

## Le Moiré

JACQUES HARTHONG

*Département de Mathématique, Université de Strasbourg,  
Strasbourg 67084, France*

*Table des matières. Introduction. 1. La densité. 2. Les franges. 3. Les moirés locaux. 4. Les moirés de déformation. 5. Les mouvements des franges. 6. Le problème inverse du moiré. 7. Les moirés d'ordre supérieur. 8. Les moirés cellulaires. Bibliographie.*

### INTRODUCTION

Le moiré est un tissu à reflets ondulés et chatoyants que l'on obtient en superposant par leurs endroits deux pièces d'étoffe; ainsi superposées, on les fait défiler lentement, préalablement humectées et sous forte pression, entre deux cylindres bien lisses et chauffés. Les étoffes destinées au moirage sont en effet tissées à partir d'une chaîne constituée de gros fil; comme, lors de la superposition des deux pièces, les fils de la première ne viennent jamais se disposer de façon exactement parallèle aux fils de la seconde, mais les recouvrent seulement par-ci, par-là, en formant avec eux des angles extrêmement aigus, il apparaît aux points d'intersection de ces fils un glaçage dû à la compression à chaud, car c'est en ces points-là que la pression est la plus forte. Par contre, aucun glaçage ne se fait en un point situé en face de l'intervalle entre deux fils. La juxtaposition globale de ces innombrables petits points micassés crée l'effet de moiré.

Si nous observons un tissu moiré avec un compte-fil ou une très forte loupe, les motifs ondulés ne sont plus visibles: seules apparaissent des zones brillantes, micassées, sur le fil de chaîne, qui sont séparées par des zones sombres et mates. Ainsi, le long d'un fil de chaîne alternent les zones brillantes et les zones sombres, de manière discontinue; tout au plus pouvons-nous constater, en déplaçant la loupe, que les zones brillantes sont plus étroites en certaines régions et plus larges en d'autres. Les franges claires du moiré sont justement les régions où les zones microscopiques micassées sont les plus larges, tandis que les franges sombres sont les régions où les zones micassées sont les plus maigres. C'est donc exactement le même principe que pour la photogravure: une photographie imprimée est composée de millions de points noirs sur un fond blanc; à la loupe nous observerons que les points noirs sont plus gros dans les régions de gris foncé que dans les régions de gris clair.

Notons bien que ce qui permet à la structure microscopique de donner un effet macroscopique visible, c'est la quasipériodicité de la structure microscopique: si nous observons une photogravure au microscope, nous voyons des points noirs parfaitement identiques, alignés, et équidistants dans tout le champ vision. Si nous plaçons maintenant notre microscope ailleurs, nous observerons des points noirs également identiques, alignés, et équidistants; mais ils seront plus gros, ou plus petits que les premiers. Ainsi, pour observer une structure macroscopique, il faut une structure microscopique qui soit périodique dans toute région grande pour la structure microscopique, mais petite pour la structure macroscopique.

Un tel principe n'est pas nouveau; il est connu au moins depuis Démocrite. Depuis les développements modernes de la théorie atomique, nous pouvons dire que pratiquement toute la physique classique (non quantique) décrit des lois macroscopiques issues de ce principe. Par exemple, l'équation de continuité en électrodynamique est possible parce que les densités de charge et de courant sont des grandeurs constantes dans des régions grandes à l'échelle microscopique, mais petites à l'échelle macroscopique. Il en va de même pour la propagation de la chaleur dans un corps, l'hydrodynamique, la théorie du champ, etc.

Mais ce qui caractérise *l'effet de moiré* parmi toutes les réalisations de ce principe, c'est que la structure microscopique y est obtenue par la superposition de deux structures microscopiques neutres. Neutres, dans le sens suivant: aucune des deux structures microscopiques, prises séparément (ici, chacune des deux étoffes avant le moirage) ne donne lieu à une structure macroscopique; les deux étoffes sont unies. C'est pourquoi on appelle, par extension, "effet de moiré" une structure macroscopique obtenue par superposition de deux structures microscopiques neutres.

Le plus simple des effets de moiré est le vernier: supposons que l'on superpose deux réseaux de bandes parallèles, alternativement noires et transparentes, de largeurs microscopiques  $\epsilon$  et  $\eta$ , et supposons que  $(\epsilon - \eta)/\epsilon$  soit lui-même microscopique, de sorte que  $\epsilon^2/(\epsilon - \eta)$  soit une longueur macroscopique. Les bandes noires viendront alors recouvrir exactement les bandes claires en des endroits espacés de  $\epsilon^2/(\epsilon - \eta)$ , produisant ainsi des zones (franges) opaques, tandis que les bandes transparentes viendront coïncider avec les bandes transparentes à mi-chemin entre les franges opaques, donnant des franges claires. Le vernier est ainsi un moiré unidimensionnel. Notons la propriété de grossissement du vernier: une différence infime entre les pas des deux réseaux donne un effet macroscopique; on peut également se convaincre par une courte réflexion qu'un *déplacement* microscopique de l'un des réseaux par rapport à l'autre produira un déplacement macroscopique des franges. C'est cette dernière propriété du vernier qui est utilisée dans le pied à coulisse. Le phénomène

de battement, bien connu en acoustique, est aussi une illustration de l' "effet de vernier".

L'interférométrie repose sur le même principe: au lieu de superposer deux tissus, ou deux réseaux, elle consiste à superposer deux ondes; une modification infime de la phase de l'une des deux ondes produit une modification macroscopique des figures d'interférence. La fameuse expérience de Michelson et Morley, à l'origine de la Relativité Restreinte, a exploité cette propriété d'énorme grossissement que produit l'effet de moiré!

En 1874, Rayleigh [1] proposait une méthode reposant sur l'effet de moiré pour tester la qualité des réseaux de diffraction utilisés en optique: si on en superpose deux, en principe identiques, le moindre défaut dans la périodicité sera mis en évidence par les franges de moiré.

Le moiré est donc un phénomène bien connu des expérimentateurs; en cristallographie, on réalise des moirés en superposant deux lames très minces de cristaux: les franges renseignent sur l'alignement des cristaux, et surtout sur les dislocations de cet alignement [2]. Des ingénieurs l'utilisent pour mettre en évidence des déformations infinitésimales dues à une contrainte mécanique ou thermique (en aéronautique, notamment). Par exemple, Dantu, ingénieur en chef des Ponts et Chaussées, a mis au point des méthodes utilisant le moiré pour visualiser la dilatation sur une tôle (voir [3]). La technique est la suivante: un réseau fin constitué de bandes parallèles comme pour le vernier (voir plus haut) et imprimé sur film transparent, est photocopié directement sur la tôle, enduite préalablement d'une couche d'émulsion photographique. La tôle est ensuite chauffée et se dilate; en superposant à nouveau le réseau de référence au réseau que la dilatation a déformé, on fait apparaître des franges de moiré, qui renseignent sur la dilatation.

La leçon générale que nous pouvons tirer de ces exemples est donc l'effet de grossissement, de *microscope*, du moiré: les franges (et le déplacement d'icelles) sont un effet macroscopique d'une cause microscopique; de ce fait, elles sont utilisées depuis longtemps par les expérimentateurs pour mettre en évidence une déformation ou un mouvement microscopiques.

Il peut paraître curieux, à première vue, que les mathématiciens ne se soient pas intéressés au moiré. Pourtant, si on y réfléchit, on croit en deviner la raison. En effet, le physicien, ou plus généralement l'homme pratique, ressent très nettement l'opposition entre le microscopique et le macroscopique, car il se réfère à l'intuition sensible: est microscopique ce qui est trop petit ou trop fin pour être visible à l'oeil nu. La physique, pour l'essentiel, consiste à postuler théoriquement une structure microscopique, impossible à observer directement, mais qui explique, par l'intermédiaire des mathématiques, les structures macroscopiques appartenant à notre univers sensible. Les notions de microscopique et de macroscopique ne

sont donc que trop évidentes pour le physicien. Pour le mathématicien, par contre, ces notions ne s'imposent pas; si vous préférez, la nature n'est pas là pour les lui placer en toute occasion sous les yeux. Et de fait, le mathématicien classique, traditionnel, compte tenu de sa formation, est plutôt enclin à les trouver dépourvues de sens mathématique, justement parce qu'elles se réfèrent à l'intuition sensible! Quelle différence, en effet, y a-t-il entre  $10^{-1000}$ ,  $10^{-10}$ , 1,  $10^{10}$ ,  $10^{1000}$ ? Aucune considération purement mathématique ne permet de trouver une différence de *nature* entre ces nombres. Pour donner un sens mathématique aux notions de micro et macroscopique, il faudrait d'abord une définition absolue, universelle, du "petit", ou de l' "infiniment petit".

Dans les ouvrages écrits par des physiciens sur n'importe quel sujet, d'innombrables raisonnements mathématiques reposent sur cette dualité. (« Prenons une région grande par rapport à... , mais petite par rapport à... , etc. »), mais ces raisonnements paraissent si hasardeux aux mathématiciens professionnels et leur inspiraient une telle angoisse que pour l'exorciser, ils ont déployé des trésors d'ingéniosité, produisant ainsi une foule de concepts abstraits (et redoutables pour les physiciens) destinés à reconstruire des méthodes correctes à leurs yeux. Mais un mystère subsistait: comment tant de démonstrations "fausses" pouvaient-elles aboutir à des résultats justes? Expliquer cela par une sorte d'intuition du physicien, d'origine expérimentale n'est pas satisfaisant. Laurent Schwartz avait senti la vraie nature de ce mystère, car il écrivait « Comment expliquer le succès de ces méthodes? Quand une telle situation contradictoire se présente, il est bien rare qu'il n'en résulte pas une théorie mathématique nouvelle qui justifie, sous une forme modifiée, le langage des physiciens; il y a même là une source importante de progrès pour les mathématiques et la physique ».<sup>1</sup> Autrement dit, ces méthodes réussissent, parce que, en réalité, elles utilisent une théorie mathématique rigoureuse, mais sans qu'on le sache!

L'intuition de Schwartz se confirme ici encore, car la théorie mathématique parfaitement rigoureuse qui permet de produire des concepts tels que la structure microscopique ou la structure macroscopique, l'infiniment petit ou l'infiniment grand, et qui justifie, sous une forme modifiée, ce langage des physiciens, existe: c'est l'analyse non-standard, créée par Robinson, qui donne un sens universel à la notion d'infiniment petit (voir [4, 5, 9]).

Dès lors, une étude mathématique du moiré qui ne soit pas trop chargée d'artifices, devient possible. En superposant deux réseaux de pas infiniment petit, nous pouvons obtenir le moiré comme "l'ombre", c'est-à-dire la trace dans le modèle standard de la structure microscopique résultant de la superposition.

<sup>1</sup>Préface de la théorie des distributions.

## 1. LA DENSITÉ

Ce qui caractérise les réseaux utilisés en optique, c'est l'alternance de zones noires et de zones transparentes; il n'est toutefois pas nécessaire que la *densité ou transmittance* soit discontinue: on peut passer du noir au clair graduellement. Un réseau sera donc caractérisé par les données suivantes:

(a) Une famille de courbes très serrées, par exemple les courbes de niveau d'une fonction  $\varphi$ .

(b) Un paramètre  $a$  mesurant l'espacement des courbes; par exemple les courbes précédentes seront les lieux des points tels que  $\varphi$  soit multiple de  $a$ .

(c) Une fonction  $f$  qui caractérise la variation de densité entre les zones du réseau;  $f$  sera une fonction périodique standard, de période égale à 2, et la densité sur le réseau sera

$$\rho = f\left(\frac{\varphi}{a}\right).$$

Le réseau idéal ou réseau mathématique sera donc caractérisé par ces trois données; une fonction  $\varphi$  définie dans le plan, à valeurs numériques; un paramètre  $a$  infiniment petit; une fonction périodique standard  $f$ . Nous appellerons  $\varphi$  le *profil* du réseau,  $a$  le *pas* et  $f$  le *module*.

Voyons quelques exemples: pour un réseau de droites parallèles (à l'axe des  $y$  pour fixer les idées) dont les intervalles sont alternativement noirs et transparents, nous avons:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y) &= x, \\ f(t) &= 0 \quad \text{si } 0 \leq t < 1, \\ &= 1 \quad \text{si } 1 \leq t < 2. \end{aligned}$$

Un tel réseau s'appelle un réseau de Ronchi.

Pour un réseau de cercles concentriques équidistants:

$$\varphi(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

Rien n'empêche de considérer des réseaux où les bandes ne sont complètement noires (ou complètement transparentes) qu'en leur milieu, et où l'on ne passe du noir au transparent que progressivement. Dans ce cas, le module est une fonction continue, par exemple

$$f(t) = \sin^2 \frac{\pi t}{2}.$$

Nous voudrions alors examiner comment se répartit la densité lorsque nous superposons deux réseaux. En un point donné  $(x, y)$  la densité

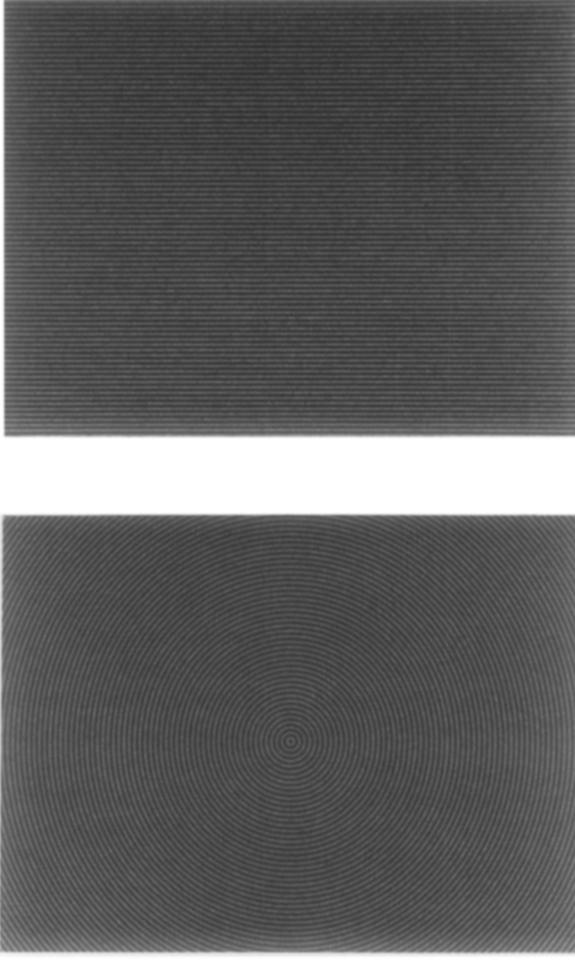


FIG. 1. En haut, un réseau de droites parallèles équidistantes (réseau de Ronchi) de profil  $\varphi(x,y) = y$ . En bas, un réseau de cercles concentriques équidistants, de profil  $\sqrt{x^2 + y^2}$ .

résultante est le produit des densités de chaque réseau; en effet, la densité ou transmittance peut être considérée comme le coefficient de transmission de la lumière à travers le voisinage immédiat de ce point. Si le réseau est parfaitement transparent en ce point, toute la lumière est transmise: la densité est 1; si le réseau est noir, rien n'est transmis: la densité est 0; si la moitié exactement est transmise, la densité est  $\frac{1}{2}$ . Donc, lorsqu'on superpose plusieurs réseaux, les densités se multiplient; notre loi de superposi-

tion est:

$$\rho(x, y) = \rho_1(x, y)\rho_2(x, y).$$

Mais attention! Seul l'effet macroscopique doit être pris en compte. Notre oeil ne peut voir que la partie standard des choses et ne distingue pas des points infiniment voisins<sup>2</sup>; or, la densité produit  $\rho$  présentera dans le halo même de chaque point d'innombrables fluctuations, passant de 0 à 1 sur des distances de l'ordre de  $a$ , comme le tissu moiré vu à la loupe. Notre oeil ne verra donc en un point que la *densité moyenne* du halo. La densité macroscopique résultante sera donc:

$$P(x_0, y_0) = \text{St} \left[ \frac{\iint_D \rho_1(x, y)\rho_2(x, y) dx dy}{\iint_D dx dy} \right]$$

où  $\text{St}[\ ]$  désigne la partie standard d'un nombre et  $D$  un domaine quelconque contenu dans le halo de  $(x_0, y_0)$ . Il faut bien sûr que cette partie standard ne dépende pas de  $D$ . Nous pouvons énoncer le résultat suivant:

**THÉORÈME 1.** *Soient deux réseaux, de profils  $\varphi$  et  $\psi$ , de modules  $f$  et  $g$  respectivement, et de même pas  $a$  infiniment petit. Supposons que  $\varphi$  et  $\psi$  soient continûment dérivables dans un domaine (standard)  $U$  de  ${}^*\mathbf{R}^2$ , que  $(\varphi - \psi)/a$ , ainsi que*

$$\frac{1}{a} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

*ne soient jamais ni infiniment petits, ni infiniment grands, et que leurs parties*

<sup>2</sup>Plusieurs points infiniment voisins sont donc confondus sur notre rétine, et n'en formeront qu'un seul: nous appellerons "partie standard" d'un point  $x$ , et noterons  $\text{St}[x]$  cette tache formée par  $x$  et ses infiniment voisins; ainsi, si  $x$  et  $y$  sont infiniment voisins,  $\text{St}[x] = \text{St}[y]$ . Nous appellerons *halo* d'un point  $x$  l'ensemble des points infiniment voisins de  $x$ . Le halo considéré comme classe d'équivalence s'identifie à la partie standard si  $x$  n'est pas infiniment grand.

standard restent constantes dans le halo de chaque point,<sup>3</sup> et que  $(x, y) \mapsto ((\varphi - \psi)/a, \psi)$  est un difféomorphisme (global, mais non nécessairement standard) sur  $U$ . Alors, la densité macroscopique résultante ne dépend que de  $\lambda = \text{St}(\frac{\varphi - \psi}{a})$  et vaut:

$$\frac{1}{2} \int_0^2 f(\alpha + \lambda)g(\alpha)d\alpha = f * g(\lambda)$$

pourvu que  $f * g$  soit une fonction continue.

