de manière analogue à [Ma1] lemme 1.1). En particulier, le domaine de $Q(x)$ est indépendant de x .

On suppose en outre:

(H2) Pour tout $x \in \mathbb{R}^n$, $\#\sigma_{pp}(Q(x)) \geq 2$ et la deuxième valeur propre $\lambda_2(x)$ de $Q(x)$ est simple et vérifie

$$\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \text{dist}(\lambda_2(x), \sigma(Q(x)) \setminus \{\lambda_2(x)\}) > 0.$$

Remarque. Par des résultats généraux (cf. [Re-Si]), on sait déjà que la première valeur propre $\lambda_1(x)$ de $Q(x)$ est automatiquement simple.

A cause de l'hypothèse (H1), on a (avec $C > 0$ assez grand):

$$-C \leq Q(x) \leq -\Delta_y + Cm(y). \quad (1.1)$$

On en déduit par le principe du mini-max que les deux premières valeurs propres $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ de $Q(x)$ sont uniformément bornées par rapport à x .

D'autre part, il est facile de montrer que $\lambda_1(x)$ et $\lambda_2(x)$ dépendent analytiquement de $x \in \mathbb{R}^n$. On se place maintenant dans la situation où $\lambda_2(x)$ présente un puits au dessus du niveau maximum de $\lambda_1(x)$, c'est-à-dire (après l'ajout éventuel d'une constante à V , et une translation dans la variable x):

((H3)) $\lambda_2 \geq 0$, $\sup_{\mathbb{R}^n} \lambda_1(x) < 0$, $\liminf_{|x| \rightarrow \infty} \lambda_2(x) > 0$, $\lambda_2^{-1}(0) = \{0\}$, $\lambda_2''(0) > 0$
 $\inf_{\mathbb{R}^n} \text{dist}(\lambda_2(x), \sigma(Q(x)) \setminus \{\lambda_2(x)\}) > 0.$

On note U_θ l'opérateur unitaire de dilatation en x (à partir de 0), défini pour $\theta \in]-\varepsilon, \varepsilon[$ par:

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n + \rho), \quad U_\theta \varphi(x, y) = e^{n\theta/2} \varphi(xe^\theta, y).$$

Grâce à (H1), $Q(xe^\theta)$ se prolonge en une famille analytique de type A au sens de Kato (cf. [Re-Si]) pour $\theta \in]-a, a[+ i] - a, a[$ avec $a > 0$ assez petit.

On suppose finalement que le potentiel effectif $\lambda_1(x)$ ne crée pas de résonances près du niveau 0. Plus précisément, on met la condition de viriel:

$$(H4) \quad \sup_{\mathbb{R}^n} (2\lambda_1(x) + x \cdot \nabla \lambda_1(x)) < 0.$$

On montrera à la section 3 que, sous ces hypothèses, on peut définir les résonances de P près du niveau 0 comme étant les valeurs propres de $P_{i\mu} = U_{i\mu} P U_{-i\mu}$ ($\mu > 0$ assez petit), de domaine \mathcal{D}_ρ . Celles-ci ne dépendent pas du choix de μ , et sont situées dans le demi-plan inférieur $\{\text{Im } z \leq 0\}$.

Un exemple de potentiel satisfaisant à toutes ces conditions est fourni par

$$V_\nu(x, y) = (\nu f(x) + 1) y^2$$

où $f > 0$ est une fonction holomorphe et bornée dans D_δ telle que $f|_{\mathbb{R}^n}$ possède un minimum non dégénéré en 0, et $\nu > 0$ est assez petit. (Le spectre de $Q(x)$ est alors constitué des $(\nu f(x) + 1)^{1/2} \alpha_j$, où les α_j sont des constantes).

Pour $C_0 > 0$ fixé en dehors du spectre de $H_0 = -\Delta_x + \frac{1}{2} \langle \lambda_2'(0)x, x \rangle$, notons e_1, \dots, e_{N_0} les valeurs propres de H_0 dans $[0, C_0]$. Notre résultat est alors:

THÉORÈME 1.1. *Sous les conditions (H1) à (H4), et pour $h > 0$ assez petit, P admet exactement N_0 résonances dans $[-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]$ ($\varepsilon > 0$ fixé assez petit), notée $\rho_1(h), \dots, \rho_{N_0}(h)$, et pour tout j , $\rho_j(h)$ admet un développement asymptotique réel du type*

$$\rho_j(h) \sim e_j h + \sum_{k \geq 1} \alpha_{j,k} h^{1+k/2} \quad (\alpha_{j,k} \in \mathbb{R}).$$

En particulier, $|\text{Im } \rho_j(h)| = \mathcal{O}(h^\infty)$.

Remarque 1.2. En fait, on s'attend même à ce que $|\text{Im } \rho_j(h)|$ soit exponentiellement petit (i.e. $\mathcal{O}(e^{-\varepsilon/h})$ avec $\varepsilon > 0$), (cf. [La-Li] et [Ma3]).

Remarque 1.3. Bien entendu, le fait de se limiter aux deux premières valeurs propres de $Q(x)$ ne joue ici aucun rôle, et le résultat s'étend sans

aucun problème en remplaçant $\lambda_2(x)$ par $\lambda_N(x)$ (N arbitraire), et en supposant que les $\lambda_j(x)$, $j=1, \dots, N-1$ dépendent analytiquement de x (avec d'éventuels croisements) et vérifient tous (H4).

Remarque 1.4. La question de savoir si les $\rho_j(h)$ peuvent ou non être des valeurs propres plongées de P paraît assez délicate, et on renvoie le lecteur intéressé aux résultats de [Re-Si], Tome IV, Chapitre XIII.

2. LE PROBLÈME DE GRUSHIN DILATÉ (MÉTHODE DE FESHBACH)

On note u_j ($j=1$ ou 2) les deux premières fonctions propres de $Q(x)$, réelles et normalisées dans $L^2(\mathbb{R}^p)$. Pour $\theta \in]-a, a[$, on note aussi $u_j^\theta = u_j(xe^\theta, y)$, et on considère le problème de Grushin:

$$A_E^\theta(h) = \begin{pmatrix} P_\theta - E & u_1^\theta & u_2^\theta \\ \langle \cdot, u_1^\theta \rangle_Y & 0 & 0 \\ \langle \cdot, u_2^\theta \rangle_Y & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

sur $\mathcal{D}_P \oplus L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$, où $P_\theta = U_\theta P U_{-\theta}$, et $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ désigne le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}^p)$. ($\langle \cdot, u_j^\theta \rangle_Y$ est donc par définition l'adjoint de l'opérateur $L^2(\mathbb{R}^n) \ni v \mapsto vu_j^\theta \in L^2(\mathbb{R}^{n+p})$).

Afin d'étudier l'extension de $A_E^\theta(h)$ aux θ complexes, on va d'abord montrer (en notant $L_m^2(\mathbb{R}^p) = \{u \in L^2(\mathbb{R}^p) \text{ t.q. } mu \in L^2(\mathbb{R}^p)\}$):

LEMME 2.1. (i) Pour $\theta \in]-a, a[+ i]$ et $x \in \mathbb{R}^n$, l'opérateur $Q(xe^\theta) - Q(x)$ est borné de $L_m^2(\mathbb{R}^p)$ dans $L^2(\mathbb{R}^p)$, et vérifie:

$$\|Q(xe^\theta) - Q(x)\|_{\mathcal{L}(L_m^2, L^2)} = \mathcal{O}(|\theta|)$$

uniformément par rapport à x .

(ii) Pour $j=1, 2$, λ_j se prolonge en une fonction holomorphe dans $D_{\delta'}$ ($\delta' > 0$ assez petit), vérifiant:

$$\lambda_j(xe^\theta) - \lambda_j(x) = \mathcal{O}(|\theta|)$$

uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$ et $\theta \in]-a, a[+ i]$.

(iii) Pour $j=1, 2$, u_j se prolonge en une fonction holomorphe en x dans $D_{\delta'}$ et à valeurs dans \mathcal{D}_Q , et vérifiant pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^n$:

$$\|\partial_x^\alpha u_j^\theta\|_Y = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-|\alpha|})$$

$$\|\partial_x^\alpha u_j^\theta - \partial_x^\alpha u_j\|_Y = \mathcal{O}(|\theta| \langle x \rangle^{-|\alpha|})$$

uniformément pour $x \in \mathbb{R}^n$ et $\theta \in]-a, a[+ i]$.

Preuve. (i) $Q(xe^\theta) - Q(x) = V(xe^\theta, y) - V(x, y)$ est borné de $L_m^2(\mathbb{R}^p)$ dans $L^2(\mathbb{R}^p)$ par l'hypothèse (H1), et

$$m(y)^{-1} \frac{\partial}{\partial \theta} (V(xe^\theta, y) - V(x, y)) = m(y)^{-1} e^\theta x \cdot \nabla_x V(xe^\theta, y) = \mathcal{O}(1)$$

uniformément par rapport à x, y et $\theta \in]-a, a[+ i] - a, a[$, d'où le résultat.

(ii) Si $\Gamma_j(x)$ est un cercle dans \mathbb{C} de centre $\lambda_j(x)$ et de rayon $\delta > 0$ fixé assez petit, alors on a pour $x \in \mathbb{R}^n$ (en notant $\oint = 1/2i\pi \int$ où l'intégrale est prise sur un contour orienté):

$$\operatorname{rg} \left(\oint_{\Gamma_j(x)} (z - Q(x))^{-1} dz \right) = 1.$$

D'autre part, d'après (i) et la deuxième formule de la résolvante, on a aussi, pour $z \in \Gamma_j(x)$:

$$(z - Q(x))^{-1} - (z - Q(xe^\theta))^{-1} = \mathcal{O}(|\theta|).$$

On en déduit, pour $\theta \in]-a, a[+ i] - a, a[$ ($a > 0$ assez petit):

$$\operatorname{rg} \left(\oint_{\Gamma_j(x)} (z - Q(xe^\theta))^{-1} dz \right) = 1 \quad (2.1)$$

et si l'on pose:

$$v_j^\theta(x) = \oint_{\Gamma_j(x)} (z - Q(xe^\theta))^{-1} u_j(x) dz \quad (2.2)$$

alors $v_j^\theta = u_j + \mathcal{O}(|\theta|)$ dans $L^2(\mathbb{R}^p)$ (uniformément par rapport à $x \in \mathbb{R}^n$), et v_j^θ dépend analytiquement de θ (à valeur dans \mathcal{D}_Q). Pour θ réel, on a aussi:

$$\lambda_j(xe^\theta) = \langle Q(xe^\theta) v_j^\theta, v_j^\theta \rangle_Y / \langle v_j^\theta, v_j^\theta \rangle_Y.$$

On en déduit que $\lambda_j(xe^\theta)$ se prolonge analytiquement en θ dans $]-a, a[+ i] - a, a[$, et il en va de même pour $u_j(xe^\theta, y)$ (à valeurs dans \mathcal{D}_Q) en écrivant pour θ réel:

$$u_j(xe^\theta, y) = v_j^\theta / \sqrt{\langle v_j^\theta, v_j^\theta \rangle_Y}. \quad (2.3)$$

