Historia Mathematica 6 (1979), 294-304

IN MEMORIAM KURT GÖDEL: HIS 1931 CORRESPONDENCE WITH ZERMELO ON HIS INCOMPLETABILITY THEOREM

BY I. GRATTAN-GUINNESS
MIDDLESEX POLYTECHNIC AT ENFIELD,
ENGLAND

SUMMARIES

Shortly after publishing his now famous incompletability theorem in 1931, Kurt Gödel and Ernst Zermelo corresponded about the nature and significance of Gödel's result. The texts of the surviving letters are presented, preceded by an explanation of the circumstances of the correspondence and an indication of the historical significance of the points discussed.

Kurz nach der Veröffentlichung seines mittlerweilen berühmten Unvollständigkeits-Lehrsatzes in 1931, korrespondierten Kurt Gödel und Ernst Zermelo über die Art und Bedeutung von Gödels Resultat. Der Text der noch erhaltenen Briefe wird unter Vorausschickung einer Erklärung der Umstände der Korrespondenz und Hinweis auf die historische Bedeutung der erörterten Punkte präsentiert.

Peu après la publication en 1931 de son, aujourd'hui célèbre, théorème d'incomplétude, Kurt Gödel correspondit avec Ernst Zermolo sur la nature et l'importance de ce résultat. Le texte des lettres qui nous sont parvenues est présenté, précédé d'une explication des circonstances entourant cette correspondance et d'indications sur la signification historique des sujets traités.

INTRODUCTION

Kurt Gödel (1906-1978) became a legend in his own lifetime, principally for his theorem demonstrating the existence of a proposition which is expressible in the language of a formal system but which, like its negation, is not provable from the axioms of the system and its rules of inference. The result had major implications for two of the prevailing philos-

0315-0860/79/030294-11$02.00/0

ophies of mathematics (Hilbertian metamathematics and Russellian logicism), and has influenced many branches of logic ever since.

Gödel proved his result in the year 1930. An abstract [Gödel 1930b] was published at the end of the year, and the full paper [Gödel 1931] appeared early in 1931. Later that year, on September 15, he gave a lecture on his theorem at the autumn meeting of the Deutsche Mathematiker-Vereinigung at Bad Elster. Zermelo also spoke at the same session, and later he wrote a report [Zermelo 1932a] on both his and Gödel's lectures. It was presumably in connection with this report that the correspondence with Gödel occurred. Zermelo must have written to Gödel on September 21, 1931, for Gödel acknowledged its receipt at the beginning of his 10-page reply of October 12 from Vienna. Zermelo's letter must be lost, for Gödel lost many of his Vienna papers during the last war [see van Heijenoort 1967, 619]. But two carbon copies of Zermelo's answer of October 29 from Freiburg im Breisgau are preserved with Gödel's letter in Zermelo's *Nachlass* in the city's university library.

The main point of contention between the two men concerned a clash between their conceptions of proof, and the possibility of the existence of undecidable propositions. In his paper of 1930 Zermelo had begun to use the axiom of regularity in his axiomatic set theory. The purpose of the axiom is to 'well-found' sets by preventing unending descents of membership of sets, and Zermelo used it in [1932a] also to stratify the sets into mutually disjoint 'layers' [*Schichten*] $\{Q_\alpha\}$ of sets. Very briefly, the idea is that Q_0 is the layer of 'original elements' [*Urelemente*] of the axiomatic system, and each layer Q_α is made up of those sets which do not belong to any preceding layer, although their members are elements of some of those layers. The definition proceeds by transfinite induction: The index α starts at 0 and runs through a well-ordered series of ordinals. For limit ordinals the definition needs special treatment, whose details need not concern us here.

In a similar way Zermelo took a 'basis' of a mathematical theory to be composed of an 'original range' [*Urbereich*] of elements and 'ground-relations' [*Grundrelationen*] between them. Propositions are then further relations built up by 'quantification' (meaning logical conjunction and disjunction) and negation of these relations. A collection of propositions is 'well-founded' [*wohlfundiert*] on that basis with respect to the notion of consequence if each subcollection T of S contains at least one proposition which is not a consequent of any member of S. He showed that S could be stratified into 'layers of quantification,' each layer indexed by an ordinal. He then argued (rather vaguely!) that if the ground-relations are divided arbitrarily into 'true' and 'false,' then the division carries over into each layer of propositions, and that if the ground-relations are consistent (surely he means those which are designated as true, although then their designation cannot be arbitrary), then the derived relations are also consistent. For him it then followed that any proposition which is true is also provable in the sense of belonging to some level of quantification. But this situation would, naturally, be contradicted by Gödel's theorem.