*Démonstration.* Commençons par introduire les coordonnées  $\lambda = (\varphi - \psi)/a$  et  $\mu = \psi$ . Ce sont de vraies coordonnées indépendantes d'après notre hypothèse sur le jacobien et, toujours d'après nos hypothèses, elles sont macroscopiques, c'est-à-dire que leur variation est du même ordre de grandeur (infiniment petit, fini ou infiniment grand) que celle de  $x$  et  $y$ . En particulier, elles ne varient d'un infiniment petit que dans des domaines où  $x$  et  $y$  elles-mêmes ne varient que d'un infiniment petit. Par conséquent, il nous suffira de vérifier que

$$\text{St} \left[ \frac{\iint_D \rho_1 \rho_2 dx dy}{\iint_D dx dy} \right]$$

a la même valeur pour tous les domaines  $D$  de la forme

$$\{x, y | \lambda_0 < \lambda < \lambda_0 + \epsilon, \mu_0 < \mu < \mu_0 + \eta\}$$

où  $\epsilon$  et  $\eta$  sont des infiniment petits suffisamment grands, et de calculer cette valeur en fonction de  $\lambda_0$  et  $\mu_0$ . Le jacobien de la transformation  $(x, y) \mapsto (\lambda, \mu)$  est

$$J(\lambda, \mu) = \frac{a}{\begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}} \simeq J(\lambda_0, \mu_0) = J_0.$$

<sup>3</sup>Cette dernière propriété porte un nom: nous dirons que

$$(x, y) \mapsto \frac{1}{a} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

est macroscopiquement continue. ("S-continuous" chez Robinson.) Notons bien que cette fonction n'a aucune raison d'être standard.

Donc

$$\begin{aligned} \iint_D \rho_1(x, y) \rho_2(x, y) dx dy &= \iint_D f\left(\frac{\varphi}{a}\right) g\left(\frac{\psi}{a}\right) dx dy \\ &= \iint_D f\left(\frac{\mu}{a} + \lambda\right) g\left(\frac{\mu}{a}\right) J(\lambda, \mu) d\lambda d\mu \end{aligned}$$

et

$$\iint_D dx dy = \iint_D J(\lambda, \mu) d\lambda d\mu$$

d'où le rapport

$$\frac{\iint_D \rho_1 \rho_2 dx dy}{\iint_D dx dy} = \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \epsilon} \int_{\mu_0}^{\mu_0 + \eta} f(\mu/a + \lambda) g(\mu/a) J(\lambda, \mu) d\lambda d\mu}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \epsilon} \int_{\mu_0}^{\mu_0 + \eta} J(\lambda, \mu) d\lambda d\mu}.$$

Faisons encore le changement de variable  $\alpha = \mu/a$ ; alors

$$\int_{\mu_0}^{\mu_0 + \eta} f\left(\frac{\mu}{a} + \lambda\right) g\left(\frac{\mu}{a}\right) J(\lambda, \mu) d\mu = a \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + \eta/a} f(\alpha + \lambda) g(\alpha) J(\lambda, \mu) d\alpha,$$

$$\int_{\mu_0}^{\mu_0 + \eta} J(\lambda, \mu) d\mu = a \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + \eta/a} J(\lambda, \mu) d\alpha.$$

Lorsque  $\eta/a$  est infiniment grand,  $(a/\eta) \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + \eta/a} f(\alpha + \lambda) g(\alpha) dx$  est la moyenne sur un très grand nombre de périodes, de la fonction périodique  $\alpha \mapsto f(\alpha + \lambda) g(\alpha)$ , et est donc infiniment voisine de

$$\frac{1}{2} \int_0^2 f(\alpha + \lambda) g(\alpha) d\alpha.$$

Nous pouvons donc écrire pour  $\eta/a$  infiniment grand (mais bien entendu tel que  $\eta$  et  $a$  sont tous deux infiniment petits):

$$\frac{a}{\eta} \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + \eta/a} f(\alpha + \lambda) g(\alpha) J(\lambda, a\alpha) d\alpha \simeq \frac{1}{2} J_0 \int_0^2 f(\alpha + \lambda) g(\alpha) d\alpha$$

et de même

$$\frac{a}{\eta} \int_{\alpha_0}^{\alpha_0 + \eta/a} J(\lambda, a\alpha) d\alpha \simeq J_0$$

d'où nous déduisons:

$$\frac{\iint_D \rho_1 \rho_2 dx dy}{\iint_D dx dy} \simeq \frac{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \epsilon} \left[ \frac{1}{2} \int_0^2 f(\alpha + \lambda) g(\alpha) d\alpha \right] d\lambda}{\int_{\lambda_0}^{\lambda_0 + \epsilon} d\lambda}.$$

Pour  $\epsilon$  infiniment petit, ce rapport est lui-même  $\simeq \frac{1}{2} \int_0^2 f(\alpha + \lambda_0) g(\alpha) d\alpha$ . En effet, d'après nos hypothèses,<sup>4</sup> la convolution  $\frac{1}{2} \int_0^2 f(\alpha + \lambda) g(\alpha) d\alpha$  est une fonction continue de  $\lambda$ .

On remarquera pour finir que nous avons dû supposer  $\eta/a$  infiniment grand: cela veut dire que la partie standard de notre moyenne sur  $D$  n'est pas la même pour des domaines  $D$  trop petits, mais seulement pour des domaines  $D$  qui, bien que contenus dans le halo de  $x_0, y_0$ , sont infiniment grands par rapport au pas  $a$  du réseau. La densité macroscopique est ainsi parfaitement définie; et même, on pourrait définir une densité à n'importe quel ordre plus grand que celui de  $a$ , ce qui nous servira au chapitre 7.

Le théorème précédent est le théorème général qui constitue le fondement de notre théorie élémentaire du moiré. Il est énoncé d'emblée pour deux dimensions. Son analogue en dimension supérieure serait facile à établir. Il est possible de l'appliquer aussi en dimension un en considérant simplement des profils qui ne dépendent pas de la coordonnée  $y$ . Mais alors, l'hypothèse sur le jacobien ne peut plus tenir sous la même forme et doit être modifiée comme suit: on supposera que  $(1/a)[d\varphi/dx - d\psi/dx]$  n'est jamais ni infiniment petit, ni infiniment grand.

## 2. LES FRANGES

L'effet macroscopique de la superposition de deux réseaux, c'est-à-dire l'effet de moiré, est entièrement décrit par la densité macroscopique. Or, le théorème 1 nous montre que celle-ci reste constante le long des courbes  $\lambda = C^e$ , donc en particulier ses valeurs maxima, comme ses valeurs minima, se répartissent le long des courbes  $\lambda = \lambda_{\max}$  et  $\lambda = \lambda_{\min}$ . Au voisinage des courbes  $\lambda = \lambda_{\max}$ , le moiré sera relativement transparent, tandis qu'au voisinage des courbes  $\lambda = \lambda_{\min}$ , il sera plutôt opaque. Autrement dit, le moiré présentera des franges alternativement sombres et claires, parallèles aux courbes  $\lambda = C^e$ . La variation de la densité entre ces

<sup>4</sup>On pourrait évidemment généraliser et considérer des modules qui seraient des mesures, ou dont la convolution ne serait pas continue, moyennant quelques difficultés.

franges est évidemment donnée par la fonction  $f * g(\lambda)$ ; cette fonction est périodique, donc les franges de même nature correspondent à des valeurs de  $\lambda$  différant entre elles d'un entier pair: si  $\lambda = \lambda_{\max}$  est le centre d'une frange claire, les autres franges claires se répartissent au voisinage des courbes  $\lambda = \lambda_{\max} + 2n, n \in \mathbb{Z}$ . La densité du moiré est donc donnée par un module, qui n'est autre que  $f * g$ .

Quelques exemples intéressants méritent qu'on les étudie de plus près à l'aide du théorème 1: ainsi, les réseaux de module carré

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \leq t < 1, \\ 1 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

ou de module sinusoidal

$$f(t) = \sin^2 \frac{\pi t}{2}$$

**COROLLAIRE 1.** *Si on superpose un réseau à module carré à un réseau de module  $f$ , le moiré a pour module la primitive de  $\frac{1}{2}[f(\lambda) - f(\lambda - 1)]$ . En particulier, si  $f$  est aussi le module carré, le moiré a pour module*

$$f(\lambda) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2} & \text{si } 0 \leq \lambda < 1, \\ 1 - \frac{\lambda}{2} & \text{si } 1 \leq \lambda < 2 \end{cases}$$

*autrement dit, la densité du moiré varie en dents de scie.*

**COROLLAIRE 2.** *Si on superpose deux réseaux à modules sinusoidaux  $\sin^2(\pi t/2)$ , le moiré a pour module  $\frac{1}{8}(1 + 2 \cos^2(\pi \lambda/2))$ ; autrement dit, le module du moiré est lui aussi sinusoidal, avec toutefois des franges claires voilées de gris, et des franges sombres pas complètement opaques.*

Nous voudrions maintenant examiner dans quelles conditions on peut effectivement observer des franges de moiré. Le théorème 1 nous donne des conditions suffisantes pour avoir une densité macroscopique; mais si celle-ci est constante, on n'observera pas de franges, mais seulement du gris uniforme. Par exemple, la densité macroscopique d'un réseau (non superposé à un autre) est partout égale à  $\frac{1}{2} \int_0^2 f(t) dt$ . D'autre part, qu'observera-t-on dans les cas où les hypothèses du théorème ne sont pas

vérifiées? Cela peut se produire dans les cas suivants:

- (a)  $\frac{\varphi - \psi}{a}$  est infiniment petit,
- (b)  $\frac{\varphi - \psi}{a}$  est infiniment grand,
- (c)  $\frac{1}{a} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{array} \right|$  est infiniment petit,
- (d)  $\frac{1}{a} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{array} \right|$  est infiniment grand.

Notons bien qu'en général, les cas  $a$  et  $c$  peuvent toujours se produire le long d'une courbe, plus ou moins complexe selon la situation, mais qui est alors un ensemble invisible macroscopiquement. Par exemple, les points où  $(\varphi - \psi)/a$  est infiniment petit forment simplement le halo de la courbe  $\lambda = 0$ , ce qui n'a aucune incidence macroscopique, et il en va de même pour le cas (c). Le cas (b) signifie que le paramètre  $\lambda$  est infiniment grand: dans ce cas, une variation macroscopique (même petite) de  $x, y$  produira une infinité d'oscillation de  $f * g(\lambda)$  dont seulement la moyenne, constante puisque  $f * g$  est périodique, sera perceptible: pas de franges, seulement du gris uniforme. Par conséquent, comme situations où le théorème 1 ne s'applique pas, nous avons seulement à examiner celles où les conditions a, c, d sont vérifiées *sur tout un ouvert macroscopique*. En fait, dans certains cas, nous pouvons négliger les conditions c et d, par exemple, si dans un ouvert  $U$  du plan, le jacobien

$$\frac{1}{a} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{array} \right|$$

est infiniment petit ou infiniment grand, tout en restant du même ordre. Il nous suffit alors de remplacer conjointement  $\varphi, \psi$  et  $a$  par  $m\varphi, m\psi$  et  $ma$  où  $m$  est une constante telle que

$$\frac{1}{m} \cdot \frac{1}{a} \left| \begin{array}{cc} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{array} \right|$$

reste fini dans tout  $U$ . En remplaçant ainsi  $\varphi$ ,  $\psi$  et  $a$ , nous ne changeons rien au réseau ni au paramètre  $\lambda$ , sauf sur la frontière de  $U$  qui est en général un ensemble macroscopiquement invisible. Mais cela peut produire des discontinuités des franges le long de cette frontière. Ainsi il sera parfois possible de décomposer le plan en ouverts disjoints, de frontière négligeable, dans chacun desquels

$$\frac{1}{a} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix}$$

ne soit ni infiniment petit, ni infiniment grand. Mais il pourra y avoir des discontinuités de la densité macroscopique le long des frontières.

Une discussion parfaitement exhaustive est impossible. Raisonnablement, il reste donc simplement à examiner le cas  $a$ : sur un ouvert macroscopique  $U$ ,  $(\varphi - \psi)/a$  est infiniment petit. Alors  $\varphi/a \simeq \psi/a$  et donc la moyenne sur un domaine  $D$  contenu dans le halo d'un point est donné par

$$\text{St} \left[ \frac{\iint_D f(\varphi/a) g(\varphi/a) dx dy}{\iint_D dx dy} \right]$$

Nous ne pouvons plus prendre  $\lambda$  comme coordonnée, mais nous pouvons prendre par exemple l'abscisse curviligne  $\nu$  le long des courbes  $\varphi = C^e$ , et comme deuxième coordonnée  $\mu = \varphi$ ; alors l'expression précédente devient<sup>5</sup>:

$$\text{St} \left[ \frac{\iint_D f\left(\frac{\mu}{a}\right) g\left(\frac{\mu}{a}\right) \frac{d\mu d\nu}{|\text{grad } \varphi|}}{\iint_D \frac{d\mu d\nu}{|\text{grad } \varphi|}} \right]$$

<sup>5</sup> Il n'est pas nécessaire pour faire ce changement de variable que  $|\text{grad } \varphi|^{-1}$  soit fini dans  $U$ ; s'il ne l'est pas, on choisit (comme pour

$$\frac{1}{a} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix},$$

voir plus haut) une constante infiniment petite  $m$  du même ordre que  $|\text{grad } \varphi|$  et un changement de variable  $\mu, \nu$  dont le jacobien est  $m/|\text{grad } \varphi|$  au lieu de  $1/|\text{grad } \varphi|$ . Mais il faut que sur tout  $U$ ,  $|\text{grad } \varphi|$  reste du même ordre.

Si  $|\text{grad } \varphi|$  est macroscopiquement continue, tout se passe comme au théorème 1: dans  $U$  la densité moyenne est constante, égale à

$$f * g(0) = \frac{1}{2} \int_0^2 f(t)g(t) dt$$

et par conséquent, il n'y a pas de franges dans  $U$ , mais seulement du gris uniforme. On peut dire que c'est la situation limite où les franges ont un écartement infini: toutes les franges ont été rejetées à l'infini. Dans le cas b, c'était l'inverse: les franges, infiniment rapprochées, sont confondues et on ne voit plus que du gris uniforme.

Il pourrait arriver, toutefois, exceptionnellement, que  $|\text{grad } \varphi|$  ne soit pas macroscopiquement continue et présente des oscillations en résonance avec celles de  $f(\varphi/a)$  et  $g(\varphi/a)$ , de sorte que des franges pourraient être observées quand même. Nous ne ferons pas ici la théorie de ce phénomène.

