Discrete Mathematics 17 (1977) 165–172.

PROBLEMES DECIDABLES CONCERNANT LES TOL-LANGAGES UNAIRES

Michel LATTEUX

Département d'Informatique, Université de Lille I, 59650 Villeneuve D'Ascq, France

Received 10 February 1976

Il est démontré, dans ce papier, qu'il est décidable de déterminer si un langage régulier peut être engendré par un TOL-système unaire. Nous obtenons, aussi, en particulier, la décidabilité de l'équivalence entre un TOL-système et un OL-système unaire. Enfin, il est décidable de déterminer, si un TOL-système unaire engendre un OL-langage.

1. Introduction

Les L-systèmes et L-langages ont été introduit en 1968, par Lindenmayer [4,5], pour rendre compte du développement cellulaire de certaines espèces vivantes. La théorie mathématique des L-systèmes a, depuis, connu une extension très rapide; cependant de nombreuses questions restent encore posées, dont la plus célèbre est celle de la décidabilité de l'équivalence de deux DOL-systèmes (cf. [6]). On ne sait pas, non plus, si la régularité est une propriété décidable pour les OL-langages (cf. [11]).

Dans cet article, nous nous intéresserons uniquement aux L-systèmes définis sur un alphabet d'une seule lettre, les L-systèmes unaires. Les OL-langages unaires (UL-langages) ont été complètement caractérisés [1,2] et Salomaa a donné un algorithme permettant de déterminer si un langage régulier unaire pouvait être engendré par un UL-système [10].

La restriction à un alphabet unaire des TOL-systèmes, définis par Rozenberg [7] en laissant le choix, à chaque étape de la dérivation, entre les différentes tables du système, permet de définir une classe de langages nettement plus complexe que la classe des UL-langages. Ces TOL-langages unaires (TUL-langages) on été étudiés dans [3] où il est montré que tout TUL-système ne contenant que des tables non déterministes ($\bar{D}$TUL-système) engendre un langage régulier effectivement constructible. De plus, il est décidable de déterminer si un TUL-système quelconque engendre un langage régulier et dans ce cas, on peut effectivement construire le langage régulier [3]. Ceci va nous permettre d'étendre, en premier lieu, le résultat de Salomaa [10] en montrant qu'il est décidable de déterminer si un langage régulier unaire peut être engendré par un UL-, TUL-, ou $\bar{D}$TUL-système.

Pour ce faire, nous utiliserons la même technique qui consiste à trouver, pour tout langage régulier unaire R, un entier $b(R)$ qui vérifie: R est un TUL-langage si et seulement si R peut être engendré par un TUL-système dont tous les éléments sont inférieurs à $b(R)$. Nous en déduisons, ensuite, d'autres résultats de décidabilité tels que: on peut décider si un TUL-système engendre un UL-langage ou engendre le même langage qu'un UL-système fixé.

2. Définitions et notations

Comme les langages considérés dans ce travail sont définis sur un alphabet d'une seule lettre, nous remplacerons chaque mot par sa longueur. $\mathbf{N}$ désigne l'ensemble des entiers naturels et $\mathbf{N}_+ = \mathbf{N} \setminus \{0\}$ est l'ensemble des entiers positifs.

Une *table* est une séquence finie, non vide, strictement croissante, d'éléments de $\mathbf{N}$. Par la suite, nous confondons tout ensemble fini non vide inclus dans $\mathbf{N}$ avec la table que l'on obtient en ordonnant cet ensemble.

Une table $P = (k_1, \ldots, k_t)$ est *déterministe* si $t = 1$. Si P est non déterministe, sa *caractéristique* est égale au plus grand commun diviseur (pgcd) des entiers $k_t - k_1, k_t - k_2, \ldots, k_t - k_{t-1}$. La relation binaire $\Longrightarrow_P$ est définie sur $\mathbf{N}$ par $x \Longrightarrow_P y$ ssi

$$y = \sum_{i=1}^{t} x_i k_i \quad \text{avec} \sum_{i=1}^{t} x_i = x \quad \text{et } \forall i \in \{1, \ldots, t\}, x_i \in \mathbf{N}.$$

Pour tout $x \in \mathbf{N}$, $S_P(x)$ est égal à $\{y \in \mathbf{N} / x \Longrightarrow_P y\}$. Si Q est un ensemble inclus dans $\mathbf{N}$ tel que $P' = P \cap Q$ soit non vide et si $x \Longrightarrow_{P'} y$, nous dirons que la dérivation $x \Longrightarrow_P y$ *n'utilise que des éléments de* Q.