A cause de (2.1), on a aussi nécessairement $\lambda_j(xe^\theta) = \lambda_j(x) + \mathcal{O}(\delta)$, et donc (cf. (1.1)), $\lambda_j(xe^\theta)$ est bornée uniformément pour $x \in \mathbb{R}^n$, $\theta \in]-a, a[+ i] - a, a[$. Par des inégalités de Cauchy, on en déduit qu'il en

va de même pour $(\partial/\partial\theta)\lambda_j(xe^\theta)$ (quitte à diminuer un peu $a > 0$), et donc par l'inégalité des accroissements finis:

$$\lambda_j(xe^\theta) = \lambda_j(x) + \mathcal{O}(|\theta|).$$

(iii) Du fait que $\|u_j\|_Y = 1$, on voit que $\partial u_j/\partial x_k$ est nécessairement orthogonale à u_j (pour x réel et $k = 1, \dots, n$). D'autre part, on a aussi:

$$u_j = \oint_{\Gamma_j(x)} (z - Q(x))^{-1} u_j dz. \quad (2.4)$$

On en déduit

$$\frac{\partial u_j}{\partial x_k} = \oint_{\Gamma_j(x)} (z - Q(x))^{-1} \frac{\partial V}{\partial x_k} (z - Q(x))^{-1} u_j dz \quad (2.5)$$

et on a vu que $\partial V/\partial x_k = \mathcal{O}(\langle x \rangle^{-1})$ de $L_m^\infty(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$. Dérivant à nouveau (2.5), on en déduit le (iii) pour $\theta = 0$. Le résultat pour $\theta \neq 0$ provient de la formule (2.3) et du fait que (cf. (2.2)):

$$v_j^\theta - u_j = \oint_{\Gamma_j(x)} (z - Q(xe^\theta))^{-1} (V(x, y) - V(xe^\theta, y))(z - Q(x))^{-1} u_j dz.$$

Le (iii) s'en déduit comme précédemment en dérivant cette formule par rapport à x . ■

On définit maintenant pour $\theta \in]-a, a[+ i] - a, a[$ le projecteur Π_θ sur $L^2(\mathbb{R}^{n+p})$ par:

$$\Pi_\theta u = \langle u, u_1^\theta \rangle_Y u_1^\theta + \langle u, u_2^\theta \rangle_Y u_2^\theta$$

où $\langle \cdot, u_j^\theta \rangle_Y$ désigne l'adjoint de l'opérateur $L^2(\mathbb{R}^n) \ni v \mapsto v u_j^\theta \in L^2(\mathbb{R}^{n+p})$, (justifié par le fait que $\langle u_j^\theta, u_k^\theta \rangle_Y = \delta_{j,k}$ pour tout θ , par unicité du prolongement analytique) et on pose:

$$\hat{\Pi}_\theta = 1 - \Pi_\theta.$$

Le problème de Grushin que l'on considère pour θ complexe est:

$$A_E^\theta(h) = \begin{pmatrix} P_\theta - E & u_1^\theta & u_2^\theta \\ \langle \cdot, u_1^\theta \rangle_Y & 0 & 0 \\ \langle \cdot, u_2^\theta \rangle_Y & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.6)$$

Afin de pouvoir inverser $A_E^\theta(h)$, on va d'abord montrer:

LEMME 2.2. *Il existe une constante $C > 0$ telle que, pour θ complexe assez petit, on ait :*

$$\operatorname{Re} \langle \hat{\Pi}_\theta (P_\theta - E) \hat{\Pi}_\theta u, \hat{\Pi}_\theta u \rangle \geq \frac{1}{C} \|\hat{\Pi}_\theta u\|^2$$

pour tout $u \in L^2(\mathbb{R}^{n+p})$, E assez petit.

Preuve. Soit $v \in L^2(\mathbb{R}^{n+p})$ tel que $\hat{\Pi}_\theta v = v$ (θ fixé).

On a donc en particulier:

$$\hat{\Pi}_{\bar{\theta}} v = v - \langle v, u_1^\theta - u_1^{\bar{\theta}} \rangle_Y u_1^{\bar{\theta}} - \langle v, u_2^\theta - u_2^{\bar{\theta}} \rangle_Y u_2^{\bar{\theta}}$$

d'où l'on déduit à l'aide du lemme 2.1:

$$\nabla_x \hat{\Pi}_{\bar{\theta}} v = \nabla_x v + \mathcal{O}(|\operatorname{Im} \theta|)(\|v\| + \|\nabla_x v\|) \quad (2.7)$$

dans $L^2(\mathbb{R}^{n+p})$.

On a aussi:

$$Q(xe^\theta)v = Q(xe^\theta)\hat{\Pi}_0 v + Q(xe^\theta)(\Pi_0 - \Pi_\theta)v \quad (2.8)$$

et du fait que $Q(xe^\theta)u_j = \lambda_j(x)u_j + \mathcal{O}(|\theta|)$ dans $L^2(\mathbb{R}^p)$ uniformément par rapport à x , on en déduit à l'aide du lemme 2.1:

$$Q(xe^\theta)v = Q(xe^\theta)\hat{\Pi}_0 v + \mathcal{O}(|\theta| \cdot \|v\|) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^{n+p}). \quad (2.9)$$

Par suite,

$$\begin{aligned} \langle Q(xe^\theta)v, v \rangle &= \langle Q(xe^\theta)\hat{\Pi}_0 v, \hat{\Pi}_0 v \rangle + \mathcal{O}(|\theta| \cdot \|v\|^2) \\ &= \langle Q(x)\hat{\Pi}_0 v, \hat{\Pi}_0 v \rangle + \mathcal{O}(|\theta|) \langle m(y)\hat{\Pi}_0 v, \hat{\Pi}_0 v \rangle + \mathcal{O}(|\theta| \cdot \|v\|^2) \\ &= \langle Q(x)\hat{\Pi}_0 v, \hat{\Pi}_0 v \rangle (1 + \mathcal{O}(|\theta|)) + \mathcal{O}(|\theta| \cdot \|v\|^2) \end{aligned}$$

d'où, du fait que $Q(x)\hat{\Pi}_0 > 0$:

$$\operatorname{Re} \langle Q(xe^\theta)v, v \rangle \geq \frac{1}{C} \|\hat{\Pi}_0 v\|^2 + \mathcal{O}(|\theta| \cdot \|v\|^2)$$

avec $C > 0$, et donc, en utilisant le fait que $\hat{\Pi}_\theta v = v + \mathcal{O}(|\theta| \cdot \|v\|)$:

$$\operatorname{Re} \langle Q(xe^\theta)v, v \rangle \geq \frac{1}{C_1} \|v\|^2 \quad (2.10)$$

avec $C_1 > 0$, uniformément par rapport à $\theta \in \mathbb{C}$, $|\theta|$ assez petit.

Utilisant (2.7) et (2.10) avec $v = \hat{\Pi}_\theta u$, on obtient:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \langle \hat{\Pi}_\theta P_\theta \hat{\Pi}_\theta u, \hat{\Pi}_\theta u \rangle &= \operatorname{Re} h^2 e^{-2\theta} \langle \nabla_x \hat{\Pi}_\theta u, \nabla_x \hat{\Pi}_\theta \hat{\Pi}_\theta u \rangle \\ &\quad + \operatorname{Re} \langle Q(xe^\theta) \hat{\Pi}_\theta u, \hat{\Pi}_\theta u \rangle \\ &\geq h^2 \|\nabla_x \hat{\Pi}_\theta u\|^2 (1 - \mathcal{O}(|\theta|)) \\ &\quad + \frac{1}{C_1} \|\hat{\Pi}_\theta u\|^2 (1 - \mathcal{O}(|\theta|)) \end{aligned}$$

d'où le résultat pour $|\theta|$ assez petit. ■

En particulier, le lemme 2.2 montre l'existence d'un inverse borné $(P'_\theta - E)^{-1}$ de la restriction de $\hat{\Pi}_\theta(P_\theta - E)$ à $\{u \in L^2(\mathbb{R}^{n+p}); \hat{\Pi}_\theta u = u\}$.

Considérant ensuite l'opérateur $A_E^\theta(h)$ défini en (2.6) comme un opérateur de $\mathcal{D}_p \oplus L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n+p}) \oplus H^2(\mathbb{R}^n) \oplus H^2(\mathbb{R}^n)$, il est alors élémentaire de vérifier qu'il est bijectif, et admet pour inverse:

$$A_E^\theta(h)^{-1} = \begin{pmatrix} X_\theta(E) & u_1^\theta - X_\theta P_\theta(\cdot u_1^\theta) & u_2^\theta - X_\theta P_\theta(\cdot u_2^\theta) \\ \langle (1 - P_\theta X_\theta)(\cdot), u_1^\theta \rangle_Y & & \\ & & E - F_E^\theta \\ \langle (1 - P_\theta X_\theta)(\cdot), u_2^\theta \rangle_Y & & \end{pmatrix} \quad (2.11)$$

où on a posé $X_\theta = X_\theta(E) = (P'_\theta - E)^{-1} \hat{\Pi}_\theta$, ainsi que:

$$F_E^\theta = \begin{pmatrix} \langle G_\theta(\cdot u_1^\theta), u_1^\theta \rangle_Y & \langle G_\theta(\cdot u_2^\theta), u_1^\theta \rangle_Y \\ \langle G_\theta(\cdot u_1^\theta), u_2^\theta \rangle_Y & \langle G_\theta(\cdot u_2^\theta), u_2^\theta \rangle_Y \end{pmatrix}$$

avec $G_\theta = G_\theta(E) = P_\theta - P_\theta X_\theta(E) P_\theta$.

F_E^θ est généralement appelé opérateur de Feshbach (cf. [CDS]). Son intérêt est de ramener le problème spectral initial à un problème dans $L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$. Il servira aussi dans la section suivante à montrer que l'on dispose d'une théorie des résonances pour P .

3. RÉSONANCES

On se propose de montrer ici que l'on a une théorie acceptable des résonances pour P près du niveau 0 (i.e. compatible avec les théories déjà existantes, cf. [He-Ma]). Plus précisément, on montre:

PROPOSITION 3.1. *Sous les hypothèses du théorème 1.1, le spectre de P_θ ($\theta \in]-a, a[+ i]0, a[$) est discret près de 0, et inclus dans $\{\operatorname{Im} z \leq 0\}$.*

De plus, pour tout u, v fonctions entières sur \mathbb{C}^{n+p} , telles que $U_\mu u$ et $U_\mu v$ soient dans $L^2(\mathbb{R}^{n+p})$ pour tout $\mu \in \mathbb{C}$ assez petit, la fonction

$$z \mapsto \langle (P-z)^{-1} u, v \rangle_{L^2}$$

se prolonge à partir de $\text{Im } z > 0$ en une fonction méromorphe en z près de 0, et l'union des pôles de telles fonctions (lorsqu'on fait varier u et v) est l'ensemble des valeurs propres de P_θ près de 0.

