



ELSEVIER

Discrete Mathematics 246 (2002) 255–267

---

---

**DISCRETE  
MATHEMATICS**

---

---

[www.elsevier.com/locate/disc](http://www.elsevier.com/locate/disc)

## Génération de chemins de Dyck à pics croissants

Jean-Guy Penaud\*, Olivier Roques

*LaBRI, Université Bordeaux 1, 351 cours de la Libération, F-33405 Talence Cedex, France*

---

### Abstract

The main result of this paper is an algorithm which generates uniformly at random a Dyck path with increasing peaks, in quasi-linear time. First, we show that the ratio between the number of Dyck paths with decreasing valleys and the number of Dyck paths with increasing peaks, of a given size, tends to a constant  $c = 2,303727\dots$ . Then, we give an algorithm for the generation of Dyck paths with decreasing valleys by coding these paths with words of a rational language. This leads to a reject algorithm for the generation of Dyck paths with increasing peaks, with less than three failures, in average.

### Résumé

Le résultat principal de cet article est un algorithme qui engendre de façon aléatoire et uniforme un chemin de Dyck à pics croissants en temps quasi-linéaire. Nous montrons que le rapport entre le nombre de chemins de Dyck à vallées décroissantes et le nombre de chemins de Dyck à pics croissants, de taille fixée, tend vers une constante  $c = 2,303727\dots$ . Nous donnons ensuite un algorithme de génération des chemins de Dyck à vallées décroissantes en temps quasi-linéaire, en codant ces chemins par les mots d'un langage rationnel. Enfin, nous en déduisons un algorithme à rejet pour engendrer les chemins de Dyck à pics croissants, avec en moyenne moins de trois échecs. © 2002 Elsevier Science B.V. All rights reserved.

*Keywords:* Bijective combinatorics; Uniform random génération; Dyck paths; Generating functions

---

### Introduction

On s'intéresse à une famille de chemins de Dyck avec des contraintes sur les pics, *les chemins dont la hauteur des pics est croissante de gauche à droite*. Cette contrainte sur les pics rend le langage non algébrique. Ainsi, les méthodes récursives [9,12] de génération, automatisées par Flajolet, Zimmermann et Van Cutsem [7] ne permettent pas d'engendrer efficacement ces chemins, dès lors que la longueur dépasse quelques centaines de pas. L'algorithme à rejet que nous proposons est une approche efficace pour résoudre le problème. Dans la deuxième section, nous calculons la série génératrice

---

\* Corresponding author.

*E-mail addresses:* [penaud@labri.u-bordeaux.fr](mailto:penaud@labri.u-bordeaux.fr) (J.-G. Penaud), [roques@labri.u-bordeaux.fr](mailto:roques@labri.u-bordeaux.fr) (O. Roques).

de ces chemins en utilisant une méthode, dite *méthode de Temperley*. L'idée principale est de construire à partir d'un chemin de Dyck à pics croissants  $w$ , un ensemble de tels chemins en concaténant à  $w$  une pyramide de toutes les façons possibles, de manière à ce que le chemin obtenu soit un chemin de Dyck à pics croissants. On obtient ainsi une équation, pour la série génératrice, équation que l'on sait résoudre en utilisant les techniques développées dans [2]. On montre ensuite que les coefficients de cette série génératrice croissent exponentiellement comme les coefficients de la série génératrice des chemins de Dyck à vallées décroissantes, étudiés dans [1], et que leur rapport tend vers une constante  $c = 2,303727\dots$ . Ceci va nous permettre de concevoir un algorithme à rejet pour engendrer des chemins de Dyck à pics croissants. Remarquons que comme cas particulier de la bijection entre les chemins de Dyck de longueur  $2n$  et les polyominos parallélogrammes de périmètre  $2n + 2$  [3], les chemins de Dyck à pics croissants de longueur  $2n$  sont en bijection avec les polyominos parallélogrammes de périmètre  $2n + 2$  dont l'aire des colonnes successives est croissante. Par contre, nous montrons dans la Section 5 que les chemins de Dyck de longueur  $2n$  à pics et vallées croissants sont en bijection avec les polyominos parallélogrammes d'aire  $n$ , étudiés par Klarner et Rivest [8]. La Section 3 présente un algorithme de génération aléatoire et uniforme (a.e.u) des chemins de Dyck à vallées décroissantes en construisant un automate dont les mots du langage qu'il reconnaît sont en bijection avec les chemins de Dyck à vallées décroissantes. Nous montrons que cet automate satisfait certaines propriétés et nous utilisons les résultats de [5] pour engendrer de façon aléatoire et uniforme les mots du langage reconnu par l'automate en temps quasi-linéaire. Notons qu'il est possible d'atteindre une complexité linéaire en utilisant les résultats de [10].

