Journal of Number Theory **69**, 135–152 (1998)
Article No. NT972216

Sur la répartition des valeurs des fonctions arithmétiques. Le nombre de facteurs premiers d'un entier

Hsien-Kuei Hwang*

Institute of Statistical Science, Academia Sinica, Taipei 115, Taiwan
E-mail: hkhwang@stat.sinica.edu.tw

Communicated by A. Hildebrand

Received July 29, 1996; revised April 21, 1997

This paper is concerned with the quantity $N(x, m)$, the number of positive integers n,

and the author, the combination of which allows one to completely characterize the asymptotic behavior of the quantity $N(x, m)$ as the second parameter varies through all its possible values, namely $1 \leqslant m \leqslant (\log x)/\log 2$. These methods constitute, in a certain sense, a compact and effective set of analytical tools and apply also to the distribution function associated with $n(x, m)$. All these methods are quite general and applicable to many other arithmetic functions.

1. INTRODUCTION

Soit $\Omega(n)$ le nombre total de facteurs premiers dans la décomposition de l'entier positif n, $n \geqslant 2$, en facteurs premiers, avec $\Omega(1) := 0$. Autrement dit, si $n = \prod_{1 \leqslant j \leqslant k} p_j^{\alpha_j} \geqslant 2$, où les p_j sont premiers, $p_1 < p_2 < \cdots < p_k$, et les $\alpha_j \in \mathbf{N}^+$, on a $\Omega(n) = \sum_{1 \leqslant j \leqslant k} \alpha_j$.

Considérons la quantité

$$N(x, m) := \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ \Omega(n) = m}} 1 \qquad (x \geqslant 1, m \in \mathbf{N}).$$

À partir de cette définition, on considère la suite de variables aléatoires ξ_n, qui prennent les valeurs $\Omega(k)$, $1 \leqslant k \leqslant n$, avec probabilité n^{-1}.

* Ce travail a été partiellement financé par le project ESPRIT Basic Research Action n° 7141 (ALCOM II) quand l'auteur était à l'École polytechnique.

0022-314X/98 $25.00

L'étude asymptotique de $n(x, m)$ (et la distribution de ξ_n) a fait couler beaucoup d'encre dans la littérature en commençant par le célèbre théorème des nombres premiers. Citons en particulier:

— Selberg [23] démontre d'abord de façon analytique et succincte le résultat de Sathe [22] (avec un meilleur terme-reste)

$$N(x, m) = g\left(\frac{m-1}{\log\log x}\right)\frac{x}{\log x}\,\frac{(\log\log x)^{m-1}}{(m-1)!}\left(1 + O_\varepsilon\left(\frac{m-1}{(\log\log x)^2}\right)\right),$$

uniformément pour $1 \leqslant m \leqslant (2-\varepsilon)\log\log x$, $\varepsilon > 0$ étant fixé et

$$g(z) = \frac{1}{\Gamma(z+1)} \prod_{p \text{ premier}} \frac{(1-p^{-1})^z}{1-zp^{-1}} \qquad (|z| < 2). \tag{1}$$

Il ensuite mentionne que

$$N(x, m) \sim C 2^{-m} x \log x \qquad ((2+\varepsilon)\log\log x \leqslant m \leqslant B \log\log x), \tag{2}$$

$\varepsilon > 0$ étant fixé, $B > 2 + \varepsilon$, et C le résidu de $-g(z)$ and $z = 2$:

$$C = \frac{1}{4} \prod_{\substack{p \geqslant 3 \\ p \text{ premier}}} \left(1 + \frac{1}{p(p-2)}\right) = 0,3786950320... \tag{3}$$

— Nicolas [18, 19] établit une formule asymptotique étendant (2)

$$N(x, m) = C\frac{x}{2^m}\log\frac{x}{2^m}\left(1 + O_\varepsilon\left(\left(\log\frac{x}{2^m}\right)^{-b}\right)\right) \qquad (0 < b < 1), \tag{4}$$

uniformément pour $m \geqslant (2+\varepsilon)\log\log x$ et $x/2^m \to \infty$, $0 < \varepsilon < 1$ étant fixé. Ici b est une constante qui ne dépend que de ε. On peut d'ailleurs prendre [4] $b = 2q(\varepsilon/2)$, où $q(t) = (1+t)\log(1+t) - t$. Les deux méthodes utilisées dans [18, 19] sont *grosso modo* élémentaires bien qu'il ait utilisé la formule de Selberg dans [18]. Tenenbaum a donné [27, p. 243] une autre démonstration du théorème de Nicolas.