(En particulier—du fait de la densité dans L^2 de telles fonctions u, v —près de 0, $\text{Sp } P_\theta$ est indépendant de θ assez voisin d'un θ_0 fixé).

Preuve. Posons pour $z \in \mathbb{C}$ (et avec les notations du §2):

$$R^\theta(z, h) =$$

$$\left(\begin{array}{cc} -h^2 \langle \Delta_x u_1^\theta, u_1^\theta \rangle_Y - \langle P_\theta X_\theta(z) P_\theta(\cdot u_1^\theta), u_1^\theta \rangle_Y & \langle G_\theta(z)(\cdot u_2^\theta), u_1^\theta \rangle_Y \\ \langle G_\theta(z)(\cdot u_1^\theta), u_2^\theta \rangle_Y & -h^2 \langle \Delta_x u_2^\theta, u_2^\theta \rangle_Y - \langle P_\theta X_\theta(z) P_\theta(\cdot u_2^\theta), u_2^\theta \rangle_Y \end{array} \right)$$

sur $L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$, de sorte que l'on a:

$$F_z^\theta = \mathcal{F}_0^\theta + R^\theta(z, h)$$

avec $\mathcal{F}_0^\theta = U_\theta \mathcal{F}_0 U_{-\theta}$, $\mathcal{F}_0 = (-h^2 \Delta + \lambda_1(x)) \oplus (-h^2 \Delta + \lambda_2(x))$.

Du fait que $\hat{\Pi}_\theta u_j^\theta = 0$ pour $j = 1, 2$, et que $X_\theta = \hat{\Pi}_\theta X_\theta \hat{\Pi}_\theta$, on a:

$$\langle P_\theta X_\theta P_\theta(\cdot u_j^\theta), u_k^\theta \rangle_Y = h^4 \langle [\Delta_x, \hat{\Pi}_\theta] X_\theta [\hat{\Pi}_\theta, \Delta_x](\cdot u_j^\theta), u_k^\theta \rangle_Y e^{-4\theta} \quad (3.1)$$

et il est facile de voir à l'aide du lemme 2.1 que $[\Delta_x, \hat{\Pi}_\theta]$ est borné de $H^m(\mathbb{R}^n, \mathcal{D}_Q)$ dans $H^{m-1}(\mathbb{R}^n, \mathcal{D}_Q)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$, et vérifie:

$$\|1_{|x| \geq R} [\Delta_x, \hat{\Pi}_\theta]\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m-1})} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty). \quad (3.2)$$

On a aussi le résultat suivant, qui nous resservira dans les autres sections:

LEMME 3.2. *Pour tout $m \in \mathbb{Z}$, l'opérateur $X_\theta(z)$ se prolonge en un opérateur borné sur $H^m(\mathbb{R}^n, L^2(\mathbb{R}^p))$, uniformément par rapport à $h > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $\theta \in \mathbb{C}$, tous trois assez petits.*

Preuve. On a déjà vu que le résultat est vrai pour $m = 0$ (cf. lemme 2.2). Soient u et v tels que $u = X_\theta v$. On a donc:

$$\begin{aligned} (P_\theta - z)u &= v + [P_\theta, \hat{\Pi}_\theta]u \\ \hat{\Pi}_\theta u &= u. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Par récurrence, supposons le résultat vrai pour $m \in \mathbb{N}$ fixé.

Pour $\alpha \in \mathbb{N}^n$, $|\alpha| = m + 1$, on obtient alors en dérivant (3.3):

$$(P_\theta - z) \partial^\alpha u + [\partial^\alpha, V]u = \partial^\alpha v + h^2 e^{-2\theta} \partial^\alpha [P_\theta, \Delta_x]u$$

$$\partial^\alpha u = \sum_{\beta \leq \alpha} \Pi_{\alpha, \beta}^\theta \partial^\beta u$$

où les $\Pi_{\alpha, \beta}^\theta$ sont des opérateurs bornés sur H^s pour tout s , et $\Pi_{\alpha, \alpha}^\theta = \hat{\Pi}_\theta$. Du fait que $\Pi_\theta \hat{\Pi}_\theta = 0$ et $[Q(xe^\theta), \Pi_\theta] = 0$, on en déduit:

$$\hat{\Pi}_\theta (P_\theta - z) \hat{\Pi}_\theta \partial^\alpha u = \hat{\Pi}_\theta \partial^\alpha v - \hat{\Pi}_\theta [\partial^\alpha, V]u$$

$$+ h^2 e^{-2\theta} \hat{\Pi}_\theta (\Delta_x \Pi_\theta \partial^\alpha u + \partial^\alpha [P_\theta, \Delta_x]u)$$

$$\Pi_\theta \partial^\alpha u = \sum_{\beta < \alpha} \Pi_\theta \Pi_{\alpha, \beta}^\theta \partial^\beta u. \quad (3.4)$$

D'autre part, on a $\hat{\Pi}_\theta \Delta_x \Pi_\theta = \hat{\Pi}_\theta [\Delta_x, \Pi_\theta]$, d'où:

$$\|\hat{\Pi}_\theta \partial^\alpha u\|_{L^2} \leq C \|\partial^\alpha v\|_{L^2} + C \|u\|_{H^m} + Ch^2 \| \Pi_\theta u \|_{H^{m+2}} + Ch^2 \|u\|_{H^{m+1}}$$

$$\|\Pi_\theta \partial^\alpha u\|_{H^s} \leq C \|u\|_{H^{s+m}} \quad (\forall s \in \mathbb{R}),$$

et par suite, pour h assez petit:

$$\|u\|_{H^{m+1}} \leq C \|v\|_{H^{m+1}} + C \|u\|_{H^m}.$$

Le résultat s'en déduit en appliquant l'hypothèse de récurrence. La propriété pour $m < 0$ s'obtient par dualité, en remarquant que $X_\theta(z)^* = X_\theta(\bar{z})$. ■

On déduit facilement du lemme 3.2 que $X_\theta(z)$ est $\mathcal{O}(h^{-2})$ de H^m dans H^{m+2} (à l'aide d'une estimation standard de $\langle (P_\theta + C)u, u \rangle$, $C > 0$ assez grande) et donc, en utilisant (3.1):

$$R^\theta(z, h) \text{ est } \mathcal{O}(h^2) \text{ de } H^m(\mathbb{R}^n) \oplus H^m(\mathbb{R}^n)$$

$$\text{dans } H^{m-1}(\mathbb{R}^n) \oplus H^{m-1}(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } m \in \mathbb{Z}. \quad (3.5)$$

(Ici, on a utilisé le fait que $\langle \Delta_x(\cdot u_j^\theta), u_k^\theta \rangle_Y = \langle \Delta_x u_j^\theta, u_k^\theta \rangle_Y + \langle \nabla_x u_j^\theta, u_k^\theta \rangle_{\nabla_x}$.)

D'après (3.2) et le lemme 2.1, on a aussi:

$$\|1_{|x| \geq R} R^\theta(z, h)\|_{\mathcal{L}(H^m \oplus H^m, H^{m-1} \oplus H^{m-1})} \rightarrow 0 \quad (R \rightarrow +\infty) \quad (3.6)$$

(à $h > 0$ fixé, et uniformément par rapport à θ et z assez petits).

Si l'on note $P_2^\theta = -h^2 e^{-2\theta} \Delta_x + \lambda_2^\theta(x)$, il est standard de montrer que le spectre de P_2^θ dans $]-\varepsilon, \varepsilon[+ i]-\varepsilon, \varepsilon[$ est discret, indépendant de θ , et inclus dans $[0, \varepsilon[$.

D'autre part, l'hypothèse (H4) entraîne:

$$\operatorname{Im} e^{2\theta} \lambda_1(xe^\theta) \leq -\frac{\operatorname{Im} \theta}{C_1}$$

pour $\theta \in]-a, a[+ i]0, a[$ (avec $C_1 > 0$), et donc

$$\|(-h^2 e^{-2\theta} \Delta + \lambda_1^\theta - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2(\mathbb{R}^n))} \leq \frac{C_2}{\operatorname{Im} \theta} \quad (3.7)$$

uniformément pour $h > 0$, $z \in \mathbb{C}$, $\theta \in]-a, a[+ i]0, a[$, tous trois assez petits.

On en déduit que $(\mathcal{F}_0^\theta - z)^{-1}$ est borné sur $L^2 \oplus L^2$ pour z assez petit en dehors du spectre de P_2^θ , donc aussi de $L^2 \oplus L^2$ dans $H^2 \oplus H^2$ (avec une borne qui, bien entendu, dépend de h).

Soit $W \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ tel que $\operatorname{Re}(W + \lambda_2^\theta) > 0$. L'opérateur $\mathcal{F}_0^\theta = \mathcal{F}_0^\theta + W$ admet alors une résolvante $(\mathcal{F}_0^\theta - z)^{-1}$ bornée de $L^2 \oplus L^2$ dans $H^2 \oplus H^2$ pour tout z complexe assez petit. D'après (3.6), ceci implique:

$$K^\theta(z, h) \stackrel{\text{def}}{=} (R^\theta(z, h) - W(x))(\mathcal{F}_0^\theta - z)^{-1} \text{ est compact sur } L^2 \oplus L^2, \quad (3.8)$$

pour $\theta \in]-a, a[+ i]0, a[$, z assez petit, ou bien $\operatorname{Im} z > 0$.

D'autre part, $K^\theta(z, h)$ dépend analytiquement de z , et $\|K^\theta(e^{-2\theta} z, h)\| \rightarrow 0$ lorsque $z \rightarrow -\infty$ ($z \in \mathbb{R}$). Par la théorie de Fredholm, on en déduit que $(1 + K^\theta(z, h))^{-1}$ est une famille méromorphe en z pour z dans un voisinage complexe de 0. Il en est donc de même pour

$$(F_z^\theta - z)^{-1} = (\mathcal{F}_0^\theta - z)^{-1} (1 + K^\theta(z, h))^{-1}. \quad (3.9)$$

Si l'on note:

$$A_+^\theta(z) = ([1 - X_\theta(z)P_\theta](\cdot u_1^\theta), [1 - X_\theta(z)P_\theta](\cdot u_2^\theta)) \text{ (matrice } 1 \times 2)$$

—qui est un opérateur de $L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n+p})$ —ainsi que

$$A_-^\theta(z) = A_+^\theta(\bar{z})^*$$

on a alors par construction (cf. §2):

$$(P_\theta - z)^{-1} = X_\theta(z) + A_+^\theta(z)(F_z^\theta - z)^{-1} A_-^\theta(z) \quad (3.10)$$

et $X_\theta(z)$, $A_\pm^\theta(z)$ sont analytiques en z près de 0. On peut donc déduire de (3.9) que le spectre de P_θ est discret près de 0.