Enfin, nous donnons dans la Section 4, une bijection entre les chemins de Dyck à pics croissants et les chemins de Dyck à vallées décroissantes dont le premier pic est dominant. Ceci conduit à un algorithme à rejet qui engendre de façon aléatoire et uniforme un chemin de Dyck à pics croissants en temps quasi-linéaire.

## 1. Notations et définitions

Soit  $X$  un alphabet et soit  $X^\star$  l'ensemble des mots sur  $X$ . Soient  $u = u_1 \dots u_k$  et  $v = v_1 \dots v_l$  deux mots de  $X^\star$ , ( $u_i, v_j \in X$  pour  $1 \leq i \leq k$ ,  $1 \leq j \leq l$ ), on définit la *concaténation* de  $u$  à  $v$  par  $w = uv = u_1 \dots u_k v_1 \dots v_l$ . Toute suite de lettres consécutives de  $w$  est appelé un *facteur* de  $w$ . Un *facteur gauche* de  $w$  est un facteur  $u$  tel que  $w = uv$ . On note  $|w|$  la longueur de  $w$  et  $|w|_a$  le nombre d'occurrences de la lettre  $a$  de  $X$  dans  $w$ . L'ensemble des mots de Dyck est l'ensemble des mots  $w$  de  $\{x, \bar{x}\}^\star$  tels que  $|w|_x = |w|_{\bar{x}}$  et pour tout facteur gauche  $u$  de  $w$ ,  $|u|_x \geq |u|_{\bar{x}}$ . Une *pyramide* de hauteur  $i$  dans un mot  $w$  est un facteur maximal  $x^i \bar{x}^i$  ( $i \geq 1$ ) de  $w$ . Dans cet article, on considère des chemins du quart de plan positif, autorisés à faire des pas Nord-est et Sud-est. On codera systématiquement un chemin par le mot correspondant, chaque occurrence d'une lettre  $x$  (resp.  $\bar{x}$ ) codant un pas Nord-est (resp. Sud-est). Un *pic* (resp. une *vallée*) dans un chemin de Dyck est un point  $p_k$  tel que  $(p_{k-1}, p_k)$  est

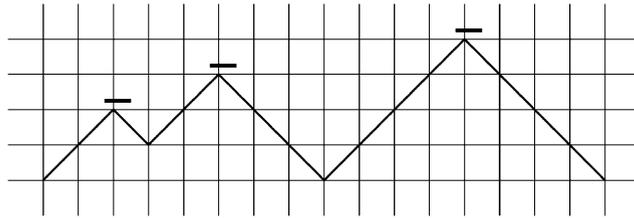


Fig. 1. Un chemin de Dyck à pics croissants.

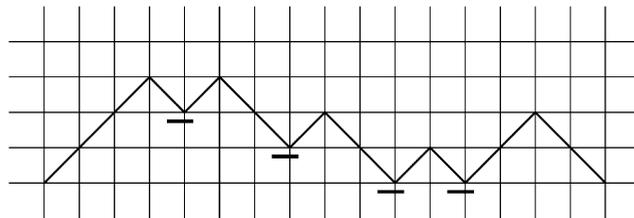


Fig. 2. Un chemin de Dyck à vallées décroissantes.

un pas Nord-est (resp. Sud-est) et  $(p_k, p_{k+1})$  est un pas Sud-est (resp. Nord-est). La hauteur,  $h$ , d'un point dans un chemin de Dyck est la différence entre le nombre de pas Nord-est et le nombre de pas Sud-est du chemin partant de l'origine et menant à ce point. Dans la suite, il sera pratique de confondre les chemins et les mots qui les codent. On note  $\mathcal{D}$  l'ensemble des chemins de Dyck non vides,  $\mathcal{D}_{pc}$  l'ensemble des chemins de Dyck non vides dont la hauteur des pics est croissante, au sens large, de gauche à droite (Fig. 1), et  $\mathcal{D}_{vd}$  l'ensemble des chemins de Dyck non vides dont la hauteur des vallées est décroissante, au sens large, de gauche à droite (Fig. 2).

**Définition 1.**

$$\mathcal{D}_{pc} = \{w \in \mathcal{D} \mid h(p_1) \leq \dots \leq h(p_k)\} \quad \text{où } p_1, \dots, p_k \text{ sont les pics de } w.$$

**Définition 2.**

$$\mathcal{D}_{vd} = \{w \in \mathcal{D} \mid h(v_1) \geq \dots \geq h(v_k)\} \quad \text{où } v_1, \dots, v_k \text{ sont les vallées de } w.$$

**2. Série génératrice et asymptotique de  $\mathcal{D}_{pc}$**

*2.1. Série génératrice*

Pour trouver la série génératrice des chemins de Dyck dont la hauteur des pics est croissante, nous utilisons une méthode, dite *méthode de Temperley* [11]. L'idée principale consiste à construire à partir d'un chemin  $w$  de  $\mathcal{D}_{pc}$ , un ensemble  $\mathcal{D}_{pc}(w)$

