

# Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires

Gilbert Labelle

*Département de Mathématiques et Informatique, LACIM, Université du Québec à Montréal,  
C.P. 8888, Succ. A, Montréal (Qué.), Canada H3C 3P8*

## Résumé

Labelle, G., Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires, *Theoretical Computer Science* 117 (1993) 3–22.

Le but de ce texte est de présenter un panorama des propriétés fondamentales et de quelques applications concrètes des *séries indicatrices des cycles* et des *séries indicatrices d'asymétrie* en combinatoire énumérative. Ces séries sont des outils permettant de calculer diverses statistiques concernant les symétries ou l'absence de symétrie des structures appartenant à des espèces données. Nous mettons l'emphase sur le comportement de ces séries devant les principales opérations combinatoires que l'on peut utiliser pour définir (récursivement ou explicitement) des espèces de structures.

## Abstract

Labelle, G., Sur la symétrie et l'asymétrie des structures combinatoires, *Theoretical Computer Science* 117 (1993) 3–22.

The goal of this paper is to present a panorama of the fundamental properties of *cycle index series* and *asymmetry index series* within enumerative combinatorics, as well as a few concrete applications. These series are tools by means of which one can compute various statistics concerning the symmetries or lack of symmetry of structures belonging to given species. Emphasis is laid on the behaviour of these series with respect to the main operations that can be used to define (recursively or explicitly) species of structures.

## 0. Introduction

Pour tout ensemble fini  $U$ , désignons par  $A[U]$  l'ensemble des arborescences dont  $U$  est l'ensemble sous-jacent. Toute bijection  $\beta: U \rightarrow U'$  entre ensembles finis induit, de façon évidente, une bijection notée  $A[\beta]: A[U] \rightarrow A[U']$  qu'on appelle le *transport*

*Correspondance à:* G. Labelle, Département de Mathématiques et Informatique, LACIM, Université du Québec à Montréal, C.P. 8888, Succ. A, Montréal (Qué.), Canada H3C 3P8.

des arborescences le long de  $\beta$ . Lorsque deux arborescences  $a \in A[U]$  et  $a' \in A[U']$  se transportent l'une sur l'autre le long de  $\beta$  on dit qu'elles ont même *type* (d'isomorphie) et que  $\beta$  est un *isomorphisme* de  $a$  vers  $a'$ . Un isomorphisme de  $a$  vers  $a$  est appelé *automorphisme* (ou *symétrie*) de  $a$ . Bien entendu, la totalité des symétries d'une arborescence donnée est codée par son groupe d'automorphismes. Lorsque ce groupe est trivial (i.e. est réduit à l'identité), on dit que l'arborescence est *asymétrique*. Pour tout  $n \geq 0$ , posons

$a_n$  = le nombre d'arborescences dont  $\{1, 2, \dots, n\}$  est l'ensemble sous-jacent,

$\tilde{a}_n$  = le nombre de types d'arborescences ayant  $n$  sommets,

$\bar{a}_n$  = le nombre de types d'arborescences asymétriques ayant  $n$  sommets.

Ces trois familles de nombres sont résumées par les séries suivantes

$$A(x) = \sum_{n \geq 0} a_n \frac{x^n}{n!} = x + 2 \frac{x^2}{2!} + 9 \frac{x^3}{3!} + 64 \frac{x^4}{4!} + 625 \frac{x^5}{5!} \\ + 7776 \frac{x^6}{6!} + 117649 \frac{x^7}{7!} + \dots,$$

$$\tilde{A}(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{a}_n x^n = x + x^2 + 2x^3 + 4x^4 + 9x^5 + 20x^6 + 48x^7 + 115x^8 + \dots,$$

$$\bar{A}(x) = \sum_{n \geq 0} \bar{a}_n x^n = x + x^2 + x^3 + 2x^4 + 3x^5 + 6x^6 + 12x^7 + 25x^8 + \dots$$

Plus généralement, à toute espèce de structures  $F$ , on peut associer de façon analogue trois séries  $F(x)$ ,  $\tilde{F}(x)$ , et  $\bar{F}(x)$ . Puisque la transformation  $F \mapsto F(x)$  commute aux opérations combinatoires usuelles (*somme*, *produit*, *substitution*, *dérivation*, etc), le calcul de la série  $F(x)$  se fait habituellement à partir d'équations combinatoires caractérisant (récursivement ou explicitement) l'espèce  $F$ . Par contre, les transformations  $F \mapsto \tilde{F}(x)$  et  $F \mapsto \bar{F}(x)$  ne commutent qu'aux opérations de *somme* et de *produit*. Ce manque de "commutation" rend beaucoup plus difficile le calcul des séries  $\tilde{F}(x)$  et  $\bar{F}(x)$  et justifie, à lui seul, l'utilisation d'outils algébriques plus sophistiqués [20, 29, 30, 49]: il s'agit de deux séries à une infinité de variables

$$Z_F = Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) \quad \text{et} \quad \Gamma_F = \Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \dots),$$

appelées *série indicatrice des cycles de  $F$*  et *série indicatrice d'asymétrie de  $F$* . Elles contiennent toutes les informations relatives aux séries  $F(x)$ ,  $\tilde{F}(x)$ , et  $\bar{F}(x)$  tout en commutant avec les opérations combinatoires usuelles. Le but de ce texte est de présenter un panorama comparatif décrivant les propriétés fondamentales des séries  $Z_F$  et  $\Gamma_F$  ainsi qu'un échantillon de leurs applications concrètes. Le langage utilisé est celui de la théorie combinatoire des espèces de structures introduite par André Joyal [20] (voir aussi [31] ainsi que [1, 2, 5–7, 11–17, 20–22, 24–44, 47, 56, 59, 60]). Pour des raisons d'espace, nous omettons les démonstrations des résultats énoncés et renvoyons le lecteur aux textes existants pour les détails.

### 1. Principales séries associées à une espèce donnée

À chaque espèce de structures  $F = F(X)$ , pondérée ou non (à une sorte de points  $X$ ), on peut associer plusieurs séries [20–22, 25–30, 13, 14, 59, 60] dont les cinq principales,<sup>1</sup>  $F(x)$ ,  $\tilde{F}(x)$ ,  $\bar{F}(x)$ ,  $Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$  et  $\Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$ , sont définies par les quelques lignes qui suivent:

**Définition 1.1.** Les séries formelles, en une indéterminée,  $x$ ,

$$F(x) = \sum_{n \geq 0} f_n \frac{x^n}{n!}, \quad \tilde{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \tilde{f}_n x^n, \quad \bar{F}(x) = \sum_{n \geq 0} \bar{f}_n x^n$$

dont les coefficients  $f_n, \tilde{f}_n, \bar{f}_n$  sont donnés par

$f_n$  = le nombre (ou poids total) des  $F$ -structures dont  $\{1, 2, \dots, n\}$  est l'ensemble sous-jacent,

$\tilde{f}_n$  = le nombre (ou poids total) des types de  $F$ -structures ayant  $n$  sommets,

$\bar{f}_n$  = le nombre (ou poids total) des types de  $F$ -structures asymétriques ayant  $n$  sommets,

sont appelées respectivement série génératrice (exponentielle), série génératrice des types, et série génératrice des types d'asymétrie de l'espèce (pondérée)  $F$ .

Afin de faciliter et d'unifier la présentation de la définition des deux autres séries  $Z_F$  et  $\Gamma_F$ , introduisons d'abord quelques notations utiles. Soit  $t = (t_1, t_2, \dots, t_i, \dots)$  une suite dénombrable d'indéterminées distinctes (n'appartenant pas à l'anneau des poids des  $F$ -structures) et considérons l'espèce pondérée auxiliaire

$$F_t = F_t(X) = F(X_{t_1} + X_{t_2} + \dots + X_{t_i} + \dots),$$

dans laquelle  $X_{t_i}$  désigne l'espèce des singletons de sorte  $X$  et de poids  $t_i$ , pour chaque  $i \geq 1$ . Une  $F_t$ -structure consiste donc en une  $F$ -structure dont chaque point de l'ensemble sous-jacent est affecté d'un poids choisi arbitrairement parmi les  $t_i$ . Le poids d'une telle  $F_t$ -structure étant le poids de la  $F$ -structure multiplié par le produit des poids des points de son ensemble sous-jacent. On peut donc, en particulier, considérer les deux séries génératrices  $\tilde{F}_t(x)$  et  $\bar{F}_t(x)$  de l'espèce pondérée  $F_t$ . Ce sont évidemment des fonctions symétriques des variables  $t_1, t_2, \dots, t_i, \dots$ . Introduisons finalement les variables  $x_1, x_2, \dots, x_k, \dots$  par le biais de la famille d'égalités

$$x_k = t_1^k + t_2^k + \dots + t_i^k + \dots \text{ (power sum de degré } k), \quad k \geq 1.$$

**Définition 1.2** (Joyal [20], Labelle [29]). Les séries formelles  $Z_F$  et  $\Gamma_F$  caractérisées par les équations

$$Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \tilde{F}_t(x)|_{x:=1} \quad \text{et} \quad \Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \dots) = \bar{F}_t(x)|_{x:=1}$$

<sup>1</sup>Autres séries: la *décomposition atomique* (Section 2.1) et les *q-séries canoniques*  $F(x; q)$  et  $F\langle x; q \rangle$  [13, 14].

sont appelées respectivement série indicatrice des cycles et série indicatrice d'asymétrie de l'espèce (pondérée)  $F$ . En d'autres termes, les séries  $Z_F$  et  $\Gamma_F$  sont les expressions des fonctions symétriques  $\tilde{F}_t(x)|_{x_i=1}$  et  $\bar{F}_t(x)|_{x_i=1}$  (des variables  $t_i$ ) dans la base des power sums.