Maintenant, si u et v sont des fonctions entières dans \mathbb{C}^{n+p} avec $U_\theta u$ et $U_\theta v$ dans $L^2(\mathbb{R}^{n+p})$ pour tout θ assez petit, on a, pour $\text{Im } z > 0$:

$$\langle (P-z)^{-1} u, v \rangle_{L^2} = \langle (P_\theta - z)^{-1} U_\theta u, U_\theta v \rangle_{L^2}. \quad (3.11)$$

On en déduit d'après (3.10) que $\langle (P-z)^{-1} u, v \rangle_{L^2}$ se prolonge en une fonction méromorphe en z près de 0. Comme de plus l'espace de telles fonctions u et v est dense dans L^2 , on voit que:

$$\begin{aligned} & \bigcup_{u,v} (\text{Pôles } \langle (P-z)^{-1} u, v \rangle_{L^2}) \cap (]-\varepsilon, \varepsilon[+ i] - \varepsilon, \varepsilon]) \\ &= \text{Sp } P_\theta \cap (]-\varepsilon, \varepsilon[+ i] - \varepsilon, \varepsilon[) \end{aligned}$$

pour $\varepsilon > 0$ assez petit. En particulier, par unicité du prolongement méromorphe, cet ensemble est indépendant de θ assez voisin d'un $\theta_0 \in]-a, a[+ i]0, a[$ fixé, et on a:

$$\text{Sp } P_\theta \subset \{\text{Im } z \leq 0\}. \quad \blacksquare$$

4. CONSTRUCTIONS BKW

On rappelle ici brièvement les constructions BKW formelles faites dans [Ma1], §3 et 4. L'opérateur matriciel

$$A_E = \begin{pmatrix} P-E & u_2 \\ \langle \cdot, u_2 \rangle_Y & 0 \end{pmatrix}$$

(où u_2 désigne la deuxième fonction propre normalisée de $Q(x)$ et $\langle \cdot, \cdot \rangle_Y$ le produit scalaire dans $L^2(\mathbb{R}_y^p)$) peut être considéré comme un opérateur pseudo-différentiel de symbole

$$a_E(x, \xi) = \begin{pmatrix} \xi^2 + Q(x) - E & u_2 \\ \langle \cdot, u_2 \rangle_Y & 0 \end{pmatrix}$$

et agissant sur l'espace des séries formelles du type

$$e^{-\psi(x)/h} \sum_{j \geq 0} h^{-m+i/2} s_j$$

où $s_j \in C^\infty(\Omega; \mathcal{D}_Q \oplus \mathbb{C})$, Ω étant un voisinage assez petit de 0 dans \mathbb{R}^n , et $\psi(x)$ est la distance d'Agmon de x à 0 associée à la métrique dégénérée $\lambda_2(x) dx^2$. (On a alors $\psi \in C^\infty(\Omega)$: cf. [He-Sj1]).

Cette action formelle se définit comme dans [Ma1] formule (3.2), à l'aide des valeurs de $a_E(x, \xi)$ près de $\{(x, i \nabla \psi(x)), x \in \Omega\}$.

On a ici:

$$a_E(x, i\nabla\psi(x)) = \begin{pmatrix} Q(x) - \lambda_2(x) - E & u_2 \\ \langle \cdot, u_2 \rangle_Y & 0 \end{pmatrix}$$

et il est facile de vérifier que pour $E > 0$ assez petit, cet opérateur est inversible de $\mathcal{D}_Q \oplus \mathbb{C}$ dans $L^2(\mathbb{R}^p) \oplus \mathbb{C}$. Ceci permet d'inverser formellement A_E , et on obtient:

$$A_E^{-1} = \begin{pmatrix} G_E & G_E^+ \\ G_E^- & G_E^{-+} \end{pmatrix}$$

où G_E^{-+} a pour symbole principal $E - \xi^2 - \lambda_2(x)$.

Les constructions faites dans [He-Sj1] permettent alors comme dans [Ma1] §4 de trouver pour tout $j \in \{1, \dots, N_0\}$ des séries formelles $E_j(h) = e_j h + \sum_{k \geq 1} \alpha_{j,k} h^{1+k/2}$ ($\alpha_{j,k} \in \mathbb{R}$) et $b_j(x, h) = h^{-m_j} \sum_{k \geq 0} b_{j,k}(x) h^{k/2}$ ($b_{j,k} \in C^\infty(\Omega)$) telles que $G_{E_j(h)}^{-+}(e^{-\psi/h} b_j) = 0$. Revenant ensuite à l'opérateur P par l'intermédiaire de $A_{E_j}(h)$, on en déduit l'existence de séries formelles:

$$a_j(x, y, h) = h^{-m_j} \sum_{k \geq 0} a_{j,k}(x, y) h^{k/2} \quad (4.1)$$

avec $a_{j,k} \in C^\infty(\Omega; \mathcal{D}_Q)$, telles que l'on ait formellement:

$$P(e^{-\psi(x)/h} a_j(x, y, h)) = E_j(h) e^{-\psi(x)/h} a_j(x, y, h). \quad (4.2)$$

De plus, du fait de (H1), il est facile de vérifier que les a_j ainsi construits de prolongent holomorphiquement en x dans un voisinage complexe de 0. D'autre part, les réels m_j sont choisis de telle sorte que l'on ait formellement:

$$\|e^{-\psi/h} a_j\|_{L^2(\Omega \times \mathbb{R}^p)} = 1. \quad (4.3)$$

On a donc ainsi construit N_0 valeurs propres formelles de P_θ . Le but des sections suivantes est de montrer qu'en fait ces valeurs approximativement les vraies valeurs propres de P_θ (c'est-à-dire les résonances de P) qui sont assez proches du niveau 0.

5. RÉDUCTION DE L'OPÉRATEUR DE FESHBACH

Par construction (cf. (3.10) et le lemme 3.2), on a:

$$E \in \text{Sp } P_\theta \Leftrightarrow E \in \text{Sp } F_E^\theta. \quad (5.1)$$

(Il s'agit en fait là d'une généralisation du théorème 9 de [CDS].)

Si l'on note $G_\theta^1(E) = \langle G_\theta(\cdot u_1^\theta), u_1^{\bar{\theta}} \rangle_Y$ (où G_θ est défini à la fin du §2), on a alors:

PROPOSITION 5.1. *Pour $E \in \mathbb{C}$, $|E|$ assez petit, et $\theta \in]-a, a[+ i]0, a[$, l'opérateur $G_\theta^1(E) - E$ est bijectif de $H^2(\mathbb{R}^n)$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, son inverse se prolonge de $H^m(\mathbb{R}^n)$ dans $H^{m+j}(\mathbb{R}^n)$ pour tout $m \in \mathbb{Z}$ et $j \in \{0, 1, 2\}$, et vérifie pour $h > 0$ assez petit:*

$$\|(G_\theta^1(E) - E)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m+j})} \leq \frac{C(m)}{h^j \operatorname{Im} \theta}$$

où $C(m) > 0$ est indépendant de E , θ , et h .

Preuve. Si l'on pose:

$$Y_\theta(E) = \langle \Delta_x X_\theta(E) \Delta_x(\cdot u_1^\theta), u_1^{\bar{\theta}} \rangle_Y$$

on a alors:

$$G_\theta^1(E) = -h^2 e^{-2\theta} \Delta_x + \lambda_1^\theta(x) - h^2 e^{-2\theta} \langle \Delta_x u_1^\theta, u_1^{\bar{\theta}} \rangle_Y - h^4 e^{-4\theta} Y_\theta(E) \quad (5.2)$$

où l'on a utilisé le fait que $\langle \partial_{x_j} u_1^\theta, u_1^{\bar{\theta}} \rangle_Y = 0$ pour tout j , ce qui résulte de ce que $\langle u_1^\theta, u_1^{\bar{\theta}} \rangle = 1$ (cf. §2).

De même que pour (3.7), on voit aussi que l'hypothèse (H4) entraîne, pour h assez petit:

$$\|(\tilde{P}_1^\theta - E)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{\operatorname{Im} \theta}\right)$$

où l'on a posé $\tilde{P}_1^\theta = -h^2 e^{-2\theta} \Delta + \lambda_1^\theta - h^2 \langle \Delta_x u_1^\theta, u_1^{\bar{\theta}} \rangle_Y$.

On en déduit de manière standard:

$$\|(\tilde{P}_1^\theta - E)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m+j})} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{h^j \operatorname{Im} \theta}\right) \quad (5.3)$$

pour tout $m \in \mathbb{Z}$, et $j \in \{0, 1, 2\}$.

D'après (3.1) et le lemme 3.2, on voit aussi que $Y_\theta(E)$ est $\mathcal{O}(h^{-2})$ de H^m dans H^m , et donc que $h^4(\tilde{P}_1^\theta - E)^{-1} Y_\theta(E)$ est $\mathcal{O}(h^2)$ de H^m dans H^m , ce qui permet d'écrire:

$$(G_\theta^1(E) - E)^{-1} = [1 - h^4(\tilde{P}_1^\theta - E)^{-1} Y_\theta(E)]^{-1} (\tilde{P}_1^\theta - E)^{-1} \quad (5.4)$$

pour h assez petit. La proposition s'en déduit à l'aide de (5.3). ■

Considérons maintenant une solution $\alpha_1 \oplus \alpha_2 \in L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$ de l'équation:

$$F_E^\theta(\alpha_1 \oplus \alpha_2) = E(\alpha_1 \oplus \alpha_2). \quad (5.5)$$

En utilisant la forme explicite de F_E^θ et la proposition 5.1, on voit que (5.5) équivaut à:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -(G_\theta^1(E) - E)^{-1} (\langle G_\theta(E) \alpha_2 u_2^\theta, u_1^\theta \rangle_Y) \stackrel{\text{def}}{=} Z_\theta(E) \alpha_2 \\ H_E^\theta \alpha_2 &= E \alpha_2 \end{aligned} \quad (5.6)$$

où l'on a posé:

$$H_E^\theta \alpha_2 = \langle G_\theta(E) \alpha_2 u_2^\theta, u_2^\theta \rangle_Y + \langle G_\theta(E) [(Z_\theta(E) \alpha_2) u_1^\theta], u_2^\theta \rangle_Y \quad (5.7)$$

L'étude de F_E^θ sur $L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\mathbb{R}^n)$ se ramène ainsi à celle de H_E^θ sur $L^2(\mathbb{R}^n)$.

On termine cette section en établissant:

PROPOSITION 5.2. *Pour $\theta \in]-a, a[+ i]0, a[$ fixé, on a:*

$$H_E^\theta = -h^2 e^{-2\theta} \Delta_x + \lambda_2^\theta(x) + R_1^\theta(E, h)$$

où, pour tout $m \in \mathbb{Z}$, $\|R_1^\theta(E, h)\|_{\mathcal{L}(H^m(\mathbb{R}^n), H^m(\mathbb{R}^n))} = \mathcal{O}(h^2)$ uniformément pour $h > 0$ assez petit, $E \in \mathbb{C}$, $|E|$ assez petit.