— Un résultat non publié de Delange (cf. [4]) précise une transition gaussienne entre les résultats de Sathe-Selberg et de Nicolas:

$$N(x, m) = C\frac{x\log x}{2^m}\,(\Phi(t) + O_T((\log\log x)^{-1/2})),$$

$$\left(|t| := \left|\frac{m - 2\log\log x}{\sqrt{2\log\log x}}\right| \leqslant T\right), \tag{5}$$

avec

$$\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-(1/2)\,u^2}\,\mathrm{d}u \qquad (t \in \mathbf{R}). \tag{6}$$

— Balazard, Delange et Nicolas [4] démontrent une formule asymptotique uniforme, valable pour $m \geqslant 1$ et $x/2^m \to \infty$ (cf. [2, 3]):

$$N(x, m) \sim (2-\rho)\; g(\rho)\, \frac{x}{2^m} \left(\log \frac{x}{2^m}\right)^{-1} \sum_{0 \leqslant j < m} \frac{\left(2 \log\log \dfrac{x}{2^m}\right)^j}{j!}, \tag{7}$$

où

$$\rho \sim \min \left\{ 2, \frac{m-1}{\log\log \dfrac{x}{2^m}} \right\}.$$

La démonstration de cette formule commence par isoler la contribution du facteur 2 et ensuite utilise la méthode de Selberg. Ce résultat permet aux auteurs de retrouver les résultats de Selberg, de Delange, et de Nicolas (avec plus de précision sur les termes d'erreur).

Cet article a un double but:

1. D'abord, nous introduisons une méthode due à van der Waerden [28] (cf. aussi [30, § VII.2]) qui permet d'obtenir un développement asymptotique de l'intégrale ayant la forme

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=r} \frac{f(z)}{a-z}\, z^{-m} e^{Xz}\,\mathrm{d}z \qquad (0 < r < a),$$

lorsque m, $X \to \infty$ et $m \leqslant AX$, A étant pris inférieur au rayon de convergence de la fonction f, supposé $> a$. On constate que l'intégrande a un point col $(r = m/X)$ et un pôle simple $(z = a)$. Lorsque $m \sim aX$, le point col s'approche du pôle simple. Dans un premier temps, cette méthode nous fournit un développement asymptotique uniforme pour $N(x, m)$, lorsque $m \to \infty$ et $m \leqslant (3-\varepsilon) \log\log x$, $\varepsilon > 0$; ce développement ne se déduit pas de (7). Ensuite, elle s'applique également aux (queues des) fonctions de répartition

$$\frac{1}{x} \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ \Omega(n) \geqslant m}} 1, \qquad \frac{1}{x} \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ \omega(n) \geqslant m}} 1, \qquad \text{et} \qquad \frac{1}{x} \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ \omega(n) \geqslant m}} \mu^2(n), \tag{8}$$

$\omega(n)$ désignant le nombre des facteurs premiers distincts de n et $\mu(n)$ la fonction de Möbius. Les résultats ainsi obtenus couvrent ceux de Delange [7] [12, p. 19–21] et de Kubilius [16, Ch. X] comme cas particuliers.

2. Nous donnons une démonstration analytique du théorème de Nicolas (4), qui n'utilise que les formules intégrales de Cauchy et de Perron et qui diffère de ceux de Nicolas et de Tenenbaum. L'intérêt de cette nouvelle méthode est multiple: Premièrement, elle fournit d'une façon directe un développement asymptotique. Deuxièmement, elle s'adapte bien à l'étude de la (queue de) fonction de répartition $\Pr\{\xi_n \geqslant m\}$; le résultat ainsi obtenu est original et améliore les résultats de Norton [20]. Troisièmement, elle s'applique à une classe étendue de fonctions arithmétiques, comme la quantité $N(x, m)$ avec des contraintes arithmétiques [8], le problème de "factorisatio numerorum" d'Oppenheim [21, 24, 13] [15, Ch. 10], le problème de Rényi [9, 29, 31], etc., que nous traiterons dans la suite. Enfin, on peut appliquer le même principe aux problèmes additifs et combinatoires.