### 3. LES MOIRÉS LOCAUX

Soit  $\varphi$  une fonction standard différentiable à l'ordre deux et supposons que nous observons au microscope,<sup>6</sup> avec un grossissement  $\gamma$  infiniment grand, le halo d'un point  $(x_0, y_0)$  sur un réseau de profil  $\varphi$  et de pas  $a/\gamma$  où  $a$  est infiniment petit. Nous ne verrons que du gris, mais cette image grossie est alors un réseau de pas  $a$  et de profil  $\Phi(X, Y) = \varphi(x_0 + X/\gamma, y_0 + Y/\gamma) - \varphi(x_0, y_0)$ . (Notons bien que le fait de retrancher la constante  $\varphi(x_0, y_0)$  ne change rien: deux profils qui ne diffèrent que d'une constante donnent le même réseau). Les courbes de niveau de  $\Phi$  sont, à  $a/\gamma$  près, des droites. Supposons alors que nous superposons à ce réseau "vu" au microscope un autre réseau formé de droites parallèles (c'est-à-dire de profil  $\Psi(X, Y) = (1/\gamma)(X(\partial\varphi/\partial x) + Y(\partial\varphi/\partial y))$ ) aux courbes de niveau de  $\Phi$  et de même pas. Nous pouvons alors observer un moiré. De façon précise:

**THÉORÈME 2.** *Dans les conditions que nous venons de décrire, si  $\gamma^2 a = 1$ , nous observons un moiré défini par le paramètre  $\lambda = Q(X, Y)$ , où  $Q$  est la forme quadratique associée à la dérivée seconde de  $\varphi$  au point  $(x_0, y_0)$ . Autrement dit, si  $f$  et  $g$  sont les modules des réseaux indiqués ci-dessus, le*

<sup>6</sup>Observer au microscope veut dire l'on étudie les choses dans le plan des coordonnées  $(X, Y)$  avec  $X = \gamma(x - x_0)$ ,  $Y = \gamma(y - y_0)$ . On ne voit dans ce plan qu'une partie du halo de  $(x_0, y_0)$ . Voir [5, p. 10].

moiré est décrit par la densité

$$\rho(X, Y) = f * g(Q(X, Y)) = f * g\left(\frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x_0, y_0) X^2 + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) XY + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(x_0, y_0) Y^2\right).$$

Si la forme quadratique  $Q$  est définie positive (ou négative), on observera donc des anneaux de Fresnel elliptiques.

*Démonstration.* Il suffit d'écrire la formule de Taylor à l'ordre 2. Nous avons

$$\begin{aligned} \Phi(X, Y) &= \frac{1}{\gamma} \left( X \frac{\partial \varphi}{\partial x} + Y \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) + \frac{1}{\gamma^2} \left( \frac{1}{2} X^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + XY \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} Y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{\gamma^3} R(X, Y) \end{aligned}$$

et par conséquent:

$$\begin{aligned} \lambda &= \frac{\Phi(X, Y) - \Psi(X, Y)}{a} \\ &= \frac{\frac{1}{2} X^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + XY \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} Y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}}{\gamma^2 a} + \frac{R(X, Y)}{\gamma^3 a}. \end{aligned}$$

Si  $\gamma^2 a = 1$ ,  $R(X, Y)/\gamma^3 a \simeq 0$  et donc

$$\lambda \simeq \frac{1}{2} X^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + XY \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y} + \frac{1}{2} Y^2 \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}$$

et le théorème 1 nous donne la densité macroscopique

$$\rho(X, Y) = f * g(\lambda)$$

(voir Fig. 2).

*Remarque.* Si  $\gamma^2 a$  est différent de 1, mais fini, on observe la même figure, mais agrandie ou rétrécie selon que  $\gamma^2 a > 1$  ou  $\gamma^2 a < 1$ . Mais si le grossissement est insuffisant ( $\gamma^2 a \simeq 0$ ) ou excessif ( $\gamma^2 a$  infiniment grand) on n'observe plus rien.

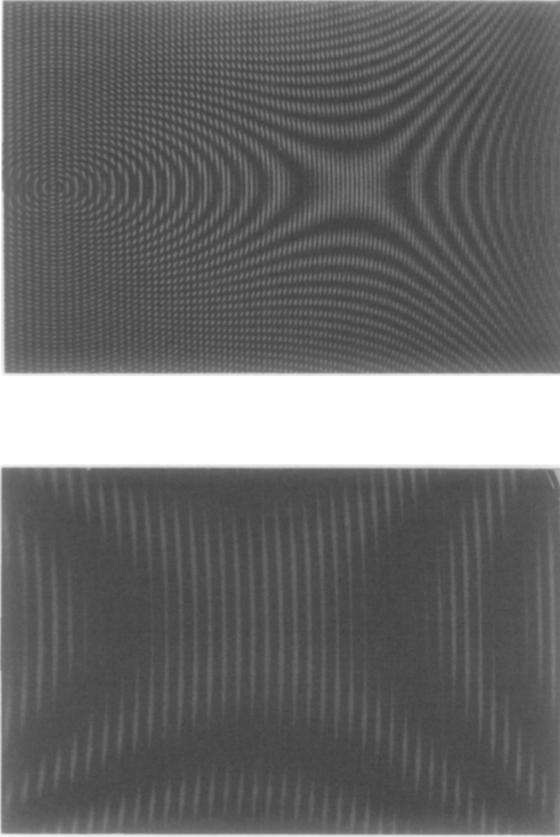


FIG. 2a. Quelques exemples de moirés locaux; ci-dessus des hyperboles; à page suivante, des ellipses. Ce sont des moirés concrets, c'est à dire que leur pas n'est pas infiniment petit, mais petit seulement. Cela implique quelques différences avec ce que prévoit la théorie purement mathématique: (a) Le moiré local est observable non pas dans une région infiniment petite du plan, mais dans une région petite. (b) Les franges ne sont pas exactement les indicatrices de Dupin prévues par la théorie; sur les photographies ci-dessus, on a superposé de différentes manières un réseau de profil  $\text{Log } x$  à un réseau de profil  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ; les indicatrices de Dupin seraient des coniques représentant la dérivée seconde (le hessien) de  $\text{Log } x - \sqrt{x^2 + y^2}$ . Mais ici les fonctions macroscopiques  $\text{Log } x$  et  $\sqrt{x^2 + y^2}$  présentent une variation non négligeable à l'intérieur même de la région où le moiré local est observable, de sorte que le reste dans la formule de Taylor,  $R(x, y)/\gamma^3 a$ , n'est pas infiniment petit, mais seulement petit: la conique est déformée.

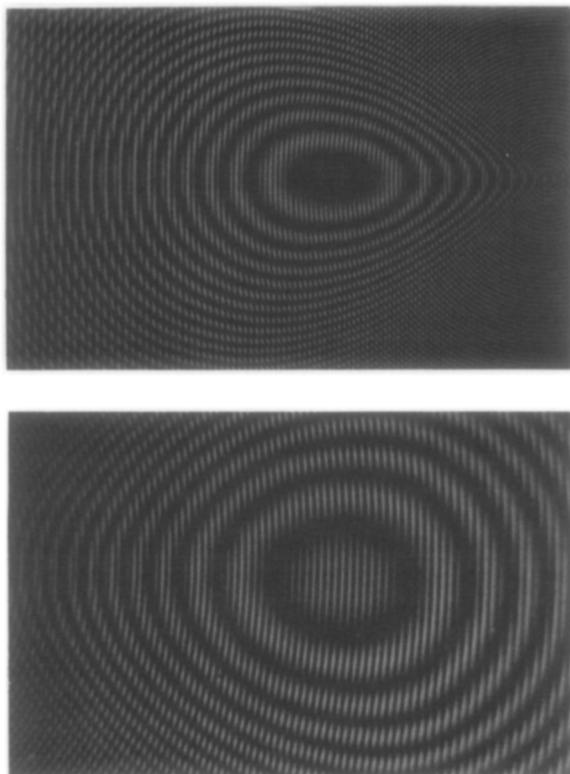


FIG. 2a—Continued.

*Application.* Supposons que nous disposions d'un réseau-étalon formé de droites parallèles, mais de gradient lentement variable,<sup>7</sup> indiqué macroscopiquement par une graduation. Si nous le faisons glisser au hasard sur un réseau profil inconnu  $\psi$ , au-dessus d'un point  $(x_0, y_0)$ , jusqu'à ce qu'il apparaisse autour de ce point de franges de moiré, nous en déduisons:

(a) *le module de grad  $\psi$*  par la graduation; en effet, si nous connaissons le gradient du réseau-étalon, nous pouvons en déduire  $|\text{grad } \psi|$ . Or, nous savons que les franges apparaissent là où les gradients des deux réseaux sont très voisins.

(b) *la direction de grad  $\psi$*  (et donc grad  $\psi$  au signe près) car nous savons que le moiré apparaît lorsque les courbes des deux réseaux sont tangentes.

(c) *la dérivée seconde de  $\psi$  au signe près.*

<sup>7</sup>La dérivée seconde doit pouvoir être considérée comme infiniment petite; voir le théorème 3.

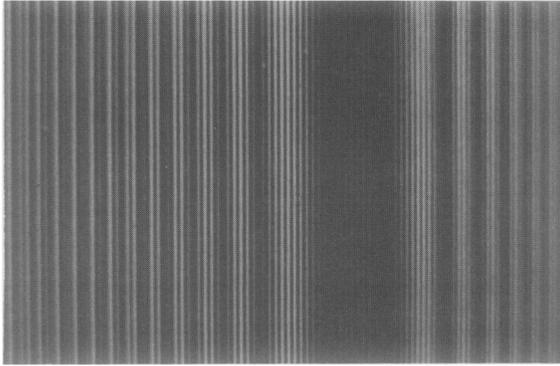


FIGURE 2b.

On pourra noter que cette méthode ne donne rien en un point où  $\text{grad } \varphi = 0$  (sommet, fond d'un trou, ou col). Il est néanmoins possible de "cerner" un tel point en examinant par cette méthode le gradient et le hessien tout autour.

Le moiré ainsi obtenu (moiré local) nous fournit un exemple où le jacobien

$$\frac{1}{a} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0) \end{vmatrix}$$

ne devient infiniment petit que le long d'une courbe passant par le point  $(x_0, y_0)$ . On peut se convaincre facilement que cela n'a aucun effet sur la figure de moiré; en particulier, rien ne permet de distinguer cette courbe sur la figure macroscopique.

Il n'est pas nécessaire, pour observer des moirés locaux, de superposer un réseau de droites parallèles (c'est-à-dire dont le profil est une fonction linéaire). La démonstration du théorème 2 utilise seulement le fait que les profils des deux réseaux ont un développement de Taylor à l'ordre 2, et que leurs gradients au point d'observation sont infiniment voisins.<sup>8</sup> D'où

**THÉORÈME 3.** *On observe un moiré local au point  $(x_0, y_0)$  dès que les profils des deux réseaux ont en ce point des gradients infiniment voisins.<sup>8</sup> Ce*

<sup>8</sup>Nous considérerons que l'on superpose toujours des réseaux de même pas; en effet, si tel n'était pas le cas, on s'y ramènerait en multipliant l'un des deux profils par une constante convenable. Nous avons déjà plusieurs fois remarqué que la donnée du profil, du pas, et du module surdéterminent le réseau.

*moiré local est constitué des anneaux (ou hyperboles) de Fresnel associés au hessien de  $\varphi - \psi$ , et est visible avec un grossissement  $\gamma$  de l'ordre de  $1/\sqrt{a}$ .*

Dans certains cas dégénérés, on peut même observer un moiré local tout le long d'une courbe, ou même dans tout un domaine macroscopique. Par exemple, lorsqu'on superpose un réseau de cercles concentriques équidistants (profil  $\sqrt{x^2 + y^2}$ ) à un réseau de droites parallèles, de même gradient, on observera du moiré local tout le long de la droite issue du centre du premier réseau, et orthogonale au second. En effet, dans tout le halo de cette droite, les gradients des deux réseaux sont, au signe près, infiniment voisins. Dans un tel cas, nous pouvons observer ce moiré local avec un microscope qui grossit seulement dans la direction transversale à la courbe. Ainsi, dans l'exemple précédent, prenons comme axe des  $x$  la droite indiquée, et pour  $y$  la coordonnée orthogonale. Puis effectuons le grossissement  $\gamma$  dans la direction des  $y$  seulement; les nouvelles coordonnées seront:

$$\begin{aligned} X &= x, \\ Y &= \gamma y \end{aligned}$$

et dans ces coordonnées, les profils respectifs seront

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y) &= |X|, \\ \psi(X, Y) &= \sqrt{X^2 + Y^2/\gamma^2} \end{aligned}$$

Ils vérifient les conditions du théorème 1 (sauf sur la droite  $Y = 0$  qui est négligeable) de sorte que nous pouvons poser

$$Y = \text{St} \frac{\sqrt{X^2 + Y^2/\gamma^2} - |X|}{a} = \text{St} \left( \frac{Y^2}{2\gamma^2 a |X|} \right)$$

(si  $\gamma$  est de l'ordre de  $1/\sqrt{a}$ ). Les courbes de niveau du moiré sont donc les courbes d'équation

$$Y^2 = \lambda \cdot \text{St}(2\gamma^2 a) \cdot |X|$$

c'est-à-dire des paraboles (accompagnées de leurs symétriques).

Là, nous avons superposé des réseaux de même gradient. Si dans les mêmes conditions, nous superposons des réseaux de gradients légèrement différents (infinitésimalement), c'est-à-dire par exemple avec les profils (grossissement effectué):

$$\begin{aligned} \varphi(X, Y) &= \alpha |X|, \\ \psi(X, Y) &= \sqrt{X^2 + Y^2/\gamma^2} \end{aligned}$$

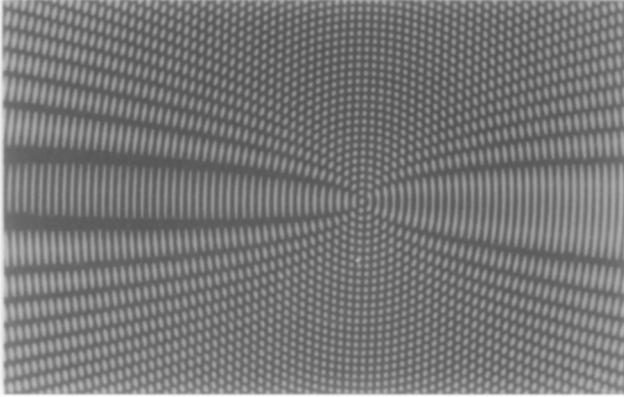


FIGURE 3.

où  $\alpha \simeq 1$  tel que  $1 - \alpha$  soit du même ordre que  $a$ , alors

$$\begin{aligned} \lambda &= \text{St} \left[ \frac{\sqrt{X^2 + \frac{Y^2}{\gamma^2}} - \alpha|X|}{a} \right] \\ &= \text{St} \left[ \frac{(1 - \alpha)|X| + \frac{Y^2}{2\gamma^2}|X|}{a} \right] \\ &= \text{St} \left( \frac{1 - \alpha}{a} \right) |X| + \text{St} \left( \frac{1}{2\gamma^2 a} \right) \frac{Y^2}{|X|} \end{aligned}$$

et par conséquent, les courbes obtenues ont pour équations, lorsque  $\lambda$  varie:

$$X^2 \text{St} \left( \frac{1 - \alpha}{a} \right) - \lambda |X| + Y^2 \text{St} \left( \frac{1}{\gamma^2 a} \right) = 0$$

c'est-à-dire des ellipses de demi-axes  $\sqrt{\text{St}(a/(1 - \alpha))}$  et  $\sqrt{\text{St}(\gamma^2 a)}$  quand  $\alpha < 1$  et des hyperboles lorsque  $\alpha > 1$  (accompagnées de leurs symétriques par  $X \rightarrow -X$ ).

Ce résultat mathématique permet d'envisager le test du gradient d'un réseau linéaire, en le superposant à un réseau de cercles ayant le gradient de référence: les réseaux qui, superposés au réseau de référence, donneront

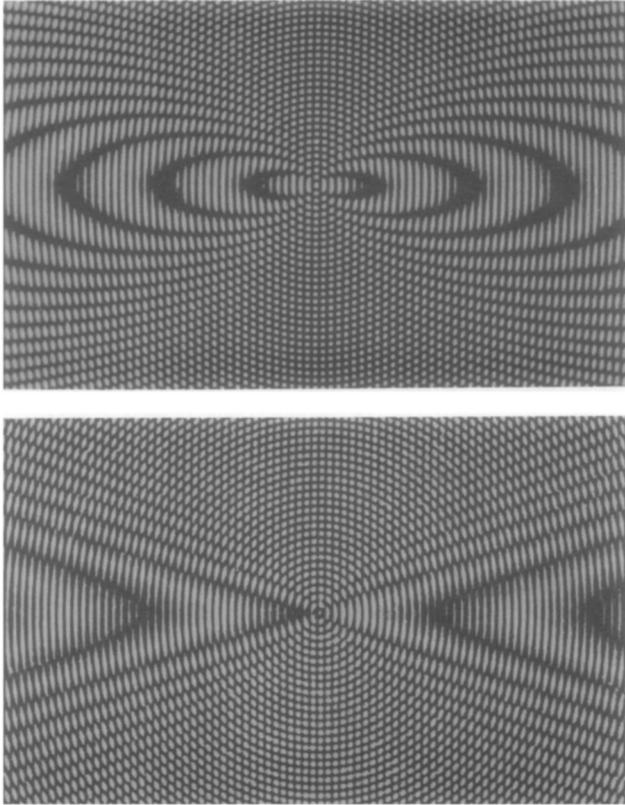


FIGURE 4.

des franges elliptiques, auront un gradient trop petit, ceux qui donneront des hyperboles un gradient trop grand.