Il est bien connu que ces séries indicatrices peuvent s'exprimer sous les formes standards

$$Z_F = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n}, \quad \Gamma_F = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_\sigma^* x_1^{\sigma_1} x_2^{\sigma_2} \dots x_n^{\sigma_n},$$

où  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$  désigne le type cyclique de chaque permutation  $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ . Les coefficients

$$f_\sigma = \text{coeff}_\sigma Z_F, \quad f_\sigma^* = \text{coeff}_\sigma \Gamma_F$$

appartiennent à l'anneau des poids des  $F$ -structures. On a l'interprétation combinatoire

$$f_\sigma = \text{nombre (ou poids total) de toutes les } F\text{-structures dont } \sigma \text{ est un automorphisme.}$$

Une telle interprétation directe n'existe cependant pas pour les coefficients  $f_\sigma^*$  puisqu'on a, dans le contexte non pondéré,

$$f_\sigma \in \mathbb{N}, \text{ mais } f_\sigma^* \in \mathbb{Z}, \text{ en général.}$$

La stricte négativité des coefficients  $f_\sigma^*$  peut se produire pour certaines espèces (voir Section 2.1).

**Théorème 1.3** (Joyal [20], Labelle [29], Décoste [13]). *Les transformations  $F \mapsto Z_F$ ,  $F \mapsto \Gamma_F$  commutent aux opérations combinatoires usuelles de somme, produit, substitution, et dérivation:*

$$\begin{aligned} Z_{F+G} &= Z_F + Z_G, & \Gamma_{F+G} &= \Gamma_F + \Gamma_G, \\ Z_{F \cdot G} &= Z_F \cdot Z_G, & \Gamma_{F \cdot G} &= \Gamma_F \cdot \Gamma_G, \\ Z_{F \circ G} &= Z_F \circ Z_G, & \Gamma_{F \circ G} &= \Gamma_F \circ \Gamma_G, \\ Z_{F'} &= \frac{\partial Z_F}{\partial x_1}, & \Gamma_{F'} &= \frac{\partial \Gamma_F}{\partial x_1}. \end{aligned}$$

De plus, les trois séries génératrices  $F(x)$ ,  $\tilde{F}(x)$  et  $\bar{F}(x)$  s'obtiennent des séries indicatrices  $Z_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$  et  $\Gamma_F(x_1, x_2, x_3, \dots)$  par spécialisations des variables  $x_1, x_2, x_3, \dots$  :

$$\begin{aligned} F(x) &= Z_F(x, 0, 0, \dots), & \tilde{F}(x) &= \Gamma_F(x, 0, 0, \dots), \\ \bar{F}(x) &= Z_F(x, x^2, x^3, \dots), & \bar{F}(x) &= \Gamma_F(x, x^2, x^3, \dots). \end{aligned}$$

Dans ces formules, la substitution  $f \circ g$  de deux séries indicatrices pondérées  $f = f_w$  et  $g = g_v$  (associées respectivement aux familles de poids  $w$  et  $v$ ) est définie par

$$(f \circ g)(x_1, x_2, x_3, \dots) = f_w(g_1, g_2, g_3, \dots),$$

où

$$g_k = g_k(x_1, x_2, x_3, \dots) := g_{v^k}(x_k, x_{2k}, x_{3k}, \dots), \quad k = 1, 2, \dots$$

Dans la définition de  $g_k$  notons qu'il faut élever les poids à la puissance  $k$  et multiplier par  $k$  les indices des variables  $x_i$ . On écrit souvent  $f(g)$  au lieu de  $f \circ g$ , et  $F(G)$  au lieu de  $F \circ G$ .

On obtient facilement, par spécialisations des variables, le corollaire suivant qui décrit complètement le comportement des trois autres séries devant les opérations combinatoires.

**Corollaire 1.4.** *La transformation  $F \mapsto F(x)$  commute aux opérations combinatoires de somme, produit, substitution, et dérivation:*

$$(F + G)(x) = F(x) + G(x), \quad (F \cdot G)(x) = F(x) \cdot G(x),$$

$$(F \circ G)(x) = F(G(x)), \quad F'(x) = \frac{d}{dx} F(x).$$

Les transformations  $F \mapsto \widetilde{F}(x)$  et  $F \mapsto \overline{F}(x)$  commutent aux opérations de somme et produit:

$$\widetilde{(F + G)}(x) = \widetilde{F}(x) + \widetilde{G}(x), \quad \overline{(F + G)}(x) = \overline{F}(x) + \overline{G}(x),$$

$$\widetilde{(F \cdot G)}(x) = \widetilde{F}(x) \cdot \widetilde{G}(x), \quad \overline{(F \cdot G)}(x) = \overline{F}(x) \cdot \overline{G}(x).$$

Enfin, en ce qui concerne la substitution et la dérivation, on a les formules

$$\widetilde{(F \circ G)}(x) = Z_F(\widetilde{G}(x), \widetilde{G}(x^2), \widetilde{G}(x^3), \dots),$$

$$\overline{(F \circ G)}(x) = \Gamma_F(\overline{G}(x), \overline{G}(x^2), \overline{G}(x^3), \dots),$$

$$\widetilde{F}'(x) = \frac{\partial Z_F}{\partial x_1}(x, x^2, x^3, \dots), \quad \overline{F}'(x) = \frac{\partial \Gamma_F}{\partial x_1}(x, x^2, x^3, \dots).$$

Il est important de souligner que ces formules générales impliquent, au plan pratique, le principe de calcul suivant:

*Toute équation combinatoire caractérisant (à isomorphisme naturel près) une espèce  $F$  en faisant appel aux opérations combinatoires “+”, “·”, “’”, “◦” donne automatiquement lieu à 5 équations correspondantes caractérisant les séries  $F(x)$ ,  $Z_F$ ,  $\Gamma_F$ ,  $\widetilde{F}(x)$ , et  $\overline{F}(x)$ .*

Un exemple typique d'application de ce principe est donné par l'équation combinatoire

$$Y = X \cdot R(Y)$$

qui caractérise l'espèce  $Y = A_R$  de toutes les arborescences dites  $R$ -enrichies [24, 20]. Cette simple équation combinatoire donne donc lieu aux caractérisations suivantes des séries  $A_R(x)$ ,  $Z_{A_R}$ ,  $\Gamma_{A_R}$ ,  $\widetilde{A}_R(x)$ , et  $\overline{A}_R(x)$ :

$$\begin{aligned} A_R(x) &= xR(A_R(x)), \\ Z_{A_R} &= x_1 Z_R(Z_{A_R}), \quad \Gamma_{A_R} = x_1 \Gamma_R(\Gamma_{A_R}), \\ \widetilde{A}_R(x) &= x Z_R(\widetilde{A}_R(x), \widetilde{A}_R(x^2), \widetilde{A}_R(x^3), \dots), \\ \overline{A}_R(x) &= x \Gamma_R(\overline{A}_R(x), \overline{A}_R(x^2), \overline{A}_R(x^3), \dots). \end{aligned}$$

Dans cet exemple, seulement les opérations de produit et de substitution ont été utilisées. Nous présentons, dans la Section 3, plusieurs applications concrètes de ce principe dont un bon nombre fait appel à toutes les quatre opérations combinatoires mentionnées plus haut. Pour le moment, donnons les séries associées à quelques espèces de base.

## 2. Exemples de base

Voici quelques espèces de base dont les 5 séries associées possèdent des expressions explicites particulièrement simples et élégantes [20, 29]. En combinant ces espèces à l'aide des opérations combinatoires (et en faisant appel, au besoin, à des fonctions de poids bien choisies) on peut former d'autres espèces, de plus en plus complexes et calculer les séries qui leur sont associées.

