Bull. Sci. math. 126 (2002) 413–431

Convergence des EDSRs et homogéneisation des inégalités variationnelles semilinéaires dans un convexe

El Hassan Es-Saky, Youssef Ouknine

Université Cadi Ayyad, Faculté des Sciences Semlalia. Département de Mathématiques, B.P. 2390, 40000 Marrakech, Maroc

Reçu le juillet 2001

Présenté par D. Nualart

Abstract

We study the limit of the solution of a Semi-linear Variational Inequality (SVI for short) involving a second order differential operator of parabolic type with periodic coefficients and highly oscillating term. Our basic tool is the approach given by Pardoux [16]. In particular, we use the weak convergence of an associated reflected Backward Stochastic Differential Equation (BSDE for short).
© 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. All rights reserved.

AMS classification: 60H10; 35K60

Mots-clés : Equations différentielles stochastiques rétrogrades réfléchies ; Homogénéisation ; Topologie de Meyer–Zheng

1. Introduction

La théorie de l'homogénéisation s'est considérablement dévelopée ces dérnières années et constitue une discipline à part entière. Dans leur livre Bensoussan, Lions et Papanicolaou [2] ont démontré que cela pouvait se faire par les méthodes probabilistes (voir aussi [5]). Depuis, cette approche s'est développée parrallèlement à l'approche analytique. On pourra trouver un aperçu de la diversité des problèmes dans les références [3–7,11,15].

L'objectif de ce papier est l'étude de l'homogénéisation des Inégalités Variationelles Semilinéaires (IVS) paraboliques de second ordre à coefficients périodiques. Notre

Adresses e-mail : essaky@ucam.ac.ma (E.H. Es-Saky), ouknine@ucam.ac.ma (Y. Ouknine).

0007-4497/02/$ – see front matter © 2002 Éditions scientifiques et médicales Elsevier SAS. Tous droits réservés.
PII: S0007-4497(02)01120-X

approche, purement probabiliste, généralise le travail de Pardoux [16] au cas réfléchie en se basant sur l'interprétation des solutions des IVS en terme des solutions des EDSRs réfléchies (cf. Pardoux–Rascanu [18]).

Le papier est organisé comme suit : La Section 2 contient quelques rappels et hypothèses pour la suite. Nous traitons la convergence de la famille des processus $(Y^\varepsilon, Z^\varepsilon, U^\varepsilon)$ solution d'une EDSR refléchie dans la Section 3. Dans la Section 4, nous donnons une application pour l'homogénéisation d'une IVS parabolique à coefficients périodiques.

2. Préliminaire

On considère l'EDS suivante : pour $\varepsilon > 0$, $x \in R^d$,

$$X_s^\varepsilon = x + \int_0^s \frac{1}{\varepsilon} b\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dr + \int_0^s c\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dr + \int_0^s \sigma\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}\right) dB_r \tag{2.1}$$

où $\{B_t; t \geqslant 0\}$ est un mouvement Brownien d-dimentionnel, $c : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, $b : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$ et $\sigma : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^{d\times d}$ sont mesurables, bornées et périodiques de période un dans chaque direction. On supposera que $a(x) := \sigma\sigma^*(x)$ est continue, que

$$a(x) \geqslant \alpha I > 0, \quad \forall x \in R^d, \tag{2.2}$$

et enfin

$$\sum_{i=1}^d \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_i} \in \mathbb{L}^\infty(\mathbb{R}^d), \quad j = 1, \ldots, d. \tag{2.3}$$

Les conditions ci-dessus entrainent l'existence d'une solution de l'EDS (2.1) $\{X_t^\varepsilon;\ t \geqslant 0\}$ unique en loi (cf. Stroock–Varadhan [21]).

Pour tout $x \in \mathbb{R}^d$, $\varepsilon > 0$, $t > 0$, soit $\{(Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, U_s^\varepsilon);\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ le processus progressivement mesurable à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \mathbb{R}^k$ solution de l'EDSR reflechie :

$$\begin{cases} Y_s^\varepsilon = g(X_t^\varepsilon) + \dfrac{1}{\varepsilon}\displaystyle\int_s^t e\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^\varepsilon\right) dr + \int_s^t f\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^\varepsilon\right) dr \\ \qquad - \displaystyle\int_s^t Z_r^\varepsilon\, dB_r - \int_s^t U_r^\varepsilon\, dr, \\ (Y^\varepsilon, U^\varepsilon) \in Gr(\partial\phi)\, d\mathbb{P} \times dt \text{ sur } \Omega \times [0, t], \end{cases} \tag{2.4}$$

où g est continue, à croissance polynomiale et à valeurs dans un ouvert borné et convexe Θ de $\mathbb{R}^k$ et

$$\phi(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in \mathbf{cl}(\Theta), \\ +\infty & \text{sinon,} \end{cases}$$

où l'on a noté $\mathbf{cl}(\Theta)$ la fermeture de Θ.

$$\partial\phi(u) = \{u^* \in \mathbb{R}^k:\ \langle u^*, v-u\rangle + \phi(u) \leqslant \phi(v),\ \forall v \in \mathbb{R}^k\},$$
$$Dom\big(\partial(\phi)\big) = \{u \in \mathbb{R}^k:\ \partial\phi(u) \neq \emptyset\},$$
$$Gr(\partial\phi) = \{(u,u^*) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k:\ u \in Dom\big(\partial(\phi)\big) \text{ et } u^* \in \partial\phi(u)\}.$$

On vérifie que ϕ est une fonction convexe, s.c.i, propre avec $Dom(\phi) = \mathbf{cl}(\Theta)$ et que

$$\partial\phi(x) = \{y \in \mathbb{R}^k;\ \langle y, x-z\rangle \geqslant 0,\ \forall z \in \mathbf{cl}(\Theta),\ \text{pour } x \in \mathbf{cl}(\Theta)\}.$$

On note $\mathbb{T}^d = \frac{\mathbb{R}^d}{\mathbb{Z}^d}$ et on suppose que : b satisfait la condition dite de centrage

$$\int_{\mathbb{T}^d} b_i(x)\,\mu(dx) = 0, \quad i = 1, \ldots, d, \tag{2.5}$$

et a satisfait les conditions (2.2) et (2.3). e et f sont des fonctions mesurables de $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ périodiques de période 1 dans toutes les directions continues par rapport à y, uniformément par rapport à x et $\forall y \in \mathbb{R}^k$

$$\int_{\mathbb{T}^d} e(x,y)\,\mu(dx) = 0, \tag{2.6}$$

et e deux fois continûement différentiable en y, uniformément par rapport à x. De plus pour un $\mu \in \mathbb{R}$, $\forall x \in \mathbb{R}^d$, $y, y' \in \mathbb{R}^k$,

$$\big\langle f(x,y) - f(x,y'), y-y'\big\rangle \leqslant \mu|y-y'|^2. \tag{2.7}$$