Le lecteur curieux pourra comparer la méthode que nous utilisons ici, basée sur l'analyse non-standard, avec la théorie que donne Oster pour interpréter le phénomène précédent (voir sa brochure [6]). En effet, Oster, qui est spécialiste de la chimie des polymères, fait jouer le rôle principal au graphe (dans l'espace "au-dessus" du plan du réseau) de la fonction que nous appelons profil, en tant que surface, alors que nous considérons le profil en tant que fonction différentiable.

#### 4. LES MOIRÉS DE DÉFORMATION

Jusqu'ici, nous avons surtout examiné des conditions très générales dans lesquelles on pouvait observer des franges de moiré. Nous allons mainte-

nant étudier les relations mathématiques entre les franges et les profils des réseaux sous-jacents.

Dans la plupart des cas, les utilisations métrologiques du moiré consistent, comme nous l'avons indiqué dans l'introduction, à superposer un réseau de référence à l'une de ses copies infinitésimalement déformée: le moiré sert de microscope, car il est un effet macroscopique d'une cause (la déformation) microscopique. En général, la déformation est provoquée par une perturbation dont l'intensité peut être exprimée avec un seul paramètre; toutefois, dans certains cas complexes (nombreux dans la nature, mais déjà nettement moins nombreux dans les laboratoires!) il faut plusieurs paramètres correspondant à des causes élémentaires distinctes; si celles-ci se conjuguent linéairement, on peut décomposer et se ramener à des déformations à un paramètre. Nous nous limiterons à ce cas ici, ce qui permet de modéliser beaucoup de situations courantes. Par exemple, pour la dilatation avec une source de chaleur constante, le paramètre sera le temps; pour la déformation d'un matériau sous une contrainte, le paramètre sera l'intensité de la force; pour la déformation par changement de perspective, la parallaxe; etc. Le profil est alors une fonction de ce paramètre:

$$\varphi(t, x, y)$$

le réseau de référence ayant pour profil  $\varphi(0, x, y)$ . Nous pouvons énoncer:

**LEMME.** *Si la fonction standard  $\varphi(t, s, y) \mapsto \varphi(t, s, y)$  est continue et dérivable à droite en  $t = 0$  et vérifie pour tout  $t$  de l'ordre de  $a$  (le pas du réseau) les hypothèses du théorème 1, avec  $\varphi = \varphi(0, \dots)$  et  $\psi = \varphi(t, \dots)$  alors, pour tout  $t$  infiniment petit du même ordre que  $a$ , on observera des franges de moiré qui matérialiseront les courbes de niveau de la dérivée  $(\partial\varphi/\partial t)(0, x, y)$ . Autrement dit, les courbes  $\lambda = C^{te}$  sont exactement les courbes d'équation*

$$\frac{\partial\varphi}{\partial t}(0, x, y) = \text{St}\left(\frac{a}{t}\lambda\right) = C^{te}.$$

*Démonstration.* Puisque les hypothèses du théorème 1 sont vérifiées lorsque  $t$  est du même ordre que  $a$  pour  $\varphi(0, \dots)$  et  $\varphi(t, \dots)$ , nous avons

$$\lambda(x, y) = \text{St}\left[\frac{\varphi(t, x, y) - \varphi(0, x, y)}{a}\right]$$

et les franges sont déterminées par ce paramètre  $\lambda$ . Or, puisque  $\varphi$  est dérivable à droite en  $t = 0$ , nous avons, pour tout  $t$  infiniment petit et  $> 0$ :

$$\frac{\varphi(t, x, y) - \varphi(0, x, y)}{t} \simeq \frac{\partial\varphi}{\partial t}(0, x, y)$$

et par conséquent, si  $t$  est du même ordre que  $a$ :

$$\lambda(x, y) = \text{St}\left(\frac{t}{a}\right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x, y)$$

d'où le résultat.

*Remarque.* Lorsqu'on fait tendre  $t/a$ , ou plutôt  $\text{St}(t/a)$ , vers l'infini,  $\lambda(x, y)$  tend vers l'infini et donc les franges sont de plus en plus nombreuses et serrées (mais restent toujours, bien entendu, des courbes de niveau de  $(\partial\varphi/\partial t)(0, \dots)$ ). À l'inverse, lorsqu'on fait tendre  $t/a$  vers 0, les franges sont de plus en plus rares et espacées. Lorsque  $t/a$  est infiniment grand, (mais tel que  $t$  soit infiniment petit, afin que les franges soient toujours des courbes de niveau de  $(\partial\varphi/\partial t)(0, \dots)$ ) par exemple pour  $t = \sqrt{a}$ , les franges disparaissent de l'univers macroscopique et notre oeil ne voit plus que du gris uniforme. Mais elles constituent de ce fait un réseau de profil  $(\partial\varphi/\partial t)(0, \dots)$ , de pas  $\sqrt{a}$ , et de module  $f * f$  si  $f$  était le module du réseau initial.

**DEFINITION.** Nous appelons ce réseau le réseau dérivé du réseau initial par rapport à la déformation.

Pour que cette définition soit cohérente, il faut vérifier que le réseau dérivé est invariant par les transformation "de jauge"

$$(m \in \mathbb{R} - \{0\}) \quad \begin{array}{l} \varphi \mapsto m\varphi + C^{te} \\ a \mapsto |m|a \end{array}$$

ce qui est immédiat.

Nous allons maintenant discuter la signification du lemme sur quelques cas particuliers remarquables.

**THÉORÈME 4.** *Une situation assez fréquente est celle d'une déformation qui s'effectue selon la même loi quelle que soit la déformation antérieure. Dans ce cas, la variation du profil correspond à l'application d'un semi-groupe d'opérateurs<sup>9</sup>:*

$$\varphi(t, x, y) = P_t \varphi(x, y)$$

où  $P_t$  est un semi-groupe, c'est-à-dire une famille d'opérateurs  $(P_t)_{t>0}$  agissant sur les fonctions telles que  $\varphi$ , et vérifiant:

$$\forall t, s > 0 \quad P_t P_s = P_{t+s}; \quad \lim_{t \rightarrow 0} P_t = P_0 = Id.$$

<sup>9</sup>Remarquons que l'action d'un semi-groupe sur la fonction  $\varphi$  ne se réduit pas forcément à une déformation du support. Ex: le semi-groupe de Gauss (voir plus loin quelques remarques).

Les franges de moiré que l'on observe alors si et seulement si  $t$  est du même ordre que  $a$ , sont les courbes de niveau de  $A \cdot \varphi$ , où  $A$  est le générateur infinitésimal du semi-groupe.

*Démonstration.* Il suffit de remarquer que  $A\varphi$  est la dérivée en  $t = 0$  de  $t \mapsto P_t\varphi$ .

**COROLLAIRE 1.** Lorsque le semi-groupe  $P_t$  est celui des translations:  $P_t\varphi(x, y) = \varphi(x + tX, y + tY)$  où  $X, Y$  est un vecteur unitaire,  $A \cdot \varphi$  est la dérivée de  $\varphi$  dans la direction  $X, Y$ . Si  $(X, Y) = (1, 0)$   $A\varphi = \partial\varphi/\partial x$ . Cela signifie que si nous superposons deux réseaux identiques, mais avec un décalage infiniment petit du même ordre que  $a$ , les franges de moiré sont les courbes de niveau de la dérivée de  $\varphi$  dans la direction du décalage. En outre, ces franges sont d'autant plus serrées que le déplacement est plus grand (leur

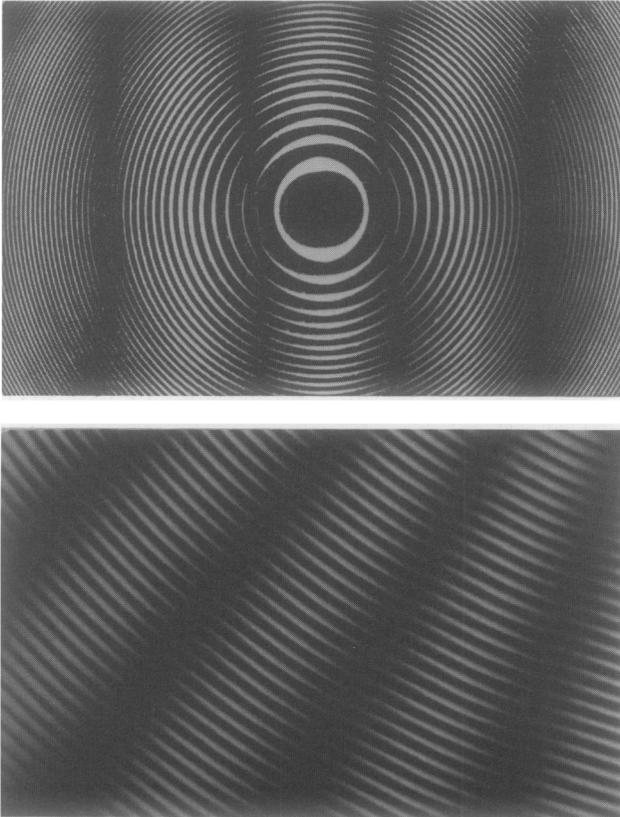


FIG. 5. Ci-contre deux exemples de moiré obtenus par un décalage horizontal de deux réseaux identiques: les anneaux de Fresnel (en haut) et des cercles concentriques équidistants (en bas).

*espacement est inversement proportionnel au décalage):*

$$\lambda = \frac{t}{a} D_{x,y} \cdot \varphi.$$

**COROLLAIRE 2.** *Le semi-groupe est celui des rotations: si nous superposons deux réseaux identiques, de sorte que l'un soit tourné d'un angle infiniment petit du même ordre que  $a$ , les franges donneront les courbes de niveau de*

$$y \frac{\partial \varphi}{\partial x} - x \frac{\partial \varphi}{\partial y}$$

*(voir Fig. 6) et ainsi de suite ...*

Il faut ici que nous parlions un peu du sens à donner au mot "déformation". Jusqu'à présent, nous avons discuté d'une "déformation" du profil, c'est-à-dire que, partant d'un réseau de profil  $\varphi(x, y) = \varphi(0, x, y)$ , nous lui avons superposé un réseau dont le profil  $\varphi(t, x, y)$  était une perturbation du précédent. Cette "déformation" purement fonctionnelle pouvait décrire diverses situations physiques: changement de perspective, reflet dans un miroir... déformant, etc. Mais aussi une déformation, au sens strict cette fois, du support sur lequel est imprimé le réseau (par exemple lorsque ce support se dilate). Une telle déformation du support entraîne une déformation fonctionnelle du profil. Une déformation du support peut être décrite mathématiquement comme un déplacement de ses points: un point  $(x, y)$  va se déplacer en  $(x(t), y(t))$ . La description mathématique d'une telle déformation, qu'on supposera sans cassure ni chevauchement, se fait par une famille à un paramètre de difféomorphismes:  $(x, y) \mapsto (x(t), y(t)) = D_t(x, y)$  et alors la déformation fonctionnelle du profil sera tout simplement:

$$\varphi(t, x, y) = \varphi(D_t(x, y))$$

et on aura

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x', y) \cdot x'(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) y'(0).$$

Une déformation du support est donc un cas particulier de la situation envisagée par le lemme.

En topométrie de précision, pour vérifier si une surface est parfaitement plane ou présente au contraire des cuvettes de profondeur si faible qu'elles sont invisibles, on emploie le procédé suivant (voir Fig. 7): à peu près parallèlement à la surface que l'on veut tester, on place un réseau de droites parallèles. Au-dessus, une source lumineuse ponctuelle projette

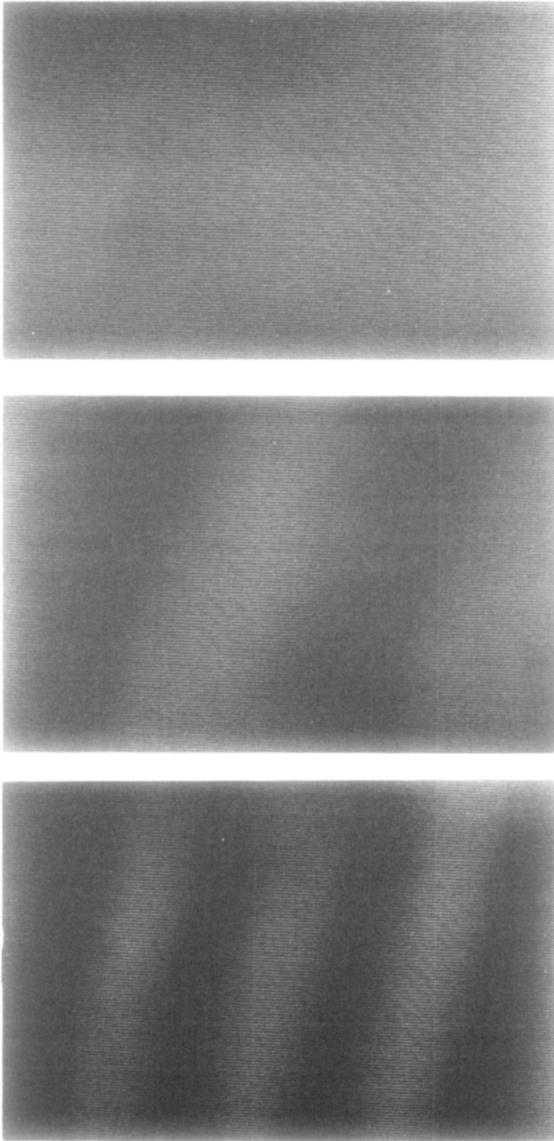


FIG. 6. Les six photographies ci-dessus illustrent le corollaire 2. On a superposé deux réseaux de Ronchi avec d'abord une rotation nulle (en haut à gauche), puis des rotations de plus en plus fortes; les franges sont de plus en plus nombreuses et serrées. Les franges obliques, plus fines, qui apparaissent en supplément proviennent de trame de la photogravure, qui se superpose au réseau.

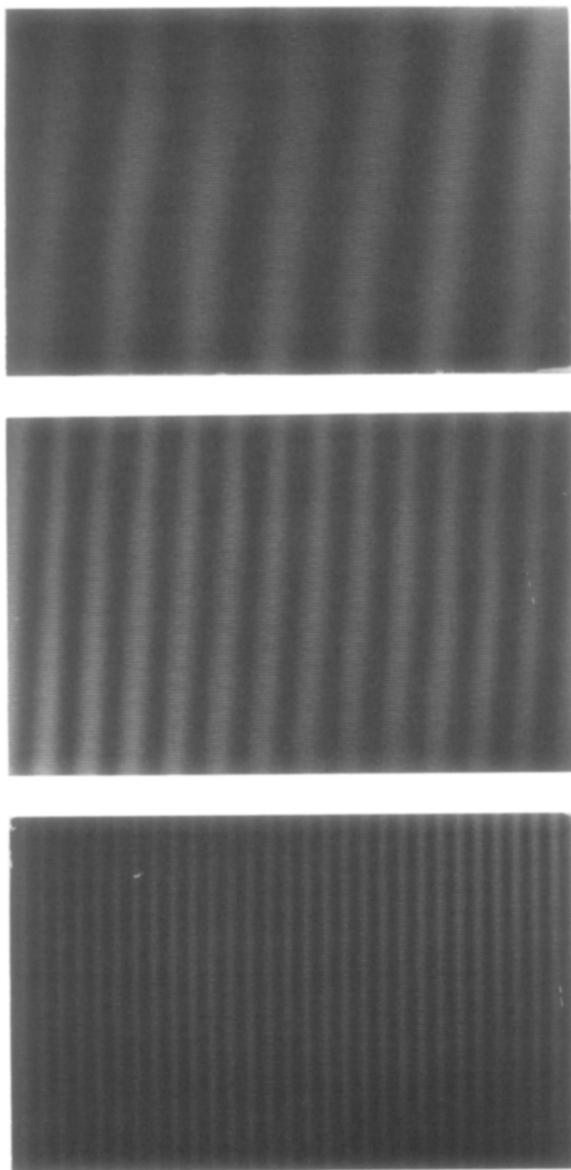


FIG. 6—Continued.