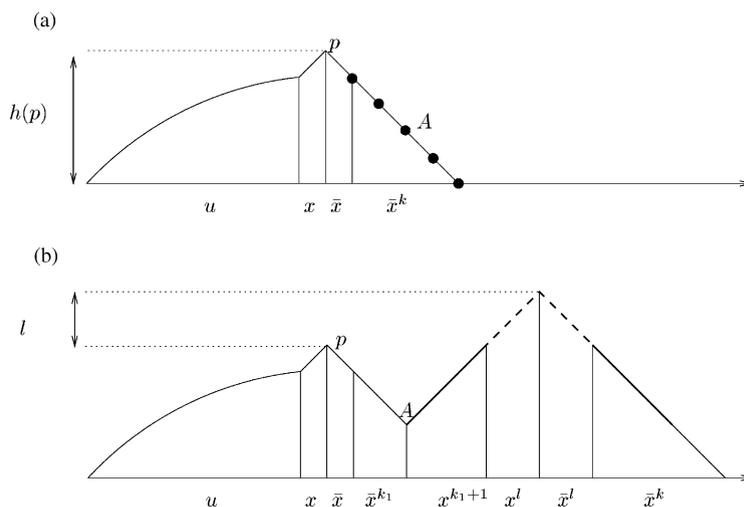


Fig. 3. (a) Un chemin de  $\mathcal{D}_{pc}$ . Les points noirs représentent les points du chemin où l'on peut ajouter une pyramide. (b) Ajout d'une pyramide de hauteur  $h(p) - h(A) + l$  au point  $A$ .

obtenu en concaténant à  $w$ , de toutes les façons possibles, une pyramide de hauteur telle que le nouveau chemin obtenu appartienne à  $\mathcal{D}_{pc}$  (Fig. 3).

Soit  $w'$  un chemin de  $\mathcal{D}_{pc}(w)$ , la construction mentionnée ci-dessus vérifie les propriétés suivantes:

- si on enlève la dernière pyramide de  $w'$ , on obtient  $w$ ,
- la hauteur du dernier pic de  $w'$  est supérieure ou égale à la hauteur du dernier pic de  $w$ .

On remarquera que cette construction donne tous les chemins de  $\mathcal{D}_{pc}$  qui ont au moins deux pics.

De façon plus formelle, on définit l'opération  $\mathcal{F}$  de  $\mathcal{D} \times \mathbb{N}$  dans l'ensemble des parties de  $\mathcal{D}$  par:

$$\mathcal{F}(w, l) = \{w' = ux\bar{x}^{k_1}x^{k_1+1}x^l\bar{x}^l\bar{x}^k \mid k > k_1 \geq 0\},$$

$$\text{où } w = ux\bar{x}^k \in \mathcal{D}.$$

$\mathcal{F}(w, l)$  est l'ensemble des chemins obtenus en concaténant une pyramide à  $w$  et dont la hauteur du dernier pic de chaque chemin est égale à la hauteur du dernier pic de  $w$  plus  $l$ .

La proposition suivante est clairement vérifiée:

**Proposition 1.**

$$\mathcal{D}_{pc} = \bigcup_{l > 0} \{w \mid w = x^l\bar{x}^l\} \cup \bigcup_{w \in \mathcal{D}_{pc}} \left( \bigcup_{l \geq 0} \mathcal{F}(w, l) \right).$$

À partir de cette construction, nous allons calculer la série génératrice bivariée,  $F(s, x)$ , des chemins de  $\mathcal{D}_{pc}$  où  $H(w)$  est la hauteur du dernier pic de  $w$  et  $L(w)$  est la demi-longueur de  $w$ .

$$F(s, x) = \sum_{w \in \mathcal{D}_{pc}} s^{H(w)} x^{L(w)}.$$

La série génératrice des pyramides de hauteur supérieure ou égale à 1 étant

$$\frac{sx}{1 - sx},$$

et d'après la proposition 1, on peut écrire:

$$\begin{aligned} F(s, x) &= \frac{sx}{1 - sx} + \sum_{w \in \mathcal{D}_{pc}} s^{H(w)} x^{L(w)} \sum_{k=1}^{H(w)} x^k \frac{1}{1 - sx}, \\ &= \frac{sx}{1 - sx} + \sum_{w \in \mathcal{D}_{pc}} s^{H(w)} x^{L(w)} \frac{x - x^{H(w)+1}}{(1 - x)(1 - sx)}, \\ &= \frac{sx}{1 - sx} + \frac{x}{(1 - x)(1 - sx)} (F(s, x) - F(sx, x)). \end{aligned}$$