On suppose de plus qu'il existe une constante K' telle que

$$|e(x,y)| + \left|\frac{\partial e}{\partial y}(x,y)\right| + \left|\frac{\partial^2 e}{\partial y^2}(x,y)\right| \leqslant K', \quad \forall x \in \mathbb{T}^d,\ y \in \mathbb{R}^k, \tag{2.8}$$

et

$$|f(x,y)| \leqslant K, \tag{2.9}$$

et que

$$0 \in \Theta. \tag{2.10}$$

Soit $\{\widetilde{X}_t;\ t \geqslant 0\}$ le processus à valeurs dans $\mathbb{T}^d = \frac{\mathbb{R}^d}{\mathbb{Z}^d}$ de générateur

$$L = \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{d} b_i(x)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

et $\mu(dx) = p(x)\,dx$ son probabilité invariante (cf. section 2 dans Pardoux [16]). De (2.5) et (2.6), on déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}^k$, les deux équations de Poisson

$$\begin{cases} L\hat{b}_i(x) + b_i(x) = 0, & i = 1, \ldots, d, \\ L\hat{e}(x,y) + e(x,y) = 0, & x \in \mathbb{T}^d,\ y \in \mathbb{R}^k, \end{cases}$$

admet respectivement une solution donnée par

$$\hat{b}_i = \int_0^\infty \mathbb{E}_x b(\widetilde{X}_t)\,dt, \quad x \in \mathbb{T}^d,\ i = 1, \ldots, d;$$

respectivement

$$\hat{e}(x,y)=\int_0^{\infty}\mathbb{E}_x e(\widetilde{X}_s,y)\,ds,$$

qui satisfait : $\hat{e}\in\mathcal{C}^{0,2}(\mathbb{T}^d\times\mathbb{R}^k)$, $\hat{e}(.,y)$, $\frac{\partial\hat{e}}{\partial y}(.,y)$, $\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial y^2}(.,y)\in W^{2,p}(\mathbb{T}^d)$, $\forall p\geqslant 1$, $y\in\mathbb{R}^k$, et pour un $K'>0$,

$$\|\hat{e}(.,y)\|_{W^{2,p}(\mathbb{T}^d)}+\left\|\frac{\partial\hat{e}}{\partial y}(.,y)\right\|_{W^{2,p}(\mathbb{T}^d)}+\left\|\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial y^2}(.,y)\right\|_{W^{2,p}(\mathbb{T}^d)}\leqslant K'$$

(voir Pardoux–Veretennikov [20]). Posons

$$A=\int_{\mathbb{T}^d}(I+\nabla\hat{b})a(I+\nabla\hat{b})^*(x)\,\mu(dx),$$

$$C(y)=\int_{\mathbb{T}^d}(I+\nabla\hat{b})\left(c+a\frac{\partial^2\hat{e}^*}{\partial x\partial y}(.,y)\right)(x)\,\mu(dx),$$

$$D(y)=\int_{\mathbb{T}^d}\left[\left\langle\frac{\partial\hat{e}}{\partial x},c\right\rangle(.,y)-\frac{\partial\hat{e}}{\partial y}(.,y)e(.,y)+\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial x\partial y}(.,y)a\frac{\partial\hat{e}^*}{\partial x}(.,y)\right.$$
$$\left.+f(.,y)\right](x)\,\mu(dx).$$

On pose aussi

$$M_t^{\varepsilon}=-\int_0^t Z_r^{\varepsilon}\,dB_r\quad\text{et}\quad K_t^{\varepsilon}=-\int_0^t U_r^{\varepsilon}\,ds.$$

Notre but est de démontrer que la famille $(X^{\varepsilon},Y^{\varepsilon},M^{\varepsilon},K^{\varepsilon})$ converge en loi vers (X,Y,M,K) où

$$X_s=x+\int_0^s C(Y_r)\,dr+M_s^x\quad\text{avec }\{M_s^x;\,s\geqslant 0\}\tag{2.11}$$

un mouvement Brownien non standard satisfaisant $\langle\langle M^x\rangle\rangle_s=As$, et

$$Y_s=g(X_t)+\int_s^t D(Y_r)\,dr+M_t-M_s+K_t-K_s.$$

A partir des théorèmes limites de $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, M^\varepsilon, K^\varepsilon)$ on peut déduire des résultats d'homogénéisation pour l'inéquation variationelle semilinéaire ci-dessous

$$\begin{cases} \forall s \in [0,t], \quad x \in \mathbb{R}^d, \\ \dfrac{\partial u^\varepsilon}{\partial s}(s,x) - \dfrac{1}{2}\displaystyle\sum_{i,j=1}^{d} a_{ij}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\frac{\partial^2 u^\varepsilon}{\partial x_i \partial x_j}(s,x) - \sum_{i=1}^{d}\left(\frac{1}{\varepsilon}b_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) + c_i\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right)\frac{\partial u^\varepsilon}{\partial x_i}(s,x) \\ \quad - \left(\dfrac{1}{\varepsilon}e\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(s,x)\right) - f\left(\dfrac{x}{\varepsilon}, u^\varepsilon(s,x)\right)\right) \in \partial\phi\big(u^\varepsilon(s,x)\big), \\ u^\varepsilon(0,x) = g(x), \quad u^\varepsilon(s,x) \in Dom(\phi) = \mathbf{cl}(\Theta). \end{cases}$$

3. Résultat principal

Le résultat fondamental de cet article est le théorème suivant :

Théorème 3.1. *Sous les conditions précédentes la famille* $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, M^\varepsilon, K^\varepsilon)$ *converge en loi vers* (X, Y, M, K) *dans* $C([0,t], \mathbb{R}^d) \times (D([0,t], \mathbb{R}^k))^2 \times C([0,t], \mathbb{R}^k)$*, où* $D([0,t], \mathbb{R}^k)$ *est l'espace des fonctions càdlàg muni de la topologie de Meyer–Zheng et* $C([0,t], \mathbb{R}^d)$ *est l'espace des fonctions continues muni de la topologie de la convergence uniforme et* $Y_0^\varepsilon \to Y_0$ *dans* $\mathbb{R}$.

Rappelons que $\{X_s^\varepsilon,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ est la solution de l'EDS

$$X_s^\varepsilon = x + \int_0^s \left(\frac{1}{\varepsilon}b\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}\right) + c\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}\right)\right)dr + \int_0^s \sigma\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}\right)dB_r,$$

$\forall \varepsilon > 0$, soit $\{(Y_s^\varepsilon, Z_s^\varepsilon, U_s^\varepsilon),\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ le processus à valeurs dans $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k\times d} \times \mathbb{R}^k$ progressivement mesurable solution de l'EDSR

$$Y_s^\varepsilon = g\big(X_t^\varepsilon\big) + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t e\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^\varepsilon\right)dr + \int_s^t f\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^\varepsilon\right)dr - \int_s^t Z_r^\varepsilon\, dB_r - \int_s^t U_r^\varepsilon\, dr. \tag{3.1}$$

La démonstration se fait en plusieurs étapes :

Démonstration.

Etape 1. *Transformation des systèmes* (2.1) *et* (3.1).

D'après le théorème d'Itô–Krylov (voir Krylov [9] ou plus précisement Pardoux–Veretennikov [20]) et on pose $\overline{X}_s^\varepsilon = \frac{X_s^\varepsilon}{\varepsilon}$.

$$X_s^\varepsilon + \varepsilon\left(\hat{b}\big(\overline{X}_s^\varepsilon\big) - \hat{b}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) = x + \int_0^s (I + \nabla\hat{b})c\big(\overline{X}_r^\varepsilon\big)\,dr + \int_0^s (I + \nabla\hat{b})\sigma\big(\overline{X}_r^\varepsilon\big)\,dB_r, \tag{3.2}$$

$$
\begin{aligned}
&Y_s^\varepsilon+\varepsilon\big(\hat e\big(\overline{X}_t^\varepsilon,Y_t^\varepsilon\big)-\hat e\big(\overline{X}_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon\big)\big)\\
&\quad=g\big(X_t^\varepsilon\big)+\int_s^t\bigg(\langle\nabla_x\hat e,c\rangle-\frac{\partial\hat e}{\partial y}e+f-\varepsilon\frac{\partial\hat e}{\partial y}f\bigg)\big(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\big)\,dr\\
&\qquad+\int_s^t\frac{\partial^2\hat e}{\partial x\partial y}\big(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\big)\sigma\big(\overline{X}_r^\varepsilon\big)Z_r^\varepsilon\,dr\\
&\qquad+\int_s^t\big(\nabla_x\hat e\big(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\big)\sigma\big(\overline{X}_r^\varepsilon\big)-Z_r^\varepsilon\big)\,dB_r+\varepsilon\int_s^t\frac{\partial\hat e}{\partial y}\big(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\big)Z_r^\varepsilon\,dr\\
&\qquad+\frac{\varepsilon}{2}\int_s^t\frac{\partial^2\hat e}{\partial^2 y}\big(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\big)\big|Z_r^\varepsilon\big|^2dr-\int_s^t\bigg(1-\varepsilon\frac{\partial\hat e}{\partial y}\bigg)\big(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\big)U_r^\varepsilon\,dr.
\end{aligned}
\tag{3.3}
$$