In response to Zermelo's lost letter of September 21, Gödel carefully explains the workings of his proof. He begins by confirming that the first section of his paper [1931] is not a 'binding proof' of his theorem, but a guide to the correctness of the proof which then follows in great detail in the paper, based on the 46 definitions. He then mentions the similarity between his proof-method and Cantor's diagonal argument (as he does also in this opening part of his paper): This is a feature which will arise later. But first on pages 2-3 he discusses the class of 'true' [*richtig*] formulae which Zermelo seems to have proposed in the hope of generating a paradox like the liar paradox in Gödel's system. Gödel shows in detail on pages 3-7 that, unlike his own class of provable formulae, Zermelo's class of true formulae cannot be expressed in a 'purely combinatorial' way in the language of his system, so that no such paradox will arise.

In these pages Gödel also lays emphasis on the metamathematical character of the argument; that in metamathematics we talk about names of formulae and so on. Despite the attention given to the distinction between theory and metatheory in the 1920s with Hilbert's revival of his proof theory, logicians still tended to conflate symbol and referent; indeed, Professor J. Barkley Rosser once told me in reminiscence that it was only with Gödel's theorem that logicians realised how careful they needed to be in this matter.

Gödel then goes on (pages 7-8) to stress that the class of provable formulae must in fact be strictly contained in the class of true formulae, since his theorem exhibits a true but unprovable formula. He makes the interesting comment that his proof is not free from criticism from intuitionists. He then points out on pages 8-9 the bearing of Cantor's diagonal argument: not so much that one can extend beyond any formal system with new formulae (though Cantor's argument does show that), but that there are propositions which can 'express themselves' [*sich ausdrücken*] within a system but cannot be decided within it, and that such systems can be of such a simple kind as the one that he constructed. He draws on Cantor's diagonal argument again to show that all mathematics cannot be drawn into a single system, but points out that his theorem shows that even the fundamental component of mathematics which he has treated cannot be made complete. He recalls that in his paper he stated that undecidable propositions can be made decidable in higher systems, but that his theorem showed that further undecidable propositions would be found there, and so on.

Gödel's letter finishes on pages 9-10 with pleasantries, including a readiness to comment on Zermelo's paper of 1930. Unfortunately for us, Zermelo's reply on October 29 did not accept the invitation but concentrated on Gödel's last point, the possibility of decidability in higher systems. He stressed that these higher systems may have new proof methods in them as well as new propositions and drew on Cantor's diagonal argument to characterise Gödel's theorem as confining proof 'finitistically' [*finitistisch*] to a denumerable subset of provable propositions. There may be more general systems--and doubtless he had in mind his own scheme--where *transfinite* ordinals were used in the indexing of the levels of quantification.

Although Zermelo reworked his ideas in [1932b] and [1935], his proposal is too vague to have been influential on the later attempts to extend proofs to infinitary lengths. (Such later work is surveyed in, for example, [Karp 1964].) Zermelo seems not to have fully understood the implications of Gödel's result. I see here an example of an historical principle which I have noticed in action many times before: not merely that contemporaries of a new result or approach have difficulties with it which later generations master easily, but especially that newcomers to that result or approach *do* go through some of the same difficulties that concerned those contemporaries. It is a principle expressible by the slogan 'education imitates history,' and is one of the reasons why I deplore the nonhistorical character of mathematical education. Zermelo's comments on Gödel's theorem, and Gödel's replies, are very similar to the conversations which one has in the classroom with students trying to grasp the significance of one of the most remarkable intellectual discoveries of this century.

RENDITION OF THE TEXT AND NOTATIONS

Gödel's letter is handwritten. Zermelo's survives as two carbon copies of the typed top copy; the underlining of words is slightly different, and the last sentence, written in hand, is rendered in a slightly different way. For ease of reading I have silently expanded a few contracted words, corrected or ignored a few errors in the writing or typing, and rendered the Germanic 'ß' as 'ss.' Gödel, an inveterate footnoter (as his paper of 1931 shows), included four numbered footnotes in his letter, which I have presented following the text. He also makes some page references to his paper of 1931, and for the convenience of readers I have keyed them to the English translations. There are three of these by Meltzer, Mendelson, and Bauer-Mengelberg (for details, see the References). I identify them by the initials 'M', 'D', and 'H' (the latter two initials abbreviate the names of the editors of the volumes in which they appeared), respectively. Thus, for example, "M 62, D 28-29, H 610" identifies the places where page 191 of [Gödel 1931] is translated. As Gödel used square brackets in notations in his letter, I enclose these and other references in curled brackets. To help the reader correlate this long letter with my commentary, I have indicated the pagination of the letter by two vertical lines in the text and the page number in the margin. Zermelo's letter is on one page.