Ou encore,

$$F(s, x) = e(s, x) + g(s, x)F(sx, x),$$

avec

$$e(s, x) = \frac{(1 - x)sx}{(1 - x)(1 - sx) - x},$$

et

$$g(s, x) = \frac{-x}{(1 - x)(1 - sx) - x}.$$

En appliquant la technique de [2], on remplace  $s$  par  $sx$  dans  $F(s, x)$  et on obtient une expression de  $F(sx, x)$  en fonction de  $F(sx^2, x)$ . Puis, on remplace la nouvelle expression de  $F(sx, x)$  dans  $F(s, x)$ . En itérant ce procédé à l'infini, on obtient:

$$F(s, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n s x^{2n+1} (1 - x)}{\prod_{i=1}^{n+1} ((1 - x)(1 - s x^i) - x)}$$

et en substituant  $s$  par 1, on peut établir le théorème suivant:

**Théorème 1.** *La série génératrice des chemins de Dyck comptés selon la demi-longueur et dont la hauteur des pics est croissante est:*

$$F(1, x) = \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n x^{2n+1} (1 - x)}{\prod_{i=1}^{n+1} ((1 - x)(1 - x^i) - x)}.$$

## 2.2. Étude asymptotique

On évalue le comportement asymptotique des coefficients de la série  $F(1, x)$ . On a:

### Théorème 2.

$$f_n = [x^n]F(1, x) \sim 0,11997\dots \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

**Preuve.** Posons  $P_i(x) = (1-x)(1-x^i) - x$  et  $H(x) = \sum_{n \geq 0} (-1)^n x^{2n} / \prod_{i=2}^{n+1} P_i(x)$ ; on a alors:

$$F(1, x) = \frac{x(1-x)}{(1-x(3+\sqrt{5})/2)(1-x(3-\sqrt{5})/2)} H(x).$$

L'étude des racines des  $P_i(x)$  montre que  $H(x)$  converge pour  $|x| < \sqrt{2} - 1$ . Comme  $(3 - \sqrt{5})/2$  est la plus petite racine de  $P_1(x)$  et que  $H(3 - \sqrt{5}/2) \neq 0$ , on peut alors conclure que c'est la singularité dominante de  $F(1, x)$ . Ceci permet d'écrire

$$f_n \sim K \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$$

et de calculer  $K$  par un simple passage à la limite. On trouve alors  $K = (\sqrt{5} - 3) / (\sqrt{5} - 5)H(3 - \sqrt{5}/2) = 0,11997\dots$

## 3. Chemins de Dyck à vallées décroissantes et génération aléatoire

Il est établi dans [1] que la série génératrice des chemins de Dyck à vallées décroissantes comptés selon la demi-longueur est rationnelle et satisfait:

$$G(x) = \frac{x(1-x)}{1-3x+x^2}.$$

On en déduit immédiatement que:

$$g_n = [x^n]G(x) \sim \frac{5 - \sqrt{5}}{10} \left(\frac{3 + \sqrt{5}}{2}\right)^n.$$

Il apparaît alors clairement que  $f_n$  et  $g_n$  croissent exponentiellement de la même façon. Il s'en suit que leur rapport tend vers une constante, ce qui fait l'objet du théorème suivant.

### Théorème 3.

$$\frac{g_n}{f_n} \sim \frac{5 - \sqrt{5}}{10 \times 0,11997\dots} = 2,303727\dots$$

Les deux tableaux suivants montrent les 20 premières valeurs de  $f_n$  et  $g_n$  et leurs rapports.

$n$	$f_n$	$g_n$	$n$	$f_n$	$g_n$	$n$	$g_n/f_n$
1	1	1	11	5230	10946	10	2,049509
2	2	2	12	13464	28657	20	2,260423
3	4	5	13	34773	75025	30	2,295289
4	9	13	14	90035	196418	40	2,301988
5	21	34	15	233590	514229	50	2,303359
6	51	89	16	607011	1346269		
7	126	233	17	1579438	3524578	⋮	⋮
8	316	610	18	4114014	9227465	100	2,303727
9	800	1597	19	10725109	24157817	150	2,303727
10	2040	4181	20	27979704	63245986	300	2,303727

Ce résultat conduit à l’observation suivante: la série génératrice des chemins de Dyck à vallées décroissantes étant rationnelle, il est possible de trouver un algorithme de génération aléatoire et uniforme de ces chemins. D’autre part, supposons que l’on sache associer de façon injective à chaque chemin de Dyck à pics croissants un chemin de Dyck à vallées décroissantes, alors le Théorème 3 montre qu’il est tout à fait envisageable en terme de complexité temporelle de concevoir un algorithme à rejet qui engendre un chemin aléatoire et uniforme de  $\mathcal{D}_{vd}$ , puis construit le chemin de  $\mathcal{D}_{pc}$  correspondant s’il existe, et recommence dans le cas contraire. En moyenne, un tel algorithme aura moins de trois échecs. Pour que cet algorithme soit efficace, il faut que l’algorithme de génération des chemins de  $\mathcal{D}_{vd}$  et l’algorithme de construction d’un chemin de  $\mathcal{D}_{pc}$  à partir de celui de  $\mathcal{D}_{vd}$  soient efficaces.