Dans cet article et dans la suite, nous montrerons que la combination de la méthode de Selberg, de van der Waerden et de la nôtre donne un ensemble d'outils analytiques concis et efficaces permettant de caractériser d'une façon complète le comportement local des fonctions arithmétiques et les paramètres statistiques des structures combinatoires.

Nous commençons par introduire brièvement la méthode de van der Waerden dans la section suivante en montrant un théorème adapté à notre usage. Il est ensuite appliqué à $N(x, m)$ et aux quantités (8) dans la § 3. La démonstration analytique du théorème de Nicolas fait l'objet de la § 4. Une nouvelle formule asymptotique pour $S(x, m)$, lorsque $m \geqslant (2+\varepsilon) \log\log x$ et $x/2^m \to \infty$, est également présentée.

Notation. Le symbole ε désignera toujours une quantité positive et suffisamment petite dont la valeur diffèrera d'une occurrence à une autre et v désignera toujours un entier non-négatif qui ne dépend pas du paramètre principal asymptotique (X, n, x).

2. LA MÉTHODE DE VAN DER WAERDEN

Nous montrons dans cette section le théorème suivant qui sera utile dans la suite.

Théorème 1. *Soient $a > 0$ et $F(z)$ une fonction holomorphe dans $|z| \leqslant A$ avec $a < A < \infty$ et $F(a) \neq 0$. Alors l'intégrale I définie par*

$$I := \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z| = r_0} \frac{F(z)}{a-z} z^{-m} e^{Xz} \, \mathrm{d}z \qquad (0 < r_0 < a)$$

vérifie le développement asymptotique

$$I = F(a)\, a^{-m} e^{aX} \Phi(\eta\sqrt{m}) + \frac{r^{-m}e^m}{\sqrt{2\pi m}}\left(\sum_{0\leqslant j\leqslant \nu}\frac{c_j(r)}{m^j} + O_A(m^{-\nu-1})\right) \qquad (X\to\infty), \tag{9}$$

uniformément pour $m\to\infty$ *et* $m\leqslant AX$, *où* $r = m/X$,

$$\eta = \text{signe}(r-a)\sqrt{2\left(\frac{a}{r}+\log\frac{r}{a}-1\right)},$$

et les $c_j(r) = c_j(r;A)$ *sont des coefficients bornés.*

Démonstration. On écrit d'abord $I = I_1 + I_2$, où

$$I_1 = \frac{F(a)}{2i\pi}\oint_{|z|=r_0}\frac{z^{-m}e^{Xz}}{a-z}\,\mathrm{d}z = \frac{F(a)\,a^{-m}}{2i\pi}\oint_{\substack{|z|=r_1\\ 0\leqslant r_1<1}}\frac{z^{-m}e^{aXz}}{1-z}\,\mathrm{d}z,$$

$$I_2 = -\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r} f(z)\,z^{-m}e^{Xz}\,\mathrm{d}z = -\frac{r^{1-m}e^m}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(re^{it})\,e^{it}e^{m(e^{it}-1-it)}\,\mathrm{d}t,$$

où on a posé $f(z) = (F(a)-F(z))/(a-z)$, qui est holomorphe dans $|z|\leqslant A$. L'intégrale I_2 se fait ensuite par la méthode classique de Laplace (cf. [11, Ch. IX]):

$$I_2 = -\frac{r^{1-m}e^m}{\sqrt{2\pi m}}\left(\sum_{0\leqslant j\leqslant\nu}\frac{c_j^{[1]}(r)}{m^j} + O_A(m^{-\nu-1})\right), \tag{10}$$

uniformément pour $m\leqslant AX$. Les coefficients $c_j^{[1]}(r)$ sont également uniformément bornés. On a, en particulier,

$$c_0^{[1]}(r) = f(r) = \frac{F(a)-F(r)}{a-r},$$

$$c_1^{[1]}(r) = \frac{1}{12(a-r)^3}\,((F(a)-F(r))(a^2+10ar+r^2)$$
$$-\,12arF'(r)(a-r) + 6r^2F''(r)(a-r)^2).$$