The notations are either familiar or self-explanatory, but it is worth recalling that negation is represented by an over-bar, and that '$[R(n);n]$', on which his discussions of pages 2 and 3 hinge, is the formula that is produced when the nth 'class-sign' (a formula with one free variable) $R(n)$ has its variable replaced by the sign for the integer n [Gödel 1931, 175; M62 D8, H598].

GÖDEL TO ZERMELO

Wien 12./X. 1931

Sehr geehrter Herr Professor!

Besten Dank für Ihren Brief vom 21./IX. Ich konnte leider nicht sofort antworten, weil ich für einige Tage verreisen musste, will dies aber jetzt umso ausführlicher tun.

Zunächst möchte ich feststellen, dass die ersten 3 Seiten meiner Arbeit natürlich kein bindender Beweis sein sollen. Auf S. 174 habe ich ja ausdrücklich gesagt, dass es sich vorerst bloss um die Skizzierung des Hauptgedankens einer Beweises handelt. Insbesondere wird natürlich die Lücke, auf die Sie hinweisen später ausgefüllt, (vgl. S 182 ff. {M49-55, D17-22, H603-606}) --ja man kann sagen, dass gerade dies der Hauptzweck der folgenden Überlegungen ist--und zwar geschieht der Beweis in der Weise, dass die Definition der Klasse K auf einfache arithmetische Definitionsweisen (rekursive Definitionen etc.), welche in Principia Mathematica sicher formal ausdrückbar sind, zurückgeführt wird.--Ich glaube aber, dass man auch schon auf Grund der ersten
2 3 Seiten meiner || Arbeit zu der Überzeugung von der Richtigkeit des Beweises kommen kann, wenn man die Sache genau durchdenkt.

Um dies auseinanderzusetzen knüpfe ich an Ihren Einwand an. Sie definieren eine Klasse K^* durch die Festsetzung: „n gehört zu K^*, wenn $[R(n);n]$ nicht *richtig* ist", während ich eine Klasse K definiere durch:

„n gehört zu K, wenn $[R(n);n]$ nicht *beweisbar* ist". Die
Annahme, dass K^* durch ein Klassenzeichen des gegebenen
Systems ausdrückbar ist, führt dann auf einen Widerspruch
(dies ist aber nicht meine, sondern Ihre Annahme). D. h.
also man kann zeigen, dass die Klasse K^* in dem gege-
benen System nicht vorkommt [1]. Von der Klasse K
dagegen kann man dies *nicht* zeigen, sondern man kann im
Gegenteil beweisen, dass sie mit einem Klassenzeichen
des gegebenen Systems umfangsgleich ist, vorausgesetzt
3 dass in dem gegebenen System gewisse einfache || arithmet-
ische Begriffe (Addition und Multiplikation) enthalten
sind.

Um den Grund für dieses verschiedene Verhalten von
K und K^* einzusehen, muss man zunächst die Definition
von K^* in korrekter Form schreiben. Man kann nämlich
nicht setzen:

$$n \varepsilon K^* \equiv \overline{[R(n);n]},$$

weil die Zeichenverbindung $[R(n);n]$ keinen Sinn hat.
Ein Negationsstrich hat ja nur Sinn über einer Zeichen-
verbindung, die eine Behauptung ausdrückt (über der
Ziffer 5 etwa ist ein Negationsstrich sinnlos). Die
Zeichenverbindung „$[R(n);n]$" drückt aber *keine Be-
hauptung* aus. „$[R(n);n]$" ist ja gleichbedeutend etwa
mit folgenden deutschen Worten: „diejenige Formel der
Principia Mathematica, welche aus dem n-ten Klassen-
zeichen bei Einsetzung der Zahl n für die Variable
entsteht." „$[R(n);n]$" ist nicht etwa selbst diese
Formel, „$[R(n);n]$" ist ja überhaupt keine Formel der
Principia Mathematica, (denn das Zeichen [;] kommt
4 ja gar || nicht in den Principia Mathematica vor),
sondern „$[R(n);n]$" ist lediglich eine Abkürzung der
unter Anführungszeichen stehenden deutschen Worte.
Diese Worte drücken aber offenbar keine Behauptung
aus, sondern sind die eindeutige Charakterisierung
einer Formel (d.h. einer räumlichen Figur), ganz
ebenso wie etwa die Worte „die erste Formel jenes
Buches" keine Behauptung ausdrücken, wenn auch vie-
leicht die Formel, welche durch diese Worte charakter-
isiert wird, eine Behauptung ausdrückt. „$[R(n);n]$"
ist also für jede bestimmte Zahl *n ein Name* (eine
eindeutige Beschreibung) für eine bestimmte Formel
(d.h. eine räumliche Figur) und ein Negationsstrich
darüber hat daher ebensowenig Sinn, wie etwa über der
Formel „$5 + n$", welche für jede Zahl n ein Name für
eine bestimmte natürliche Zahl ist. Die ganze Schwier-
igkeit rührt offenbar daher, dass es in der Metamathe-
matik ausser den Zeichen für Zahlen, Funktionen etc.
auch *Zeichen für Formeln* gibt und dass man ein

5 || Symbol, welches eine Formel bezeichnet, deutlich unterscheiden muss von dieser Formel selbst.

Die Definition für K^* muss man daher korrekt so schreiben:

$$n \,\varepsilon\, K^* \;\equiv \overline{W}[R(n);n], \qquad (1^*)$$

wobei $W(x)$ bedeuten soll: „x ist eine richtige Formel" oder genauer: „x ist eine Formel, die eine wahre Behauptung ausdrückt." [2] Jetzt zeigt sich ganz deutlich, dass in der Definition für K^* ein neuer Begriff, nämlich der Begriff „richtige Formel" bzw. die Klasse der richtigen Formeln vorkommt. Dieser Begriff lässt sich aber *nicht* ohne weiters {*sic*} auf eine kombinatorische Eigenschaft der Formeln zurückführen (sondern stützt sich auf die Bedeutung der Zeichen) und lässt sich daher in der arithmetisierten Metamathematik nicht auf einfache arithmetische Begriffe zuruckfuhren; oder anders ausgedrückt: Die Klasse der richtigen Formeln
6 || ist *nicht* durch ein Klassenzeichen des gegebenen Systems ausdrückbar [3] (daher auch nicht die daraus definierte Klasse K^*). Ganz anders steht es mit dem Begriff „beweisbare Formel" (bzw. der Klasse der beweisbaren Formel, welche in der Definition von K vorkommt). Die Eigenschaft einer Formel, beweisbar zu sein, ist eine rein kombinatorische (formale), bei der es auf die Bedeutung der Zeichen *nicht* ankommt. Dass eine Formel *A in einem bestimmten System* beweisbar ist, heisst ja einfach, dass es eine endliche Reihe von Formeln gibt, welche mit irgendwelchen Axiomen des Systems beginnt und mit *A* endet, und welche ausserdem die Eigenschaft hat, dass jede Formel der Reihe aus irgendwelchen der vorhergehenden durch Anwendung einer der Schlussregeln hervorgeht: wobei als Schlussregeln im wesentlichen
7 nur die Einsetzungs- || und die Implicationsregel in Betracht kommen, welche lediglich auf einfache kombinatorische Eigenschaften der Formeln Bezug nehmen. Die Klasse der beweisbaren Formeln [4] lässt sich daher auf einfache arithmetische Begriffe zurückführen d.h. sie kommt unter den Klassenzeichen des gegebenen Systems vor und ebenso die daraus abgeleitete Klasse K. Der ausführliche Beweis dafür findet sich auf S.182 ff. meiner Arbeit {M49-55, D17-22, H603-606}.

Im Anschluss an das Gesagte kann man übrigens meinen Beweis auch so führen: Die Klasse W der richtigen Formeln *ist niemals* mit einem Klassenzeichen desselben Systems umfangsgleich (denn die Annahme, dass dies der Fall sei, führt auf einen Widerspruch). Die Klasse B der beweisbaren Formeln *ist* mit einem Klassenzeichen desselben Systems umfangsgleich (wie man

ausführlich zeigen kann); folglich können B und W nicht miteinander umfangsgleich sein. Weil aber $B \subseteq W$, so
8 || gilt $B \subsetneq W$ d.h. es gibt eine richtige Formel A, die nicht beweisbar ist. Weil A richtig ist, so ist auch non-A nicht beweisbar, d.h. A ist unentscheidbar. Dieser Beweis hat aber den Nachteil, dass er keine Konstruktion des unentscheidbaren Satzes liefert und intuitionistisch nicht einwandfrei ist.