### 3.1. Génération

Denise et Zimmermann ont donné dans [5] un procédé systématique de génération aléatoire et uniforme de structures combinatoires, particulièrement efficace dans le cas des langages rationnels (voir aussi [4]). Après avoir énoncé une grammaire d’objets pour les chemins de  $\mathcal{D}_{vd}$  [1], nous construirons un automate dont les mots sont en bijection avec les chemins de  $\mathcal{D}_{vd}$ . Enfin, nous expliciterons un algorithme linéaire permettant de construire un chemin de  $\mathcal{D}_{vd}$  à partir d’un mot de l’automate.

La Fig. 4 montre une grammaire d’objets pour les chemins de Dyck à vallées décroissantes. On pourra consulter par exemple [6] pour des détails sur les grammaires d’objets.

Il est suffisant de remarquer que tout chemin de  $\mathcal{D}_{vd}$  est soit un chemin *primitif* (i.e. un chemin ne touchant l’axe de l’origine qu’au premier et au dernier point), soit un chemin se terminant par une pyramide, pour prouver que la grammaire de la Fig. 4 est

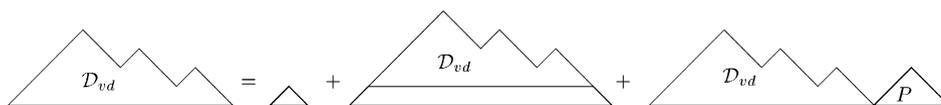


Fig. 4. Une grammaire d’objets pour  $\mathcal{D}_{vd}$ .

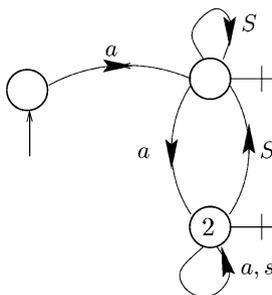


Fig. 5. L’automate  $\mathcal{A}$ .

une grammaire d’objets non ambiguë pour  $\mathcal{D}_{vd}$ . On en déduit le système d’équations en variables non commutatives de ces chemins.

$$\mathcal{D}_{vd} = x\bar{x} + x\mathcal{D}_{vd}\bar{x} + \mathcal{D}_{vd}P,$$

$$P = x\bar{x} + xP\bar{x}.$$

La série génératrice  $G(x)$  de  $\mathcal{D}_{vd}$  est une solution de ce système, en variables commutatives:

$$G(x) = x + xG(x) + \frac{x}{1-x}G(x) = \frac{x(1-x)}{1-3x+x^2}.$$

Bien que  $\mathcal{D}_{vd}$  soit un langage algébrique, il est possible de le décrire par un langage rationnel puisque la concaténation d’une pyramide ou d’une semelle (cf. ci-dessous) sont des opérations clairement rationnelles.

La Fig. 5 montre l’automate  $\mathcal{A}$  sur un alphabet à trois lettres  $\{a, s, S\}$  qui code les constructions mise en œuvre par la grammaire d’objets.

Un mot reconnu par l’automate s’interprète de la façon suivante: Un  $a$  code un facteur  $x\bar{x}$ , un  $S$  correspond à l’ajout d’une “grande semelle” horizontale au mot courant non vide, si à une certaine étape, l’automate a lu un mot  $u$ , non vide, alors  $uS$  correspond au mot  $xu'\bar{x}$  où  $u'$  est le mot de  $\mathcal{D}_{dv}$  correspondant à  $u$ . Un mot  $as^{k-1}$  correspond à la concaténation d’une pyramide de taille  $k$  au mot courant non vide, ( $s$  représentant une “petite semelle” qui surélève un facteur  $x\bar{x}$ ), si à une certaine étape l’automate a lu un mot  $u$ , non vide, alors  $uas^{k-1}$  correspond au mot  $u'x^k\bar{x}^k$  où  $u'$  est le mot de  $\mathcal{D}_{dv}$  correspondant à  $u$ .

**Remarque.** Une pyramide de taille  $k$  dans un mot  $w$  de  $\mathcal{D}_{vd}$  est codée par  $aS^{k-1}$  si la pyramide se trouve en tête de  $w$ , et par  $as^{k-1}$  sinon.