On pose

$$\widetilde{Z}_s^\varepsilon=Z_s^\varepsilon-\nabla_x\hat e\big(\overline{X}_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon\big)\sigma\big(\overline{X}_s^\varepsilon\big),\quad 0\leqslant s\leqslant t.$$

Notons que la différence entre $\widetilde{Z}^\varepsilon$ et Z^ε est un processus uniformément borné. De (3.3), il vient

$$
\begin{aligned}
&Y_s^\varepsilon+\varepsilon\big(\hat e\big(\overline{X}_t^\varepsilon,Y_t^\varepsilon\big)-\hat e\big(\overline{X}_s^\varepsilon,Y_s^\varepsilon\big)\big)\\
&\quad=g\big(X_t^\varepsilon\big)+\int_s^t\bigg(f+\langle\nabla_x\hat e,c\rangle-\frac{\partial\hat e}{\partial y}e-\varepsilon\frac{\partial\hat e}{\partial y}f+\frac{\partial^2\hat e}{\partial y\partial x}a\nabla_x\hat e^*\bigg)\big(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\big)\,dr\\
&\qquad-\int_s^t\widetilde{Z}_r^\varepsilon\bigg(dB_r-\bigg(\frac{\partial^2\hat e}{\partial y\partial x}\sigma\bigg)\big(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\big)\,dr\bigg)+\varepsilon\int_s^t\frac{\partial\hat e}{\partial y}\big(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\big)Z_r^\varepsilon\,dB_r\\
&\qquad+\frac{\varepsilon}{2}\int_s^t\frac{\partial^2\hat e}{\partial^2 y}\big(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\big)\big|Z_r^\varepsilon\big|^2\,dr-\int_s^t\bigg(1-\varepsilon\frac{\partial\hat e}{\partial y}\bigg)\big(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\big)U_r^\varepsilon\,dr.
\end{aligned}
$$

Posons ensuite

$$\widetilde{B}_s=B_s-\int_0^s\bigg(\frac{\partial^2\hat e}{\partial x\partial y}\sigma\bigg)\big(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^\varepsilon\big)\,dr.$$

D'après le théorème de Girsanov, il existe une probabilité $\widetilde{\mathbb{P}}$ équivalent à $\mathbb{P}$ telle que sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, $\{\widetilde{B}_s,\ 0\leqslant s\leqslant t\}$ est un mouvement Brownien. On a

$$
\begin{aligned}
&X_s^\varepsilon + \varepsilon\left(\hat{b}\left(\overline{X}_s^\varepsilon\right) - \hat{b}\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)\right) \\
&\quad = x + \int_0^s (I + \nabla\hat{b})\left(c + a\frac{\partial^2 \hat{e}^*}{\partial x\partial y}\right)\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right) dr + \int_0^s (I + \nabla\hat{b})\sigma\left(\overline{X}_r^\varepsilon\right) d\widetilde{B}_r,
\end{aligned}\tag{3.4}
$$

$$
\begin{aligned}
&Y_s^\varepsilon + \varepsilon\left(\hat{e}\left(\overline{X}_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon\right) - \hat{e}\left(\overline{X}_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon\right)\right) \\
&\quad = g\left(X_t^\varepsilon\right) + \int_s^t \left(\langle \nabla_x \hat{e}, c\rangle - \frac{\partial \hat{e}}{\partial y} e - \varepsilon\frac{\partial \hat{e}}{\partial y} f + \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial y\partial x} a\nabla_x \hat{e}^*\right)\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right) dr \\
&\qquad - \int_s^t \widetilde{Z}_r^\varepsilon \, d\widetilde{B}_r + \varepsilon\int_s^t \frac{\partial \hat{e}}{\partial y}\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right) Z_r^\varepsilon\left(d\widetilde{B}_r + \left(\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial x\partial y}\sigma\right)\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right) dr\right) \\
&\qquad + \frac{\varepsilon}{2}\int_s^t \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial^2 y}\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right)\left|Z_r^\varepsilon\right|^2 dr - \int_s^t \left(1 - \varepsilon\frac{\partial \hat{e}}{\partial y}\right)\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right) U_r^\varepsilon \, dr.
\end{aligned}\tag{3.5}
$$

Le fait que $\{X^\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ est tendue, comme un élément de $C([0,t], \mathbb{R}^d)$ muni de la topologie de la convergence uniforme, est clair, en particulier puisque $\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial x\partial y}$ est bornée et la dérivée de Radon–Nikodym $\frac{\partial \widetilde{P}}{\partial P} \in L^p$ $\forall p > 0$ et on a

$$
\sup_\varepsilon \widetilde{\mathbb{E}}\left|X_t^\varepsilon\right|^p < \infty \quad \forall p > 0.
$$

Ce qui implique que

$$
\sup_\varepsilon \widetilde{\mathbb{E}}\left|g\left(X_t^\varepsilon\right)\right|^k < \infty \quad \forall k > 0.
$$

Etape 2. *Estimation de* $\{Y^\varepsilon, Z^\varepsilon\}$.

On veut établir des estimations pour les moments de Y^ε et Z^ε sous $\widetilde{\mathbb{P}}$, pour cela retournons à l' équation (3.1) et remplaçons B par son expression

$$
\begin{aligned}
Y_s^\varepsilon \;=\; &g\left(X_t^\varepsilon\right) + \int_s^t \left(\frac{1}{\varepsilon} e\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^\varepsilon\right) + f\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^\varepsilon\right) - Z_r^\varepsilon\left(\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial y\partial x}\sigma\right)\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right)\right) dr \\
&- \int_s^t Z_r^\varepsilon \, d\widetilde{B}_r - \int_s^t U_r^\varepsilon \, dr.
\end{aligned}
$$

Il résulte de la formule d'Itô que

$$
\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\nu t}\left|Y_s^\varepsilon\right|^3 + \int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left(3\left|Y_r^\varepsilon\right| \times \left|Z_r^\varepsilon\right|^2 + \nu\left|Y_r^\varepsilon\right|^3\right) dr \\
&\quad = \mathrm{e}^{\nu t}\left|g\left(X_s^\varepsilon\right)\right|^3 + \frac{3}{\varepsilon}\int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left|Y_r^\varepsilon\right| Y_r^\varepsilon e\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right) dr + 3\int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left|Y_r^\varepsilon\right| Y_r^\varepsilon f\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right) dr
\end{aligned}
$$

$$- 3\int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left|Y_r^\varepsilon\right|Y_r^\varepsilon Z_r^\varepsilon\left(\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial x\partial y}\sigma\right)\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right)dr - 3\int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left|Y_r^\varepsilon\right|Y_r^\varepsilon Z_r^\varepsilon\, d\widetilde{B}_r$$
$$- \int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left|Y_r^\varepsilon\right|Y_r^\varepsilon U_r^\varepsilon\, dr.$$

L'espérance de l'intégrale stochastique est nulle (voir Pardoux–Peng [17]), de plus par (2.9)

$$\left|Y_r^\varepsilon\right|Y_r^\varepsilon f\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right) \leqslant \left|Y_r^\varepsilon\right|^3 + c.$$

Comme $(Y^\varepsilon, U^\varepsilon) \in Gr(\phi)$, alors $\langle Y^\varepsilon, U^\varepsilon\rangle \geqslant 0$ et par suite $-3|Y_r^\varepsilon|\langle Y_r^\varepsilon, U_r^\varepsilon\rangle \leqslant 0$. De plus

$$-3Y_r^\varepsilon\left|Y_r^\varepsilon\right|Z_r^\varepsilon\left(\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial x\partial y}\sigma\right)\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right) \leqslant \frac{3}{2}\left|Y_r^\varepsilon\right|\left|Z_r^\varepsilon\right|^2 + \frac{3}{2}\left\|\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial x\partial y}\sigma\right\|_\infty\left|Y_r^\varepsilon\right|^3.$$