Preuve. Remarquons d'abord que l'on peut écrire:

$$\begin{aligned} \langle G_\theta \alpha_2 u_2^\theta, u_2^\theta \rangle_Y &= [-h^2 e^{-2\theta} \Delta + \lambda_2^\theta - h^2 \langle \Delta_x u_2^\theta, u_2^\theta \rangle_Y e^{-2\theta}] \alpha_2 \\ &\quad - h^4 e^{-4\theta} \langle \Delta_x X_\theta \Delta_x \alpha_2 u_2^\theta, u_2^\theta \rangle_Y \end{aligned}$$

si bien que l'on voit comme au §3 (cf. (3.1) et lemme 3.2) que cet opérateur vérifie les conclusions de la proposition.

D'après (5.7), il suffit donc maintenant d'étudier l'opérateur

$$\tilde{Z}_\theta = \langle G_\theta(Z_\theta(\cdot) u_1^\theta), u_2^\theta \rangle_Y. \quad (5.8)$$

Examinons tout d'abord l'opérateur

$$\begin{aligned} G_\theta^{1,2} &= \langle G_\theta(\cdot u_1^\theta), u_2^\theta \rangle_Y \\ &= -h^2 e^{-2\theta} \langle \Delta_x(\cdot u_1^\theta), u_2^\theta \rangle_Y - h^4 e^{-4\theta} \langle \Delta_x X_\theta \Delta_x(\cdot u_1^\theta), u_2^\theta \rangle_Y. \end{aligned}$$

Du fait que $\langle \Delta_x(\cdot u_1^\theta), u_2^\theta \rangle_Y = \langle \Delta_x u_1^\theta, u_2^\theta \rangle_Y + 2 \langle \nabla_x u_1^\theta, u_2^\theta \rangle_Y \nabla_x$, on voit comme précédemment que $G_\theta^{1,2}$ est $\mathcal{O}(h^2)$ de H^m dans H^{m-1} .

D'autre part, $Z_\theta = -(G_\theta^1(E) - E)^{-1} G_\theta^{2,1}$, où $G_\theta^{2,1}$ s'obtient à partir de $G_\theta^{1,2}$ en intervertissant les indices 1 et 2. D'après la proposition 5.1, on en déduit donc de même que Z_θ est $\mathcal{O}(1)$ de H^m dans H^{m+1} . Du fait que $\tilde{Z}_\theta = G_\theta^{1,2} Z_\theta$ (cf. (5.8)), ceci implique:

$$\|\tilde{Z}_\theta\|_{\mathcal{L}(H^m, H^m)} = \mathcal{O}(h^2). \quad \blacksquare$$

6. PROPRIÉTÉS DE H_E^θ

Le but de cette section est d'étudier modulo $\mathcal{O}(h^{3/2})$ le spectre de H_E^θ (à $|E|$ fixé assez petit), ainsi que la dépendance par rapport à E de H_E^θ .

Rappelons que le spectre de $P_2^\theta = -h^2 e^{-2\theta} \Delta_x + \lambda_2^\theta$ dans $]-\varepsilon, \varepsilon[+ i] - \varepsilon, \varepsilon[$ est discret, indépendant de θ , et inclus dans $[0, \varepsilon[$. D'après un résultat classique (cf. [Sim], [He-Sj1]), on a aussi (en considérant le cas $\theta = 0$ et en utilisant l'indépendance par rapport à θ):

$$\text{Sp } P_2^\theta \cap [0, C_0 h] = \{E_1(h), \dots, E_{N_0}(h)\} \quad (6.1)$$

avec, pour tout j :

$$E_j(h) \sim e_j h + \sum_{k \geq 1} \alpha_{j,k} h^{1+k/2}$$

où les e_j sont les valeurs propres de $-\Delta_x + \frac{1}{2} \langle \lambda_2'(0)x, x \rangle$ dans $[0, C_0]$.

Pour $j \in \{1, \dots, N_0\}$, notons Γ_j le cercle complexe de centre $e_j h$ et de rayon δh , où $\delta > 0$ est assez petit pour que les $e_k h$ vérifiant $e_k \neq e_j$ restent à l'extérieur de Γ_j .

En annexe, on montrera:

LEMME 6.1. $\|(P_2^\theta - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}(h^{-1})$ uniformément pour $z \in [-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, C_0 h]$ à l'extérieur de tous les Γ_j , $\text{Im } \theta \geq 0$, $|\theta|$ et h assez petits.

D'après la proposition 5.2, on peut écrire (pour $\theta \in]-a, a[+ i]0, a[$ fixé):

$$H_E^\theta - z = (P_2^\theta - z)[1 + (P_2^\theta - z)^{-1} R_1^\theta(E, h)],$$

et donc, pour $z \in [-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, C_0 h]$ à l'extérieur de tous les Γ_j :

$$H_E^\theta - z = (P_2^\theta - z)(1 + R_2^\theta(z, E, h)) \quad (6.2)$$

où

$$\|R_2^\theta(z, E, h)\|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}(h).$$

On en déduit que $\text{Sp } H_E^\theta \cap ([-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, C_0 h])$ est inclus dans l'union des intérieurs des Γ_j , et les projecteurs correspondants s'écrivent:

$$\Pi_j^\theta = \oint_{\Gamma_j} (z - H_E^\theta)^{-1} dz = \oint_{\Gamma_j} (1 + R_2^\theta(z))^{-1} (P_2^\theta - z)^{-1} dz$$

d'où

$$\Pi_j^\theta = \Pi_{j,0}^\theta + \mathcal{O}(h) \quad (6.3)$$

où $\Pi_{j,0}^\theta = \oint_{\Gamma_j} (P_2^\theta - z)^{-1} dz$ est le projecteur spectral associé à P_2^θ et Γ_j .

L'égalité (6.3) donne, pour h assez petit:

$$\text{rg } \Pi_j^\theta = \text{rg } \Pi_{j,0}^\theta. \quad (6.4)$$

D'autre part, si $\varphi_1, \dots, \varphi_{N_0}$ désignent les fonctions propres normalisées de P_2^θ associées à $E_1(h), \dots, E_{N_0}(h)$, et si φ_j^θ ($j = 1, \dots, N_0$) désignent leurs dilatés (qui sont aussi dans L^2), on aura en posant $\tilde{\varphi}_j^\theta = \varphi_j^\theta / \|\varphi_j^\theta\|_{L^2}$

$$\begin{cases} P_2^\theta \tilde{\varphi}_j^\theta = E_j(h) \tilde{\varphi}_j^\theta \\ \|\tilde{\varphi}_j^\theta\|_{L^2} = 1 \end{cases}$$

et donc, d'après la proposition 5.2 ($\theta \in]-a, a[+ i]0, a[$ fixé):

$$H_E^\theta \tilde{\varphi}_j^\theta = E_j(h) \tilde{\varphi}_j^\theta + \mathcal{O}(h^2). \quad (6.5)$$

Comme de plus (d'après (6.3)):

$$\Pi_j^\theta \tilde{\varphi}_k^\theta = \tilde{\varphi}_k^\theta + \mathcal{O}(h) \text{ pour } k \in J_j = \{k \mid e_k = e_j\},$$

les $\Pi_j^\theta \tilde{\varphi}_k^\theta$ ($k \in J_j$) forment une base de $\text{Im } \Pi_j^\theta$, et la matrice de $H_E^\theta|_{\text{Im } \Pi_j^\theta}$ dans cette base s'écrit d'après (6.5):

$$M_j = \text{diag}(E_k(h))_{k \in J_j} + \mathcal{O}(h^2)$$

et a fortiori:

$$M_j = \text{diag}(e_j h, \dots, e_j h) + \mathcal{O}(h^{3/2}). \quad (6.6)$$

La matrice M_j n'étant pas hermitienne, le principe du mini-max ne s'applique pas. On a néanmoins:

LEMME 6.2. $\text{Sp } M_j \subset \{e_j h\} + \mathcal{O}(h^{3/2})$.

Preuve. En posant $N_j = \# J_j$, on a pour $z \in \mathbb{C}$:

$$\det(M_j - z) = 0 \Rightarrow |z - e_j h|^{N_j} \leq C \max_{1 \leq k \leq N_j} h^{3k/2} |z - e_j h|^{N_j - k}$$

d'où l'on déduit immédiatement, du fait que le max est atteint pour un certain $k = k(z, h)$:

$$|z - e_j h| \leq Ch^{3/2}. \quad \blacksquare$$

Ce qui précède prouve donc le résultat suivant:

PROPOSITION 6.3. Pour $\theta \in]-a, a[+ i]0, a[$ fixé,

$$\text{Sp } H_E^\theta \cap ([-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, C_0 h]) = \{\lambda_1^\theta(E, h), \dots, \lambda_{N_0}^\theta(E, h)\}$$

avec, pour tout j :

$$\lambda_j^\theta(E, h) = e_j h + \mathcal{O}(h^{3/2})$$

uniformément pour $|E|$ et h assez petits.

Pour ce qui concerne la dépendance de H_E^θ par rapport à E , on va montrer maintenant:

PROPOSITION 6.4. $\theta \in]-a, a[+ i]0, a[$ étant fixé, on a:

(i) $H_E^\theta - H_{E'}^\theta = (E - E') S_\theta(E, E', h)$ avec

$$\|S_\theta(E, E', h)\|_{\mathcal{L}(H^m)} = \mathcal{O}(h^2) \text{ pour tout } m \in \mathbb{Z},$$

et uniformément pour $|E|$, $|E'|$, et h assez petits.

(ii) Pour $k \in \{0, 1, 2\}$, $j \in \{1, \dots, N_0\}$, et $m \in \mathbb{Z}$:

$$\|(H_E^\theta - z)^{-1} - (H_{E'}^\theta - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m+k})} = \mathcal{O}(h^{-k} |E - E'|)$$

uniformément pour $z \in \Gamma_j$ et $|E|$, $|E'|$, h assez petits.

Preuve. Avec les mêmes notations qu'aux paragraphes précédents, on voit tout d'abord que

$$X_\theta(E) - X_\theta(E') = (E - E') X_\theta(E) X_\theta(E'),$$

et donc, d'après le lemme 3.2:

$$\|X_\theta(E) - X_\theta(E')\|_{\mathcal{L}(H^m)} = \mathcal{O}(|E - E'|) \quad (6.7)$$

pour tout m , et uniformément par rapport à h .