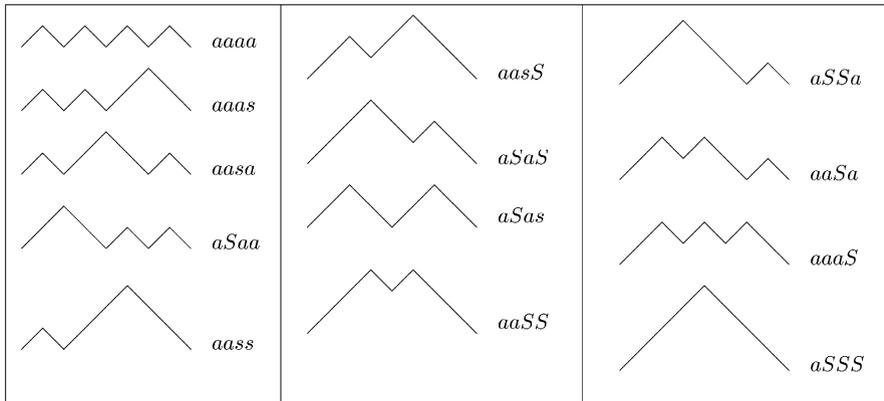


Fig. 6. Codage des chemins de  $\mathcal{D}_{\text{vd}}^4$ .

La proposition suivante est la clé de notre algorithme de génération. Elle s'énonce ainsi:

**Proposition 2.** Soient  $\mathcal{A} = \langle A, Q, q_0, T, \delta \rangle$  l'automate fini déterministe (Fig. 5) avec  $A = \{a, s, S\}$ ,  $Q = \{0, 1, 2\}$ ,  $q_0 = \{0\}$ ,  $T = \{1, 2\}$  et  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  le langage reconnu par cet automate. Soit  $\mathcal{L}^n(\mathcal{A})$  l'ensemble des mots de  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$  de longueur  $n$  et  $\mathcal{D}_{\text{vd}}^n$  l'ensemble des chemins de  $\mathcal{D}_{\text{vd}}$  de longueur  $2n$ , les mots de  $\mathcal{L}^n(\mathcal{A})$  sont en bijection avec les mots de  $\mathcal{D}_{\text{vd}}^n$ , pour tout  $n$ .

Il est clair que l'automate  $\mathcal{A}$  code exactement les constructions mise en œuvre par la grammaire d'objets, ce qui prouve la bijection énoncée à la Proposition 2. La Fig. 6 illustre le codage des mots de  $\mathcal{D}_{\text{vd}}^4$  par les mots de  $\mathcal{L}^4(\mathcal{A})$ .

L'algorithme 1 met en œuvre la construction d'un mot  $w'$  de  $\mathcal{D}_{\text{vd}}^n$  à partir d'un mot  $w$  de  $\mathcal{L}^n(\mathcal{A})$ .

La complexité temporelle de l'algorithme 1 est clairement linéaire puisque  $w$  et  $w'$  ne sont parcourus qu'une seule fois, de droite à gauche. La complexité spatiale est la place nécessaire pour stocker  $w$  et  $w'$ , soit  $3n$ .

Grâce à la bijection que nous venons de présenter, nous pouvons générer efficacement un chemin de Dyck à vallées décroissantes en utilisant les travaux de [5]. Les auteurs donnent un algorithme de génération fondé sur la méthode récursive classique mais qui utilise une technique de décompte paresseux permettant d'éviter dans la plupart des cas de faire des calculs coûteux (voir aussi [10]) et d'engendrer un mot d'un langage rationnel en  $O(n^{1+o(1)})$  bits en moyenne.

#### 4. Un algorithme à rejet pour la génération des chemins de Dyck à pics croissants

Nous avons donné à la section précédente, un algorithme de complexité temporelle quasi-linéaire pour la génération aléatoire et uniforme de chemins de Dyck à vallées

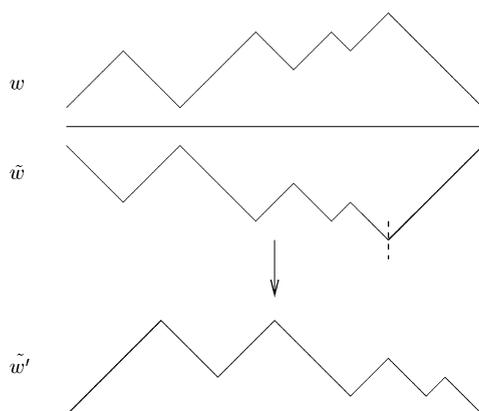


Fig. 7. Bijection entre les chemins de  $\mathcal{D}_{pc}$  et les chemins de  $\mathcal{D}_{vd}$  à premier pic dominant.

décroissantes. Nous allons maintenant donner une construction bijective entre les chemins de Dyck à pics croissants et un sous-ensemble de chemins de Dyck à vallées décroissantes, puis nous conclurons par l’algorithme de génération.