Finalement, on prend l'espérance en tenant compte du fait que e est bornée, à condition de bien choisir ν

$$\widetilde{\mathbb{E}}\int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left|Y_r^\varepsilon\right|\left|Z_r^\varepsilon\right|^2 dr \leqslant c\left(1 + \frac{1}{\varepsilon}\widetilde{\mathbb{E}}\int_s^t \left|Y_r^\varepsilon\right|^2 dr\right).$$

Ce qui est équivalent à

$$\varepsilon\widetilde{\mathbb{E}}\int_s^t \left|Y_r^\varepsilon\right|\left|Z_r^\varepsilon\right|^2 dr \leqslant c\left(\varepsilon + \int_s^t \left|Y_r^\varepsilon\right|^2 dr\right). \tag{3.6}$$

Admettons pour le moment le lemme suivant :

Lemme 3.1. *Sous les conditions du théorème* 3.1*, on a*

$$\sup_\varepsilon \widetilde{\mathbb{E}}\int_s^t \left|U_r^\varepsilon\right|^2 dr < \infty.$$

Retournons à (3.5), soit $\widehat{Y}_s^\varepsilon = Y_s^\varepsilon - \varepsilon\hat{e}(\overline{X}_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon)$ et par application de la formule d'Itô, nous avons

$$\left|\widehat{Y}_s^\varepsilon\right|^2 + \int_s^t \left|\widetilde{Z}_r^\varepsilon - \varepsilon\frac{\partial\hat{e}}{\partial y}\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right)Z_r^\varepsilon\right|^2 dr$$
$$= \left|g\left(X_t^\varepsilon\right) - \varepsilon\hat{e}\left(X_t^\varepsilon, Y_t^\varepsilon\right)\right|^2$$
$$+ 2\int_s^t \widehat{Y}_r^\varepsilon\left\{\left(\langle\nabla_x\hat{e}, c\rangle - \frac{\partial\hat{e}}{\partial y}e + \left(1 - \varepsilon\frac{\partial\hat{e}}{\partial y}\right)f + \frac{\partial^2\hat{e}}{\partial y\partial x}a\nabla_x\hat{e}^*\right)\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right)\right\}dr$$

$$- 2\int_s^t \widehat{Y}_r^\varepsilon Z_r^\varepsilon \, d\widetilde{B}_r + 2\varepsilon \int_s^t \widehat{Y}_r^\varepsilon \frac{\partial \hat{e}}{\partial y}\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\big) Z_r^\varepsilon \left(d\widetilde{B}_r + \left(\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial x \partial y}\sigma\right)\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\big)\, dr \right)$$

$$+ \varepsilon \int_s^t \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial^2 y}\left(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\right) \widehat{Y}_r^\varepsilon \big|Z_r^\varepsilon\big|^2 \, dr - 2\int_s^t \left(1 - \varepsilon \frac{\partial \hat{e}}{\partial y}\right)\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\big) \widehat{Y}_r^\varepsilon U_r^\varepsilon \, dr.$$

Exploitons (3.5) et (3.6) avec le fait que $(1 - \varepsilon \frac{\partial \hat{e}}{\partial y}(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon) \geqslant \frac{1}{2})$ pour ε assez petit des inégalités standards et lemme 3.1, nous déduisons

$$\widetilde{\mathbb{E}}\big|Y_s^\varepsilon\big|^2 + \frac{1}{2}\int_s^t \big|Z_r^\varepsilon\big|^2 dr \leqslant c\left(1 + \widetilde{\mathbb{E}}\int_s^t \big|Y_r^\varepsilon\big|^2 \, dr\right).$$

Par le lemme de Gronwall, il viendra

$$\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \widetilde{\mathbb{E}}\big|Y_s^\varepsilon\big|^2 + \widetilde{\mathbb{E}}\int_s^t \big|\widetilde{Z}_r^\varepsilon\big|^2 \, dr \leqslant c.$$

L'inégalité de Burkholder–Davis–Gundy, nous donne

$$\sup_\varepsilon \widetilde{\mathbb{E}}\left(\sup_{0 \leqslant s \leqslant t} \big|Y_s^\varepsilon\big|^2 + \int_0^t \big|\widetilde{Z}_r^\varepsilon\big|^2 \, dr\right) < \infty. \tag{3.7}$$

Etape 3. *Convergence en loi*.
On réécrit (3.5) sous la forme

$$Y_s^\varepsilon = g\big(X_t^\varepsilon\big) + V_t^\varepsilon - V_s^\varepsilon + M_t^\varepsilon - M_s^\varepsilon + N_t^\varepsilon - N_s^\varepsilon + K_t^\varepsilon - K_s^\varepsilon,$$

où

$$V_s^\varepsilon = \int_0^s \left(\langle \nabla_x \hat{e}, c\rangle - \frac{\partial \hat{e}}{\partial y} e + f + \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial x \partial y} a \nabla_x \hat{e}^*)\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\big) \right) dr,$$

$$M_s^\varepsilon = -\int_0^s \widetilde{Z}_r^\varepsilon \, d\widetilde{B}_r,$$

$$\begin{aligned} N_s^\varepsilon = {} & -\varepsilon \hat{e}\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\big) - \varepsilon \int_0^s \frac{\partial \hat{e}}{\partial y} f\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\big)\, dr + \varepsilon \int_0^s \frac{\partial \hat{e}}{\partial y}\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\big) U_r^\varepsilon \, dr \\ & + \varepsilon \int_0^s \frac{\partial \hat{e}}{\partial y}\big(\overline{X}_s^\varepsilon, Y_s^\varepsilon\big) Z_r^\varepsilon \left(d\widetilde{B}_r + \left(\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial x \partial y}\sigma\right)\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\big)\, dr \right) \\ & + \frac{\varepsilon}{2}\int_0^s \frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial^2 y}\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\big) \big|Z_r^\varepsilon\big|^2 \, dr, \end{aligned}$$

$$K_s^\varepsilon = -\int_0^t U_r^\varepsilon \, dr.$$

Il est facile de voir que

$$\widetilde{\mathbb{E}}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \big|N_s^\varepsilon\big|\Big) \to 0,$$

lorsque $\varepsilon \to 0$, alors $\sup_{0\leqslant s\leqslant t} |N_s^\varepsilon| \to 0$ tend vers 0 en probabilité ou en loi. Par lemme 3.1, on trouve que pour tout $0 \leqslant s \leqslant t$

$$\widetilde{\mathbb{E}}\big(\big|K_s^\varepsilon - K_t^\varepsilon\big|^2\big) \leqslant C|s-t|,$$

et par suite la tension de la famille $\{K^\varepsilon; \varepsilon > 0\}$ s'obtient en utilisant le critère d'Aldous [1] (voir aussi [8]). Pour traiter les autres termes on va adopter le point de vue de la topologie de Meyer–Zheng [12] (voir aussi Kurtz [10] ou Pardoux [15]) qui donne un critère garatissant la tension dans $D([0,t])$ muni de la topologie de convergence en ds mesure : la famille de quasi-martingales $V_s^n,\ 0 \leqslant s \leqslant t$, définie sur un espace de probabilité $\{\Omega,\ \mathcal{F}_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t,\ \mathbb{P}\}$ est tendue si

$$\sup_n \Big\{ \sup_{0\leqslant s\leqslant t} \mathbb{E}\big|V_s^n\big| + CV_t^0\big(V^n\big)\Big\} < \infty,$$

avec $CV_t^0(V^n)$ sur $[0,t]$ est définie par

$$CV_t^0\big(V^n\big) = \sup \mathbb{E}\bigg(\sum_i \big|\mathbb{E}\big(V_{t_{i+1}}^n - V_{t_i}^n\big)\big|/\mathcal{F}_{t_i}\bigg).$$

Le "sup" est pris sur toutes les subdivisions de l'intervalle $[0,t]$.