Un *TUL-schéma* $G = \{P_1, \ldots, P_n\}$ est un ensemble fini non vide de tables. La relation binaire $\Longrightarrow_G$ est définie sur N par $x \Longrightarrow_G y$ ssi il existe dans G une table P telle que $x \Longrightarrow_P y$. La clôture transitive de cette relation est notée $\Longrightarrow_G^*$. Le plus grand entier apparaissant dans une table de G sera noté $\sup(G)$. Si G possède une table non déterministe, sa *caractéristique* est égale au plus petit commun multiple (ppcm) des caractéristiques de ses tables non déterministes.

Pour $w \in \mathbf{N}_+$, (G, w) est un *TUL-système* qui sera appelé *UL-système* si G ne possède qu'une table et *DTUL-système* (*$\bar{D}$TUL-système*) si toutes les tables de G sont (non) déterministes. Le langage engendré par le TUL-système (G, w), $L(G, w) = \{z \in \mathbf{N} / w \Longrightarrow_G^* z\}$ est un *TUL-langage*. Il est aisé de vérifier l'équivalence entre les TUL-systèmes et TOL-systèmes définis sur une seule lettre. Pour $X = U$, DTU, $\bar{D}$TU un *XL-langage* est un langage qui peut être engendré par un XL-système.

Enfin, pour $x, y \in \mathbf{N}$, $x + \mathbf{N}y$ désignera l'ensemble $\{x + \lambda y / \lambda \in \mathbf{N}\}$ et pour $\delta \in \mathbf{N}_+$ nous poserons $x \equiv y \text{ mod.} \delta$ ssi x et y ont le même reste dans la divisions entière par δ.

Terminons cette section, en donnant un exemple de TUL-langage. Soit $G =$

$\{(0,2), (0,3)\}$. Le langage $L(G,1) = \{1\} \cup \mathbf{N}2 \cup \mathbf{N}3$ est un Tul-langage régulier et il est facile de vérifier que ce n'est pas un UL-langage.

3. "TUL-Arité" des langages réguliers unaires

Commençons par rappeler quelques résultats démontrés dans [3] et que nous utiliserons à plusieurs reprises par la suite:

Théorème 1 [3]. *Soit (G, w) un TUL-système. Il est décidable de déterminer si $L(G, w)$ est un langage régulier et dans ce cas on peut effectivement le construire.*

Dans le cas particulier où l'on considère un TUL-système ne contenant que des tables non déterministes, on obtient:

Théorème 2 [3]. *Tout langage engendré par un $\tilde{D}$TUL-système est un langage régulier effectivement constructible.*

Enfin le résultat suivant nous sera utile pour démontrer le lemme de base de cette section:

Lemme 1 [3]. *Soit $P = (v, u + k_1\delta, \ldots, u + k_t\delta)$ une table non déterministe de caractéristique δ. Alors pour tout entier x, y vérifiant $k_t \sum_{i=1}^{t} k_i \leq y \leq xk_1$, $xu + y\delta$ appartient à $S_P(x)$.*

Considérons maintenant, un langage régulier unaire R et posons nous la question de savoir s'il existe un TUL-système (G, w) tel que $L(G, w) = R$.

Dans le cas où R est fini, $\sup(G) \leq 1$ et R est nécessairement d'une des formes suivantes: $\{w\}$, $\{o, w\}$ ou $\{0, 1, \ldots, w\}$.

Supposons donc que R est infini. D'après Salomaa (cf. [8, 10]), il existe deux ensembles finis F et I inclus dans $\mathbf{N}$ et deux entiers a et d tels que:

(i) $R = R \bigcup_{b \in I}(a + b + \mathbf{N}d)$,
(ii) $F \subseteq \{0, \ldots, a-1\}$,
(iii) $0 \in I \subseteq \{0, \ldots, d-1\}$,
(iv) $a \geq 2$ et $d \geq 1$,
(v) Si $R = H \bigcup_{x \in H'}(x + \mathbf{N}d')$ avec H et H' finis, alors d' est un multiple de d.

Les éléments, F, I, a et d resteront fixés tout au long de cette section. Pour tout $x \in \mathbf{N}$, $\bar{x}$ désignera l'unique élément de $\{0, \ldots, d-1\}$ qui vérifie $\bar{x} \equiv x \bmod. d$. Enfin D sera égal à l'ensemble $\{\overline{a + b}/b \in I\}$.