D'autre part, l'intégrale I_1 n'est d'autre qu'une fonction de Gamma incomplète (cf. [25]):

$$I_1 = F(a)\,a^{-m}\sum_{0\leqslant j<m}\frac{(aX)^j}{j!} = F(a)\,a^{-m}e^{aX}G(m, aX),$$

où

$$G(m,\ Y)=\frac{1}{\Gamma(m)}\int_Y^{\infty} e^{-t}e^{m-1}\,\mathrm{d}t \qquad (Y\geqslant 0).$$

Comme ce qui a été fait par Temme (cf. [25]) pour G, la méthode de van der Waerden (cf. [28]) nous permet d'obtenir la formule

$$I_1=F(a)\,a^{-m}e^{aX}\Phi(\eta\sqrt{m})+\frac{F(a)\,e^m r^{-m}}{\sqrt{2\pi m}}$$
$$\times\left(\sum_{0\leqslant j\leqslant \nu} c_j^{[2]}(r)\,m^{-j}+O_A(m^{-\nu-1})\right), \tag{11}$$

uniformément pour $m\to\infty$ et $m\leqslant AX$, les coefficients $c_j^{[2]}(r)$ étant eux-mêmes bornés. On a, en particulier,

$$c_0^{[2]}(r)=\frac{r}{a-r}+\frac{1}{\eta}, \qquad c_1^{[2]}(r)=\frac{r(r^2+10ar+a^2)}{12(r-a)^3}-\frac{1}{\eta^3};$$

(pour une étude approfondie, cf. [26]).

Esquissons les principales étapes de la démonstration de (11). Supposons pour le moment $m<aX$. Par le théorème de Cauchy, on dispose d'abord de la représentation intégrale

$$I_1=\frac{F(a)\,e^m r^{1-m}}{2i\pi a}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{e^{mh(s)}}{1-\dfrac{r}{a}s}\,\mathrm{d}s \qquad (0<\sigma<a/r), \tag{12}$$

avec $h(s)=s-1-\log s$, log prenant sa détermination principale. On déforme ensuite la ligne d'intégration le long de la courbe *de plus grande pente* ($s=\sigma+i\tau$):

$$\mathscr{C}\colon \sigma=\tau\,\mathrm{cotg}\,\tau, \qquad -\pi<\tau<\pi,$$

sur laquelle la partie imaginaire de $h(\sigma+i\tau)$ s'annule. Définissons une application du plan complexe de s au plan complexe de w par l'équation

$$-\tfrac{1}{2}\,w^2=h(s), \tag{13}$$

avec les conditions suivantes: $s\in\mathscr{C}$ correspond à $w\in\mathbf{R}$; et w et s ont les mêmes signes lorsqu'ils sont tous les deux réels et non-nuls. Ainsi, on a

$$I_1=\frac{F(a)\,e^m r^{1-m}}{2i\pi a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-mw^2/2}\phi(w)\,\mathrm{d}w,$$

où

$$\phi(w)=\frac{1}{1-\dfrac{r}{a}\,s}\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}w}=\frac{a}{r(i\eta-w)}+\psi(w),$$

ψ étant une fonction entière de w. En utilisant la formule intégrale (cf. [30, § VII.2])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-(1/2)\,mw^2}}{i\eta-w}\,\mathrm{d}w=e^{mb^2/2}\Phi(\eta\sqrt{m}),$$

on a donc

$$I_1=F(a)\,a^{-m}e^{aX}\Phi(\eta\sqrt{m})+I_3,$$

où

$$I_3=\frac{F(a)\,e^m r^{1-m}}{2i\pi a}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-mw^2/2}\psi(w)\,\mathrm{d}w$$

qui se fait à nouveau par la méthode de Laplace. On obtient ainsi

$$I_3=\frac{F(a)\,e^m r^{-m}}{\sqrt{2\pi m}}\left(\sum_{0\leqslant j\leqslant \nu}c_j^{[2]}(r)\,m^{-j}+O_A(m^{-\nu-1})\right),$$

uniformément pour $m\to\infty$ et $m\leqslant AX$. On constate que $\eta=\eta(r)$ est continu en $r=a$ ainsi que tous les coefficients $c_j(r)$; le résultat obtenu pour I est donc uniformément valid dans le domaine indiqué. Cela achève la démonstration.