**Exemple 2.1.** L'espèce  $X$  des singletons:  $X(x) = x$ ,

$$\begin{aligned} Z_X &= x_1, & \Gamma_X &= x_1, \\ \widetilde{X}(x) &= x, & \overline{X}(x) &= x. \end{aligned}$$

**Exemple 2.2.** L'espèce  $E_2$  des paires:  $E_2(x) = x^2/2!$ ,

$$\begin{aligned} Z_{E_2} &= \frac{1}{2}(x_1^2 + x_2), & \Gamma_{E_2} &= \frac{1}{2}(x_1^2 - x_2), \\ \widetilde{E}_2(x) &= x^2, & \overline{E}_2(x) &= 0. \end{aligned}$$

**Exemple 2.3.** L'espèce  $E$  des ensembles:  $E(x) = \exp(x)$ ,

$$\begin{aligned} Z_E &= \exp\left(\sum_{n \geq 1} x_n/n\right), & \Gamma_E &= \exp\left(\sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x_n/n\right), \\ \widetilde{E}(x) &= 1/(1-x), & \overline{E}(x) &= 1+x. \end{aligned}$$

**Exemple 2.4.** L'espèce  $\wp = E^2$  des parties:  $\wp(x) = \exp(2x)$ ,

$$\begin{aligned} Z_\wp &= \exp\left(2 \sum_{n \geq 1} x_n/n\right), & \Gamma_\wp &= \exp\left(2 \sum_{n \geq 1} (-1)^{n-1} x_n/n\right), \\ \tilde{\wp}(x) &= 1/(1-x)^2, & \bar{\wp}(x) &= (1+x)^2. \end{aligned}$$

**Exemple 2.5.** L'espèce  $L$  des ordres linéaires:  $L(x) = 1/(1-x)$ ,

$$\begin{aligned} Z_L &= 1/(1-x_1), & \Gamma_L &= 1/(1-x_1), \\ \tilde{L}(x) &= 1/(1-x), & \bar{L}(x) &= 1/(1-x). \end{aligned}$$

**Exemple 2.6.** L'espèce  $S$  des permutations:  $S(x) = 1/(1-x)$ ,

$$\begin{aligned} Z_S &= \prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1-x_n)}, & \Gamma_S &= \frac{(1-x_2)}{(1-x_1)}, \\ \tilde{S}(x) &= \prod_{n \geq 1} \frac{1}{(1-x^n)}, & \bar{S}(x) &= 1+x. \end{aligned}$$

**Exemple 2.7.** L'espèce  $C$  des cycles orientés:  $C(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$ ,

$$\begin{aligned} Z_C &= \sum_{n \geq 1} \frac{\phi(n)}{n} \ln\left(\frac{1}{1-x_n}\right), & \Gamma_C &= \sum_{n \geq 1} \frac{\mu(n)}{n} \ln\left(\frac{1}{1-x_n}\right), \\ \tilde{C}(x) &= x/(1-x), & \bar{C}(x) &= x, \end{aligned}$$

où  $\phi(n)$  et  $\mu(n)$  désignent respectivement les fonctions d'Euler et de Möbius.

### 2.1. Les espèces atomiques concentrées sur $n \leq 4$ points

La Table 1, extraite de [26, 29, 32], donne les séries  $n! Z_A$  et  $n! \Gamma_A$  pour chaque espèce *atomique*  $A$  dont les structures vivent sur  $n \leq 4$  points. Les espèces atomiques sont les espèces *moléculaires* (i.e. indécomposables nontrivialement sous la somme) qui sont aussi indécomposables nontrivialement sous le produit. Elles forment une famille dénombrable  $\mathcal{A}$  d'espèces dont les premiers termes sont donnés par

$$\mathcal{A}: X, E_2, E_3, C_3, E_4, E_4^\pm, E_2 \circ E_2, P_4^{\text{bic}}, C_4, E_2 \circ X^2, \dots$$

Nous renvoyons le lecteur à [32] pour une extension de cette liste et pour la signification précise des notations utilisées. On sait depuis Yeh [59, 60] que la totalité  $\mathcal{E} \circ \mathcal{A}$  de toutes les espèces (à isomorphismes près) forme un demi-anneau isomorphe au demi-anneau

$$\mathbb{N}[[\mathcal{A}]] = \mathbb{N}[[X, E_2, E_3, C_3, E_4, E_4^\pm, E_2 \circ E_2, P_4^{\text{bic}}, C_4, E_2 \circ X^2, \dots]]$$

Table 1  
Séries indicatrices des espèces atomiques  $A$  concentrées sur  $n \leq 4$  points

$n$	$A$	$n! Z_A$	$n! F_A$
1	$X$	$x_1$	$x_1$
2	$E_2$	$x_1^2 + x_2$	$x_1^2 - x_2$
3	$E_3$	$x_1^3 + 3x_1 x_2 + 2x_3$	$x_1^3 - 3x_1 x_2 + 2x_3$
3	$C_3$	$2x_1^3 + 4x_3$	$2x_1^3 - 2x_3$
4	$E_4$	$x_1^4 + 6x_1^2 x_2 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2 + 6x_4$	$x_1^4 - 6x_1^2 x_2 + 8x_1 x_3 + 3x_2^2 - 6x_4$
4	$E_4^\pm$	$2x_1^4 + 16x_1 x_3 + 6x_2^2$	$2x_1^4 - 6x_2^2 - 8x_1 x_3 + 12x_4$
4	$E_2 \circ E_2$	$3x_1^4 + 6x_1^2 x_2 + 9x_2^2 + 6x_4$	$3x_1^4 - 6x_1^2 x_2 - 3x_2^2 + 6x_4$
4	$P_4^{\text{bic}}$	$6x_1^4 + 18x_2^2$	$6x_1^4 - 18x_2^2 + 12x_4$
4	$C_4$	$6x_1^4 + 6x_2^2 + 12x_4$	$6x_1^4 - 6x_2^2$
4	$E_2 \circ X^2$	$12x_1^4 + 12x_2^2$	$12x_1^4 - 12x_2^2$

des  $\mathbb{N}$ -séries formelles dont les «variables» sont les espèces atomiques. L'écriture d'une espèce quelconque  $F$  comme élément de  $\mathbb{N}[[\mathcal{A}]]$  s'appelle la *décomposition atomique* de l'espèce  $F$ . Il s'agit de la série la plus raffinée que l'on puisse associer à une espèce. En effet, deux espèces sont isomorphes *si et seulement si* elles ont même décomposition atomique (ceci est faux pour les autres séries considérées plus haut, voir Section 4). En guise d'illustration, voici les quelques premiers termes de la décomposition atomique de l'espèce  $\mathcal{G}_i$  de tous les *graphes simples*:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}_i(X) = & 1 + X + 2E_2 + 2X \cdot E_2 + 2E_3 + 2X^2 \cdot E_2 + 2X \cdot E_3 \\ & + 2E_2 \cdot E_2 + 2E_2 \circ E_2 + E_2 \circ X^2 + 2E_4 + \dots \end{aligned}$$

En acceptant des coefficients négatifs dans les décompositions atomiques on obtient l'anneau

$$\mathbb{Z}[[\mathcal{A}]] = \mathbb{Z}[[X, E_2, E_3, C_3, E_4, E_4^\pm, E_2 \circ E_2, P_4^{\text{bic}}, C_4, E_2 \circ X^2, \dots]]$$

dont les éléments sont appelés les *espèces virtuelles*. Les espèces virtuelles peuvent aussi être vues comme différences formelles d'espèces. L'anneau  $\mathbb{Z}[[\mathcal{A}]]$  est aussi fermé sous les opérations de substitution et de dérivation [21, 22, 59, 60] (voir aussi [27]). Il est important en théorie des espèces puisqu'il joue, par rapport à  $\mathbb{N}[[\mathcal{A}]]$ , un rôle analogue à l'anneau  $\mathbb{Z}$  des entiers par rapport à  $\mathbb{N}$  et qu'il permet de résoudre des équations combinatoires qui n'ont pas de solution dans  $\mathbb{N}[[\mathcal{A}]]$ .

## 2.2. Composantes connexes

Soit  $E$  l'espèce des *ensembles*. Lorsque deux espèces  $F$  et  $G$  sont reliées par l'équation combinatoire  $G = E \circ F$ , on dit qu'une  $F$ -structure est une  $G$ -structure *connexe* (puisque les  $G$ -structures sont les *assemblées* de  $F$ -structures). Plus généralement, pour toute espèce virtuelle  $G$  telle que  $G(0) = 1$ , il existe (voir 2.5 plus bas) une unique espèce virtuelle  $F$  telle que  $G = E \circ F$  et on écrit  $F = G_{\text{conn}}$ . Puisque les



séries  $Z_E$  et  $\Gamma_E$  sont connues explicitement, le Théorème 1.3 permet de calculer aisément les séries de  $G$  à partir des séries de  $G_{\text{conn}}$ . Inversement [25, 29], voici comment calculer les séries de  $G_{\text{conn}}$  à partir de celles de  $G$  via la fonction de Möbius: Posons

$$\lambda = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} (\log \Gamma_G)_k, \quad \Lambda(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \log \bar{G}(x^k).$$

On a alors

$$G_{\text{conn}}(x) = \log G(x),$$

$$Z_{G_{\text{conn}}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} (\log Z_G)_k, \quad \Gamma_{G_{\text{conn}}} = \lambda + \lambda_2 + \lambda_4 + \dots + \lambda_{2^k} + \dots,$$

$$\widetilde{G}_{\text{conn}}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(k)}{k} \log \tilde{G}(x^k),$$

$$\overline{G}_{\text{conn}}(x) = \Lambda(x) + \Lambda(x^2) + \Lambda(x^4) + \dots + \Lambda(x^{2^k}) + \dots$$

Comme exemple d'application de ces formules, mentionnons qu'on peut facilement calculer les séries associées à l'espèce  $End_{\text{conn}}$  des *endofonctions connexes* puisque les séries  $Z_{End}$  et  $\Gamma_{End}$ , de l'espèce  $End$  des *endofonctions* sont connues explicitement (voir Section 3).