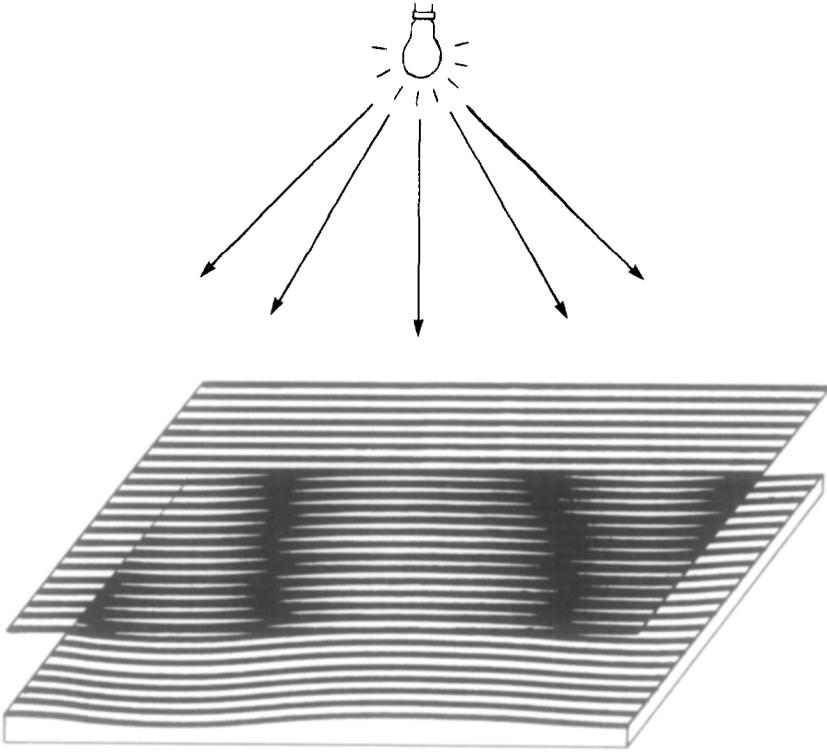


FIGURE 7.

l'ombre du réseau sur la surface. En plaçant l'oeil près de la source de lumière, la faible parallaxe décale légèrement, par la perspective, le réseau par rapport à son ombre; par conséquent, l'oeil de l'observateur verra des franges de moiré qui sont les courbes de niveau de la surface. Si celles-ci sont rectilignes, la surface est parfaitement plane; mais le moindre défaut de planéité courbera les franges.

(Plus généralement, il existe une relation différentielle entre le profil du réseau, la surface, et les franges de moiré, que nous allons calculer).

**THÉORÈME 5.** *Topométrie: supposons que le plan du réseau soit le plan  $x,y$ , que la source de lumière se trouve au point de coordonnées  $(0,0,H)$  et que la surface à tester ait pour équation  $z = p(x,y)$ , avec  $p(x,y) < 0$  (sinon, on s'y ramène en soustrayant une constante) et que le réseau ait pour profil  $\varphi$  et pour pas  $a$ , infiniment petit. Pour  $\varphi$  nous prendrons une fonction standard. Alors, tant que l'oeil de l'observateur se trouve à une distance de la source de*

l'ordre de  $a$ , il observera des franges de moiré définies par

$$\lambda = \text{St} \left\{ \frac{Ht}{a} \left[ 1 - \frac{1}{r(x,y)} \right] \right\} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x,y)$$

lorsque les coordonnées de l'oeil sont  $(Ht, 0, H)$ , où  $r(x,y)$  est la fonction implicite définie par la relation

$$(1 - r)H = p(rx, ry);$$

cette fonction implicite existe (d'après le théorème du même nom) tant que  $|x(\partial p/\partial x) + y(\partial p/\partial y)| < H$ , en particulier si  $|\text{grad } p|$  est assez petit, c'est-à-dire si la surface a peu de relief.

*Démonstration.* Soit  $x,y$  un point du réseau. Sa projection (ombre portée) sur la surface  $z = p(x,y)$  est un point dont nous désignerons les deux premières coordonnées par  $x',y'$ ; c'est donc le point  $(x',y',p(x',y'))$ . Lorsque l'oeil de l'observateur se trouve en  $(Ht, 0, H)$ , ce point se superpose par perspective à un autre point du réseau, que nous désignons par

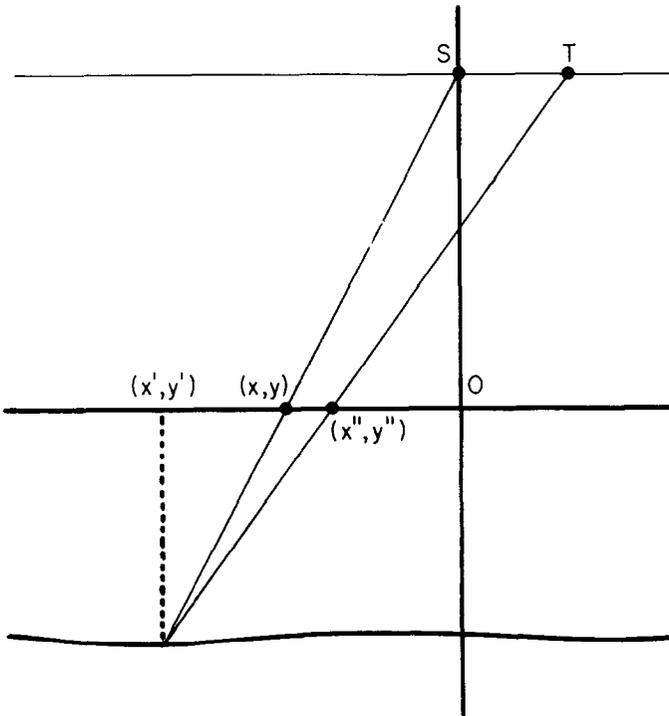


FIGURE 8.

$x'', y''$ . Il est clair que la "déformation" du réseau due au changement de perspective s'exprime par la relation:

$$\varphi(t, x, y) = \varphi(0, x'', y'') = \varphi(x'', y'').$$

Pour obtenir la fonction  $\varphi(t, \dots)$  nous allons donc calculer  $x'', y''$  en fonction de  $t, x, y$  et les remplacer par les expressions obtenues dans  $\varphi(x'', y'')$ . Or, nous avons les relations de proportionnalité:

$$\frac{x'' - x}{tH} = \frac{-p(x', y')}{H - p(x', y')},$$

$$y'' - y = 0$$

et aussi:

$$\frac{x'}{x} = \frac{y'}{y} = 1 - \frac{p(x', y')}{H}.$$

Posons  $r = x'/x = y'/y$ ; la dernière relation ci-dessus nous donne

$$(1 - r)H = p(rx, ry)$$

qui définit la fonction implicite  $(x, y) \mapsto r$  lorsque  $|x(\partial p/\partial x) + y(\partial p/\partial y)| < H$ . Remplaçant  $x', y'$  par  $rx(x, y), ry(x, y)$  dans les deux premières relations, il vient:

$$x'' = x + Ht \left[ 1 - \frac{1}{r(x, y)} \right],$$

$$y'' = y$$

et par conséquent

$$\varphi(t, x, y) = \varphi \left( x + tH \left[ 1 - \frac{1}{r(x, y)} \right], y \right).$$

Donc, d'après le lemme, les équations définissant les franges sont

$$\lambda = \text{St} \left( \frac{a}{t} \right) \frac{\partial \varphi}{\partial t} (0, x, y) = \text{St} \left( \frac{t}{a} H \left[ 1 - \frac{1}{r(x, y)} \right] \right) \frac{\partial \varphi}{\partial x} (x, y)$$

et le théorème est démontré.

Dans l'expérience que nous avons décrite plus haut, le réseau est linéaire (le profil est une fonction linéaire). Sa théorie est résumée par le

**THÉORÈME 6.** *Avec le même montage qu'au théorème 5, mais avec un réseau linéaire<sup>10</sup> et avec  $H$  infiniment grand, les franges du moiré, observables pour  $t$  du même ordre que  $a$ , sont des courbes de niveau  $p(x,y) = \lambda_n$  de la surface; elles sont comme toujours d'autant plus serrées que  $t/a$  est plus grand.*

*Démonstration.* Appliquons le théorème 5. Nous avons un réseau linéaire, donc  $\partial\varphi/\partial x = \text{constante}$ . Puisque  $H$  est infiniment grand, et  $p$  standard, nous avons pour tous  $(x,y)$  finis,  $r(x,y) \simeq 1$ ; en effet, cela résulte de la définition de  $r$ :  $(1-r)H = p(rx,ry)$ ; nous pouvons donc en déduire que, pour tous  $x,y$  standards:

$$p(rx,ry) \simeq p(x,y),$$

$$H \left[ 1 - \frac{1}{r(x,y)} \right] = \frac{H(r-1)}{r} \simeq -p(x,y)$$

et par conséquent, d'après le théorème 5

$$\begin{aligned} \lambda &= \text{St} \left( \frac{t}{a} \right) \cdot \text{St} \left\{ H \left[ 1 - \frac{1}{r(x,y)} \right] \right\} \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x,y), \\ &= \text{St} \left( \frac{t}{a} \right) \cdot [-p(x,y)] \cdot A. \end{aligned}$$

Les courbes  $\lambda = C^{te}$  sont donc bien aussi les courbes  $p(x,y) = C^{te}$ .

Un principe analogue est utilisé par les astronomes amateurs qui polissent eux-mêmes le miroir de leur télescope: il s'agit de tester, au cours du polissage, la qualité de la surface, la perfection des franges de moiré indiquant que celle-ci est devenue rigoureusement parabolique. Dans ce cas, on ne superpose pas par perspective le réseau à son ombre, mais à son image dans le miroir. La théorie de ce phénomène est évidemment plus complexe, du moins au niveau des calculs; en effet, la réflexion sur une surface est d'analyse plus difficile que la simple projection, et les équations différentielles que vérifiera le profil  $\varphi$  du réseau sont d'ordre 2 (et plus longues!). Nous en resterons donc là.

Les expériences décrites par le théorème 6 sont pratiquées dans de nombreux domaines, pour la topométrie d'objets de dimensions petites ou moyennes; récemment, des équipes japonaises les ont utilisées pour l'anatomie (voir [10, 11]). Pour la topométrie géographique, l'emploi du même principe présente toutefois des difficultés que l'on devine aisément.

<sup>10</sup>Un réseau linéaire de module carré est appelé réseau de Ronchi.

## 5. LES MOUVEMENTS DES FRANGES

Dans ce chapitre, nous allons examiner les relations entre le mouvement infinitésimal affectant les réseaux et le mouvement macroscopique qui en résulte pour le moiré. Autrement dit, nous allons faire *la cinématique du moiré*. Une chose est déjà apparue au chapitre précédent: pour une déformation du type envisagé dans le lemme, c'est-à-dire dépendant d'un paramètre  $t$ , et dérivable par rapport à ce paramètre, les franges se rapprochent et se multiplient lorsque  $t$  augmente; pour parler quantitativement, leur espacement est inversement proportionnel à  $t$  et leur "fréquence" proportionnelle à  $t$ . Lorsqu'on augmente progressivement la déformation, on verra donc les franges se serrer de plus en plus nombreuses les unes contre les autres. Mais nous allons voir qu'il est possible d'en dire bien plus.

Tout d'abord, voici le cas de la translation relative de deux réseaux non identiques.

**THÉORÈME 7.** *Soient deux réseaux de profils respectifs  $\varphi$  et  $\psi$ , vérifiant les conditions du théorème 1. Lorsqu'on les superpose, on observe donc un moiré. Puis, supposons que l'on translate le premier d'une distance  $t$  du même ordre que  $a$ , le pas des deux réseaux. Alors les franges se modifieront comme suit:*

(a) *leur espacement va varier asymptotiquement de manière inversement proportionnelle à  $t/a$ ;*

(b) *le feuilletage défini par  $\lambda(t, x, y) = C^{te}$  va tendre, lorsque  $t/a$  tend vers l'infini,<sup>11</sup> vers une position limite, constituée des courbes de niveau de la dérivée de  $\varphi$  dans la direction de la translation.*

*Démonstration.* Calculons, en fonction de  $t$ , ou mieux, en fonction de  $s = \text{St}(t/a)$  les paramètres

$$\lambda(s, x, y) = \text{St} \left[ \frac{\varphi(x + t, y) - \psi(x, y)}{a} \right],$$

$$\lambda(x, y) = \text{St} \left[ \frac{\varphi(x, y) - \psi(x, y)}{a} \right] = \lambda(0, x, y)$$

(nous prenons la direction de la translation comme axe des  $x$ ). Nous pouvons décomposer:

$$\lambda(s, x, y) = \text{St} \left[ \frac{\varphi(x + t, y) - \varphi(x, y)}{a} \right] + \text{St} \left[ \frac{\varphi(x, y) - \psi(x, y)}{a} \right]$$

$$= s \text{St} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right] + \lambda(x, y).$$

<sup>11</sup>Nous utilisons ici la notion standard de limite, comme si aucune structure microscopique n'existait; en toute rigueur, il faudrait dire que c'est  $s = \text{St}(t/a)$ , paramètre standard, qui tend vers l'infini.

Si la fonction  $\varphi$  est standard<sup>12</sup> nous avons même:

$$\lambda(s, x, y) = s \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + \lambda(x, y)$$

équation qui ne contient que des objets standards. Il ne reste plus qu'à constater que:

(a) lorsque  $s \rightarrow \infty$ ,  $\lambda(s, x, y) \rightarrow \infty$  (sauf évidemment le long de la courbe  $(\partial\varphi/\partial x)(x, y) = 0$ ) et est proportionnel à  $s$  asymptotiquement.

(b) les courbes  $\lambda(s, x, y) = C^{te}$  sont les mêmes que  $\lambda(s, x, y)/s = C^{te}$ , c'est-à-dire  $(\partial\varphi/\partial x)(x, y) + \lambda(x, y)/s = C^{te}$ . Or  $\lambda(x, y)/s$  tend vers 0 quand  $s$  tend vers l'infini.

Le théorème est ainsi démontré.

*Remarque.* Lorsque les conditions du théorème 1 sont vérifiées pour  $\varphi$  et  $\psi$  (c'est-à-dire lorsque du moiré est visible),  $\partial\varphi/\partial x$  et  $\partial\psi/\partial x$  sont infiniment voisins et le théorème précédent est encore vrai si nous échangeons  $\varphi$  et  $\psi$ . C'est évident: on ne peut pas dire lequel des deux réseaux est translaté par rapport à l'autre! Mais si l'une des deux est standard, il est naturel de la prendre comme référence. Toutefois,  $\varphi$  étant donnée,  $\psi$  peut varier (infinitésimalement, bien sûr) n'importe comment tout en conservant les conditions du théorème 1, de sorte que le moiré observable macroscopiquement peut prendre toutes les configurations possibles; mais le feuilletage limite, lorsque  $s$  tend vers l'infini, lui, sera toujours le même, car il ne dépend que de  $\text{St}(\partial\varphi/\partial x) = \text{St}(\partial\psi/\partial x)$ .