On a de même, grâce à (5.3):

$$\|(\tilde{P}_1^\theta - E)^{-1} - (\tilde{P}_1^\theta - E')^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m+j})} = \mathcal{O}(h^{-j} |E - E'|), \quad (6.8)$$

pour $j \in \{0, 1, 2\}$, ainsi que (en utilisant (6.7) et (3.1)):

$$\|Y_\theta(E) - Y_\theta(E')\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m-2})} = \mathcal{O}(|E - E'|). \quad (6.9)$$

Ecrivant ensuite (en utilisant (5.4)):

$$\begin{aligned} & (G_\theta^1(E) - E)^{-1} - (G_\theta^1(E') - E')^{-1} \\ &= (1 - h^4(\tilde{P}_1^\theta - E)^{-1} Y_\theta(E))^{-1} [(\tilde{P}_1^\theta - E)^{-1} - (\tilde{P}_1^\theta - E')^{-1}] \\ & \quad + [(1 - h^4(\tilde{P}_1^\theta - E)^{-1} Y_\theta(E))^{-1} \\ & \quad - (1 - h^4(\tilde{P}_1^\theta - E')^{-1} Y_\theta(E'))^{-1}] \circ (\tilde{P}_1^\theta - E')^{-1}, \end{aligned}$$

on obtient:

$$\begin{aligned} & \| (G_\theta^1(E) - E)^{-1} - (G_\theta^1(E') - E')^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^m)} \\ &= \mathcal{O}(|E - E'| + \|h^4(\tilde{P}_1^\theta - E)^{-1} Y_\theta(E) - h^4(\tilde{P}_1^\theta - E')^{-1} Y_\theta(E')\|_{\mathcal{L}(H^m)}) \end{aligned}$$

et donc, à l'aide d'une manipulation du même type:

$$\| (G_\theta^1(E) - E)^{-1} - (G_\theta^1(E') - E')^{-1} \|_{\mathcal{L}(H^m)} = \mathcal{O}(|E - E'|). \quad (6.10)$$

Examinant ensuite les différents termes intervenant dans l'expression de $R_1^\theta(E, h)$ (cf. la preuve de la proposition 5.2), on déduit facilement de (6.10) que l'on a:

$$\| R_1^\theta(E, h) - R_1^\theta(E', h) \|_{\mathcal{L}(H^m)} = \mathcal{O}(h^2 |E - E'|) \quad (6.11)$$

ce qui démontre (i).

Pour le (ii), on écrit (cf. (6.2)):

$$(H_E^\theta - z)^{-1} = (1 + R_2^\theta(z, E, h))^{-1} (P_2^\theta - z)^{-1},$$

d'où, en omettant la dépendance de R_2^θ par rapport à z et h :

$$\begin{aligned} & (H_E^\theta - z)^{-1} - (H_{E'}^\theta - z)^{-1} \\ &= (1 + R_2^\theta(E))^{-1} (R_2^\theta(E') - R_2^\theta(E))(1 + R_2^\theta(E'))^{-1} (P_2^\theta - z)^{-1}. \end{aligned}$$

Du fait que $R_2^\theta = (P_2^\theta - z)^{-1} R_1^\theta$, le résultat s'en déduit en utilisant le lemme 6.1 et (6.11). ■

7. FIN DE LA DÉMONSTRATION DU THÉORÈME 1.1

Pour $j = 1, \dots, N_0$, et $\theta \in [-a, a] + i]0$, $a[$ fixé, notons $\hat{a}_j^\theta(x, y, h)$ une somme asymptotique de la série formelle $a_j(xe^\theta, y, h)$ construite au §4. Soit aussi $\chi \in C_0^\infty(\Omega)$, $\chi = 1$ près de 0, et posons:

$$v_j^\theta(x, y, h) = \chi(x) \hat{a}_j^\theta(x, y, h) e^{-\psi(xe^\theta)/h}.$$

Si $\mu_j = \mu_j(h)$ désigne une somme asymptotique de $E_j(h)$ (cf. §4), on a alors par construction:

$$(P_\theta - \mu_j)v_j^\theta = \mathcal{O}(h^\infty) \text{ dans } H^m(\mathbb{R}^n, L^2(\mathbb{R}^p)), \text{ pour tout } m \in \mathbb{N}. \quad (7.1)$$

Posant aussi, pour $k = 1$ ou 2 :

$$\beta_{j,k}^\theta = \langle v_j^\theta, u_k^\theta \rangle_Y,$$

on a $v_j^\theta = \beta_{j,2}^\theta u_2^\theta + \mathcal{O}(h^{1/2})$ et donc

$$\langle \beta_{j,2}^\theta, \beta_{k,2}^\theta \rangle = \delta_{j,k} + \mathcal{O}(h^{1/2}).$$

On déduit aussi de (7.1) (en remarquant à l'aide du lemme 3.2, que X_θ est $\mathcal{O}(h^{-2})$ de H^m dans H^{m+2}):

$$(F_{\mu_j}^\theta - \mu_j)(\beta_{j,1}^\theta \oplus \beta_{j,2}^\theta) = \mathcal{O}(h^\infty) \text{ dans } H^m(\mathbb{R}^n) \oplus H^m(\mathbb{R}^n) \text{ pour tout } m \in \mathbb{Z}.$$

Utilisant ensuite la proposition 5.1, on obtient alors:

$$r_j \stackrel{\text{def}}{=} (H_{\mu_j}^\theta - \mu_j)\beta_{j,2}^\theta = \mathcal{O}(h^\infty) \text{ dans } H^m(\mathbb{R}^n). \quad (7.2)$$

Maintenant, soit λ une valeur propre de P_θ dans $[-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]$, et w^θ une fonction propre normalisée associée. Posant:

$$\beta = \langle w^\theta, u_2^\theta \rangle_Y$$

on a alors:

$$(H_\lambda^\theta - \lambda)\beta = 0 \quad (7.3)$$

et, d'après la proposition 6.3, il existe $j \in \{1, \dots, N_0\}$ tel que

$$\lambda = e_j h + \mathcal{O}(h^{3/2}). \quad (7.4)$$

Il découle alors de la proposition 6.4, que pour $z \in \Gamma_j$, $p = 0, 1$, ou 2 , on a:

$$\|(H_\lambda^\theta - z)^{-1} - (H_{\mu_j}^\theta - z)^{-1}\|_{\mathcal{L}(H^m, H^{m+p})} = \mathcal{O}(h^{3/2-p}). \quad (7.5)$$

D'après (7.2), on a aussi:

$$\begin{aligned} \oint_{\Gamma_j} (z - H_{\mu_j}^\theta)^{-1} \beta_{j,2}^\theta dz &= \beta_{j,2}^\theta + \oint_{\Gamma_j} (z - \mu_j)^{-1} (z - H_{\mu_j}^\theta)^{-1} r_j dz \\ &= \beta_{j,2}^\theta + \mathcal{O}(h^\infty), \end{aligned}$$

où l'on s'est servi d'une majoration de $(H_E^\theta - z)^{-1}$ qui découle trivialement de (6.2) et du lemme 6.1. A l'aide de (7.5) et du fait que $\|\beta_{j,2}^\theta\|_{H^m} = \mathcal{O}(h^{-m})$ (cf. lemme 2.1 et §4), on en déduit pour tout $l \in J_j$:

$$\oint_{\Gamma_j} (z - H_\lambda^\theta)^{-1} \beta_{l,2}^\theta dz = \beta_{l,2}^\theta + r_l \quad (7.6)$$

avec $\|r_l\|_{H^m} = \mathcal{O}(h^{5/2-m})$, pour tout $m \geq 0$.

Posant $\Pi_\lambda = \oint_{\Gamma_j} (z - H_\lambda^\theta)^{-1} dz$, et se servant de la proposition 6.4(i), on déduit de (7.6) que:

$$H_\lambda^\theta \Pi_\lambda \beta_{l,2}^\theta = \mu_l \Pi_\lambda \beta_{l,2}^\theta + r'_l \quad (7.7)$$

avec $\|r'_l\|_{L^2} = \mathcal{O}(h^{5/2})$.

Par suite, (du fait que $\text{rg } \Pi_\lambda = N_j = \#J_j$ d'après (6.4)), $(\Pi_\lambda \beta_{l,2}^\theta)_{l \in J_j}$ est une base de $\text{Im } \Pi_\lambda$ et la matrice de H_λ^θ dans cette base s'écrit:

$$\mathcal{M}_\lambda = \text{diag}(\mu_l)_{l \in J_j} + \mathcal{O}(h^{5/2}).$$

On en déduit, en écrivant que $\det(\mathcal{M}_\lambda - \lambda) = 0$:

$$\prod_{l \in J_j} |\lambda - \mu_l| \leq C \max_{\substack{1 \leq k \leq N_j \\ A \subset J_j \\ \#A = N_j - k}} h^{5k/2} \prod_{l \in A} |\lambda - \mu_l|$$

avec $C > 0$. En particulier, $\exists k = k(h) \in \{1, \dots, N_j\}$ et $A = A(h) \subset J_j$, $\#A = N_j - k$ t.q.

$$\prod_{l \in J_j \setminus A} |\lambda - \mu_l| \leq Ch^{5k/2}$$

et donc, du fait que $\#(J_j \setminus A) = k$:

$$\min_{l \in J_j} |\lambda - \mu_l| \leq Ch^{5/2}.$$

Autrement dit, il existe $\mu_{l_1}(h) = e_j h + \alpha_{l_1,1} h^{3/2} + \mathcal{O}(h^2)$ tel que

$$\lambda = \mu_{l_1}(h) + \mathcal{O}(h^{5/2}). \quad (7.8)$$

Posant ensuite $A_1 = \{l \in J_j \mid \alpha_{l,1} = \alpha_{l_1,1}\}$, et $a_1 = \#A_1$, on obtient de même pour $l \in A_1$:

$$H_\lambda^\theta \Pi_\lambda \beta_{l,2}^\theta = \mu_l \beta_{l,2}^\theta + \mathcal{O}(h^3) \text{ dans } L^2(\mathbb{R}^n)$$

et donc, écrivant à nouveau que $\det(\mathcal{M}_\lambda - \lambda) = 0$ (et utilisant le fait que si $l \notin A_1$, alors $|\lambda - \mu_l| \sim h^{3/2}$):

$$\prod_{l \in A_1} |\lambda - \mu_l| h^{(3/2)(N_j - a_1)} \leq C \max_{\substack{1 \leq k \leq a_1 \\ B \subset A_1 \\ \#B = a_1 - k}} h^{3k} \prod_{l \in B} |\lambda - \mu_l| h^{(3/2)(N_j - a_1)}.$$

On en déduit comme précédemment qu'il existe $l_2 \in A_1$ tel que:

$$\lambda = \mu_{l_2}(h) + \mathcal{O}(h^3). \quad (7.9)$$

Considérant ensuite $A_2 = \{l \in A_1 \mid \alpha_{l,2} = \alpha_{l_2,2}\}$, puis itérant ce processus, on obtient finalement (du fait que les μ_l sont en nombre fini $\leq N_0$):

$$\exists l \in \{1, \dots, N_0\} \text{ tel que } \lambda = \mu_l(h) + \mathcal{O}(h^\infty). \quad (7.10)$$

Pour terminer la preuve du théorème 1.1, il ne reste plus qu'à montrer que P_θ admet exactement N_0 valeurs propres dans $[-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]$.

Notons $Z'_\theta(E)$ l'opérateur sur $L^2(\mathbb{R}^n)$ défini par:

$$Z'_\theta(E)\beta = -\langle G_\theta(E)[(G_\theta^1(E) - E)^{-1}\beta]u_1^0, u_2^0 \rangle_Y$$

(i.e., $Z'_\theta(E) = Z_\theta(\bar{E})^*$ avec les notations du §5).