### 2.3. Membres d'assemblées circulaires

Soit  $C$  l'espèce des *cycles orientés*. Lorsque deux espèces  $F$  et  $G$  sont reliées par l'équation combinatoire  $G = C \circ F$ , on dit qu'une  $G$ -structure est une *assemblée circulaire de  $F$ -structures* (les  $F$ -structures sont aussi appelées les *membres* de l'assemblée). Plus généralement, pour toute espèce virtuelle  $G$  telle que  $G(0) = 0$ , il existe (voir 2.5 plus bas) une unique espèce virtuelle  $F$  telle que  $G = C \circ F$ . Les séries de  $G$  peuvent se calculer facilement à partir de celles de  $F$ . Inversement [25, 29], voici comment calculer les séries de  $F$  à partir de celles de  $G$ :

$$F(x) = 1 - \exp(-G(x)),$$

$$Z_F = 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)(Z_G)_k\right), \quad \Gamma_F = 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} (\Gamma_G)_k\right),$$

$$\tilde{F}(x) = 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \omega(k)\tilde{G}(x^k)\right), \quad \bar{F}(x) = 1 - \exp\left(-\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \bar{G}(x^k)\right),$$

où

$$\omega(k) = \frac{1}{k} \prod_{p|k} (1-p).$$

#### 2.4. Membres d'assemblées permutées

Soit  $S$  l'espèce des *permutations*. Lorsque deux espèces  $F$  et  $G$  sont reliées par l'équation combinatoire  $G = S \circ F$ , on dit qu'une  $G$ -structure est une *assemblée permutée de  $F$ -structures* (les  $F$ -structures sont aussi appelées les *membres* de l'assemblée). Plus généralement, pour toute espèce virtuelle  $G$  telle que  $G(0) = 1$ , il existe (voir 2.5 plus bas) une unique espèce virtuelle  $F$  telle que  $G = S \circ F$ . Les séries de  $G$  peuvent se calculer facilement à partir de celles de  $F$ . Inversement [25, 29], voici comment calculer les séries de  $F$  à partir de celles de  $G$ :

$$F(x) = 1 - \frac{1}{G(x)},$$

$$Z_F = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} (Z_G)_k^{-\mu(k)}, \quad \Gamma_F = 1 - \frac{1}{(\Gamma_G) \cdot (\Gamma_G)_2 \cdot (\Gamma_G)_4 \cdots (\Gamma_G)_{2^k} \cdots},$$

$$\tilde{F}(x) = 1 - \prod_{k=1}^{\infty} \tilde{G}(x^k)^{-\mu(k)}, \quad \bar{F}(x) = 1 - \frac{1}{\bar{G}(x) \cdot \bar{G}(x^2) \cdot \bar{G}(x^4) \cdots \bar{G}(x^{2^k}) \cdots},$$

#### 2.5. Membres de $H$ -assemblées

On peut généraliser les 3 exemples précédents en considérant l'équation combinatoire  $G = H \circ F$  où  $H$  est une espèce virtuelle donnée dont la décomposition atomique débute par  $H = X + \dots$ . On dit que  $G$  est l'espèce (virtuelle) des  *$H$ -assemblées de  $F$ -structures*. Encore une fois, les séries pour  $G$  peuvent se calculer facilement à partir des séries pour  $F$  lorsque l'on connaît les séries de  $H$ . Cependant, le fait intéressant est que *la démarche inverse est toujours possible*. En effet, l'équation combinatoire suivante [22, 27] permet d'exprimer  $F$ , de façon unique, à partir de  $G$ :

$$F = G - \Delta_H G + \Delta_H^2 G - \Delta_H^3 G + \dots + (-1)^k \Delta_H^k G + \dots,$$

où  $\Delta_H$  est l'opérateur linéaire défini par

$$\Delta_H : \mathbb{Z}[[\mathcal{A}]] \rightarrow \mathbb{Z}[[\mathcal{A}]], \quad \Delta_H K = K \circ H - K.$$

Les séries  $Z_F$  et  $\Gamma_F$  s'obtiennent alors de l'équation ci-haut par simple passage aux séries indicatrices.

### 3. Applications aux structures arborescentes

À partir d'une espèce donnée<sup>2</sup>  $R = R(X)$ , on peut former deux espèces importantes de structures arborescentes. Il s'agit de l'espèce  $A_R$  des *arborescences  $R$ -enrichies* et l'espèce  $\alpha_R$  des *arbres  $R$ -enrichis*.

<sup>2</sup> Nous supposons, pour simplifier, que l'espèce  $R$  est non pondérée.

**Définition 3.1** (Labelle [24, 30]). Une arborescence  $R$ -enrichie (i.e. une  $A_R$ -structure) est une arborescence dans laquelle l'ensemble des descendants immédiats de chaque sommet est muni d'une  $R$ -structure. Un arbre  $R$ -enrichi (i.e. une  $a_R$ -structure) est un arbre dans lequel l'ensemble des voisins immédiats de chaque sommet est muni d'une  $R$ -structure.

La Fig. 1 montre une arborescence  $R$ -enrichie (resp. arbre  $R$ -enrichi) dans laquelle les  $R$ -structures sont représentées schématiquement par des arcs de cercles (resp. cercles) pointillés.

En choisissant convenablement l'espèce «enrichissante»  $R$ , on peut obtenir diverses familles importantes de structures arborescentes. Par exemple: les arborescences et les arbres ordinaires ( $R = E$ ), les arborescences cycliques et les arbres plans ( $R = 1 + C$ ), les arborescences planes ( $R = L$ ), les arborescences binaires ( $R = 1 + E_2$ ), les arbres topologiques ( $R = E - E_2$ ), les arborescences orientées ( $R = E^2$ ), les arborescences permutées ( $R = S$ ), etc. Nous traiterons quelques-uns de ces exemples spécifiques dans les Sections 3.1–3.5. Pour le moment nous supposons que  $R$  est une espèce «générique».

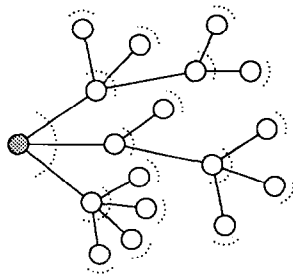
**Théorème 3.2** (Labelle [24, 30]). Les espèces  $A_R$  et  $a_R$  sont respectivement caractérisées par les équations combinatoires

$$A_R = X \cdot R(A_R) \quad \text{et} \quad a_R + A_R^2 = X \cdot R(A_{R'}) + E_2(A_{R'}),$$

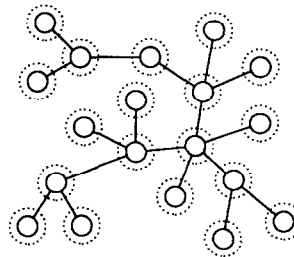
où  $A_{R'} = X \cdot R'(A_{R'})$  est l'espèce des arborescences  $R'$ -enrichies.

Remarquons que dans le cas où l'espèce enrichissante  $R$  est l'espèce  $E$  des ensembles, les équations du Théorème 3.2 caractérisent les espèces  $A = A_E$  et  $a = a_E$  des arborescences et des arbres ordinaires et se réduisent aux équations

$$A = X \cdot E(A) \quad \text{et} \quad a + A^2 = A + E_2(A).$$



Arborescence  $R$ -enrichie.



Arbre  $R$ -enrichi.

Fig. 1.