Plus généralement, pour une déformation quelconque (mais ayant toutefois les caractères requis pour le lemme du chapitre 4) nous pouvons démontrer d'une manière tout à fait analogue:

**THÉORÈME 8.** *Lorsque le paramètre standard  $s = \text{St}(t/a)$  d'une déformation tend vers l'infini, les franges du moiré viennent se serrer, de plus en plus nombreuses, le long des lignes de niveau de  $(\partial\varphi/\partial t)(0, x, y)$ . Quand la déformation est décrite par un semi-groupe de générateur infinitésimal  $A$ , ce sont les lignes de niveau de  $A\varphi$ .*

Les résultats précédents nous donnent déjà une idée sur la manière dont les franges se déplacent. Mais nous avons seulement étudié l'évolution du feuilletage  $\lambda(s, x, y) = C^{te}$ . Comment se déplace une frange individuelle? Car au cours du mouvement général qui affecte le feuilletage, les franges sombres restent toujours séparées par les franges claires même lorsqu'elles se compriment, et ne viennent jamais à se chevaucher, à se confondre, ou à se dépasser. Leur retraite se fait dans l'ordre! Il est donc possible de suivre une frange individuelle pendant tout le mouvement. On peut aussi se

<sup>12</sup>Si  $\varphi$  et  $\psi$  vérifient les conditions du théorème 1, elles ne peuvent être toutes deux standard. Si nous supposons  $\varphi$  standard, c'est que  $\psi$  ne l'est pas.

demander quelle est, en fonction du paramètre  $s$ , sa vitesse de déplacement: celle-ci sera donnée par exemple tout le long de la ligne centrale de la frange par un champ de vecteurs orthogonal à cette ligne, et dirigé dans le sens du déplacement de la frange; son module sera égal à la vitesse du déplacement. Autrement dit, nous considérons que le déplacement de la frange est analogue au déplacement d'une vague. La cinématique du moiré est donc décrite par ce champ de vecteurs-vitesse. Le théorème suivant répond à toutes ces questions:

**THÉORÈME 9.** *Reprenons les coordonnées macroscopiques  $\lambda = \text{St}[(\varphi - \psi)/a]$ ,  $\mu = \text{St}(\varphi) = \text{St}(\psi)$ , comme au théorème 1, dont nous supposons encore les conditions satisfaites. Nous identifions le paramètre  $s = \text{St}(t/a)$  au temps, pour simplifier (sinon on a simplement à remplacer  $s$  par une fonction du temps dans les formules qui vont suivre). Comme plus haut, nous appellerons  $J(x, y)$  le jacobien de la transformation  $(x, y) \mapsto (\lambda, \mu)$ . Nous avons déjà vu que*

$$J(s, x, y) = \text{St} \left[ \frac{1}{a} \begin{vmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x} & \frac{\partial \varphi}{\partial y} \\ \frac{\partial \psi}{\partial x} & \frac{\partial \psi}{\partial y} \end{vmatrix} \right].$$

Alors, en un point  $(x, y)$  du plan, le vecteur-vitesse d'une frange traversant ce point à l'instant  $s$  a pour module:

$$v = \frac{|\text{St}[(\partial \varphi / \partial t)(0, x, y)]|}{|\text{grad } \lambda(s, x, y)|}.$$

*Démonstration.* Appelons  $\sigma$  le déplacement de la frange; on a évidemment:

$$d\lambda = |\text{grad } \lambda| d\sigma.$$

D'autre part, dans la démonstration du théorème 7, nous avons établi la formule

$$\lambda(s, x, y) = s \text{St} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) \right] + \lambda(0, x, y)$$

lorsque la déformation était une translation dans le sens des  $x$ ; nous aurions pu exactement de la même façon montrer que pour un déplacement plus général, nous aurions

$$\lambda(s, x, y) = s \text{St} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x, y) \right] + \lambda(0, x, y)$$

dont nous déduisons la relation différentielle

$$d\lambda = \text{St} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x, y) \right] ds$$

et donc, compte tenu de ce qui précède:

$$v = \frac{d\sigma}{ds} = \frac{\left| \text{St} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x, y) \right] \right|}{|\text{grad } \lambda(s, x, y)|}.$$

Afin d'illustrer cet exposé, nous proposons d'appliquer ces résultats à un exemple. Considérons deux réseaux identiques formés d'anneaux de Fresnel circulaires, c'est-à-dire de profil  $\varphi(x, y) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$ , que nous décalons l'un par rapport à l'autre. Le calcul des coordonnées macroscopiques  $\lambda, \mu$  donne, en fonction du paramètre  $s = t/a$  (où  $t$  est comme au théorème 7 l'amplitude du décalage):

$$\lambda = \text{St} \frac{\frac{1}{2}[(x+t)^2 + y^2] - \frac{1}{2}[x^2 + y^2]}{a} = sx,$$

$$\mu = \text{St}(\varphi) = \frac{1}{2}(x^2 + y^2).$$

Les franges sont donc des droites verticales (des courbes de niveau de  $\partial\varphi/\partial x = x$ ); l'espacement de deux franges sombres consécutives correspond à une variation de  $\lambda$  égale à 2, donc à une variation de  $x$  égale à  $2/s$ . Les franges sont donc espacées de  $2/s$ . Le fait que les deux réseaux sont identiques entraîne l'absence du terme résiduel  $\lambda(0, x, y)$ , de sorte que l'espacement des franges est exactement proportionnel à  $1/s$ , et non asymptotiquement seulement.

Si le déplacement relatif des deux réseaux se fait selon un mouvement rectiligne uniforme (mais de vitesse infiniment petite, de l'ordre de  $a$ ) nous verrons les franges se déplacer; dans le cas particulier que nous examinons, la vitesse de déplacement d'une frange est évidemment la même tout le long de la frange; en appliquant le théorème 9, nous obtenons

$$v(s, x, y) = \frac{\left| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right|}{|\text{grad } \lambda|} = \frac{|x|}{s}$$

c'est-à-dire qu'une frange qui traverse à l'instant  $s$  la droite d'abscisse  $x$  a une vitesse égale à  $|x|/s$  en valeur absolue. Nous n'avons pas précisé, au théorème 9, le sens dans lequel se déplacent les franges (c'est-à-dire le sens du vecteur-vitesse, ou le signe de  $v$ ). Mais il est facile de répondre à cette question; voyons d'abord cela sur notre exemple. Le déplacement des

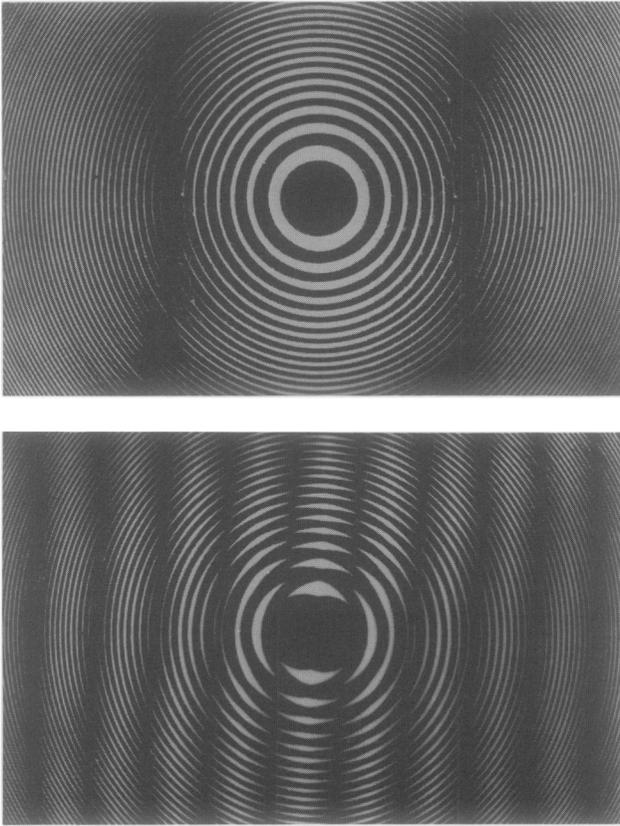


FIG. 9a. Les photographies ci-dessus montrent que les franges sont d'autant plus nombreuses que le déplacement est plus grand. Comme elles ne sont pas animées, on ne peut voir qu'elles viennent se ranger contre l'axe médian.

franges se manifeste dans l'augmentation du paramètre  $\lambda$  lorsque  $s$  augmente: comme  $\lambda = sx$ , en un point d'abscisse  $x$  il passe une frange noire chaque fois que  $\lambda$  augmente de deux unités; or aux points d'abscisse 0,  $\lambda$  reste toujours égal à 0. Cela se voit aussi dans la valeur de  $v$ : la vitesse en  $x = 0$  est nulle. Autrement dit, lorsque  $s$  augmente, les droites  $\lambda = C^{te}$  filent toutes (d'autant plus vite qu'elles sont plus éloignées), mais la droite  $\lambda = 0$  reste immobile. Compte tenu de tout ce que nous avons dit, on voit facilement que les franges viennent tout simplement se concentrer autour de l'axe de  $y$ . Ainsi, les franges qui sont à droite filent vers la gauche, et les franges qui sont à gauche filent vers la droite avec une vitesse proportionnelle à leur éloignement.

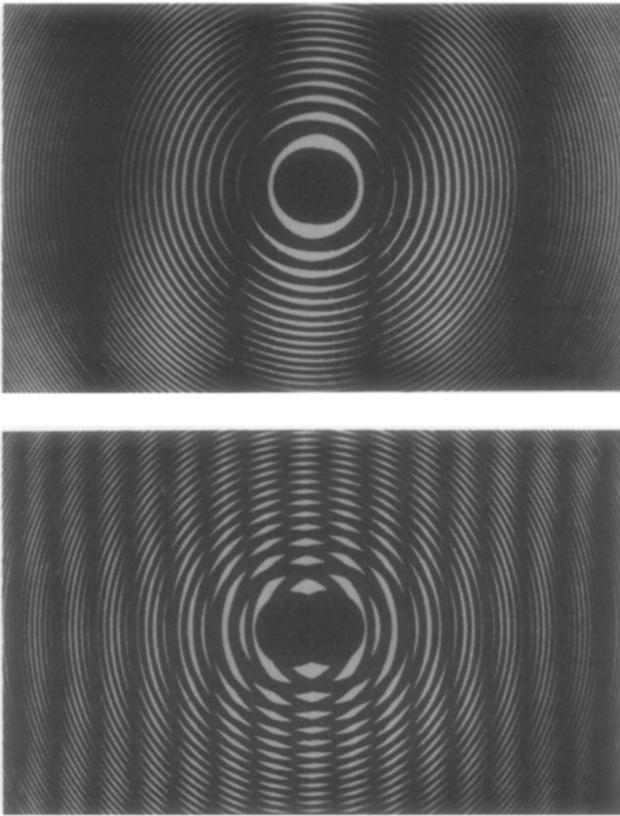


FIG. 9a—Continued.

Dans le cas général, la situation est analogue. Nous avons vu que:

$$\lambda(s, x, y) = s \operatorname{St} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x, y) \right] + \lambda(x, y).$$

Donc en un point  $(x, y)$  de la courbe  $\operatorname{St}[(\partial \varphi / \partial t)(0, x, y)] = 0$ ,  $\lambda(s, x, y)$  reste constant quand  $s$  varie, ce qui veut dire qu'aucune frange ne passe à travers cette courbe: elles restent toutes de part et d'autre,<sup>13</sup> mais filent vers la position-limite constituée par cette courbe lorsque  $s$  augmente indéfiniment, et d'autant plus vite qu'elles en sont plus éloignées. Notons bien que cette courbe-limite peut être réduite à un point, par exemple si  $(\partial \varphi / \partial t)(0, x, y) = x^2 + y^2$ , ou se trouver à l'infini, ou se décomposer en

<sup>13</sup>Nous disons cela par abus de langage, car les franges coupent en général cette courbe. Mais nous croyons que le lecteur comprendra parfaitement ce que nous voulons dire.

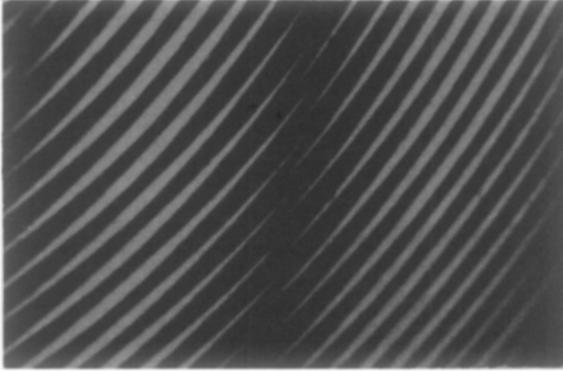


FIG. 9b. Un détail grossi de l'une des Figs. 9a.

plusieurs courbes. Dans ce dernier cas, il y aura évidemment une frontière, un "rift", entre les bassins de ces différents attracteurs, où des franges surgiront du néant (?) pour filer vers l'un d'entre eux.

## 6. LE PROBLÈME INVERSE DU MOIRÉ

Le problème que nous avons étudié jusqu'à présent était de déduire les figures de moiré de la structure microscopique des deux réseaux. Or dans les usages expérimentaux du moiré, c'est le problème inverse qui est posé: ce sont les figures de moiré qui sont observables, et il faut en tirer une information sur la structure microscopique qui est invisible. Bien entendu, comme il fallait s'y attendre, c'est le problème inverse qui est mathématiquement le plus difficile. En effet, plusieurs problèmes inverses peuvent se présenter:

(a) on dispose de deux réseaux inconnus, mais que l'on sait identifier. Si on déforme infinitésimalement l'un d'entre eux selon une loi connue, peut-on déduire leur profil des figures de moiré obtenues?

(b) Si les réseaux sont connus, peut-on déduire la déformation à partir des figures?

(c) Si les deux réseaux sont inconnus et *non identiques* mais assez voisins pour avoir un moiré, peut-on, connaissant la déformation, en déduire les deux profils?

(d) Enfin, peut-on connaître les modules des réseaux à partir du module du moiré?

On pourra remarquer que la distinction entre les problèmes relatifs aux seuls profils et les problèmes relatifs aux seuls modules est possible à cause

d'un fait plus important qu'on ne croit: le profil du moiré ne dépend que des profils des réseaux et non de leurs modules, et le module du moiré ne dépend que des modules des réseaux et non de leurs profils (voir théorème 1).

Avant d'examiner dans le détail ces problèmes inverses, il serait bon de préciser quelque chose sur laquelle nous n'avons pas insisté jusqu'ici: nous avons fait remarquer en passant (note 12 du chapitre 5) que  $\varphi$  et  $\psi$  ne peuvent être toutes deux standard puisque leur différence reste infiniment petite. Nous avons également signalé auparavant que  $\varphi$  et  $\text{grad } \varphi$  devaient être macroscopiquement continues (et donc aussi  $\psi$  et  $\text{grad } \psi$ ). Cela veut dire que nous pouvons toujours supposer que  $\varphi$  est standard, car si elle ne l'est pas, nous la remplaçons par  $\text{St}[\varphi(x,y)]$  pour tous  $x,y$  standards et nous remplaçons conjointement  $\psi(x,y)$  par  $\psi(x,y) + * \text{St}[\varphi(x,y)] - \varphi(x,y)$ , où  $* \text{St}[\varphi]$  est l'extension de la fonction standard  $\text{St}[\varphi]$ , de sorte que les coordonnées macroscopiques  $\lambda, \mu$  et donc les résultats du théorème 1 restent inchangés. Cela n'avait pas d'importance jusqu'à présent, mais maintenant, pour que le problème inverse soit bien posé, c'est une fonction standard  $\varphi$  et sa réplique imparfaite  $\psi$ , qui n'est pas standard, que nous cherchons, tout en nous réservant la possibilité, lorsque c'est plus commode, de prendre  $\varphi$  et  $\psi$  toutes deux non-standard.

L'analyse mathématique du problème inverse repose évidemment sur les relations démontrées dans les chapitres précédents, notamment aux théorèmes 1, 4, 7, 9 et au lemme du chapitre 4. Nous allons donc commencer par rassembler ces équations:

(1) Pour un moiré obtenu par superposition de deux réseaux de profils  $\varphi$  (standard) et  $\psi$ , et de modules  $f$  et  $g$ , nous avons (théorème 1):

$$\lambda(x,y) = \text{St} \frac{\varphi(x,y) - \psi(x,y)}{a}$$

et la densité

$$f * g(\lambda(x,y)).$$

(2) Si le premier réseau est déformé selon la loi  $\varphi(t,x,y)$  avec le paramètre de déformation  $s = \text{St}(t/a)$ , nous avons (voir lemme du chapitre 4 et théorème 7):

$$\lambda(s,x,y) = s \text{St} \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0,x,y) \right] + \lambda(0,x,y).$$

(3) Si  $s$  est le temps, la vitesse de fuite des franges à travers le point

$(x, y)$  est (théorème 9):

$$v(x, y) = \frac{\text{St}[(\partial\varphi/\partial t)(0, x, y)]}{|\text{grad } \lambda(s, x, y)|}.$$

Supposons alors que nous ayons deux réseaux inconnus qui nous donnent un moiré et dont nous désirons connaître les profils. Nous pouvons leur faire subir les déformations de notre choix, et les plus simples, qui sont aussi les plus faciles à réaliser, sont les translations. Pour une translation selon l'axe des  $x$ , nous avons:

$$\lambda(s, x, y) = s \text{St} \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x, y) \right] + \lambda(0, x, y)$$

où

$$\lambda(0, x, y) = \text{St} \frac{\varphi(x, y) - \psi(x, y)}{a}$$

est le paramètre déterminant le moiré initial. En augmentant la translation de manière à faire tendre  $s$  vers l'infini, nous pouvons repérer, uniquement d'après le mouvement macroscopique des franges, la courbe  $\text{St}[\partial\varphi/\partial x(x, y)] = 0$ : c'est en effet la courbe contre laquelle viennent s'accumuler les franges. Et nous verrons également le feuilletage  $\text{St}[(\partial\varphi/\partial x)(x, y)] = C^{te}$  puisque c'est le feuilletage limite selon lequel les franges viennent se disperser. Enfin, nous pouvons connaître la valeur de  $\text{St}[\partial\varphi/\partial x]$  au point  $x_0, y_0$  en raisonnant comme suit: entre deux franges noires (ou deux franges claires), le paramètre  $\lambda(s, x, y)$  varie de deux unités: donc en comptant le nombre de franges noires comprises entre la courbe  $\text{St}[(\partial\varphi/\partial x)(x, y)] = 0$  et le point  $(x_0, y_0)$  nous obtenons un entier  $n(s, x_0, y_0)$  qui n'est autre que  $\frac{1}{2} \lambda(s, x_0, y_0)$  avec une erreur inférieure à l'unité; par conséquent:

$$\text{St} \left[ \frac{\partial\varphi}{\partial x}(x_0, y_0) \right] = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{2n(s, x_0, y_0)}{s}$$

Cela montre que si, conformément à la remarque faite plus haut, nous cherchons le profil standard  $\varphi$ , nous voyons que par une translation relative des réseaux de grande amplitude (grande à l'échelle du réseau) nous pouvons connaître la dérivée de  $\varphi$  dans la direction de cette translation. Mais  $\varphi$  ne pouvant être déterminée par une seule dérivée (par exemple  $\partial\varphi/\partial x$ ), il nous faut prendre deux translations, par exemple une le long de l'axe des  $x$ , et une autre le long de l'axe des  $y$ . Alors, connaissant  $\partial\varphi/\partial x$  et  $\partial\varphi/\partial y$ , nous en déduisons  $\varphi$  à une constante près qui ne joue aucun rôle dans le profil du réseau.