Soit  $w$ , un chemin de Dyck à pics croissants et  $\tilde{w}$  son image miroir par rapport à l’axe horizontal (Fig. 7). Alors,  $\tilde{w}$  est un chemin à vallées décroissantes dont la dernière vallée a la plus petite

**Algorithme 1.** Décodage d’un mot de  $\mathcal{L}^n(\mathcal{A})$

**Entrée**  $w \in \mathcal{L}^n(\mathcal{A})$

**Sortie**  $w' \in \mathcal{D}_{vd}^n$

$i \leftarrow n$

$k \leftarrow 2n$

$compteur\_pyramide \leftarrow 0$

$compteur\_hauteur \leftarrow 0$

**tant que**  $i > 0$  **faire**

**si**  $w(i) = s$  **alors**

$w'(k) \leftarrow \bar{x}$

$compteur\_pyramide \leftarrow compteur\_pyramide + 1$

$k \leftarrow k - 1; i \leftarrow i - 1$

**sinon**

**si**  $w(i) = a$  **alors**

$w'(k) \leftarrow \bar{x}; w'(k - 1) \leftarrow x$

$k \leftarrow k - 2; i \leftarrow i - 1$

**tant que**  $compteur\_pyramide > 0$  **faire**

$w'(k) \leftarrow x$

$k \leftarrow k - 1$

$compteur\_pyramide \leftarrow compteur\_pyramide - 1$

```

fin tant que
sinon
  / ★  $w(i) = S$  ★ /
   $w'(k) \leftarrow \bar{x}$ 
   $k \leftarrow k - 1$ ;  $i \leftarrow i - 1$ 
   $com\ pteur\_hauteur \leftarrow com\ pteur\_hauteur + 1$ 
fin si
fin si
fin tant que
tant que  $com\ pteur\_hauteur > 0$  faire
   $w'(k) \leftarrow x$ 
   $k \leftarrow k - 1$ 
   $com\ pteur\_hauteur \leftarrow com\ pteur\_hauteur - 1$ 
fin tant que

```

ordonnée. En coupant  $\tilde{w}$  à cette vallée et en recollant le morceau au début du chemin, on obtient un chemin de Dyck à vallées décroissantes dont aucun pic n'est plus haut que le premier pic (à premier pic *dominant*),  $\tilde{w}'$ . L'opération inverse consistant à couper  $\tilde{w}'$  au premier pic et à recoller le morceau à la fin de  $\tilde{w}'$ , donne  $\tilde{w}$  et donc  $w$ .

**Proposition 3.** *Les chemins de Dyck à pics croissants de longueur  $2n$  sont en bijection avec les chemins de Dyck à vallées décroissantes de longueur  $2n$  dont le premier pic est dominant.*

On peut maintenant énoncer l'algorithme de génération aléatoire et uniforme des chemins de Dyck à pics croissants (Algorithme 2).

**Algorithme 2.** Génération a. e. u des chemins de  $\mathcal{D}_{pc}$

**Entrée** un entier  $n$

**Sortie** un chemin de  $\mathcal{D}_{pc}^n$

- 1: Choisir a. e. u un chemin  $w$  de  $\mathcal{D}_{vd}^n$
- 2: **si** le premier pic de  $w$  est dominant **alors**
- 3: Construire le chemin à pics croissants correspondant
- 4: **sinon**
- 5: Recommencer
- 6: **fin si**

Soit  $w$ , un chemin de  $\mathcal{D}_{vd}$  le test qui détermine si le premier pic de  $w$  est dominant consiste simplement à parcourir  $w$ , à stocker dans une variable la hauteur du premier pic, puis à comparer cette valeur à la hauteur des autres pics (on s'arrête bien sûr lorsque l'on a trouvé un pic plus haut). Ce test s'effectue en  $O(n)$ . Remarquons que ce test peut-être effectué directement lors de la génération du mot de  $\mathcal{L}(\mathcal{A})$ . La construction du chemin à pic croissant peut s'implémenter aisément en temps linéaire

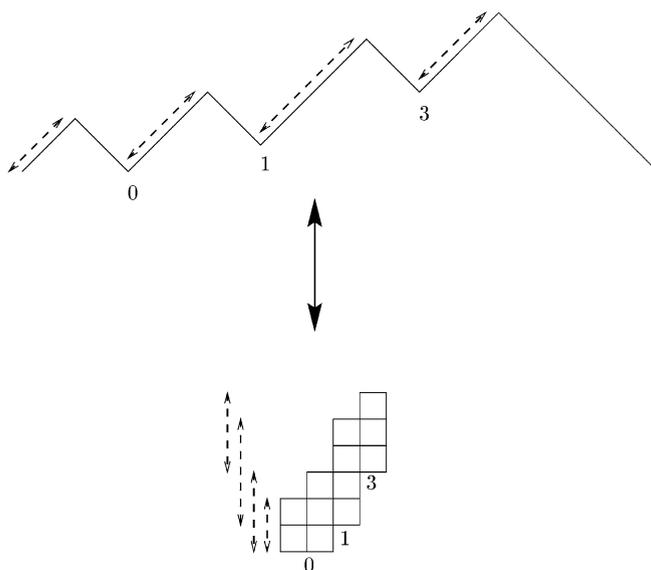


Fig. 8. Un chemin de Dyck à pics et vallées croissants de longueur 24 et le polyomino parallélogramme correspondant, d'aire 12.