La deuxième de ces équations est due à Otter–Robinson–Leroux [48, 50, 38, 39]. Le Théorème 1.3 et le Corollaire 1.4 entraînent aussitôt:

**Théorème 3.3.** *Les séries  $A_R(x)$ ,  $Z_{A_R}$ ,  $\Gamma_{A_R}$ ,  $\widetilde{A}_R(x)$ ,  $\overline{A}_R(x)$  sont caractérisées récursivement par les équations*

$$\begin{aligned} A_R(x) &= xR(A_R(x)), \\ Z_{A_R} &= x_1 Z_R(Z_{A_R}), \quad \Gamma_{A_R} = x_1 \Gamma_R(\Gamma_{A_R}), \\ \widetilde{A}_R(x) &= xZ_R(\widetilde{A}_R(x), \widetilde{A}_R(x^2), \widetilde{A}_R(x^3), \dots), \\ \overline{A}_R(x) &= x\Gamma_R(\overline{A}_R(x), \overline{A}_R(x^2), \overline{A}_R(x^3), \dots). \end{aligned}$$

*Les séries  $a_R(x)$ ,  $Z_{a_R}$ ,  $\Gamma_{a_R}$ ,  $\widetilde{a}_R(x)$ ,  $\overline{a}_R(x)$  sont caractérisées récursivement par les équations*

$$\begin{aligned} a_R(x) &= xR(A_{R'}(x)) - \frac{1}{2}(A_{R'}(x))^2, \\ Z_{a_R} &= x_1 Z_R(Z_{A_{R'}}) - \frac{1}{2}(Z_{A_{R'}})^2 + \frac{1}{2}(Z_{A_{R'}})_2, \\ \Gamma_{a_R} &= x_1 \Gamma_R(\Gamma_{A_{R'}}) - \frac{1}{2}(\Gamma_{A_{R'}})^2 - \frac{1}{2}(\Gamma_{A_{R'}})_2, \\ \widetilde{a}_R(x) &= xZ_R(\widetilde{A}_{R'}(x), \widetilde{A}_{R'}(x^2), \widetilde{A}_{R'}(x^3), \dots) - \frac{1}{2}(\widetilde{A}_{R'}(x))^2 + \frac{1}{2}\widetilde{A}_{R'}(x^2), \\ \overline{a}_R(x) &= x\Gamma_R(\overline{A}_{R'}(x), \overline{A}_{R'}(x^2), \overline{A}_{R'}(x^3), \dots) - \frac{1}{2}(\overline{A}_{R'}(x))^2 - \frac{1}{2}\overline{A}_{R'}(x^2). \end{aligned}$$

On trouvera dans [30] des tables dressées par les logiciels de calcul symbolique MAPLE [10] et DARWIN [3, 4, 8, 9] qui donnent les premiers coefficients de certaines de ces séries pour des espèces  $R$  particulières ainsi que dans le cas générique. Des schémas itératifs de type Newton–Raphson ont été développés dans [15, 25, 30]. Les coefficients des séries indicatrices peuvent aussi être *calculés individuellement* en utilisant les Théorèmes 3.4 et 3.5 qui suivent.

**Théorème 3.4** (Labelle [25, 30]). *Soit  $A_R = X \cdot R(A_R)$  l'espèce des arborescences  $R$ -enrichies. Alors pour toute permutation  $\sigma$  de type cyclique  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  et toute espèce  $F$ , on a*

$$\begin{aligned} \text{coeff}_\sigma Z_{A_R} &= \text{coeff}_\sigma x_1 \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{x_1 \partial Z_R / \partial x_1}{Z_R} \right)_k (Z_R)_k^{\sigma_k}, \\ \text{coeff}_\sigma Z_{F(A_R)} &= \text{coeff}_\sigma Z_F \cdot \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{x_1 \partial Z_R / \partial x_1}{Z_R} \right)_k (Z_R)_k^{\sigma_k}, \\ \text{coeff}_\sigma \Gamma_{A_R} &= \text{coeff}_\sigma x_1 \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{x_1 \partial \Gamma_R / \partial x_1}{\Gamma_R} \right)_k (\Gamma_R)_k^{\sigma_k}, \\ \text{coeff}_\sigma \Gamma_{F(A_R)} &= \text{coeff}_\sigma \Gamma_F \cdot \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{x_1 \partial \Gamma_R / \partial x_1}{\Gamma_R} \right)_k (\Gamma_R)_k^{\sigma_k}. \end{aligned}$$

**Théorème 3.5** (Labelle [30]). *Soit  $\alpha_R$  l'espèce des arbres  $R$ -enrichis. Alors pour toute permutation  $\sigma$  de type cyclique  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$ , on a, selon les cas,*

$$\text{coeff}_\sigma Z_{\alpha_R} = \begin{cases} \omega_{\sigma_1-1, \sigma_2, \sigma_3, \dots} & \text{si } \sigma_1 \neq 0, \\ 2^{(\sum \sigma_{2k})-1} b_{\sigma_2, \sigma_4, \dots} & \text{si } 0 = \sigma_1 = \sigma_3 = \dots, \\ 0 & \text{sinon;} \end{cases}$$

$$\text{coeff}_\sigma \Gamma_{\alpha_R} = \begin{cases} \omega_{\sigma_1-1, \sigma_2, \sigma_3, \dots}^* & \text{si } \sigma_1 \neq 0, \\ -2^{(\sum \sigma_{2k})-1} b_{\sigma_2, \sigma_4, \dots}^* & \text{si } 0 = \sigma_1 = \sigma_3 = \dots, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où

$$\omega_\sigma = \text{coeff}_\sigma Z_R \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{x_1 \partial^2 Z_R / \partial x_1^2}{\partial Z_R / \partial x_1} \right)_k (\partial Z_R / \partial x_1)_k^{\sigma_k},$$

$$b_\sigma = \text{coeff}_\sigma x_1 \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{x_1 \partial^2 Z_R / \partial x_1^2}{\partial Z_R / \partial x_1} \right)_k (\partial Z_R / \partial x_1)_k^{\sigma_k},$$

$$\omega_\sigma^* = \text{coeff}_\sigma \Gamma_R \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{x_1 \partial^2 \Gamma_R / \partial x_1^2}{\partial \Gamma_R / \partial x_1} \right)_k (\partial \Gamma_R / \partial x_1)_k^{\sigma_k},$$

$$b_\sigma^* = \text{coeff}_\sigma x_1 \prod_{k \geq 1} \left( 1 - \frac{x_1 \partial^2 \Gamma_R / \partial x_1^2}{\partial \Gamma_R / \partial x_1} \right)_k (\partial \Gamma_R / \partial x_1)_k^{\sigma_k}.$$

Il est intéressant de noter que les Théorèmes 3.4 et 3.5 entraînent des formules explicites pour les séries génératrices  $\widetilde{A}_R(x)$ ,  $\overline{A}_R(x)$ ,  $\widetilde{a}_R(x)$ ,  $\overline{a}_R(x)$  sous formes de termes constants dans des produits infinis:

**Corollaire 3.6** [30]. *Soit  $t$  une variable formelle distincte des  $x_i$ . Alors pour toutes espèces  $R$  et  $F$  on a les formules explicites*

$$\widetilde{A}_R(t) = T.C. x_1 \prod_{k \geq 1} \left( \frac{1 - x_1 (\partial Z_R / \partial x_1) / Z_R}{1 - t^k Z_R / x_1} \right)_k,$$

$$\overline{A}_R(t) = T.C. x_1 \prod_{k \geq 1} \left( \frac{1 - x_1 (\partial \Gamma_R / \partial x_1) / \Gamma_R}{1 - t^k \Gamma_R / x_1} \right)_k,$$

$$\widetilde{a}_R(t) = T.C. (t Z_R - \frac{1}{2} x_1^2 + \frac{1}{2} x_2) \prod_{k \geq 1} \left( \frac{1 - x_1 (\partial^2 Z_R / \partial x_1^2) / (\partial Z_R / \partial x_1)}{1 - t^k (\partial Z_R / \partial x_1) / x_1} \right)_k,$$

$$\overline{a}_R(t) = T.C. (t \Gamma_R - \frac{1}{2} x_1^2 - \frac{1}{2} x_2) \prod_{k \geq 1} \left( \frac{1 - x_1 (\partial^2 \Gamma_R / \partial x_1^2) / (\partial \Gamma_R / \partial x_1)}{1 - t^k (\partial \Gamma_R / \partial x_1) / x_1} \right)_k,$$

où  $T.C.$   $h(t, x_1, x_2, x_3, \dots)$  désigne le terme constant dans la série  $h$  considérée comme série de Laurent dans les variables  $x_1, x_2, x_3, \dots$