Le pas  $a$  des réseaux est facile à déterminer par le comptage des franges qui défilent: si  $\Delta t$  est le déplacement relatif des deux réseaux pendant que défile au point  $(x_0, y_0)$  exactement un interfrange, nous avons, selon la direction de la translation,

$$a = \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x_0, y_0),$$

ou

$$a = \frac{1}{2} \Delta t \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x_0, y_0).$$

Enfin, l'autre fonction,  $\psi$ , se déduit de  $\varphi$  et de  $a$  par

$$\psi(x, y) = \varphi(x, y) - a\lambda(0, x, y).$$

Nous avons ainsi répondu aux questions (a) et (c): il est possible de déterminer les profils de deux réseaux à partir de leur moiré en les déplaçant l'un par rapport à l'autre de différentes façons bien choisies. Mais il est indispensable pour cela que l'amplitude de ce déplacement croisse indéfiniment tout en restant du même ordre que  $a$  et que observions le déplacement des franges au cours du processus; la seule photographie du moiré pour une valeur infiniment grande du paramètre  $s$  ne donnerait aucun renseignement, pour la simple raison qu'elle serait uniformément grise!

Est-il possible, à l'inverse, de connaître une déformation si on connaît les réseaux et l'évolution de leur moiré? C'est la situation expérimentale la plus courante, où on photocopie un réseau connu sur un échantillon que l'on déformera infinitésimalement, par dilatation (en le chauffant) ou par une contrainte quelconque: le moiré est alors un microscope permettant de trouver des grandeurs caractéristiques de la déformation. Nos formules permettent de répondre rapidement (mais incomplètement) à cette question. En effet, la seule grandeur caractéristique de la déformation qui intervient dans les paramètres macroscopiques du moiré est  $\text{St}[(\partial\varphi/\partial t)(0, x, y)]$ , c'est-à-dire, si l'on veut, la déformation linéaire qui lui est tangente à l'origine. Cet examen sera plus clair si nous analysons non plus la déformation du profil, mais directement celle du support du réseau: ce qui est intéressant, en effet, n'est pas la variation du profil consécutive à la déformation du matériau, mais la déformation du matériau lui-même, c'est-à-dire le mouvement des points qui lui sont liés. Ainsi, au cours de la déformation, un point de coordonnées  $(x, y)$  va se déplacer et son mouvement est donné par les fonctions  $x(t), y(t)$  telles que  $x(0) = x, y(0) = y$ . La variation du profil s'écrit alors

$$\varphi(t, x, y) = \varphi(x(t), y(t))$$

d'où

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x, y) = \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)x'(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)y'(0).$$

Pour un profil et une déformation standards, la grandeur que le moiré nous permet de déterminer est donc le produit scalaire de  $\text{grad } \varphi$  par le champ des vecteurs-vitesse de la déformation à l'origine. Nous pourrions donc connaître le champ des vecteurs-vitesse lui-même en répétant l'expérience avec un autre réseau de profil  $\varphi_1$  (standard) tel que  $\text{grad } \varphi$  et  $\text{grad } \varphi_1$  soient linéairement indépendants. Par exemple:

$$\begin{aligned}\varphi(x, y) &= x, \\ \varphi_1(x, y) &= y\end{aligned}$$

c'est-à-dire qu'en faisant l'expérience deux fois avec réseau de Ronchi, que l'on tourne de  $90^\circ$  d'une fois à l'autre, nous obtenons nécessairement les deux composantes de la vitesse. Notons bien que dans ce procédé, où on photocopie le réseau de référence sur l'échantillon, le terme résiduel dans la formule 2 est nul et nous avons exactement

$$\lambda(s, x, y) = s \left[ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y)x'(0) + \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y)y'(0) \right].$$

Dans un tel cas le feuilletage  $\lambda(s, x, y) = C'^e$  est invariant lorsque  $s$  varie et  $(\partial \varphi / \partial x)x'(0) + (\partial \varphi / \partial y)y'(0)$  s'obtient simplement en comptant les franges comme dans la discussion précédente, le calcul étant d'autant plus précis que  $s$  est plus grand (l'erreur est  $\leq 1/s$ ).

Il nous reste enfin à examiner le problème inverse pour les modules. Il est évident que si nous avons un moiré par superposition de deux réseaux, le seul module du moiré ne peut en aucun cas nous donner les modules des deux réseaux: une infinité de couples  $f, g$  donnent le même produit de convolution. Mais si on possède *trois* réseaux, qui superposés convenablement deux à deux, donnent trois moirés, le problème est mieux posé: il s'agit de résoudre le système

$$\begin{aligned}f * g &= H, \\ g * h &= F, \\ h * f &= G.\end{aligned}$$

Ou bien, si on connaît déjà le module de l'un des deux réseaux, on en déduit celui de l'autre; c'est un problème de division: trouver  $f$ , si on connaît  $g$  et  $H$ , sachant que  $f * g = H$ . Ces problèmes sont très faciles et se résolvent par transformation de Fourier. En effet, toutes ces fonctions sont

périodiques et possèdent donc une série de Fourier. Soient par exemple

$$\forall n \in \mathbb{Z} \quad a_n = \frac{1}{2} \int_0^2 e^{-in\pi t} f(t) dt;$$

nous avons alors

$$f(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{in\pi t}.$$

Si  $a_n, b_n, c_n, A_n, B_n, C_n$  sont les  $n$ èmes coefficients de Fourier de (respectivement)  $f, g, h, F, G, H$ , les relations de convolution ci-dessus se traduisent par

$$a_n b_{-n} = C_n,$$

$$b_n c_{-n} = A_n,$$

$$c_n a_{-n} = B_n$$

et donc, connaissant les  $A_n, B_n, C_n$ , nous en déduisons facilement les relations:

$$a_{-n} a_n = |a_n|^2 = \frac{B_n C_n}{A_{-n}},$$

$$b_{-n} b_n = |b_n|^2 = \frac{A_n C_n}{B_{-n}},$$

$$c_{-n} c_n = |c_n|^2 = \frac{A_n B_n}{C_{-n}}.$$

Donc si nous possédons trois réseaux qui donnent deux à deux du moiré, il est possible de connaître les valeurs absolues des coefficients de Fourier de chacun des trois réseaux, mais nous ne pouvons pas déterminer exactement les trois modules  $f, g, h$ ; nous ne pouvons les connaître qu'à un déphasage près, ce qui est une indétermination considérable.

Par contre, si nous connaissons  $g$  et  $H$  et que nous voulons trouver  $f$  tel que  $f * g = H$ , la réponse est évidente:

$$a_n = \frac{C_n}{b_{-n}}$$

si tous les  $b_n$  sont non nuls. (La solution est indéterminée si pour un  $n$   $C_n = b_{-n} = 0$ , et il n'y a aucune solution si pour un  $b_n$  nul,  $C_{-n} \neq 0$ . Nous avons donc intérêt, pour obtenir toute l'information, à employer un réseau dont les coefficients  $b_n$  sont tous non nuls.)

Signalons au passage que les coefficients de Fourier  $a_n$  d'un réseau de module  $f$  ont une signification expérimentale beaucoup plus profonde et plus directe que la fonction  $f$  elle-même: ils sont aussi de mesure bien plus aisée (toutefois, en lumière incohérente, on ne peut déterminer que la valeur absolue  $|a_n|$ ; pour connaître la phase, il faut prendre des mesures en lumière cohérente). Voir pour cela le traité de Goodman [8, chapitre 7 et notamment pages 130–133].

## 7. LES MOIRÉS D'ORDRE SUPÉRIEUR

Nous avons déjà évoqué au chapitre 4 la notion de réseau dérivé. Dans ce chapitre, nous allons examiner cela de plus près. Rappelons comment on obtient un réseau dérivé: en superposant un réseau  $R$ , de profil  $\varphi$ , de pas  $a$ , et de module  $f$  à une de ses copies déformée selon la loi  $\varphi(t, x, y)$  (telle que  $\varphi(0, x, y) = \varphi(x, y)$ , le profil initial) on obtient du moiré tant que  $t/a$  est fini; mais lorsque  $t/a$  est infiniment grand, le moiré n'a pas vraiment disparu, il est seulement devenu microscopique. Et si nous prenons un microscope de grossissement  $\gamma$  du même ordre que  $t/a$ , nous observerons un moiré décrit par le paramètre standard:

$$\lambda_\gamma(t, x, y) = \text{St} \left[ \frac{t}{\gamma a} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x, y) \right]$$

c'est-à-dire que sa densité sera

$$\rho_\gamma(t, x, y) = f * f \left( \text{St} \left[ \frac{t}{\gamma a} \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x, y) \right] \right).$$

Nous pouvons dire aussi, sans recourir au microscope, que les raisonnements du théorème 1 concernant les valeurs moyennes sont parfaitement valables à l'ordre de  $t/a$  qui est infiniment grand par rapport à  $a$ , car c'est seulement ce dernier fait qui intervenait dans la démonstration. Par conséquent, pour  $t$  fixé, infiniment petit, mais infiniment grand à l'échelle de  $a$ , ce moiré microscopique a toutes les propriétés d'un réseau; sa densité est

$$\rho(x, y) = f * f \left( t/a \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x, y) \right)$$

ce qui équivaut à dire que son profil est  $(\partial \varphi / \partial t)(0, x, y)$ , son pas  $a/t$ , et son module  $f * f$ . On voit qu'il ne dépend de la déformation que par l'intermédiaire de sa vitesse à l'origine, c'est-à-dire par la donnée d'un champ de vecteurs. En général, pour fixer les idées, on prendra  $t = \sqrt{a}$ ,

tout en se réservant la possibilité éventuellement, de choisir une autre valeur mieux adaptée à tel ou tel problème particulier. En définitive:

DEFINITION (bis). Le réseau dérivé  $D_V R$  d'un réseau  $R$  par rapport à un champ de vecteurs  $V$  est le moiré microscopique obtenu en superposant  $R$  avec sa copie, déformée infinitésimalement à l'ordre  $\sqrt{a}$  selon le champ  $V$ . C'est un réseau de profil  $(\partial\varphi/\partial t)(0, x, y) = D_V\varphi(x, y)$  (dérivée de  $\varphi$  par rapport au champ de vecteurs, ou dérivée de Lie), de pas  $\sqrt{a}$ , et de module  $f*f$ .

Rien n'empêche plus, dès lors, de superposer ce nouveau réseau à l'une de ses copies légèrement déformée pour observer un moiré; un tel moiré est alors appelé "moiré du deuxième ordre" (Dantu [3]). En poussant la déformation à un ordre plus grand que  $\sqrt{a}$ , par exemple  $a^{1/4}$ , nous obtenons un réseau dérivé du réseau dérivé, de profil  $D_W D_V\varphi$ , de pas  $a^{1/4}$ , et de module  $f*f*f*f$ . Nous pouvons poursuivre à un ordre arbitraire. Les dérivations successives du profil rendent celui-ci de moins en moins lisse, mais en revanche les convolutions successives rendent le module de plus en plus lisse. Du point de vue expérimental, les moirés d'ordre supérieur sont de plus en plus difficiles à réaliser au fur et à mesure que l'ordre augmente. Une première raison, déjà relevée à l'ordre 2 par Dantu, est que le pas doit à chaque fois devenir nettement plus grand; comme sa petitesse est limitée au départ par le grain des plaques, il devient rapidement macroscopique. Une deuxième raison provient des convolutions successives: celles-ci diminuent en effet à chaque fois le contraste du moiré et donc des dérivées successives du réseau. Le mathématicien n'a évidemment pas ce souci: les modèles non-standard permettent d'augmenter l'ordre de grandeur de  $a$  autant de fois qu'il le veut sans jamais arriver dans le macroscopique.

## 8. LES MOIRÉS CELLULAIRES

Les réseaux que nous avons considérés jusqu'à présent étaient des réseaux de lignes. Mais on obtient aussi des moirés en superposant des réseaux constitués de motifs microscopiques quelconques, qui se répètent avec une période *double*, c'est-à-dire selon les deux dimensions, et ne se modifient de manière perceptible que sur des distances macroscopiques; la périodicité du motif peut elle-même varier (sur des distances macroscopiques seulement) selon un certain profil. Mathématiquement, de tels réseaux pourront être caractérisés de la manière suivante:

(a) deux profils  $\varphi$  et  $\psi$  tels que  $(x, y) \mapsto (\varphi(x, y), \psi(x, y))$  soit un difféomorphisme du plan sur lui-même.

(b) deux pas  $a$  et  $b$ , infiniment petits; on ne restreint pas la généralité en prenant  $b = a$ , mais il est souvent commode de se choisir des pas différents en fonction des calculs.

(c) un module  $f(\alpha, \beta)$  qui est une fonction doublement périodique, de période 2 dans les deux directions. Nous pouvons même supposer que le module varie dans le plan en fonction de  $x, y$  (mais macroscopiquement, bien entendu; c'est-à-dire que  $f(x, y, \alpha, \beta)$  est une fonction standard, continue en  $x, y$  et localement intégrable en  $\alpha, \beta$ ). Cette dernière hypothèse d'un module variable correspond simplement à la situation où le motif, dont la répétition constitue la structure microscopique, est lentement variable.

Comme au chapitre 1, ces caractères liés à chacun des réseaux que l'on superpose vont nous permettre de calculer la densité macroscopique. En effet, nous pouvons énoncer:

**THÉORÈME 10.** *Supposons que les deux profils du premier réseau soient des fonctions standard et constituent des coordonnées indépendantes; supposons que, si  $\varphi_1$  et  $\psi_1$  sont les deux profils du second réseau, les fonctions  $(\varphi_1(x, y) - \varphi(x, y))/a$  et  $(\psi_1(x, y) - \psi(x, y))/b$  ne sont jamais infiniment grandes, et sont macroscopiquement continues, de sorte que*

$$\lambda(x, y) = \text{St} \left[ \frac{\varphi_1(x, y) - \varphi(x, y)}{a} \right],$$

et

$$\mu(x, y) = \text{St} \left[ \frac{\psi_1(x, y) - \psi(x, y)}{b} \right]$$

sont des fonctions standard continues. Alors la densité macroscopique du moiré obtenu en superposant les deux réseaux est:

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\alpha + \lambda(x, y), \beta + \mu(x, y)) g(\alpha, \beta) d\alpha d\beta$$

si  $f$  et  $g$  sont les modules respectifs des deux réseaux. Lorsque les modules sont macroscopiquement variables, cette expression devient:

$$\frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(x, y; \alpha + \lambda(x, y), \beta + \mu(x, y)) g(x, y; \alpha, \beta) d\alpha d\beta.$$

Dans les deux cas, c'est la moyenne sur une période de la fonction périodique  $f(\alpha + \lambda, \beta + \mu)g(\alpha, \beta)$ , c'est-à-dire le produit de convolution de  $f$  par  $g$ , que nous noterons encore  $f * g(\lambda, \mu)$ .