De (3.7), V^ε et M^ε satisfont le critère de Meyer–Zheng. Alors $(Y^\varepsilon, M^\varepsilon)$ est tendue pour la topologie de Meyer–Zheng [12] – sous $\widetilde{\mathbb{P}}$-, puisque de (3.4) $\{X^\varepsilon\}$ est tendue "dans le sens usuel", alors il existe une sous suite (que l'on note aussi par $(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, M^\varepsilon, K^\varepsilon)$) telle que

$$\big(X^\varepsilon, Y^\varepsilon, M^\varepsilon, K^\varepsilon\big) \Longrightarrow (X, \overline{Y}, \overline{M}, \overline{K}),$$

dans $C([0,t],\mathbb{R}^d) \times (D([0,t]))^2 \times C([0,t],\mathbb{R}^d)$, avec le premier espace est muni de la topologie de la convergence uniforme et le second de la topologie en ds mesure. Pour conclure, on a besoin du lemme suivant (voir Pardoux [16]) :

Lemme 3.2. *Soit $h:\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}^k$ mesurable, périodique de période 1 dans toutes les directions pour la première variable et continue par rapport au deuxième, uniformément par rapport à la première. Alors*

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t} \bigg| \int_0^s h\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^\varepsilon\big)\, dr - \int_0^s \bar{h}(\overline{Y}_r)\, dr \bigg| \to 0$$

en $\widetilde{\mathbb{P}}$-probabilité quand $\varepsilon \to 0$, avec $\bar{h}(y) = \int_{\mathbb{T}^d} h(x,y)\,\mu(dx)$.

En passant à la limite dans (3.4), (3.5) on a

$$X_s = x + \int_0^s C(\overline{Y}_r)\,dr + M_s^X$$

où $\{M_s^X\}$ est un mouvement Brownien non standard satisfaisant

$$\langle\langle M^X \rangle\rangle_s = As$$

et

$$\overline{Y}_s = g(X_s) + \int_s^t D(\overline{Y}_r)\,dr + \overline{M}_t - \overline{M}_s + \overline{K}_t - \overline{K}_s.$$

Par un argument similaire à celui de Pardoux [15] section 4.c (voir aussi Pardoux–Veretennikov [19]) théorème 6.1, on montre que M^X et $\overline{M}$ sont $\mathcal{F}_t^{X,Y,K}$-martingales.

Etape 4. *Identification de la limite*.
Soit $(Y, \overline{Z}, U)$ l'unique solution de l'EDSR

$$\begin{cases} Y_s = g(X_s) + \int_s^t D(Y_r)\,dr - \int_s^t \overline{Z}_r\,dM_r^X - \int_s^t U_r\,dr, \\ (Y, U) \in Gr(\partial\phi), \end{cases}$$

telle que

$$\mathbb{E}\,Tr \int_0^t \overline{Z}_r\,d\langle M^X\rangle_r \overline{Z}_r^{\,*} < \infty.$$

Il resulte du lemme 3.1 que $\{K^\varepsilon, \varepsilon > 0\}$ est borné dans $\mathbb{L}^2(\Omega, \mathbb{H}^1([0,t], \mathbb{R}^d))$ avec $\mathbb{H}^1([0,t], \mathbb{R}^d)$ est l'espace de Sobolev des fonctions absolument continues avec dérivée dans $\mathbb{L}^2([0,t])$. Par conséquant $\{\overline{K}_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ est un processus à variation bornée absolument continu à dérivée $\{\overline{U}_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ telle que $\int_0^t |\overline{U}_r|^2\,dr < \infty$. Posons

$$M_t = \int_0^t \overline{Z}_r\,dM_r^X \quad \text{et} \quad K_t = -\int_0^t U_s\,ds.$$

D'après la formule d'Itô, nous avons

$$\begin{aligned} &|Y_s - \overline{Y}_s|^2 + [M - \overline{M}]_t - [M - \overline{M}]_s \\ &\quad = 2\int_s^t \big(D(Y_r) - D(\overline{Y}_r), Y_r - \overline{Y}_r\big)\,dr + 2\int_s^t \langle Y_r - \overline{Y}_r, dM_r - d\overline{M}_r\rangle \\ &\qquad + 2\int_s^t \langle Y_r - \overline{Y}_r, dK_r - d\overline{K}_r\rangle. \end{aligned}$$

Maintenant, puisque pour tout, $\varepsilon > 0$ on a $(Y^\varepsilon, U^\varepsilon) \in Gr(\partial\phi)$, en utilisant le théorème de séléction de Skorohod, on montre que $(\overline{Y}, \overline{U}) \in Gr(\partial\phi)$, où $(\overline{Y}, \overline{M}, \overline{K} = -\int_0^t \overline{U}_r\,dr)$ est solution de l'EDSR

$$\overline{Y}_s = g(X_s) + \int_s^t D(\overline{Y}_r)\,dr + \overline{M}_t - \overline{M}_s + \overline{K}_t - \overline{K}_s.$$

Par conséquant $\int_s^t \langle Y_r - \overline{Y}_r, dK_r - d\overline{K}_r\rangle \leqslant 0$. En prenant l'espérance dans l'égalité au dessus on obtient

$$\mathbb{E}|Y_s - \overline{Y}_s|^2 + \mathbb{E}[M - \overline{M}]_t - \mathbb{E}[M - \overline{M}]_s \leqslant 2\mu\mathbb{E}\int_s^t |Y_s - \overline{Y}_s|^2\,dr.$$

Par le lemme de Gronwall $Y_s = \overline{Y}_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t,\ M = \overline{M},\ U_s = \overline{U}_s,\ 0 \leqslant s \leqslant t.$ □

Avant de prouver le lemme rappelons quelques résultats concernant la méthode de pénalisation (cf. Menaldi [13]). Soit

$$\beta(x) = \frac{1}{2} grad\big(\min\big\{|x - y|^2\big\},\ y \in \overline{\Theta}\,\big).$$

Notons qu'il existe $a \in \mathbb{R}^d$, et $\gamma > 0$ tel que

$$(x - a)\beta(x) \geqslant \gamma|\beta(x)|, \quad \forall x \in \mathbb{R}^d,$$

par conséquent

$$\langle A_n(x), x - a\rangle \geqslant \gamma|A_n(x)|. \tag{3.8}$$

Posons

$$A_n\big(Y_s^\varepsilon\big) = n\big(Y_s^\varepsilon - Pr_{\overline{\Theta}}\big(Y_s^\varepsilon\big)\big),$$

où Pr_Θ est la projection sur Θ.

Par une technique d'approximation (cf. A. Gegout [6]), on peut supposer que Θ est borné, convexe et régulier i.e. $\rho(x) := d^2(x, \Theta) = |x - Pr(x)|^2$ est convexe, deux fois différentiable et

$$\Theta = \big\{x \in \mathbb{R}^d, \rho > 0\big\}; \qquad \partial\theta = \big\{x \in \mathbb{R}^d, \rho = 0\big\},$$

notons que $\nabla\rho(x) = 2\beta(x) = 2(x - Pr(x))^*$.