### 3.1. Arborences et arbres ordinaires ( $R = E$ )

Dans ce cas,  $A_R = A_E = A$  est l'espèce des *arborences ordinaires* tandis que  $a_R = a_E = a$  est l'espèce des *arbres ordinaires*. Le Théorème 3.3 fournit immédiatement les formules (dont la plupart sont bien connues [18, 19, 46]):

$$\begin{aligned} A(x) &= x e^{A(x)}, \\ Z_A &= x_1 \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (Z_A)_n/n\right), & \Gamma_A &= x_1 \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} (\Gamma_A)_n/n\right), \\ \tilde{A}(x) &= x \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{A}(x^n)/n\right), & \bar{A}(x) &= x \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \bar{A}(x^n)/n\right), \\ a(x) &= A(x) - \frac{1}{2} (A(x))^2, \\ Z_n &= Z_A - \frac{1}{2} (Z_A)^2 + \frac{1}{2} (Z_A)_2, & \Gamma_n &= \Gamma_A - \frac{1}{2} (\Gamma_A)^2 - \frac{1}{2} (\Gamma_A)_2, \\ \tilde{a}(x) &= \tilde{A}(x) - \frac{1}{2} (\tilde{A}(x))^2 + \frac{1}{2} \tilde{A}(x^2), & \bar{a}(x) &= \bar{A}(x) - \frac{1}{2} (\bar{A}(x))^2 - \frac{1}{2} \bar{A}(x^2). \end{aligned}$$

Il est intéressant de remarquer que les Théorèmes 3.4 et 3.5 fournissent, dans le présent contexte, des expressions tout-à-fait explicites pour les coefficients individuels de  $Z_A$ ,  $\Gamma_A$ ,  $Z_n$ ,  $\Gamma_n$ :

Définissons pour toute permutation  $\sigma$  de type cyclique  $(\sigma_1, \sigma_2, \dots)$  et tout  $k \geq 1$ ,

$$\phi_k = \phi_k(\sigma) = \sum_{d|k} d \sigma_d, \quad \theta_k = \theta_k(\sigma) = \sum_{d|k} (-1)^{(k/d)-1} d \sigma_d,$$

alors [25, 30, 11, 12]  $\text{coeff}_{\sigma} Z_A = \text{coeff}_{\sigma} \Gamma_A = 0$ , si  $\sigma_1 = 0$ , et si  $\sigma_1 \neq 0$ ,

$$\text{coeff}_{\sigma} Z_A = \sigma_1^{\sigma_1-1} \prod_{k \geq 2} (\phi_k^{\sigma_k} - k \sigma_k \phi_k^{\sigma_k-1}),$$

$$\text{coeff}_{\sigma} \Gamma_A = \sigma_1^{\sigma_1-1} \prod_{k \geq 2} (\theta_k^{\sigma_k} - k \sigma_k \theta_k^{\sigma_k-1}).$$

De plus, les expressions du Théorème 3.5 pour les coefficients  $\text{coeff}_{\sigma} Z_n$  et  $\text{coeff}_{\sigma} \Gamma_n$  sont grandement simplifiées puisque l'on a alors (pour  $R = E$ ),

$$\omega_{\sigma_1-1, \sigma_2, \sigma_3, \dots} = \frac{\text{coeff}_{\sigma} Z_A}{\sigma_1}, \quad b_{\sigma} = \text{coeff}_{\sigma} Z_A,$$

$$\omega_{\sigma_1^*-1, \sigma_2, \sigma_3, \dots} = \frac{\text{coeff}_{\sigma} \Gamma_A}{\sigma_1}, \quad b_{\sigma}^* = \text{coeff}_{\sigma} \Gamma_A.$$

On retrouve donc, en particulier, la formule explicite donnée dans [12] pour les coefficients de  $Z_n$ .

### 3.2. Endofonctions ( $R = E$ )

L'espèce  $\text{End}$  des endofonctions satisfait l'équation combinatoire bien connue  $\text{End} = S(A)$  où  $S$  est l'espèce des permutations. Le Théorème 3.4 (avec  $F = S$ ) donne, après calculs, les formules explicites remarquables [25, 30]

$$\text{coeff}_\sigma Z_{\text{End}} = \sigma_1^{\sigma_1} \cdot \prod_{k \geq 2} (\phi_k^{\sigma_k} - k \sigma_k \phi_k^{\sigma_k - 1}),$$

$$\text{coeff}_\sigma \Gamma_{\text{End}} = \sigma_1^{\sigma_1} \cdot (\theta_2^{\sigma_2} - 4\sigma_2 \theta_2^{\sigma_2 - 1} + 4\sigma_2(\sigma_2 - 1) \theta_2^{\sigma_2 - 2}) \cdot \prod_{k \geq 3} (\theta_k^{\sigma_k} - k \sigma_k \theta_k^{\sigma_k - 1}),$$

où les nombres  $\phi_k$  et  $\theta_k$  sont définis dans la Section 3.1 en fonction du type cyclique de  $\sigma$ .

### 3.3. Arbres plans ( $R = 1 + C$ )

L'espèce  $\alpha_{\text{plans}}$  des arbres plans s'identifie, de façon naturelle, à l'espèce  $\alpha_R = \alpha_{1+C}$ . En utilisant le Théorème 3.3 il est possible de démontrer que le nombre de types d'isomorphie d'arbres plans sur  $n \geq 2$  sommets est donné par la formule explicite

$$\frac{1}{2(n-1)} \sum_{d|(n-1)} \phi\left(\frac{n-1}{d}\right) \binom{2d}{d} - \frac{1}{2} c_{n-1} + \frac{1}{2} \chi_{\text{pair}}(n) c_{(n/2)-1},$$

où  $\phi$  désigne la fonction d'Euler,  $c_n = [1/(n+1)] \binom{2n}{n}$  désigne le  $n^{\text{e}}$  nombre de Catalan, et  $\chi_{\text{pair}}$  est la fonction caractéristique des entiers pairs. De façon analogue, le nombre de types d'isomorphie d'arbres plans asymétriques sur  $n \geq 2$  sommets est donné par la formule explicite [30]

$$\frac{1}{2(n-1)} \sum_{d|(n-1)} \mu\left(\frac{n-1}{d}\right) \binom{2d}{d} - \frac{1}{2} c_{n-1} - \frac{1}{2} \chi_{\text{pair}}(n) c_{(n/2)-1},$$

où  $\mu$  désigne la fonction d'Euler. Il est intéressant de comparer ce dernier résultat avec l'approche utilisée par Stockmeyer [55] pour effectuer le même dénombrement.

### 3.4. Arborescences enrichies par les permutations ( $R = S$ )

Dans ce cas, le dénombrement des types de  $A_S$ -structures asymétriques se fait à l'aide de la formule compacte

$$\overline{A_S}(x) = \sum_{n \geq 0} \bar{a}_n x^n = x \frac{1 - \overline{A_S}(x^2)}{1 - A_S(x)},$$

dont on tire facilement le schéma de récurrence

$$\bar{a}_0 = 0, \quad \bar{a}_{n+1} = (\bar{a}_1 \bar{a}_n + \bar{a}_2 \bar{a}_{n-1} + \dots + \bar{a}_n \bar{a}_1) - \chi_{\text{pair}}(n) \bar{a}_{n/2}, \quad \text{pour } n \geq 0.$$

### 3.5. Autres enrichissements et variantes

On trouvera dans [30] plusieurs illustrations supplémentaires des formules générales développées plus haut qui font appel à divers autres choix de l'espèce enrichissante  $R$ . Soulignons, en particulier, le cas important de l'espèce  $a_{\text{top}}$  des *arbres topologiques* (i.e. sans sommet de degré 2). Dans ce contexte, l'enrichissement est donné par  $R = E - E_2$  (les ensembles de cardinalité  $\neq 2$ ). Les séries pour  $a_{\text{top}}$  sont reliées directement aux séries des espèces  $A$  et  $a$  (des arborescences et arbres ordinaires) à cause de l'équation combinatoire (virtuelle) remarquable

$$a_{\text{top}} = a \left( \frac{X}{1+X} \right) + X A \left( \frac{X}{1+X} \right) - X E_2 \left( A \left( \frac{X}{1+X} \right) \right).$$

On en déduit les deux formules

$$\begin{aligned} \widetilde{a_{\text{top}}}(x) &= Z_a \left( \frac{x}{1+x}, \frac{x^2}{1+x^2}, \dots \right) + x Z_A \left( \frac{x}{1+x}, \frac{x^2}{1+x^2}, \dots \right) \\ &\quad - \frac{x}{2} Z_A^2 \left( \frac{x}{1+x}, \frac{x^2}{1+x^2}, \dots \right) - \frac{x}{2} Z_A \left( \frac{x^2}{1+x^2}, \frac{x^4}{1+x^4}, \dots \right), \\ \overline{a_{\text{top}}}(x) &= \Gamma_a \left( \frac{x}{1+x}, \frac{x^2}{1+x^2}, \dots \right) + x \Gamma_A \left( \frac{x}{1+x}, \frac{x^2}{1+x^2}, \dots \right) \\ &\quad - \frac{x}{2} \Gamma_A^2 \left( \frac{x}{1+x}, \frac{x^2}{1+x^2}, \dots \right) + \frac{x}{2} \Gamma_A \left( \frac{x^2}{1+x^2}, \frac{x^4}{1+x^4}, \dots \right). \end{aligned}$$

Mentionnons aussi les variantes possibles dans lesquelles les graphes sous-jacents aux structures arborescentes sont munis d'une orientation arbitraire. Par exemple, en utilisant l'équation combinatoire de Leroux–Miloudi [39],

$$a^{\text{or}} + (A^{\text{or}})^2 = A^{\text{or}},$$

qui relie l'espèce  $a^{\text{or}}$  des *arbres orientés* à l'espèce  $A^{\text{or}}$  des *arborescences orientées*, on peut obtenir des expressions explicites pour les coefficients individuels  $\text{coeff}_\sigma Z_{\mathcal{F}^{\text{or}}}$  et  $\text{coeff}_\sigma \Gamma_{\mathcal{F}^{\text{or}}}$  des séries indicatrices associées à l'espèce  $\mathcal{F}^{\text{or}}$  des forêts d'arbres orientés [30]. Ces expressions font appel aux polynômes d'Hermite.