Lemme 2. *S'il existe un TUL-système (G, w) qui engendre R, alors pour tout z vérifiant $\bar{z} \in D$, il existe, dans G, une table P de caractéristique δ et un entier y tels que $z \equiv yu$ mod. δ avec $u = \inf(P)$ et $\bar{y} \in D$.*

Démonstration. Soit d' la caractéristique du TUL-schéma G. Comme $L(G, w)$ est régulier, il existe deux ensembles finis H et H' tels que $R = L(G, w) = H \bigcup_{s \in H'} (s + \mathbb{N}d')$. Par définition de d (cf. (v)), d' est un multiple de d et comme $\bar{z} \in D$, $L(G, w) \cap (z + \mathbb{N}d')$ est infini et d'après la démonstration du Théorème 3 de [3], il existe $w' \in L(G, w)$ tel que $L(G_N, w') \cap (z + \mathbb{N}d')$ soit infini avec $G_N = \{P \in G/P$ est une table non déterministe$\}$. Le TUL-schéma G_N est encore de caractéristique d', $L(G_N, w')$ est régulier (Théorème 2) et il existe deux ensembles finis H_1 et H_1' tels que $L(G_N, w') = H_1 \bigcup_{s \in H_1'} (s + \mathbb{N}d')$. Comme $L(G_N, w') \cap (z + \mathbb{N}d')$ est infini, il existe un entier positif λ_0 tel que $z_0 = z + \lambda_0 d'$ soit supérieur à w' et à $\sup(H_1) \times \sup(G_N)$ et appartienne à $L(G_N, w')$. Etant donné que z_0 appartient à $L(G_N, w') \setminus \{w'\}$, il existe $y \in L(G_N, w')$ et une table $P \in G_N$ tels que $y \Longrightarrow_P z_0$. Donc $z_0 = yu + \beta\delta$ avec $u = \inf(P)$ et δ caractéristique de P donc divisant d', ce qui implique $z \equiv yu \bmod. \delta$.
De plus, d'après le choix de λ_0, y est supérieur à $\sup(H_1)$, donc $y + \mathbb{N}d' \subseteq L(G_N, w') \subseteq L(G, w) = R$ et $\bar{y} \in D$.

Démontrons, maintenant, notre lemme de base.

Lemme 3. *S'il existe un TUL-système (G, w) tel que $R = L(G, w)$, il existe un TUL-système (G', w') engendrant R et tel que w' et* $\sup(G')$ *soient inférieurs à* $(a + 2d - 1)^4$.

Démonstration. Posons $B = (a + 2d - 1)^4$, $w' = w$ si $w \leq B$ et $w' = a$ si $w > B$. A toute table P de G, faisons correspondre la table

$$P' = \{x \in P/x \leq B\} \cup \{x \in \mathbb{N}/a \leq x \leq B, \exists y \geq a, y \in P, y \equiv x \bmod. d\}.$$

Il est clair que si $\sup(P)$ est inférieur à a, P' est égal à P. Dans le cas contraire, P' est une table non déterministe de caractéristique égale à d si P est déterministe et à $\delta' = \operatorname{pgcd}(d, \delta)$ si P est non déterministe de caractéristique δ. Posons $G' = \{P'/P \in G\}$ et montrons que $L(G', w') = L(G, w) = R$. Soient $y \in L(G, w)$, $P' \in G'$ et $z \in S_{P'}(y)$. Si la dérivation $y \Longrightarrow_{P'} z$ n'utilize que des éléments inférieurs à a, $y \Longrightarrow_P z$ et $z \in L(G, w)$. Dans le cas contraire, $z \geq a$ et par construction de P', il existe $z' \equiv z \bmod. d'$, $z' \geq a$ tel que $y \Longrightarrow_P z'$. Donc $z' \in L(G, w)$, $\bar{z} = \bar{z}'$ et $z \in R = L(G, w)$. Comme $w' \in L(G, w)$, nous en déduisons, par induction, $L(G', w') \subseteq L(G, w)$.