Ich möchte noch bemerken, dass ich den wesentlichen Punkt meines Resultates nicht darin sehe, dass man über jedes formale System irgendwie hinausgehen kann (das folgt schon nach dem Diagonalverfahren) sondern darin, dass es für jedes formale System der Mathematik Sätze gibt, die sich innerhalb dieses Systems *ausdrücken*, aber aus den Axiomen dieses Systems *nicht entscheiden* lassen, und dass diese Sätze sogar von relativ einfacher Art sind, nämlich der Theorie der positiven ganzen Zahlen angehören. Dass man die ganze Mathematik nicht in ein formales System einfangen kann, folgt schon nach dem Cantorschen Diagonalverfahren, aber es blieb trotzdem
9 denk-||bar, dass man wenigstens gewisse Teilsysteme der Mathematik vollständig (d.h. entscheidungsdefinit) formalisieren könnte. Mein Beweis zeigt, dass auch dies unmöglich ist, wenn das Teilsystem wenigstens die Begriffe der Addition und Multiplikation ganzer Zahlen enthält. (Dabei ist unter Formalisierung zu verstehen: Zurückführung auf endlich viele Axiome und Schlussregln). Gewiss sind die relativ unentscheidbaren Sätze in höheren Systemen immer entscheidbar, worauf ich in meiner Arbeit auch ausdrücklich hingewiesen habe (vergleich S. 191 Fussnote 48[a] {M62, D28-29, H610}), aber auch in diesen höheren Systemen bleiben unentscheidbare Sätze derselben Art übrig u.s.w. in inf.

Es würde mich freuen, wenn meine Ausführungen Sie überzeugt hätten. Natürlich sollen auch diese kein „Beweis" sein. Den Beweis finden Sie vielmehr nur an
10 den genannten Stellen meiner Arbeit. || Ich danke Ihnen bestens für die Zusendung Ihrer Fundamenta-Arbeit {Zermelo 1930}, doch ist dieselbe bisher leider nicht in meine Hände gelangt (vielleicht bei der Post verloren gegangen). Ich hatte Ihre Arbeit übrigens schon bald nach ihren Erscheinen gelesen und es waren mir damals verschiedene Bedenken aufgetaucht, die ich Ihnen, falls sie Sie interessieren, nächstens gerne mitteilen will.

Mit den besten Grüssen

Ihr ergebener Kurt Gödel

Wien VIII. Josefstädterstrasse 43.

P.S. Gleichzeitig übersende ich Ihnen ein Separatum meiner Arbeit über den Funktionenkalkül {Gödel 1930a}, die ich in Bad Elster nicht bei mir hatte.

NOTES

1. dass es solche Klassen geben muss, folgt natürlich einfacher aus dem Diagonalverfahren oder Mächtigkeitsbetrachtungen.

2. Jetzt ist die rechte Seite von (1*) eine Behauptung geworden und daher negierbar, ebenso wie etwa die Worte „die erste Formel jenes Buches ist richtig" eine Behauptung ausdrücken.

3. genauer gesprochen, handelt es sich natürlich um die Klasse derjenigen *Zahlen,* welche richtigen Formeln zugeordnet sind.

4. genauer: die entsprechende klasse natürlicher Zahlen.

ZERMELO TO GÖDEL

The more generously underlined of the two carbon copies has been followed.

Freiburg i. Br.29. Oktober 1931. Karlstrasse 60.

Sehr geehrter Herr Gödel!