Soulignons qu'en utilisant des méthodes semblables à celles du présent texte et en mettant en jeu des fonctions de poids adéquates, Bergeron, Labelle et Leroux [6] ont donné des formules explicites pour l'espérance mathématique du nombre de feuilles d'une arborescence ou d'un arbre aléatoire ayant un automorphisme  $\sigma$  donné.

## 4. Autres exemples et contre-exemples

Commençons par quelques contre-exemples simples. Nous mentionnons, dans l'introduction du présent texte, que les transformations  $F \mapsto \tilde{F}(x)$  et  $F \mapsto \bar{F}(x)$  ne commutent pas aux opérations de substitution et de dérivation. Il est facile de vérifier



cette affirmation puisqu'en choisissant  $F = E_2$  et  $G = X + X^2$ , on obtient immédiatement les inégalités

$$\frac{1}{2}((x + x^2)^2 + (x^2 + x^4)) = (\widetilde{F \circ G})(x) \neq \widetilde{F}(\widetilde{G}(x)) = (x + x^2)^2,$$

$$x = \widetilde{F}'(x) \neq \frac{d}{dx} \widetilde{F}(x) = 2x,$$

$$\frac{1}{2}((x + x^2)^2 - (x^2 + x^4)) = (\overline{F \circ G})(x) \neq \overline{F}(\overline{G}(x)) = 0, \quad x = \overline{F}'(x) \neq \frac{d}{dx} \overline{F}(x) = 0.$$

Considérons maintenant une espèce  $F$  quelconque. Étant donné que la totalité des  $F$ -structures asymétriques forment une sous-espèce de  $F$ , on peut se demander si la connaissance de la série  $Z_F$  est suffisante pour déterminer la série  $\Gamma_F$ . Il n'en est rien puisque

$\Gamma_F$  n'est pas une fonction de  $Z_F$  (et vice versa).

Pour vérifier cet énoncé, choisissons d'abord les deux espèces  $F = 2E_3 + X^3$  et  $G = 2XE_2 + C_3$ . On a alors, en utilisant la Table 1,  $Z_F = Z_G$  mais  $\Gamma_F \neq \Gamma_G$ . De façon analogue, en prenant cette fois  $F = XE_2$  et  $G = E_3 + C_3$  on constate que  $\Gamma_F = \Gamma_G$  mais  $Z_F \neq Z_G$ .

Bien entendu, deux espèces isomorphes possèdent les mêmes 5 séries. L'inverse est cependant faux en général:

$F = G$ <i>(isomorphisme)</i>	$\Rightarrow$ $\neq$	$F(x) = G(x), \widetilde{F}(x) = \widetilde{G}(x), \overline{F}(x) = \overline{G}(x)$ $Z_F = Z_G, \Gamma_F = \Gamma_G$
----------------------------------	-------------------------	---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

On peut le voir en vérifiant que les deux espèces *non isomorphes* suivantes ont les mêmes 5 séries:

$$F = E_4 + E_2 \circ E_2 + X^2 E_2, \quad G = XE_3 + E_2^2 + C_4.$$

Cet exemple, trouvé par l'auteur à l'aide des logiciels MAPLE et DARWIN, montre bien que la notion de décomposition moléculaire d'une espèce renferme des informations structurelles plus raffinées que celles qui sont contenues dans les cinq séries réunies!

Nous avons déjà noté que le parallèle entre  $Z_F$  et  $\Gamma_F$  n'est pas parfait. Par exemple, les coefficients de  $\Gamma_F$  sont possiblement négatifs mais ce n'est pas le cas pour ceux de  $Z_F$ . Un phénomène semblable se produit également [29] pour la décomposition en fonctions de Schur des fonctions symétriques associées aux séries  $Z_F$  et  $\Gamma_F$  (voir aussi [13, 14] en ce qui concerne les deux  $q$ -séries  $F(x; q)$  et  $F\langle x; q \rangle$ ). Voici une autre différence importante entre les deux séries  $Z_F$  et  $\Gamma_F$ . Il s'agit de leur comportement devant le *produit cartésien*  $F \times G$  d'espèces [20] (aussi appelé *produit de superposition*). On a

$$Z_{F \times G} = Z_F \times Z_G \quad \text{mais} \quad \Gamma_{F \times G} \neq \Gamma_F \times \Gamma_G,$$

où les produits des membres de droite sont les *produits de Hadamard* des séries indicatrices impliquées (i.e. produits coefficients à coefficients). Bien plus,

$$\Gamma_{F \times G} \text{ n'est pas une fonction de } \Gamma_F \text{ et de } \Gamma_G$$

comme le montre l'exemple suivant tiré de [29]: Prenons les espèces  $F$ ,  $G$ ,  $\Phi$ ,  $\Psi$  définies par

$$F = G = X^3 + XE_2 + C_3 \quad \text{et} \quad \Phi = \Psi = X^3 + 2C_3 + E_3.$$

Alors en utilisant les tables de Yeh [59, 60] pour les produits cartésiens d'espèces, on vérifie que

$$F \times G = 19X^3 + XE_2 + 2C_3 \quad \text{et} \quad \Phi \times \Psi = 16X^3 + 12C_3 + E_3.$$

On a cependant,  $\Gamma_F = \Gamma_G = \Gamma_\Phi = \Gamma_\Psi = \frac{11}{6}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{1}{3}x_3$ , tandis que

$$\Gamma_{F \times G} = \frac{121}{6}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{2}{3}x_3 \neq \frac{121}{6}x_1^3 - \frac{1}{2}x_1x_2 - \frac{11}{3}x_3 = \Gamma_{\Phi \times \Psi}.$$

Ce manque de commutation de la transformation  $F \mapsto \Gamma_F$  a pour conséquence de rendre, en général, plus difficile le calcul de la série indicatrice d'asymétrie  $\Gamma_F$  des espèces définies à l'aide du produit cartésien (ce qui n'est pas le cas de la série  $Z_F$ ).

## Bibliographie

- [1] F. Bergeron, Une combinatoire du pléthysme, *J. Combin. Theory Ser. A* **46** (1987) 291–305.
- [2] F. Bergeron, A combinatorial outlook on symmetric functions, *J. Combin. Theory Ser. A* **50** (1989) 226–234.
- [3] F. Bergeron et G. Cartier, Darwin: computer algebra and enumerative combinatorics, dans: R. Cori et M. Wirsing, éd., *STACS '88 (Proc. 5th Ann. Symp. on Theor. Aspects of Comp. Sci.)*, Bordeaux, France, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 294 (Springer, Berlin, 1988) 393–394.
- [4] F. Bergeron et G. Cartier, Darwin: a functional algebra for enumerative combinatorics, Rapport de Recherche No. 54, Dép. de Math.-Info., Université du Québec à Montréal, Montréal, Canada, 1988.
- [5] F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, Functional equations for data structures, dans: R. Cori et M. Wirsing, éd., *STACS '88 (Proc. 5th Ann. Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science)*, (Bordeaux, France 1988) Lecture Notes in Computer Science, Vol. 294 (Springer, Berlin, 1988) 73–80.
- [6] F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, Computation of the expected number of leaves in a tree having a given automorphism, and related topics, Capital City Conf. on Combinatorics and Theoret. Comput. Sci., *Discrete Applied Math.* **34** (1991) 49–66.
- [7] F. Bergeron, G. Labelle et P. Leroux, Combinatoire et structures arborescentes (livre en préparation).
- [8] F. Bergeron et C. Pichet, Darwin: a workstation for combinatorics, in: *Proc. EUROCAL '85, Vol. 2*, Lecture Notes in Computer Science, Vol. 204 (Springer, Berlin, 1986) 444–445.
- [9] G. Cartier, Darwin, une algèbre fonctionnelle pour la combinatoire énumérative (manuel d'utilisation), mémoire de maîtrise, LACIM, Dép. de mathématiques et d'informatique, Université du Québec à Montréal (UQAM), Montréal (Québec) Canada, 1989.
- [10] B.W. Char, K.O. Geddes, G.H. Gonnet, B.L. Leong, M.B. Monagan et S.M. Watt, *Maple V Language Reference Manual* (Springer, Berlin, New York, 1991).
- [11] I. Constantineau et J. Labelle, Le nombre d'endofonctions et d'arborescences laissées fixes par l'action d'une permutation, *Ann. Sci. Math. Québec* **13** (2) (1989) 33–38.
- [12] I. Constantineau et J. Labelle, On combinatorial structures kept fixed by the action of a given permutation, *Stud. Appl. Math.* **84** (1991) 105–118.