Montrons, maintenant, que $z \leq B$ et $z \in L(G, w)$ implique $z \in L(G', w')$. Pour cela, nous utiliserons la propriété:

$$\text{Si } x \Longrightarrow_P y \text{ avec } y \leq B \text{ alors } x \Longrightarrow_{P'} y, \qquad (1)$$

qui provient du fait que, si y est inférieur à B, la dérivation $x \Longrightarrow_P y$ ne peut utiliser que des éléments de P, inférieurs à B qui sont donc tous dans P'. S'il existe une dérivation $w \Longrightarrow_G y_1 \cdots \Longrightarrow_G y_p = z \leq B$ avec $w \leq y_1 \leq \cdots \leq y_p$, nous avons, d'après (1), $w \Longrightarrow^*_{G'} z$ et comme $w \leq B$, $w' = w$ et $z \in L(G', w')$. Sinon, il existe une dérivation $w \Longrightarrow^*_G y \Longrightarrow_P y_1 \cdots \Longrightarrow_G y_p = z$, avec $y > y_1$ et $y_1 \leq \cdots \leq y_p =$

$z \leqslant B$. Comme y est supérieur à y_1, la table P contient O. Par construction, $L(G', w')$ est infini, donc il existe dans $L(G', w')$, un entier y' supérieur à y et $y' \Rightarrow_P y_1$ ce qui implique, d'après (1), $y' \Rightarrow_P y_1 \Rightarrow_G z \in L(G', w')$.

Il nous reste à montrer, par récurrence sur z, que $z \in L(G, w)$ entraine $z \in L(G', w')$. Nous venons de montrer cette propriété pour $z \leqslant B$; prenons donc $z > B$. Alors $\bar{z}$ appartient à D et d'après le Lemme 2, il existe dans G une table P non déterministe de caractéristique δ et $y \in \mathbf{N}$ tels que $\bar{y} \in D$ et $z \equiv yu \bmod. \delta$ avec $u = \inf(P)$.

Distinguons deux cas:

(1) $\operatorname{Sup}(P) < a$. Alors $P' = P$. Il existe $y_0 \equiv y \bmod. d\delta$ tel que: $(y_0 - d\delta)(u + \delta) \leqslant z \leqslant y_0(u + \delta)$. Comme $u + \delta \leqslant \sup(P) < a$, $y_0 a \geqslant y_0(u + \delta) \geqslant z > B$. Posons $C = \sup(P)(\sum_{s \in P} s)$. Il est facile de vérifier que $C \leqslant (a(a-1)^2)/2$ donc $y_0 \geqslant B/a > C + ad \geqslant C + d(u + \delta)$ et $y_0 u + C\delta \leqslant (y_0 - d\delta)(u + \delta)$. Nous en déduisons $y_0 u + C \leqslant z \leqslant y_0(u + \delta)$, donc $z = y_0 u + \beta\delta$ avec $C \leqslant \beta \leqslant y_0\delta$ et d'après le Lemme 1, $z \in S_{P'}(y_0)$. Comme $\bar{y}_0 = \bar{y} \in D$ et $y_0 \geqslant a$, $y_0 \in R = L(G, w)$. Si $y_0 < z$, l'hypothèse de récurrence implique $y_0 \in L(G', w')$ donc $z \in L(G', w')$. Si, au contraire $y_0 \geqslant z$, $u = \inf(P) = 0 \in P'$ et comme $L(G', w')$ est infini, il existe $y' \in L(G', w')$ tel que $y' \geqslant y_0$, donc $y' \Rightarrow_{P'} z \in L(G', w')$.

(2) $\operatorname{Sup}(P) \geqslant a$. Alors P' est de caractéristique $\delta' = \operatorname{pgcd}(d, \delta)$ et $z \equiv yu' \bmod. \delta'$ avec $u' = \inf(P')$. Posons $P'' = \{x \in P' / x \leqslant a + 2d - 1\}$ et $E = \sup(P'')(\sum_{s \in P''} s)$. La caractéristique de P'' est encore δ' et $E \leqslant (a + 2d - 1)^2(a + 2d)/2$. Il existe $y_1 \equiv y \bmod. d$ vérifiant $(y_1 - d)(u' + \delta') \leqslant z \leqslant y_1(u' + \delta')$. Comme $u' + \delta' \leqslant a + 2d - 1$ et $z > B$, $y_1 > (a + 2d - 1)^3$. De plus $a \geqslant 2$ et $d \geqslant 1$ impliquent $(a + 2d - 1)^3 \geqslant (a + 2d - 1)^2(a + 2d)/2 + d(a + 2d - 1) \geqslant E + d(u' + \delta')$, donc $y_1\delta' \geqslant E\delta' + d(u' + \delta')$, $y_1 u' + E\delta' \leqslant (y_1 - d)(u' + \delta') \leqslant y_1(u' + \delta')$ et $z = y_1 u' + \lambda\delta'$ avec $E \leqslant \lambda \leqslant y_1\delta'$. Le Lemme 1 entraine alors $z \in S_{P''}(y_1) \subseteq S_{P'}(y_1)$. En outre $\bar{y}_1 = \bar{y} \in D$, $y_1 \geqslant a$, donc $y_1 \in R = L(G, w)$ et nous pouvons en déduire, de la même façon que dans le cas 1, $z \in L(G', w')$.