Ich danke Ihnen für ihren freundlichen Brief, aus dem ich nun besser als aus Ihrer Abhandlung und Ihrem Vortrag entnehmen kann, wie Sie es eigentlich meinen. Also *nur* für die "*beweisbaren*" Sätze Ihres "PM-Systems", nicht für dessen Sätze *überhaupt* soll Ihre "finitistische Einschränkung" (wie ich es nenne) der Typenbildung zur Geltung kommen, während Sie für die *Sätze* des Systems *freie* Neubildungen nach Art des Cantorschen Diagonalverfahrens zulassen. Dann erhalten Sie natürlich ein *nicht abzählbares* System möglicher Sätze, unter denen nur eine *abzählbare* Teilmenge "beweisbar" wäre, und es muss sicherlich "unentscheidbare" Sätze geben. Dass diese "unentscheidbaren" Sätze in einem "höheren System" doch wieder "entscheidbar" werden, geben Sie ja zu. Aber dieses "höhere" System unterscheidet sich von dem ursprünglichen keineswegs durch Aufnahme *neuer Sätze,* wie man nach Ihren Formulierungen denken könnte, sondern lediglich durch *neue Beweismittel,* und alles, was Sie in der Abhandlung beweisen, kommt darauf hinaus, was auch *ich* immer betone, dass ein "finitistisch beschränktes" Beweis-Schema *nicht ausreicht,* um die Sätze eines nicht-abzählbaren mathematischen Systems zu "entscheiden". Oder können Sie etwa "beweisen", dass

Ihr Schema das "einzig mögliche" ist? Das geht doch wohl nicht; denn was ein "Beweis" eigentlich *ist,* ist nicht selbst wieder "beweisbar" sondern muss in irgend einer Form *angenommen, vorausgesetzt* werden. Und darum handelt es sich hier eben: was versteht man unter einem "Beweis"? Ganz *allgemein* versteht man darunter *ein System von Sätzen derart, dass unter Annahme der Prämissen die Gültigkeit der Behauptung einsichtig gemacht werden kann.* Und es ist nur noch die Frage, was alles "einsichtig" ist? Jedenfalls *nicht bloss,* und das zeigen Sie gerade selbst, die Sätze irgend eines finitistischen Schemas, das ja auch in Ihren Falle immer wieder "erweitert" werden kann. Aber damit wären wir eigentlich *einig:* nur dass *ich* eben von vornherein ein *allgemeineres* Schema, das nicht erst erweitert zu werden *braucht,* zugrunde lege. Und in einem *solchen* System sind dann auch wirklich *alle* Sätze entscheidbar.

In the other carbon copy, the handwritten last sentence reads: 'Und in *diesem* System sind auch wirklich alle Sätze entscheidbar!'

ACKNOWLEDGEMENTS

I am grateful to the Handschriftenabteilung, Universitätsbibliothek, 78 Freiburg in Breisgau, Rempartstrasse 15, West Germany, for permission to publish these letters. For advice on my commentary I am indebted to John Crossley and Gregory Moore, and for control of my transcription of the letters I express thanks to Emil Fellmann.

REFERENCES

Davis, M. ed. 1965. *The undecidable.* New York: Raven Press

Gödel, K. 1930a. Die Vollständigkeit der Axiome des logischen Funktionenkalküls, *Monatsh. Math. Phys.* 37, 349-360. English trans.: van Heijenoort 1967, 582-591.

——— 1930b. Einige metamathematische Resultate über Entscheidungsdefinitheit und Widerspruchsfreiheit, *Anz. Akad. Wiss. Wien, Math.-Natur. Kl.* 67, 214-215. English trans.: van Heijenoort 1967, 595-596.

——— 1931. Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme 1, *Monatsh. Math. Phys.* 38, 173-198. English trans.: 'M' (by B. Meltzer) Gödel 1962, 35-72; 'D' (by E. Mendelson) Davis 1965, 5-38; 'H' (by S. Bauer-Mengelberg) van Heijenoort 1967, 596-616.

——— 1962. *On formally undecidable proposition of Principia Mathematica and related systems* (trans. B. Meltzer, intro. R. B. Braithwaite). Edinburgh/London: Oliver & Boyd.

van Heijenoort, J. 1967. *From Frege to Gödel*. Cambridge, Mass.: Harvard University Press.

Karp, C.R. 1964. *Languages with expressions of infinite length*. Amsterdam: North Holland.

Zermelo, E.F. 1930. Über Grenzzahlen und Mengenbereiche. *Fund. Math.* 16,29-47.

———— 1932a. Über Stufen der Quantifikation und die Logik des Unendlichen. *Jber. Deutsch. Math-Verein.* 41, pt. 2, 85-88.

———— 1932b. Über mathematische Systeme und die Logik des Unendlichen. *Forsch. Fortschr.* 8, 6-7.

———— 1935. Grundlagen einer allgemeinen Theorie der mathematischen Satzsysteme. (Erste Mitteilung) *Fund. Math.* 25, 136-146.