*Démonstration.* Le problème est analogue à celui du chapitre 1; nous allons donc procéder de la même manière. La densité *microscopique* résultant de la superposition est le produit des densités microscopiques de chacun des deux réseaux, c'est-à-dire:

$$\rho(x,y) = f\left(x,y; \frac{\varphi_1(x,y)}{a}, \frac{\psi_1(x,y)}{b}\right) g\left(x,y; \frac{\varphi(x,y)}{a}, \frac{\psi(x,y)}{b}\right).$$

La densité *macroscopique* résultant de la superposition est alors la moyenne (plus exactement, la partie standard de la moyenne), sur un domaine  $D$  infiniment grand par rapport à  $a$  et  $b$ , mais infiniment petit par rapport aux grandeurs macroscopiques, de la densité microscopique  $\rho(x,y)$ , autrement dit

$$\text{St} \left[ \frac{\iint_D f\left(x,y; \frac{\varphi_1(x,y)}{a}, \frac{\psi_1(x,y)}{b}\right) g\left(x,y; \frac{\varphi(x,y)}{a}, \frac{\psi(x,y)}{b}\right) dx dy}{\iint_D dx dy} \right].$$

Comme au chapitre 1, nous allons faire le changement de variable adéquat (qui est ici quelque peu différent): nous prenons comme nouvelles coordonnées  $\varphi$  et  $\psi$ ; comme  $D$  est contenu dans le halo d'un point  $(x_0, y_0)$ , et que  $f$  et  $g$  sont des fonctions standard, donc macroscopiquement continues, nous ne changeons rien à l'expression ci-dessus si nous remplaçons les deux premières variables  $x, y$  par  $x_0, y_0$ ; de même, le jacobien de la transformation  $(x, y) \mapsto (\varphi, \psi)$  peut être mis en facteur dans les intégrales du numérateur et du dénominateur, puis simplifié, et alors la densité macroscopique s'écrit, en prenant un domaine de la forme  $\varphi_0 - \epsilon < \varphi < \varphi_0 + \epsilon, \psi_0 - \eta < \psi < \psi_0 + \eta$ :

$$\begin{aligned} \text{St} & \left[ \frac{\int_{\varphi_0 - \epsilon}^{\varphi_0 + \epsilon} \int_{\psi_0 - \eta}^{\psi_0 + \eta} f\left(x_0, y_0; \frac{\varphi}{a} + \lambda, \frac{\psi}{b} + \mu\right) g\left(x_0, y_0; \frac{\varphi}{a}, \frac{\psi}{b}\right) d\varphi d\psi}{\int_{\varphi_0 - \epsilon}^{\varphi_0 + \epsilon} \int_{\psi_0 - \eta}^{\psi_0 + \eta} d\varphi d\psi} \right] \\ & = \text{St} \left[ \frac{\int_{-\epsilon/a}^{+\epsilon/a} \int_{-\eta/b}^{+\eta/b} f(x_0, y_0; \alpha + \lambda, \beta + \mu) g(x_0, y_0; \alpha, \beta) d\alpha d\beta}{\int_{-\epsilon/a}^{+\epsilon/a} \int_{-\eta/b}^{+\eta/b} d\alpha d\beta} \right]. \end{aligned}$$

(Notons bien que  $\lambda$  et  $\mu$  restent constants dans  $D$  d'après nos hypothèses). Comme  $\epsilon/a$  et  $\eta/b$  sont infiniment grands à cause de notre hypothèse sur  $D$ , cela se réduit, comme au chapitre 1, à la moyenne sur un nombre

infiniment grand de périodes, de la fonction figurant sous le signe  $f$  au numérateur; cela prouve ce que nous voulions. Bien entendu, le cas des modules non variables n'est qu'un cas très particulier et se déduit immédiatement de ce qui précède.

Le théorème que nous venons de présenter mérite quelques commentaires. Tout d'abord, sauf choix très particulier (et dégénéré) des profils ou des modules, les lignes d'égale densité macroscopique ne sont plus des franges, mais dans le cas générique elles découpent le plan en cellules. Cela ne peut surprendre, puisque les réseaux considérés dans ce chapitre ont une structure microscopique cellulaire, et non striée comme dans les autres chapitres. Ainsi, la superposition de deux réseaux striés donne des moirés striés, constitués de franges, tandis que la superposition de réseaux cellulaires donnera des moirés cellulaires. Afin de nous en convaincre mathématiquement, commençons par remarquer que  $f * g$  est une fonction périodique en les variables  $\lambda, \mu$ , ce qui implique:

$$f * g(\lambda + 2n, \mu + 2p) = f * g(\lambda, \mu).$$

Le plan est ainsi divisé en cellules  $\{(2n - 1) \leq \lambda(x, y) \leq (2n + 1), (2p - 1) \leq \mu(x, y) \leq (2p + 1)\}$  qui sont simplement des répliques, selon le double profil  $(\lambda, \mu)$ , du domaine fondamental  $\{|\lambda| \leq 1, |\mu| \leq 1\}$ ; ou bien, dit autrement, chaque cellule est l'image du domaine fondamental par le difféomorphisme

$$C_{n,p} : (\lambda, \mu) \mapsto (\lambda + 2n, \mu + 2p)$$

(exprimé dans les coordonnées  $\lambda, \mu$  du plan).

Il suffit donc, pour étudier la structure cellulaire macroscopique, c'est-à-dire le moiré, de connaître la densité dans une seule cellule, par exemple la cellule fondamentale, et de connaître les deux profils du moiré,  $\lambda(x, y)$  et  $\mu(x, y)$ . Un élément important de cette structure est la famille des courbes  $f * g(\lambda, \mu) = C^{te}$  à l'intérieur de la cellule fondamentale, c'est-à-dire la famille des courbes d'équations:

$$\begin{cases} f * g(\lambda(x, y), \mu(x, y)) = C^{te} \\ |\lambda(x, y)| \leq 1; |\mu(x, y)| \leq 1 \end{cases}$$

Ce sont les courbes d'égale densité.

Pour nous convaincre de l'efficacité opérationnelle de ces quelques considérations, nous allons les appliquer à un exemple bien connu des travailleurs du livre: le réseau de module

$$\begin{aligned} f(\alpha, \beta) &= 0 && \text{si } \alpha^2 + \beta^2 > R^2, \\ &= 1 && \text{si } \alpha^2 + \beta^2 \leq R^2 \end{aligned}$$

(pour  $|\alpha| \leq 1$  et  $|\beta| \leq 1$ ) avec  $R < 1$ , et de profils:

$$\varphi(x, y) = x,$$

$$\psi(x, y) = y.$$

Un tel réseau est reproduit en Fig. 10 (en haut). Le réseau mathématique, lui, possède un pas infiniment petit  $a = b$ . Qu'observe-t-on lorsqu'on lui superpose un réseau identique, mais ayant subi une rotation infiniment

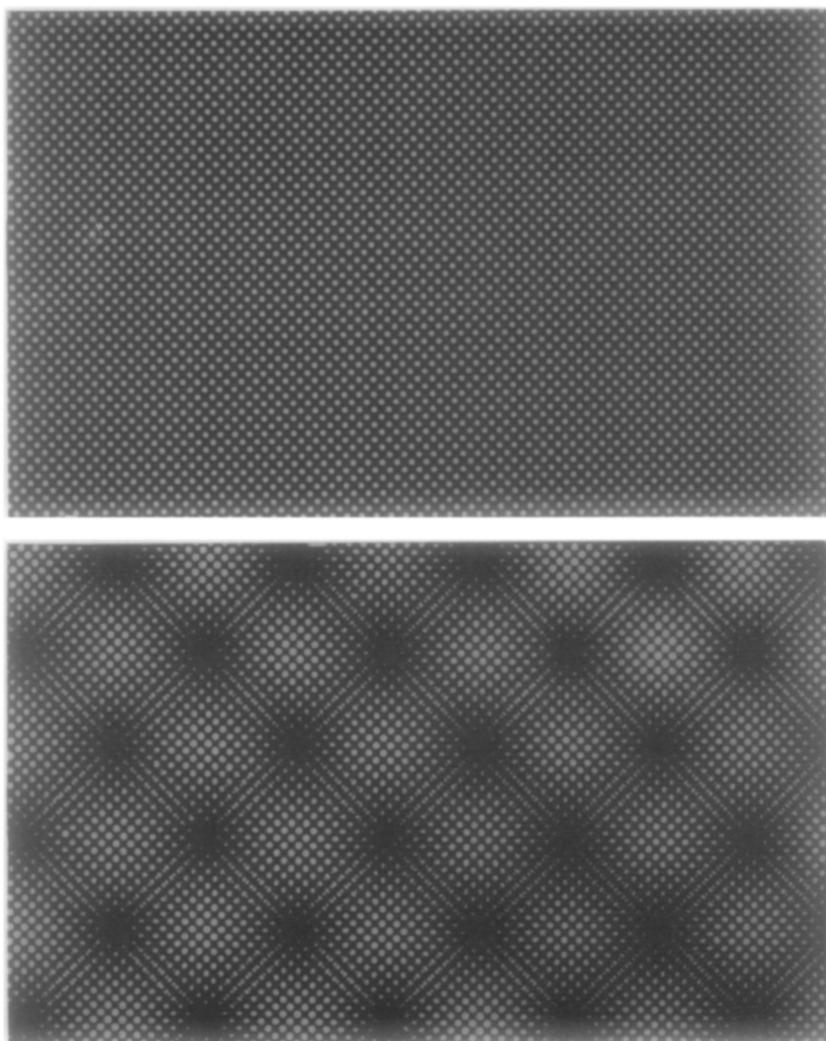


FIGURE 10.

petite de l'ordre de  $a$ ? Cela revient à superposer le réseau de même module et de même pas, mais de profils:

$$\varphi_1(x, y) = x \cos \theta + y \sin \theta,$$

$$\psi_1(x, y) = -x \sin \theta + y \cos \theta$$

où  $\theta$  est l'angle de la rotation, que nous supposons du même ordre que  $a$ . Les paramètres macroscopiques  $\lambda$  et  $\mu$  sont alors donnés par

$$\lambda(x, y) = \text{St}\left(\frac{\sin \theta}{a}\right)y = sy,$$

$$\mu(x, y) = -\text{St}\left(\frac{\sin \theta}{a}\right)x = -sx.$$

La densité macroscopique résultant de la superposition est alors

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} f(\alpha + sy, \beta - sx) f(\alpha, \beta) d\alpha d\beta \\ = \frac{1}{4} \int_{\alpha^2 + \beta^2 \leq R^2} f(\alpha + sy, \beta - sx) d\alpha d\beta; \end{aligned}$$

C'est l'aire de l'intersection de deux disques de rayons  $R$ , dont les centres sont distants de  $\sqrt{x^2 + y^2} \cdot |s|$ . La densité est donc nulle lorsque  $\sqrt{x^2 + y^2} \geq 2R/|s|$ , et elle est maximum lorsque  $\sqrt{x^2 + y^2} = 0$  (à l'intérieur de la cellule fondamentale qui est ici le carré  $\{|sx| \leq 1, |sy| \leq 1\}$ ). On remarquera que les dimensions des cellules sont inversement proportionnelles à  $s$ ; la densité du moiré, qui est donnée par une convolution, varie continuellement, mais est nulle à l'intérieur d'astroïdes qui sont d'autant plus petits que  $R$  est plus grand. Ils sont vides dès que  $R > 1/\sqrt{2}$ . (Voir Fig. 10, la photographie du bas).

Nous pouvons répéter avec les modifications (mineures) convenables, la plupart des résultats obtenus dans les chapitres précédents pour les réseaux striés. Ainsi, pour une déformation donnée du second réseau, nous aurons des moirés de déformation cellulaires; simplement, nous pouvons cette fois envisager deux déformations indépendantes, opérant chacune sur l'un des deux profils; ces déformations seront données par des fonctions standard:

$$(t, s, y) \mapsto \varphi(t, x, y),$$

$$(t, x, y) \mapsto \psi(t, x, y)$$

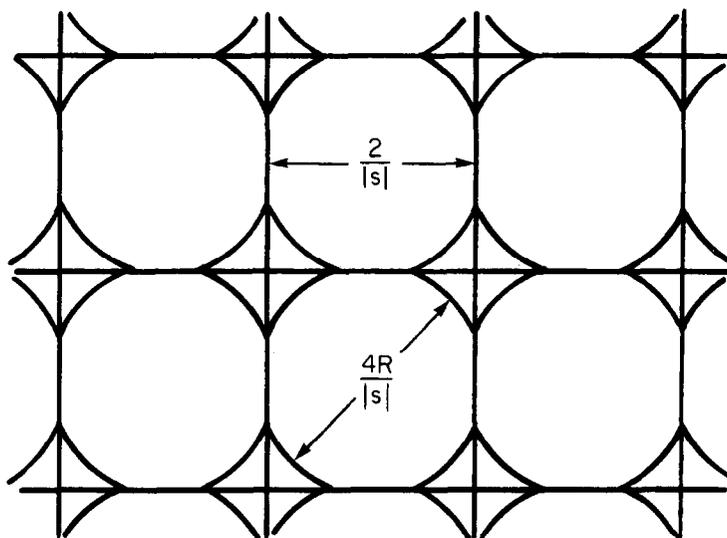


FIGURE 11.

et alors les deux profils du moiré résultant seront

$$\lambda(x, y) = r \frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x, y),$$

$$\mu(x, y) = s \frac{\partial \psi}{\partial t}(0, x, y)$$

où  $r = \text{St}(t_1/a)$  et  $s = \text{St}(t_2/b)$  sont les deux paramètres (macroscopiques) qui mesurent les déformations infinitésimales. Si ces deux déformations résultent de la déformation du support du second réseau, donnée par un champ de vecteurs  $(U(x, y), V(x, y))$ , nous aurons en supposant  $b = a$ :

$$\lambda(x, y) = s \left[ U(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) + V(x, y) \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \right],$$

$$\mu(x, y) = s \left[ U(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial x}(x, y) + V(x, y) \frac{\partial \psi}{\partial y}(x, y) \right].$$

Ces relations montrent que les dimensions des cellules sont inversement proportionnelles à  $s$ ,<sup>14</sup> c'est-à-dire que, lorsque la déformation augmente,

<sup>14</sup>Lorsque le module est uniforme; si celui-ci varie lentement, les dimensions des cellules varieront non seulement en fonction de  $s$ , mais aussi en fonction de  $(x, y)$ .

les cellules deviennent de plus en plus petites et de plus en plus nombreuses. Comme au chapitre 5, on peut vérifier que les cellules filent vers un attracteur, mais celui-ci n'est plus une sous-variété de dimension 1, mais une sous-variété de dimension 0, c'est-à-dire en principe un ensemble discret de points, d'équations:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t}(0, x, y) = 0,$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial t}(0, x, y) = 0.$$

Tous les problèmes examinés aux chapitres précédents se posent et se résolvent de manière analogue pour les réseaux cellulaires. Il est donc inutile, ici, de développer davantage. Toutefois, pour finir, nous tenons à signaler que toute déformation d'un réseau cellulaire donne lieu à un réseau dérivé, et à des réseaux (cellulaires) dérivés à tous les ordres. Ainsi, un réseau cellulaire de profils  $\varphi$  et  $\psi$ , de pas  $a$  et  $b$ , et de module  $f$ , aura un réseau dérivé par rapport à une déformation  $t \mapsto \varphi(t, \dots)$ ,  $t \mapsto \psi(t, \dots)$ , dont les profils seront  $(\partial\varphi/\partial t)(0, \dots)$ ,  $(\partial\psi/\partial t)(0, \dots)$ , les pas  $\sqrt{a}$ ,  $\sqrt{b}$ , et le module  $f * f$ .

#### BIBLIOGRAPHIE

1. L. RAYLEIGH, On the manufacture and theory of diffraction-gratings, *London, Edinburgh, Dublin Philos. Mag. and J. Sci. 4th Ser.* 4, n° 310 (1874), 81-93.
2. G. OSTER ET Y. NISHIJIMA, Les phénomènes de moiré, dans "Les phénomènes naturels," Bibliothèque pour la Science, 1978 (c'est la traduction française d'un article paru dans *Sci. Amer.* (mai 1963)).
3. P. DANTU, Moiré du deuxième ordre, méthode permettant d'obtenir directement les lignes d'égale dilatation linéique, *Rev. Fr. mécanique* n° 17 (1966).
4. A. ROBINSON, "Non-Standard Analysis," *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam 1974.
5. G. REEB, "La mathématique non-standard, vieille de soixante ans?" Publication IRMA, Strasbourg, 1979.
6. G. OSTER, "The Science of Moiré Patterns," Edmund Scientific Co., Barrington, N.J.
7. G. OSTER, Representation and solution of optical problems by Moiré patterns, in "Proceedings, Symposium on Quasi-Optics," pp. 58-68, Wiley-Interscience, New York, 1964..
8. J. GOODMAN, "Introduction à l'optique de Fourier et à l'holographie," Masson et Cie, Paris, 1972 (traduit de l'américain).
9. E. NELSON, Internal set theory: A new approach to non-standard analysis, *Bull. Amer. Math. Soc.* 83, n° 6 (1977).
10. H. TAKASAKI, Moiré topography, *Appl. Opt.* 9, n° 6 (1970), 1467-1472.
11. Y. YOSHINO, M. TSUKIJI, AND H. TAKASAKI, Moiré topography by means of a grating hologram, *Appl. Opt.* 15, n° 10 (1976), 2414-2417.