- [13] H. Décoste, Séries indicatrices d'espèces pondérées et q-analogues, Thèse de Ph.D., U. de Montréal, Québec, Canada, 1989.
- [14] H. Décoste, Séries indicatrices et q-analogues, dans: M. Delest, G. Jacob et P. Leroux, éd., *Actes du Colloque "Séries formelles et Combinatoire Algébrique"*, U. Bordeaux I. France, 1991, *Theoret. Comput. Sci.* **117** (1993) 169–186, ce volume.
- [15] H. Décoste, G. Labelle et P. Leroux, Une approche combinatoire pour l'itération de Newton–Raphson, *Adv. Appl. Math.* **3** (1982) 407–416.
- [16] H. Décoste, G. Labelle et P. Leroux, The functorial composition of species, a forgotten operation, *Discrete Math.* **99** (1992) 31–48.
- [17] I. Gessel et G. Labelle, Lagrange inversion for species, en préparation.
- [18] F. Harary et E. Palmer, *Graphical Enumeration* (Academic Press, New York, 1973).
- [19] F. Harary et G. Prins, The number of homeomorphically irreducible trees and other species, *Acta Math.* **101** (1959) 141–162.
- [20] A. Joyal, Une théorie combinatoire des séries formelles, *Adv. in Math.* **42** (1981) 1–82.
- [21] A. Joyal, Règle des Signes en Algèbre Combinatoire, *Comptes Rendus Mathématiques de l'Académie des Sciences du Canada VII*, 5 (1985) 285–290.
- [22] A. Joyal, Foncteurs analytiques et espèces de structures, dans: G. Labelle et P. Leroux, éd., *Proc. Combinatoire énumérative*, Montréal, Québec 1985, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1234 (Springer, Berlin, 1986) 126–159.
- [23] A. Kerber, Enumeration under finite group actions: symmetry classes of mappings, dans: G. Labelle et P. Leroux, éd., *Proc. Combinatoire Énumérative*, Montréal, Québec 1985, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1234 (Springer, Berlin, 1986) 160–176.
- [24] G. Labelle, Une nouvelle démonstration combinatoire des formules d'inversion de Lagrange, *Adv. in Math.* **42** (1981) 217–247.
- [25] G. Labelle, Some new computational methods in the theory of species, dans: G. Labelle et P. Leroux, éd., *Proc. Combinatoire énumérative*, Montréal, Québec 1985, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1234 (Springer, Berlin, 1986) 192–209.
- [26] G. Labelle, On combinatorial differential equations, *J. Math. Anal. Appl.* **113** (1986) 344–381.
- [27] G. Labelle, On the generalized iterates of Yeh's combinatorial  $\mathbb{K}$ -species, *J. Combin. Theory Ser. A* **50** (1989) 235–258.
- [28] G. Labelle, Dérivées directionnelles et développements de Taylor combinatoires, *Discrete Math.* **79** (1989/90) 279–297.
- [29] G. Labelle, On asymmetric structures, *Discrete Math.* **99** (1992) 141–164.
- [30] G. Labelle, Counting asymmetric enriched trees, *J. Symbolic Comput.* **14** (1992) 211–242.
- [31] J. Labelle, Applications diverses de la théorie combinatoire des espèces de structures, *Ann. Sci. Math. Québec* **7** (1983) 59–94.
- [32] J. Labelle, Quelques espèces sur les ensembles de petite cardinalité, *Ann. des Sci. Math. Québec* **9** (1985) 31–58.
- [33] J. Labelle et Y.-N. Yeh, Some combinatorics of the hypergeometric series, *European J. Combin.* **9** (1988) 593–605.
- [34] J. Labelle et Y.-N. Yeh, Combinatorial proofs of symmetry formulas for the generalized hypergeometric series, *J. Math. Anal. Appl.* **137** (1989) 35–48.
- [35] J. Labelle et Y.-N. Yeh, The combinatorics of Laguerre, Charlier and Hermite polynomials, *Stud. Appl. Math.* **80** (1989) 25–36.
- [36] J. Labelle et Y.-N. Yeh, The relation between Burnside rings and combinatorial species, *J. Combin. Theory* **50** (1989) 269–284.
- [37] J. Labelle et Y.-N. Yeh, Combinatorial proofs of some limit formulas involving orthogonal polynomials, *Discrete Math.* **79** (1989–90) 77–93.
- [38] P. Leroux, Methoden der Anzahlbestimmung für einige Klassen von Graphen, *Bayreuth. Math. Schr.* **26** (1988) 1–36.
- [39] P. Leroux et B. Miloudi, Généralisations de la formule d'Otter, *Ann. Sci. Math. Québec* **16** (1992) 53–80.
- [40] P. Leroux et G.X. Viennot, Combinatorial resolution of systems of differential equations, I: ordinary differential equations, dans: G. Labelle et P. Leroux éd., *Proc. Combinatoire Énumérative*, Montréal Québec, 1985, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1234 (Springer, Berlin, 1986) 210–245.

- [41] P. Leroux et G.X. Viennot, Résolution combinatoire des systèmes d'équations différentielles, II: Calcul intégral combinatoire, *Ann. Sci. Math. Québec* **12** (1988) 233–253.
- [42] P. Leroux et G.X. Viennot, Combinatorial resolution of systems of differential equations, IV: separation of variables, *Discrete Math.* **72** (1988) 237–250.
- [43] P. Leroux et G.X. Viennot, A combinatorial approach to non linear functional expansions: an introduction with an example. *Theoret. Comput. Sci.* **79** (1991) 179–193.
- [44] A. Longtin, Une combinatoire non-commutative pour l'étude des nombres sécants, dans: G. Labelle et P. Leroux, édés., *Proc. Combinatoire Énumérative*, Montréal, Québec, 1985, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1234 (Springer, Berlin, 1986) 246–266.
- [45] Mathlab Group, *MACSYMA Reference Manual* (version 10, 2 vols.), Lab. for Comp. Sc. (MIT, Cambridge, MA., 1983).
- [46] A. Meir et J.W. Moon, Hereditary finite sets and identity trees, *J. Combin. Theory Ser. B* **35** (1983) 142–155.
- [47] O. Nava et G.C. Rota, Plethysm, categories and combinatorics, *Adv. in Math.* **58** (1985) 61–68.
- [48] R. Otter, The number of trees, *Ann. Math.* **49** (1948) 583–599.
- [49] G. Pólya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, *Acta Math.* **68** (1937) 145–254.
- [50] R.W. Robinson, Enumeration of non-separable graphs, *J. Combin. Theory* **9** (1970) 327–356.
- [51] G.C. Rota, On the foundations of combinatorial theory, I: Theory of Möbius functions, *Z. Wahrsch. Verw. Gebiete* **2** (1964) 340–368.
- [52] G.C. Rota, Baxter algebras and combinatorial identities, II, *Bull. Amer. Math. Soc.* **75** (1969) 330–334.
- [53] G.C. Rota et B.E. Sagan, Congruences derived from group action, *European J. Combin.* **No. 1** (1980) 67–76.
- [54] G.C. Rota et D.A. Smith, Enumeration under group action, *Annali Scuola Normale Superiore-Pisa, Classe di Scienze, Ser. IV, IV* (4) (1977) 637–646.
- [55] P.K. Stockmeyer, Enumeration of graphs with prescribed automorphism group, Ph.D. Thesis, Univ. of Michigan, Ann Arbor, MI 1971.
- [56] V. Strehl, Zykel-Enumeration bei lokal-strukturierten Funktionen, Institut für Mathematische Maschinen und Datenverarbeitung der Universität Erlangen-Nürnberg, 1990.
- [57] D. White, Counting patterns with a given automorphism group, *Proc. Amer. Math. Soc.* **47** (1975) 41–44.
- [58] S. Wolfram, *MATHEMATICA, A System for Doing Math. by Computer* (Addison-Wesley, Reading 1988).
- [59] Y.-N. Yeh, On the combinatorial species of Joyal, Ph.D. Thesis, State Univ. of New York at Buffalo, 1985.
- [60] Y.-N. Yeh, The calculus of virtual species and  $\mathbb{K}$ -species, in: G. Labelle et P. Leroux, édés., *Proc. Combinatoire énumérative*, Montréal, Québec 1985, Lecture Notes in Mathematics, Vol. 1234 (Springer, Berlin, 1986) 351–369.