en utilisant des opérations binaires élémentaires. Supposons que  $w$  soit un mot binaire où 0 code la lettre  $x$  et 1 code  $\bar{x}$ . On compte le nombre  $k$  de 0 consécutifs de  $w$  en partant du début (de gauche à droite), puis on effectue  $k$  décalages à gauche. Enfin on calcule l'image miroir de  $w$  en inversant les bits de  $w$ .

**Proposition 4.** *La complexité moyenne en bits de l'algorithme 2 pour engendrer de façon aléatoire et uniforme un chemin de Dyck à pics croissants de longueur  $2n$  est  $O(n) + O(n^{1+o(1)})$ .*

## 5. Une bijection entre polyominos et chemins

Nous illustrons par la Fig. 8 une nouvelle bijection entre les chemins de Dyck à pics et vallées croissants de longueur  $2n$  et les polyominos parallélogrammes d'aire  $n$  [8].

Étant donné un chemin de Dyck à pics et vallées croissants ayant  $k$  pics, le polyomino parallélogramme correspondant est composé de  $k$  colonnes. L'aire de la  $j^{\text{ème}}$  colonne ( $1 \leq j \leq k$ ), de gauche à droite, est égale au nombre de pas Nord-Est reliant la  $(j-1)^{\text{ème}}$  vallée au  $j^{\text{ème}}$  pic (nous considérons ici que le premier point du chemin est la vallée numérotée 0). Le polyomino parallélogramme est construit en concaténant, de gauche à droite, la  $j^{\text{ème}}$  colonne à la  $(j-1)^{\text{ème}}$  colonne de façon à ce que le coin inférieur gauche de la  $j^{\text{ème}}$  colonne coïncide avec le coin supérieur droit de la case de hauteur (absolue)  $h$  de la  $(j-1)^{\text{ème}}$  colonne, où  $h$  est la hauteur de la  $(j-1)^{\text{ème}}$  vallée.

## Remerciements

Nous remercions Mireille Bousquet-Mélou pour de très utiles discussions sur l'analyse asymptotique des séries génératrices.

## Références

- [1] E. Barucci, A. Del Lungo, S. Fezzi, R. Pinzani, Non-decreasing dyck paths and  $q$ -fibonacci numbers, *Discrete Math.* 170 (1997) 211–217.
- [2] M. Bousquet-Melou, A method for the enumeration of various classes of column-convex polygons, *Discrete Math.* 154 (1996) 1–25.
- [3] Marie-Pierre Delest, Gérard Viennot, Algebraic languages and polyominoes enumeration, *Theoret. Comput. Sci.* 34 (1984) 169–206.
- [4] A. Denise, Génération aléatoire et uniforme de mots de langages rationnels, *Theoret. Comput. Sci.* 159 (1996) 43–63.
- [5] A. Denise, P. Zimmermann, Uniform random generation of decomposable structures using floating-point arithmetic, *Theoret. Comput. Sci.* 218 (1999) 233–248.
- [6] I. Dutour, Grammaires d'objets: énumération, bijections et génération aléatoire, Thèse de doctorat, 1996.
- [7] Ph. Flajolet, P. Zimmerman, B. Van Cutsem, A calculus for the random generation of labelled combinatorial structures, *Theoret. Comput. Sci.* all 132 (1994) 1–35.
- [8] D.A. Klarner, R.L. Rivest, Asymptotic bounds for the number of convex  $n$ -ominoes, *Discrete Math.* 8 (1974) 31–40.
- [9] A. Nijenhuis, H.S. Wilf, *Combinatorial Algorithms*, 2nd Edition, Academic Press, New York, 1978.
- [10] J.G. Penaud, O. Roques, Tirage à pile ou face de mots de Fibonacci, *Publications du LaCIM* 27 (2000) 253–262.
- [11] H.N.V. Temperley, Combinatorial problems suggested by the statistical mechanics of domains and of rubber-like molecules, *Phys. Rev.* 103 (1956) 1–16.
- [12] H.S. Wilf, A unified setting for sequencing, ranking, and selection algorithms for combinatorial objects, *Adv. Math.* 24 (1977) 281–291.