Démonstration du lemme 3.1.
Soit $(Y_r^{\varepsilon,n}, Z_r^{\varepsilon,n})$ l'unique solution de l'EDSR

$$\begin{aligned} Y_s^{\varepsilon,n} \;=\; & g\big(X_t^\varepsilon\big) + \int_s^t \left(\frac{1}{\varepsilon} e\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^{\varepsilon,n}\right) + f\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right. \\ & \left. - Z_r^{\varepsilon,n}\left(\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial y\partial x}\sigma\right)\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right) dr - \int_s^t Z_r^{\varepsilon,n}\,d\widetilde{B}_r - \int_s^t A_n\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\,dr. \end{aligned}$$

Montrons tout d'abord que

$$\sup_{\varepsilon,n}\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^t \left|A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right|^2 dr < \infty.$$

Soit $a \in \mathbb{R}^k$ vérifiant (3.8), il en resulte de la formule d'Itô, que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\nu s}\left|Y_s^{\varepsilon,n}-a\right|^3+\int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left(3\left|Y_r^{\varepsilon,n}-a\right|\times\left|Z_r^{\varepsilon,n}\right|^2+\nu\left|Y_r^{\varepsilon,n}-a\right|^3\right)dr\\
&\quad=\mathrm{e}^{\nu t}\left|g\left(X_s^{\varepsilon}\right)\right|^3+\frac{3}{\varepsilon}\int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left|Y_r^{\varepsilon,n}-a\right|\left(Y_r^{\varepsilon,n}-a\right)e\left(\overline{X}_r^{\varepsilon},Y_r^{\varepsilon,n}\right)dr\\
&\qquad+3\int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left|Y_r^{\varepsilon,n}-a\right|Y_r^{\varepsilon,n}f\left(\overline{X}_r^{\varepsilon},Y_r^{\varepsilon,n}\right)dr\\
&\qquad-3\int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left|Y_r^{\varepsilon,n}-a\right|\left(Y_r^{\varepsilon,n}-a\right)Z_r^{\varepsilon,n}\left(\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial x\partial y}\sigma\right)\left(\overline{X}_r^{\varepsilon},Y_r^{\varepsilon,n}\right)dr\\
&\qquad-3\int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left|Z_r^{\varepsilon,n}-a\right|\left(Z_r^{\varepsilon}-a\right)Z_r^{\varepsilon}\,d\widetilde{B}_r\\
&\qquad-3\int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\left|Z_r^{\varepsilon,n}-a\right|\left(Z_r^{\varepsilon}-a,A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right)dr.
\end{aligned}$$

Grâce aux hypothèses ci-dessus, nous avons

$$\begin{aligned}
&\left|Y_r^{\varepsilon,n}-a\right|\left(Y_r^{\varepsilon,n}-a\right)f\left(\overline{X}_r^{\varepsilon},Y_r^{\varepsilon}\right)\leqslant\left|Y_r^{\varepsilon,n}-a\right|^3+c,\\
&-\left|Y_r^{\varepsilon,n}-a\right|\left(Y_r^{\varepsilon,n}-a,A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right)\leqslant-\gamma\left|A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right|\left|Y_r^{\varepsilon}-a\right|\leqslant 0.
\end{aligned}$$

On pose $\nu = 1+\frac{3}{2}\|\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial x\partial y}\|_\infty^2$.

Comme e est bornée, alors en prenant ensuite l'espérence, on obtient

$$\varepsilon\widetilde{\mathbb{E}}\int_s^t \left|Y_r^{\varepsilon,n}\right|\left|Z_r^{\varepsilon,n}\right|^2 dr\leqslant c\left(\varepsilon+\int_s^t\left|Y_r^{\varepsilon,n}\right|^2 dr\right). \tag{3.9}$$

Retournons à (3.5) et soit $\widehat{Y}_s^{\varepsilon,n}=Y_s^{\varepsilon,n}-\varepsilon\hat{e}(\overline{X}_s^{\varepsilon},Y_s^{\varepsilon,n})$. Par application de la formule d'Itô, nous avons

$$\left|\widehat{Y}_s^{\varepsilon,n}-a\right|^2+\int_s^t\left|\widetilde{Z}_r^{\varepsilon,n}-\varepsilon\frac{\partial\hat{e}}{\partial y}\left(\overline{X}_r^{\varepsilon},Y_r^{\varepsilon,n}\right)Z_r^{\varepsilon,n}\right|^2 dr$$

$$= \big|g\big(X_t^\varepsilon\big) - \hat e\big(X_t^\varepsilon, Y_t^{\varepsilon,n}\big)\big|^2 + 2\int_s^t \big(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n} - a\big)\bigg(\langle\nabla_x \hat e, c\rangle - \frac{\partial \hat e}{\partial y}e + \bigg(1-\varepsilon\frac{\partial \hat e}{\partial y}\bigg)f$$

$$+ \frac{\partial^2 \hat e}{\partial y \partial x} a \nabla_x \hat e^*\bigg)\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big)\,dr - 2\int_s^t \big(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n} - a\big) Z_r^{\varepsilon,n}\,d\widetilde{B}r$$

$$+ 2\varepsilon \int_s^t \frac{\partial \hat e}{\partial y}\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big) Z_r^{\varepsilon,n}\bigg(d\widetilde{B}_r + \frac{\partial^2 \hat e}{\partial^2 y}\sigma\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big)\,dr\bigg)$$

$$+ \varepsilon \int_s^t \frac{\partial^2 \hat e}{\partial y \partial x}\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n} - a\big)\big|Z_r^{\varepsilon,n}\big|^2\,dr$$

$$- 2\int_s^t \bigg(1-\varepsilon\frac{\partial \hat e}{\partial y}\bigg)\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n} - a, A_n\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big)\,dr.$$

Comme $0 \in \Theta$, $A_n(Y_r^{\varepsilon,n}) = A_n(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n})$, de plus

$$\big\langle \widehat{Y}_r^{\varepsilon,n} - a, A_n\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big\rangle \geqslant \gamma\big|A_n\big(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n}\big)\big| = \gamma\big|A_n\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big|.$$

En tenant compte du fait que $(1-\varepsilon\frac{\partial \hat e}{\partial y}(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n})) \geqslant \frac{1}{2}$, des inégalités standards et du lemme de Gronwall, on a

$$\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\sup_{\varepsilon,n}\bigg(\widetilde{\mathbb{E}}\big|Y_s^{\varepsilon,n} - a\big|^2 + \int_s^t \big|\widetilde{Z}_r^{\varepsilon,n}\big|^2\,dr\bigg) + \gamma\int_0^t \big|A_n\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big|\,dr < \infty. \tag{3.10}$$

Maintenant, par la formule d'Itô, la convexité de la fonction ρ et avec la notation $\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n} = Y_r^{\varepsilon,n} - \varepsilon\hat e(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n})$, il vient

$$\rho\big(Y_s^{\varepsilon,n} - \varepsilon\hat e\big(\overline{X}_s^\varepsilon, Y_s^{\varepsilon,n}\big)\big)$$

$$\leqslant \rho\big(g\big(X_t^\varepsilon\big) - \varepsilon\hat e\big(\overline{X}_t^\varepsilon, Y_t^{\varepsilon,n}\big)\big) + \frac{2}{n}\int_s^t A_n\big(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n}\big)\bigg(\langle\nabla_x \hat e, c\rangle - \frac{\partial \hat e}{\partial y}e + \bigg(1-\varepsilon\frac{\partial \hat e}{\partial y}\bigg)f$$

$$+ \frac{\partial^2 \hat e}{\partial y \partial x} a \nabla_x \hat e^*\bigg)\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big)\,dr - \frac{2}{n}\int_s^t A_n\big(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n}\big) Z_r^{\varepsilon,n}\,d\widetilde{B}_r$$

$$+ \frac{2\varepsilon}{n}\int_s^t \frac{\partial \hat e}{\partial y}\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big) A_n\big(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n}\big) Z_r^{\varepsilon,n}\bigg(d\widetilde{B}_r + \frac{\partial^2 \hat e}{\partial^2 y}\sigma\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big)\,dr\bigg)$$

$$+ \frac{\varepsilon}{n}\int_s^t \frac{\partial^2 \hat e}{\partial y \partial x}\big(\overline{X}_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big) A_n\big(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n}\big)\big|Z_r^{\varepsilon,n}\big|^2\,dr$$

$$-\frac{2}{n}\int_s^t\left(1-\varepsilon\frac{\partial\hat{e}}{\partial y}\right)\left(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^{\varepsilon,n}\right)A_n\left(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n}\right)^*A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)dr.$$