Comme il n'existe qu'un nombre fini du TUL-système (G', w') vérifiant $\sup(G') \leqslant (a + 2d - 1)^4$ et $w' \leqslant (a + 2d - 1)^4$, le Théorème 1 et la décidabilité de l'égalité pour les langages réguliers impliquent:

Théorème 3. *Il est décidable de déterminer si un langage régulier unaire R est un TUL-langage et, dans ce cas, on peut effectivement construire un TUL-système qui engendre R.*

Dans la démonstration du Lemme 3, le nombre de tables de G' n'est pas supérieur à celui de G. Nous retrouvons ainsi, mais avec une borne plus élevée, le résultat de Salomaa:

Corollaire 1. [10] *Il est décidable de déterminer si un langage régulier unaire R est un UL-langage et, dans ce cas, on peut effectivement construire un UL-système qui engendre R.*

Remarque. Il existe des TUL-langages réguliers qui ne peuvent pas être engendrés par des TUL-systèmes ne contenant que des tables non déterministes ($\bar{D}$TUL-systèmes). Considérons, en effet, le TUL-système $(G, 1)$ avec $G = \{(2), (4, 8)\}$. Il est facile de vérifier que $L(G, 1)$ est égal au régulier $R = \{1, 2\} \cup (4 + \mathbb{N}4)$. Supposons qu'il existe un $\bar{D}$TUL-système (G', w') engendrant R. Comme $0 \notin R$, w' est égal à 1 et 2 doit appartenir à une table P' de G'. Si P' contient aussi 1, alors $L(G', 1) = \mathbb{N} \neq R$. Il existe, donc, $\delta > 0$ tel que $L(G'', 1) \subseteq R$ avec $G'' = \{(2, 2 + \delta)\}$. Ceci implique $2 + \delta$ et $4 + \delta \in 4 + \mathbb{N}4$, ce qui est impossible.

Cependant, le nombre de tables déterministes du TUL-système (G', w'), que l'on construit au cours de la démonstration du Lemme 3, n'est pas supérieur au nombre de tables déterministes du TUL-système (G, w) de départ. Nous pouvons donc en déduire:

Corollaire 2. *Il est décidable de déterminer si un langage régulier unaire R est un $\bar{D}$TUL-langage et, dans ce cas, on peut effectivement construire un $\bar{D}$TUL-système qui engendre R.*

L'algorithme du Théorème 3, n'est guère pratique, et il pourrait être intéressant de l'améliorer ou de trouver, au moins dans certains cas particuliers, des algorithmes utilisables. Ce théorème permet, cependant, d'obtenir d'autres résultats de décidabilité.

4. Autres problèmes décidables

Montrons, en premier lieu, qu'il est possible de déterminer si un TUL-langage appartient à différentes sous-classes de la classe des TUL-langages:

Théorème 4. *Il est décidable de déterminer si un TUL-système (G, w) engendre un DTUL-langage, un $\bar{D}$TUL-langage ou un UL-langage.*

Démonstration. Dans le cas où $L(G, w)$ est fini, le résultat est immédiat. Supposons, donc, que $L(G, w)$ est infini. Montrons, alors, que si G contient une table P non déterministe, $L(G, w)$ contient un langage régulier infini. Distinguons deux cas:

(i) $P = (0, 1)$. Etant donné que $L(G, w)$ est infini et que pour tout $x \in \mathbb{N}$, $L(\{P\}, x) = \{0, 1, \ldots, x\}$, $L(G, w)$ et égal à $\mathbb{N}$.

(ii) $P \neq (0, 1)$. $L(P, w) \subseteq L(G, w)$ est un $\bar{D}$TUL-langage infini donc un langage régulier infini (Théorème 2).

Comme aucun DTUL-langage ne contient un langage régulier infini [3], nous en déduisons: $L(G, w)$ est un DTUL-langage si et seulement si (G, w) et un DTUL-système.