Il est alors facile de voir, par un calcul analogue à celui du §5, que l'on a:

$$\begin{aligned} (F_E^\theta - E)^{-1} \\ = \begin{bmatrix} (G_\theta^1(E) - E)^{-1} + Z_\theta(E)(H_E^\theta - E)^{-1} Z'_\theta(E) & Z_\theta(E)(H_E^\theta - E)^{-1} \\ (H_E^\theta - E)^{-1} Z'_\theta(E) & (H_E^\theta - E)^{-1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (7.11)$$

D'après les résultats du §5, les opérateurs $Z_\theta(E)$, $Z'_\theta(E)$, et $(G_\theta^1(E) - E)^{-1}$ sont bornés uniformément par rapport à E et h assez petits, et dépendent analytiquement de E . En utilisant la formule (3.10), on en déduit que $(P_\theta - z)^{-1}$ s'écrit:

$$(P_\theta - z)^{-1} = \mathcal{A}(z) + \mathcal{B}_1(z)(H_z^\theta - z)^{-1} \mathcal{B}_2(z)$$

où $\mathcal{A}(z)$, $\mathcal{B}_1(z)$ et $\mathcal{B}_2(z)$ sont analytiques en z près de 0, et bornés uniformément par rapport à h . (Ici $\mathcal{B}_2(z)$ envoie $L^2(\mathbb{R}^{n+p})$ dans $L^2(\mathbb{R}^n)$, et $\mathcal{B}_1(z)$ va dans l'autre sens). On en déduit, pour $j = 1, \dots, N_0$:

$$\oint_{\Gamma_j} (P_\theta - z)^{-1} dz = \oint_{\Gamma_j} \mathcal{B}_1(z)(H_z^\theta - z)^{-1} \mathcal{B}_2(z) dz$$

et donc, d'après (6.2) et le lemme 6.1:

$$\oint_{\Gamma_j} (P_\theta - z)^{-1} dz = \mathcal{B}_1(e_j h) \left(\oint_{\Gamma_j} (P_2^\theta - z)^{-1} dz \right) \mathcal{B}_2(e_j h) + \mathcal{O}(h). \quad (7.12)$$

A fortiori, on aura pour h assez petit:

$$\text{rg} \oint_{\Gamma_j} (P_\theta - z)^{-1} dz \leq N_j.$$

Comme on sait aussi, d'après (7.10), que les éventuelles valeurs propres de P_θ dans $[-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]$ sont dans l'union des disques de bords Γ_j ($j = 1, \dots, N_0$), on en déduit:

$$\# \operatorname{Sp} P_\theta \cap ([-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, 0]) \leq N_0.$$

D'un autre côté, les constructions approchées du §4 (cf. aussi (7.1)) prouvent que le rang de $\oint_{\Gamma_j} (P_\theta - z)^{-1} dz$ est minoré par N_j , d'où le résultat. (On pourrait aussi obtenir une formule "inverse" de (7.12)). ■

Remarque 7.1. La démonstration ci-dessus ne prouve pas a priori que tous les développements asymptotiques $E_j(h)$ du §4 sont atteints par $\operatorname{Sp} P_\theta$. Néanmoins, cela est vrai pour la raison suivante:

Notons $\Gamma'_j(h)$ un cercle complexe de centre $\mu_j(h)$ et de rayon h^N ($N \geq 1$ arbitrairement grand).

D'après (7.2) et la proposition 6.4(i), on obtient:

$$\oint_{\Gamma'_j(h)} (z - H_z^\theta)^{-1} \gamma_j^\theta(z) dz = \beta_{j,2}^\theta + \oint_{\Gamma'_j(h)} (z - \mu_j)^{-1} (z - H_z^\theta)^{-1} r_j dz \quad (7.13)$$

où

$$\gamma_j^\theta(z) = \beta_{j,2}^\theta - (z - \mu_j)^{-1} (H_z^\theta - H_{\mu_j}^\theta) \beta_{j,2}^\theta = \beta_{j,2}^\theta + \mathcal{O}(h^2).$$

Du fait que $\gamma_j^\theta(z)$ est holomorphe en z (car méromorphe et bornée), il suffit de montrer que la fonction

$$r = \oint_{\Gamma'_j(h)} (z - \mu_j)^{-1} (z - H_z^\theta)^{-1} r_j dz = \oint_{\Gamma'_j(h)} r(z) dz \text{ est } \mathcal{O}(h^\infty)$$

(car d'après (7.13) il existera alors nécessairement un pôle de $z \mapsto (z - H_z^\theta)^{-1}$ entouré par $\Gamma'_j(h)$).

Posons comme avant:

$$\Pi_z = \oint_{\Gamma_j} (\lambda - H_z^\theta)^{-1} d\lambda.$$

On a alors:

$$\begin{aligned} & \oint_{\Gamma'_j(h)} \Pi_z r(z) dz \\ &= \oint_{z \in \Gamma'_j} \oint_{\lambda \in \Gamma_j} (z - \mu_j)^{-1} (\lambda - z)^{-1} [(z - H_z^\theta)^{-1} - (\lambda - H_z^\theta)^{-1}] r_j dz d\lambda \end{aligned}$$

et donc, du fait que Γ_j entoure Γ'_j (en intégrant d'abord en λ pour le premier terme, et d'abord en z pour le second):

$$\oint_{\Gamma'_j} \Pi_z r(z) dz = r - \oint_{\Gamma_j} (\lambda - \mu_j)^{-1} (\lambda - H_{\mu_j}^\theta)^{-1} d\lambda$$

où l'on s'est servi du fait que pour $\lambda \in \Gamma_j$, l'application $z \mapsto (\lambda - H_z^\theta)^{-1}$ est holomorphe près de 0 grâce à la proposition 6.3.

Utilisant l'estimation du lemme 6.1, on obtient donc:

$$r = \oint_{\Gamma'_j(h)} (z - \mu_j)^{-1} \Pi_z (z - H_z^\theta)^{-1} \Pi_z r_j dz + \mathcal{O}(h^\infty)$$

ce qui ramène le problème au cas de la dimension finie ($= N_j$) et l'on trouve:

$$\begin{aligned} \|\Pi_z (z - H_z^\theta)^{-1} \Pi_z\| &\leq (\text{dist}(z, \text{Sp } H_z^\theta))^{-N_j} \\ &\leq h^{-N \cdot N_j} \quad \text{pour } z \in \Gamma'_j(h), \end{aligned}$$

d'où $r = \mathcal{O}(h^\infty)$.

ANNEXE: DÉMONSTRATION DU LEMME 6.1

On applique ici une technique due à Briet, Combes, et Duclos [BCD]. Soient $J_i \in C_0^\infty(|x| \leq \delta)$ et $J_e \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ ($\delta > 0$ sera fixé assez petit plus bas) telles que $J_i = 1$ près de 0 et:

$$1 = J_i^2 + J_e^2.$$

J désignera l'opérateur d'identification:

$$\begin{aligned} J: L^2(\mathbb{R}^n) \oplus L^2(\text{Supp } J_e) &\rightarrow L^2(\mathbb{R}^n) \\ u \oplus v &\rightarrow J_i u + J_e v. \end{aligned}$$

On a alors $JJ^* = 1_{L^2(\mathbb{R}^n)}$.

On pose aussi:

$$H_\theta^i = -h^2 e^{-2\theta} \Delta + \frac{1}{2} \langle \lambda_2''(0) x, x \rangle e^{2\theta},$$

$$H_\theta = P_2^\theta = -h^2 e^{-2\theta} \Delta + \lambda_2(x e^\theta),$$

$$H_\theta^e = H_\theta|_{L^2(\text{Supp } J_e)} \text{ avec condition de Dirichlet sur } \partial \text{Supp } J_e.$$

Du fait que $\inf_{x \in \text{Supp } J_e} \text{Re } e^{2\theta} \lambda_2(x e^\theta) > 0$ si $|\theta|$ est assez petit, il est facile de voir que l'on a:

$$(A.1) \quad (H_\theta^e - z)^{-1} \text{ est borné uniformément pour } |z| \text{ et } h \text{ assez petits.}$$

D'autre part, si l'on pose $y = xh^{-1/2}$, H_θ^i s'écrit:

$$(A.2) \quad H_\theta^i = hH_\theta^0$$

avec

$$H_\theta^0 = -e^{-2\theta} \Delta_y + \frac{1}{2} e^{2\theta} \langle \lambda''(0) y, y \rangle.$$

Montrons d'abord:

LEMME A.1. *Pour tout $p \in [0, 2]$,*

$$\| |x|^p (H_\theta^i - z)^{-1} \|_{\mathcal{L}(L^2)} = \mathcal{O}(h^{p/2-1})$$

uniformément pour z à l'extérieur des Γ_j , $z \in [-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, C_0 h]$, $\text{Im } \theta \geq 0$, $|\theta|$ et h assez petits.

Preuve. Il suffit de le montrer pour $\theta = i\alpha$, $\alpha \geq 0$ assez petit. D'après (A.2), on a:

$$|x|^p (H_\theta^i - z)^{-1} = h^{p/2-1} |y|^p (H_\theta^0 - zh^{-1})^{-1},$$

et les valeurs propres de H_θ^0 dans $]-\infty, C_0] + i\mathbb{R}$ sont e_1, \dots, e_{N_0} . On en déduit que pour tout $C > 0$, $(H_\theta^0 - zh^{-1})^{-1}$ est borné sur L^2 uniformément pour z à l'extérieur des Γ_j , $z \in [-Ch, C_0 h] + i[-Ch, C_0 h]$; d'où le résultat pour $p = 0$ dans ce cas.

Si maintenant $z \in [-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, -Ch]$ alors:

$$e^{2\theta} (H_\theta^0 - zh^{-1}) = -\Delta + \frac{1}{2} e^{4\theta} \langle \lambda''(0) y, y \rangle - zh^{-1} e^{2\theta}$$

et donc, pour $u \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} \text{Im} \langle e^{2\theta} (H_\theta^0 - zh^{-1}) u, u \rangle_{L^2} &= \frac{1}{2} \sin 4\alpha \langle \lambda''(0) y, y \rangle u, u \rangle_{L^2} \\ &\quad - h^{-1} (\text{Re } z \cdot \sin 2\alpha + \text{Im } z \cdot \cos 2\alpha) \|u\|^2, \end{aligned}$$

d'où

$$|\langle e^{2\theta} (H_\theta^0 - zh^{-1}) u, u \rangle| \geq -h^{-1} (\text{Re } z \cdot \sin 2\alpha + \text{Im } z \cdot \cos 2\alpha) \|u\|^2.$$

En particulier, si l'on prend α assez petit et C assez grand pour que:

$$C \cos 2\alpha > C_0 \sin 2\alpha$$

on obtiendra le résultat voulu pour $p = 0$ dans ce cas.

Il reste à étudier la région $z \in [-\varepsilon, -Ch] + i[-Ch, C_0 h]$. On écrit ici:

$$\text{Re} \langle e^{2\theta} (H_\theta^0 - zh^{-1}) u, u \rangle_{L^2} \geq -h^{-1} (\text{Re } z \cdot \cos 2\alpha - \text{Im } z \cdot \sin 2\alpha) \|u\|^2.$$

L'estimation cherchée pour $p=0$ s'en déduit de même en prenant $C > C_0$ et α assez petit pour que $\cos 2\alpha > \sin 2\alpha$.