En tenant compte que $1-\varepsilon\frac{\partial\hat{e}}{\partial y}\geqslant\frac{1}{2}$, l'hypothèse (2.10), ε assez petit, il viendra

$$\begin{aligned}
&n\rho\left(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n}\right)+\int_s^t\left|A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right|^2dr\\
&\leqslant 2\int_s^t A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\left(\langle\nabla_x\hat{e},c\rangle-\frac{\partial\hat{e}}{\partial y}e+\left(1-\varepsilon\frac{\partial\hat{e}}{\partial y}\right)f+\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial y\partial x}a\nabla_x\hat{e}^*\right)\left(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^{\varepsilon,n}\right)dr\\
&\quad+2\varepsilon\int_s^t\frac{\partial\hat{e}}{\partial y}\left(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^{\varepsilon,n}\right)A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)Z_r^{\varepsilon,n}\left(d\widetilde{B}_r+\left(\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial x\partial y}\sigma\right)\left(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^{\varepsilon,n}\right)dr\right)\\
&\quad-2\int_s^t A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)Z_r^{\varepsilon,n}\,d\widetilde{B}_r+\varepsilon\int_s^t\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial y\partial x}\left(\overline{X}_r^\varepsilon,Y_r^{\varepsilon,n}\right)A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\left|Z_r^{\varepsilon,n}\right|^2dr.
\end{aligned}\tag{3.11}$$

On veut trouver une majoration de cette dernière intégrale. On a

$$\begin{aligned}
&\rho\left(\widehat{Y}_r^{\varepsilon,n}\right)+\frac{1}{2}\int_s^t trace\left(Z_r^{\varepsilon,n}Z_r^{\varepsilon,n*}Hess\left(\rho\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right)\right)dr\\
&=\int_s^t\left(\left(\frac{1}{\varepsilon}e\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon},Y_r^{\varepsilon,n}\right)+f\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon},Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right)\right.\\
&\quad\left.-Z_r^{\varepsilon,n}\left(\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial y\partial x}\sigma\right)\right)\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon},Y_r^{\varepsilon,n}\right)\nabla\rho\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)dr\\
&\quad-\int_s^t Z_r^{\varepsilon,n}\nabla\rho\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)d\widetilde{B}_r-\int_s^t A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\nabla\rho\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)dr.
\end{aligned}$$

Il en résulte de la formule d'Itô, que

$$\begin{aligned}
&\mathrm{e}^{\nu s}\rho^{3/2}\left(Y_s^{\varepsilon,n}\right)+\frac{3}{4}\int_s^t trace\left(Z_r^{\varepsilon,n}Z_r^{\varepsilon,n*}Hess\left(\rho^{1/2}\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right)\right)\rho\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)dr\\
&\quad+\frac{3}{8}\int_s^t\left|Z_r^{\varepsilon,n}\right|^2\left|\nabla\rho\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right|^2\rho^{-1/2}\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)dr+\int_s^t\nu\mathrm{e}^{\nu r}\rho^{3/2}\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)dr\\
&=\frac{3}{2}\int_s^t\mathrm{e}^{\nu r}\left[\left(\frac{1}{\varepsilon}e\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon},Y_r^{\varepsilon,n}\right)+f\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon},Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right)\right.
\end{aligned}$$

$$- Z_r^{\varepsilon,n}\left(\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial y \partial x}\sigma\right)\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^{\varepsilon,n}\right)\Big]\nabla\rho\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\rho^{1/2}\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\,dr$$
$$- \frac{3}{2}\int_s^t Z_r^{\varepsilon,n}\nabla\rho\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\rho^{1/2}\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\,d\widetilde{B}_r$$
$$- \frac{3}{2}\int_s^t A_n\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)^*\nabla\rho\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\rho^{1/2}\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\,dr.$$

Comme $|A_n(x)| = \frac{n}{2}|\nabla\rho(x)|$ et $\rho^{1/2}(x) = |x - Pr(x)|$, on a

$$n\mathrm{e}^{\nu s}\rho\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)^{3/2} + \frac{3}{2}\int_s^t trace\big(Z_r^{\varepsilon,n}Z_r^{\varepsilon,n*}Hess\big(\rho\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big)\big)\rho^{1/2}\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\,dr$$
$$+ \frac{3}{2}\int_s^t \big|Z_r^{\varepsilon,n}\big|^2\big|A_n\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big|\,dr + n\int_s^t \nu\mathrm{e}^{\nu r}\rho^{3/2}\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\,dr + \frac{3}{n}\int_s^t \big|A_n\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big|^3\,dr$$
$$= \frac{3n}{2}\int_s^t \mathrm{e}^{\nu r}\Big[\left(\frac{1}{\varepsilon}e\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^{\varepsilon,n}\right) + f\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right)$$
$$- Z_r^{\varepsilon,n}\left(\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial y \partial x}\sigma\right)\big(X_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big)\Big]\nabla\rho\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\rho^{1/2}\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\,dr$$
$$- n\int_s^t Z_r^{\varepsilon,n}\nabla\rho\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\rho^{1/2}\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\,d\widetilde{B}_r.$$

Or

$$nZ_r^{\varepsilon,n}\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial y \partial x}\sigma\big(X_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big)\nabla\rho\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\rho\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)^{1/2}$$
$$\leqslant \frac{n}{2}\big|Z_r^{\varepsilon,n}\big|\left\|\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial y \partial x}\sigma\right\|_\infty\big|\nabla\rho\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big|^2$$
$$\leqslant \frac{n}{4}\left\|\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial y \partial x}\sigma\right\|\left(\left(\frac{|Z_r^{\varepsilon,n}|^2|\nabla\rho(Y_r^{\varepsilon,n})|}{\alpha}\right) + \alpha\big|\nabla\rho\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big|^3\right)$$
$$\leqslant \frac{1}{4\alpha}\left\|\left(\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial y \partial x}\sigma\right)\big(X_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big)\right\|_\infty\big|Z_r^{\varepsilon,n}\big|^2\big|A_n\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big|$$
$$+ \frac{\alpha n}{4}\left\|\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial y \partial x}\sigma\big(X_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big)\right\|_\infty\big|\nabla\rho\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big|^3$$
$$= \frac{1}{4\alpha}\left\|\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial y \partial x}\sigma\big(X_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big)\right\|_\infty\big|Z_r^{\varepsilon,n}\big|^2\big|A_n\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big|$$
$$+ \frac{2\alpha}{n^2}\left\|\frac{\partial^2 \hat{e}}{\partial y \partial x}\sigma\big(X_r^\varepsilon, Y_r^{\varepsilon,n}\big)\right\|_\infty\big|A_n\big(Y_r^{\varepsilon,n}\big)\big|^3$$

et en choisissant plus tard α de telle sorte que $\frac{1}{4\alpha}\|\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial y\partial x}\sigma\|_\infty \leqslant \frac{3}{8}$ et $\frac{\alpha}{n^2}\|\frac{\partial^2\hat{e}}{\partial y\partial x}\sigma\|_\infty \leqslant \frac{3}{2n}$ pour n assez grand. La relation $ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{a^q}{q}$ pour $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ donne

$$\begin{aligned} nf\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^{\varepsilon,n}\right)\nabla\rho\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\rho^{1/2}\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right) &\leqslant nK\left(\frac{2}{3}\left|\nabla\rho\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right|^{3/2} + \frac{\rho^{3/2}(Y_r^{\varepsilon,n})}{3}\right)\\ &\leqslant \frac{4}{3n^{1/2}}\left(\left|A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right|^2+1\right) + \frac{nK}{3}\rho^{3/2}\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right). \end{aligned}$$

De plus

$$ne\left(\frac{X_r^\varepsilon}{\varepsilon}, Y_r^{\varepsilon,n}\right)\left(\rho^{1/2}\nabla\rho\right)\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right) \leqslant \frac{|e|_\infty}{n}\left|A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right|^2.$$

Enfin pour ν bien choisi, n assez grand et la relation (3.10), on a

$$\begin{aligned} &\varepsilon\widetilde{\mathbb{E}}\int_s^t \left|A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right|\left|Z_r^{\varepsilon,n}\right|^2 dr\\ &\quad\leqslant C\left(1+\frac{1}{n}\widetilde{\mathbb{E}}\int_s^t \left|A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right|^2 dr + \frac{1}{n^{1/2}}\widetilde{\mathbb{E}}\int_s^t \left|A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right|^2 dr\right). \end{aligned}$$

Pour n assez grand et ε assez petit, les inégalités (3.10) et (3.11) nous donnent

$$\sup_{\varepsilon,n}\widetilde{\mathbb{E}}\int_0^t \left|A_n\left(Y_r^{\varepsilon,n}\right)\right|^2 dr < \infty. \tag{3.12}$$

Maintenant

$$\lim_{n\to\infty}\widetilde{\mathbb{E}}\Big(\sup_{0\leqslant s\leqslant t}\left|K_s^{\varepsilon,n}-K_s^\varepsilon\right|^2\Big)=0,$$

où $K_s^{\varepsilon,n} = -\int_0^s A_n(Y_r^{\varepsilon,n})\,dr$ (cf. [14] ou [18]).