Si $L(G, w)$ est régulier, ce qui est décidable, on peut construire effectivement ce régulier (Théorème 1) et d'après les Corollaires 1 et 2, décider si $L(G, w)$ est un $\bar{D}$TUL-langage ou un UL-langage.

Enfin, si $L(G, w)$ n'est pas régulier, il ne peut pas être un $\bar{D}$TUL-langage qui est toujours régulier (Théorème 2). En outre, si $L(G, w)$ est un UL-langage, c'est nécessairement un DUL-langage ce qui entraine que (G, w) doit être un DTUL-système. Posons, dans ce cas, $G = \{(u_1), \ldots, (u_n)\}$. On peut supposer que $1 < u_1 < \cdots < u_n$ et il est alors facile de vérifier que $L(G, w)$ est un UL-langage si et seulement si pour tout $i \in \{2, \ldots, n\}$, $u_i \in L(\{u_1)\}, 1)$.

Intéressons-nous, maintenant, au problème de l'égalité de deux langages:

Théorème 5. *Soient (G, w) un TUL-système et L un $\bar{D}$TUL-langage, DTUL-langage, UL-langage ou un langage régulier. Il est décidable de déterminer si $L = L(G, w)$.*

Démonstration. Dans le cas où L est un $\bar{D}$TUL-langage (ou un langage régulier) ce régulier est effectivement constructible (Théorème 2) et $L(G, w) = L$ entraine que $L(G, w)$ est régulier. Comme on peut construire effectivement ce régulier, on est ramené à l'égalité de deux langages réguliers.

Dans le cas où L est un DTUL-langage, d'après la démonstration du théorème précédent, $L(G, w) = L$ implique que (G, w) est un DTUL-système. Posons alors, $G = \{(x_1), \ldots, (x_s)\}$ et $G' = \{(y_1), \ldots, (y_t)\}$ avec $L(G', w') = L$. Il est facile de vérifier que $L(G, w)$ est égal à $L(G', w')$ si et seulement si $w = w'$, $\forall i \in \{1, \ldots, s\}$, $x_i \in L(G', 1)$ et $\forall j \in \{1, \ldots, t\}$, $y_j \in L(G, 1)$. Nous pouvons conclure cette démonstration en remarquant que tout UL-système est soit un DTUL-système soit un $\bar{D}$TUL-système.

Terminons, en mentionnant les deux problèmes non encore résolus:

(i) Trouver un algorithme qui permette de décider si deux TUL-systèmes engendrent le même langage.

(ii) Trouver un algorithme qui, étant donné deux TUL-schémas G et G', permette de décider si $\forall w \in \mathbb{N}_+$, $L(G, w) = L(G', w)$.

Remerciements

L'auteur tient à exprimer sa reconnaissance au Professeur A. Salomaa qui est à l'origine de ce travail.

Bibliographie

[1] G.T. Herman et G. Rozenberg, Developmental Systems and Languages (North-Holland Publishing Company, Amsterdam, 1975).

[2] G.T. Herman, K.P. Lee, J. Van Leeuwen et G. Rozenberg, Characterization of Unary Developmental Languages, Discrete Math. 6 (1973) 235–247.

[3] M. Latteux, Sur les TOL-systèmes Unaires, à paraître dans la Revue Française d'Automatique, Informatique et Recherche Opérationnelle, Série Rouge.

[4] A. Lindenmayer, Mathematical Models for Cellular Interactions in Development, Part I, J. Theoret. Biol. 18 (1968) 280–299.

[5] A. Lindenmayer, Mathematical Models for Cellular Interactions in Development, Part II, J. Theoret. Biol. 18 (1968) 300–315.

[6] M. Nielsen, On the Decidability of some Equivalence Problems for DOL-Systems, Inf. Control 25 (1974) 166–193.

[7] G. Rozenberg, TOL-Systems and Languages, Inf. Control 23 (1973) 357–381.

[8] A. Salomaa, Theorems on the Representation of Events in Moore-Automata, Ann. Univ. Turku, Ser. AI 69 (1964).

[9] A. Salomaa, Formal Languages, (Academic Press, New York, 1973).

[10] A. Salomaa, Solution of a Decision Problem Concerning Unary Lindenmayer Systems, Discrete Math. 9 (1974) 71–77.

[11] A. Salomaa, Comparative Decisions Problems between Sequential and Parallel Rewriting, Computer Science Department, University of Aarhus (1975).