L'estimation pour $p \neq 0$ vient de ce que, si $u = (H_\theta^0 - zh^{-1})^{-1}v$, on a alors, pour z dans l'ensemble considéré:

$$\begin{aligned} & \| [-\Delta + \frac{1}{2} \cos 4\alpha \langle \lambda''(0) y, y \rangle + |\operatorname{Re}(ze^{2\theta})| \\ & \quad + i(\frac{1}{2} \sin 4\alpha \langle \lambda''(0) y, y \rangle + |\operatorname{Im}(ze^{2\theta})|)] u \|_{L^2} \leq C \|v\|. \end{aligned}$$

Du fait que les parties réelles et imaginaires de l'opérateur intervenant dans les normes sont toutes deux positives, et que la partie réelle est $\geq (1/C) |y|^2$, le résultat s'en déduit à l'aide d'estimations a priori standards. ■

Posons maintenant:

$$H_\theta^d = H_\theta^i \oplus H_\theta^e$$

et

$$\Pi = H_\theta J - J H_\theta^d.$$

Un calcul élémentaire montre qu'alors, pour z en dehors du spectre de H_θ et de celui de H_θ^d , on a:

$$(A.3) \quad (H_\theta - z)^{-1} (1 + \Pi(H_\theta^d - z)^{-1} J^*) = J(H_\theta^d - z)^{-1} J^*.$$

LEMME A.2. *Il existe $\mu < 1$ tel que:*

$$\|\Pi(H_\theta^d - z)^{-1} J^*\| \leq \mu$$

pour z à l'extérieur des Γ_j , $z \in [-\varepsilon, C_0 h] + i[-\varepsilon, C_0 h]$, $\operatorname{Im} \theta \geq 0$, $|\theta|$ et h assez petits.

Preuve. Si on pose $W = (\lambda_2(xe^\theta) - \frac{1}{2} \langle \lambda_2''(0)x, x \rangle e^{2\theta}) J_i$, on a:

$$\Pi(u \oplus v) = Wu - h^2 e^{-2\theta} ([\Delta, J_i]u + [\Delta, J_e]v)$$

et donc:

$$(A.4) \quad \begin{aligned} \Pi(H_\theta^d - z)^{-1} J^* &= \Pi[(H_\theta^i - z)^{-1} J_i \oplus (H_\theta^e - z)^{-1} J_e] \\ &= W(H_\theta^i - z)^{-1} J_i - h^2 e^{-2\theta} [\Delta, J_i](H_\theta^i - z)^{-1} J_i \\ &\quad - h^2 e^{-2\theta} [\Delta, J_e](H_\theta^e - z)^{-1} J_e. \end{aligned}$$

Comme $W = \mathcal{O}(|x|^3)$ près de 0, on aura en prenant $\delta > 0$ assez petit, du fait que $\operatorname{Supp} W \subset \operatorname{Supp} J_i$:

$$|W(x)| \leq \varepsilon |x|^2$$

(avec $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit), et donc, d'après le lemme A.1 appliqué avec $p = 2$:

$$(A.5) \quad \|W(H_\theta^i - z)^{-1}\| = \mathcal{O}(\varepsilon).$$

On applique ensuite le résultat suivant de Briet, Combes, Duclos (que l'on énonce ici un peut différemment):

LEMME III.1 DE [BCD]. *Soit:*

$$T = h^2 T_0 + T_1,$$

$$T_0 = - \sum_{k,l} \partial_k (a_{k,l} + ib_{k,l}) \partial_l$$

où $a_{k,l}$ et $b_{k,l}$ sont C^∞ réelles et bornées sur un ouvert Ω , $(a_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ est définie positive, $(b_{k,l})_{1 \leq k,l \leq n}$ est positive, et T_1 est un opérateur de multiplication tel que:

$$\exists \Omega_0 \subset \Omega \text{ et } a > 0 / \operatorname{Re} T_1 \geq a \text{ sur } \Omega_0.$$

On suppose aussi que T^{-1} existe sur $L^2(\Omega)$ et vérifie

$$\exists p \in [0, 1] \text{ et } C > 0 \text{ tels que } \|T^{-1}\| \leq Ch^{-p}.$$

Alors, $\forall g \in C_0^\infty(\Omega_0)$ on a:

$$\|gT^{-1}\| \leq C_1$$

$$\|\nabla_A(gT^{-1})\| \leq C_2 h^{-1}$$

où $|\nabla_A u|^2 = \sum_{k,l} a_{k,l} \partial_k u \partial_l \bar{u}$ et C_1, C_2 ne dépendent que de a, C et g .

(On renvoie à [BCD] pour la preuve de ce lemme).

Si on applique ceci avec $T_0 = -e^{-2\theta} \Delta$ et $T_1 = \frac{1}{2} \langle \lambda_2^2(0)x, x \rangle e^{2\theta} - z$, alors on peut prendre $\Omega_0 = \operatorname{Supp} \nabla J_i$ pour h assez petit, et, du fait que $[\Delta, J_i] = \nabla J_i \cdot \nabla + (\Delta J_i)$, on obtient (grâce aussi au lemme A.1):

$$(A.6) \quad \|[\Delta, J_i](H_\theta^i - z)^{-1} J_i\| = \mathcal{O}(h^{-1}).$$

On a vu d'autre part que $\operatorname{Re} e^{2\theta}(H_\theta^e - z) \geq a > 0$, si bien que l'on obtient de même:

$$(A.7) \quad \|[\Delta, J_e](H_\theta^e - z)^{-1} J_e\| = \mathcal{O}(h^{-1}).$$

En utilisant (A.5), (A.6) et (A.7), on voit sur l'égalité (A.4) que le lemme A.2 s'en déduit. ■

Revenant maintenant à (A.3), on obtient donc:

$$(H_\theta - z)^{-1} = J(H_\theta^d - z)^{-1} J^*(1 + \Pi(H_\theta^d - z)^{-1} J^*)$$

et par suite:

$$\|(H_\theta - z)^{-1}\| \leq C \|(H_\theta^d - z)^{-1}\|.$$

Le résultat cherché provient alors directement du lemme A.1 et de (A.1).

BIBLIOGRAPHIE

- [Ag-Co] J. AGUILAR AND J. M. COMBES, A class of analytic perturbations for one-body Schrödinger hamiltonians, *Comm. Math. Phys.* **22** (1971), 269-279.
- [Av-Se] P. AVENTINI AND R. SEILER, On the electronic spectrum of the diatomic molecular ion, *Comm. Math. Phys.* **41** (1975), 119-134.
- [B] A. BALAZARD-KONLEIN, in "Calcul fonctionnel pour des opérateurs h -admissibles à symbole opérateurs et applications," Thèse de 3ème cycle, Université de Nantes, 1985.
- [Ba-Co] E. BALSLEV AND J. M. COMBES, Spectral properties of many-body Schrödinger operators with dilation-analytic interactions, *Comm. Math. Phys.* **22** (1971), 280-294.
- [Bo-Op] M. BORN AND R. OPPENHEIMER, Zur Quantentheorie der Molekeln, *Ann. Physik* **84** (1927), 457.
- [BCD] P. BRIET, J.-M. COMBES, AND P. DUCLOS, On the location of resonances for Schrödinger operators in the semiclassical limit II, *Comm. Partial Differential Equations* **12(2)** (1987), 201-222.
- [Co1] J.-M. COMBES, On the Born-Oppenheimer approximation, in "Int. Symposium on Math. Prob. and Theor. Physics" (H. Araki, Ed.), pp. 467-461, Springer Pub., New York, 1975.
- [Co2] J.-M. COMBES, The Born-Oppenheimer approximation, in "The Schrödinger Equation" (W. Thirring and P. Urban, Eds.), pp. 139-159, Springer Pub., New York, 1977.
- [CDS] J.-M. COMBES, P. DUCLOS, AND R. SEILER, The Born-Oppenheimer approximation, in "Rigorous Atomic and Molecular Physics" (G. Velo and A. Wightman, Eds.), pp. 185-212, Plenum, New York, 1981.
- [Co-Se] J.-M. COMBES AND R. SEILER, Regularity and asymptotic properties of the discrete spectrum of electronic hamiltonians, *Int. J. Quantum Chem.* **XIV** (1978), 213-229.
- [Fe] H. FESHBACH, Unified theory of nuclear reactions I and II, *Ann. Physics* **5** (1958), 363; and **19** (1962), 287.
- [Ha1] G. A. HAGEDORN, High order corrections to the time-independant Born-Oppenheimer approximation I: Smooth potentials, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A* **47** (1987), 1-19.
- [Ha2] G. A. HAGEDORN, High order corrections to the time-independant Born-Oppenheimer approximation II: Diatomic Coulomb systems, *Comm. Math. Phys.* **116** (1988), 23-44.
- [He-Ma] B. HELFFER AND A. MARTINEZ, Comparaison entre les diverses notions de résonances, *Helv. Phys. Acta* **60** (1987), 992-1003.

- [He-Sj1] B. HELFFER AND J. SJÖSTRAND, Multiple wells in the semiclassical limit I, *Comm. Partial Differential Equations* **9**(4) (1984), 337–408.
- [He-Sj2] B. HELFFER AND J. SJÖSTRAND, Résonances en limite semi-classique, *Bull. Soc. Math. France* **114** (1986), Mémoire n° 24, 25.
- [K1] M. KLEIN, On the mathematical theory of predissociation, *Ann. Physics* **178**, N° 1 (1987), 48–73.
- [KMSW] M. KLEIN, A. MARTINEZ, R. SEILER, AND X. P. WANG, On the Born–Oppenheimer expansion for polyatomic molecules, preprint.
- [La-Li] L. LANDAU AND E. LIFCHITZ, *Mécanique quantique, théorie non relativiste*, Ed. Mir, Moscou, 1966.
- [Ma1] A. MARTINEZ, Développements asymptotiques et effet tunnel dans l’approximation de Born–Oppenheimer, *Ann. Inst. H. Poincaré Sect. A* **49**, n° 3 (1989), 239–257.
- [Ma2] A. MARTINEZ, Développements asymptotiques dans l’approximation de Born–Oppenheimer, *Journées EDP de St. Jean-de-Monts* (1988).
- [Ma3] A. MARTINEZ, Résonances dans l’approximation de Born–Oppenheimer II—Largeur des résonances, *Comm. Math. Phys.* **135** (1991), 517–530.
- [Re-Si] M. REED AND B. SIMON, “Methods of modern mathematical physics,” t. I à IV, Academic Press, New York, 1978.
- [Se] R. SEILER, Does the Born–Oppenheimer approximation work? *Helv. Phys. Acta* **46** (1973), 230–234.
- [Sim] B. SIMON, Semiclassical limit of low lying eigenvalues I—Non degenerate minima: Asymptotic expansions, *Ann. de L’IHP* **38**, n° 3 (1983), 295–307.