L'inégalité (3.12) et le lemme de Fatou donnent le résultat. □

4. Application aux inégalités variationelles semilinéaires

Soit u la solution de l'IVS suivante

$$\begin{cases} \forall s\in[0,t],\quad x\in\mathbb{R}^d,\\ \displaystyle\left[\frac{\partial u}{\partial s}(s,x) - \frac{1}{2}\sum_{i,j=1}^d A_{ij}\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\partial x_j}(s,x) - \sum_{i=1}^d C_i\left(u(s,x)\right)\frac{\partial u}{\partial x_i}(s,x)\right.\\ \quad\left. -D\left(u(s,x)\right)\right] \in \partial I_{\overline{\Theta}}\left(u(s,x)\right),\\ u(0,x)=g(x). \end{cases} \tag{4.1}$$

Théorème 4.1. *Supposons* $k=1$. *Sous les hypothèses du théorème* 3.1 $u^\varepsilon(t,x)$ *converge vers* $u(t,x)$ *quand* $\varepsilon\to 0$.

Remarque 4.1. Notons que dans ce cas Θ est un interval de $\mathbb{R}$. Supposons par exemple que $\Theta =]a, b[$, on a alors

$$\partial I_{\overline{\Theta}}(x) = \begin{cases} \emptyset & \text{si } x \notin \overline{\Theta}, \\ \{0\} & \text{si } x \in \Theta, \\ \mathbb{R}_+ & \text{si } x = b, \\ \mathbb{R}_- & \text{si } x = a. \end{cases}$$

Démonsrtration du théorème 4.1. Soit $x \in \mathbb{R}^d$ et $\{X_s^{x,\varepsilon},\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ la solution de l'équation (2.1). $\forall t \in \mathbb{R}_+$, on note par $\{Y_s^{t,x,\varepsilon},\ Z_s^{t,x,\varepsilon},\ U_s^{t,x,\varepsilon},\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ la solution de l'EDSR refléchie suivante

$$Y_s^{t,x,\varepsilon} = g\big(X_t^{x,\varepsilon}\big) + \frac{1}{\varepsilon}\int_s^t e\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon}}{\varepsilon}, Y_r^{t,x,\varepsilon}\right) dr + \int_s^t f\left(\frac{X_r^{x,\varepsilon}}{\varepsilon}, Y_r^{t,x,\varepsilon}\right) dr$$
$$- \int_s^t Z_r^{t,x,\varepsilon}\, dB_r - \int_s^t U_r^{t,x,\varepsilon}\, dr.$$

Or la fonction $u^\varepsilon : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par $u^\varepsilon(t,x) = Y_0^{t,x,\varepsilon}$ est l'unique solution de l'IVS (2.12) (cf. Pardoux–Rascanu [18]). Soit $\{Y_s^{t,x},\ Z_s^{t,x},\ U_s^{t,x},\ 0 \leqslant s \leqslant t\}$ la solution de l'EDSR réfléchie on a

$$Y_s = g\big(X_t^x\big) + \int_s^t D\big(Y_r^{t,x}\big)\, dr - \int_s^t Z_r^{t,x}\, dB_r - \int_s^t U_r^{t,x}\, dr.$$

La fonction $u : [0,t] \times \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ définie par $u(t,x) = Y_0^{t,x}$ est l'unique solution de l'IVS (4.1) et le théorème 3.1 donne le résultat. $\square$

Références

[1] D.J. Aldous, Stopping times and tightness, Ann. Probab. 6 (1978) 335–340.
[2] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, Asymptotic Analysis for Periodic Structure, North-Holland, Amsterdam, 1978.
[3] R. Buckdahn, Y. Hu, S. Peng, Probabilistic approach to homogenization of viscosity solutions of parabolic PDEs, Preprint.
[4] M. Freidlin, The Dirichlet problem for an equation with periodic coefficients depending on a small parameter, Teor. Veroyatnost. i Primenen. 9 (1964) 133–139.
[5] M. Freidlin, Markov Process and Differential Equations: Asymptotic Problems, Lecture Notes in Mathematics, ETH Zurich, Birkhäuser, 1996.
[6] G. Gaurdon, E. Pardoux, EDSR, convergence en loi et homogénéisation d'EDP paraboliques semilinéaires, Ann. I.H.P (2000), à paraître.
[7] A. Gegout-Petit, E. Pardoux, Equations Différentielles Rétrogrades Réfléchies dans un convexe, in: Stochastics and Stochastics Reports, Vol. 57, 1996, pp. 111–128.
[8] J. Jacod, A. Shirayaev, Limit Theorems for Stochastic Processes, Grundlehren Wissenschaften, Vol. 288, Springer, Berlin, 1987.
[9] N.V. Krylov, Controlled Diffusion Processes, Applications of Mathematics, Vol. 14, Springer, Berlin, 1980, Transl. by A.B. Aries.

[10] T.G. Kurtz, Random time changes and convergence in distribution under the Meyer–Zheng conditions, Ann. Probab. 19 (1991) 1010–1034.

[11] A. Lejay, Approche probabiliste de l'homogénéisation des opérateurs sous forme divergence en milieu périodique, Thèse de Doctorat, Marseille, 2000.

[12] P. A Meyer, W.A. Zheng, Tightness criteria for laws of semimartingales, Ann. Inst. Henri Poincaré 20 (1984) 353–372.

[13] J.L. Menaldi, Stochastic variational inequality for reflected diffusion, Indiana Univ. Math. J. 32 (1983) 5.

[14] M. N'zi, Y. Ouknine, Equations différentielles stochastiques multiviques, Probab. Math. Statist. 17 (2) (1997) 255–257.

[15] E. Pardoux, BSDEs, weak convergence and homogenization of semilinear PDE's, in: Gilo Conference, 1996.

[16] E. Pardoux, Homogenization of linear and semilinear second order parabolic PDEs with periodic coefficients: a probabilistic approach, J. Funct. Anal. 167 (1999) 498–520.

[17] E. Pardoux, S. Peng, Backward SDEs and quasilinear PDEs, in stochastic partial differential equations and their applications, in: B.L. Rosovski, R. Sowers (Eds.), LNCIS, Vol. 176, Springer, Berlin, 1997, pp. 200–217.

[18] E. Pardoux, A. Rascanu, Backward SDE's with maximal monotone operator, Stoch. Proc. Appl. 76 (2), 191–215.

[19] E. Pardoux, A.Y. Veretennikov, Averaging of backward SDEs, with application to semi-linear PDEs, Stochastics 60 (1997) 255–270.

[20] E. Pardoux, A.Y. Veretennikov, On Poisson equation and diffusion approximation I, Ann. Probab., to appear.

[21] D.W. Stroock, S.R.S. Varadhan, Multidimensional Diffusion Processes, Springer-Verlag, New York, 1979.