Remarques. (i) Lorsque $F(a)=0$, on peut appliquer directement la méthode de Selberg à I, cf. [23] [27, § II.6.1]. La formule (9) est valide quand $m\to\infty$. Dans le cas contraire, le pôle simple ne joue pas un rôle important et la méthode de Selberg est encore applicable.

(ii) On a

$$c_0(r)=\frac{F(a)}{\eta}+\frac{rF(r)}{a-r},$$

$$c_1(r)=-\frac{F(a)}{\eta^3}+\frac{rF(r)}{12(r-a)^3}\,(a^2+10ar+r^2)-\frac{ar^2F'(r)}{(r-a)^2}+\frac{r^3F''(r)}{2(r-a)}.$$

(iii) On pourra également obtenir la formule (9) par soit la méthode de Bleistein (cf. [6]) soit celle de Rice (cf. [17]).

Lorsque $m = aX + o(X^{2/3})$, le comportement de I est dicté par la loi normale.

Corollaire 1. *L'intégrale I vérifie, uniformément pour $m = aX + t\sqrt{aX}$, $t = o(X^{1/6})$, la formule asymptotique*

$$I = F(a)\, a^{-m} e^{aX} \Phi(t) \left(1 + O\left(\frac{|t|^3 + 1}{\sqrt{X}}\right)\right) \qquad (X \to \infty).$$

3. APPLICATIONS DU THÉORÈME 1

Pour étudier le comportement asymptotique de $N(x, m)$, l'idée de départ de Selberg [23] consiste à regarder la représentation intégrale de $N(x, m)$:

$$N(x, m) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z| = r} z^{-m-1} \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} z^{\Omega(n)}\, \mathrm{d}z \qquad (r > 0,\ x \geqslant 1,\ m \in \mathbf{N}). \qquad (14)$$

La fonction sommatoire $\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} z^{\Omega(n)}$ est ensuite traitée par la formule de Perron:

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} z^{\Omega(n)} = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^s}{s} \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - zp^{-s}}\, \mathrm{d}s \qquad (\sigma > 1),$$

puisque

$$\sum_{n \geqslant 1} \frac{z^{\Omega(n)}}{n^s} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - zp^{-s}} \qquad (\Re e\ s > 1,\ |z| < 2);$$

et par des méthodes standards (cf. [16, 27]), on déduit la formule de Selberg (cf. [16, 27]):

$$\sum_{1 \leqslant n \leqslant x} z^{\Omega(n)} = zg(z)\, x(\log x)^{z-1} + E_x(z), \qquad (15)$$

avec $E_x(z) \ll_\varepsilon x(\log x)^{\Re e\, z - 2}$, uniformément pour $|z| \leqslant 2 - \varepsilon$, g étant définie par (1).

En reportant (15) and (14), on coupe l'évaluation de $N(x, m)$ en deux termes:

$$N(x, m) = T_m(x) + R_m(x),$$

où (en écrivant $X = \log\log x$)

$$T_m(x) = \frac{x}{\log x}\frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r} z^{-m} g(z)\, e^{Xz}\, \mathrm{d}z \qquad (0<r<2) \tag{16}$$

$$R_m(x) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r'} z^{-m-1} E_x(z)\, \mathrm{d}z \qquad (0<r'<2). \tag{17}$$

Nous allons maintenant appliquer le théorème 1 à $T_m(x)$, ce qui nous permet d'obtenir un développement asymptotique lorsque $m \to \infty$ et $m \leqslant (3-\varepsilon)\log\log x$, qui étend, en particulier le résultat non publié de Delange (5).

THÉORÈME 2. *On a, uniformément pour $m \to \infty$ et $m \leqslant (3-\varepsilon)\log\log x$,*

$$\frac{1}{x} N(x, m) = C\frac{\log x}{2^m}\Phi\left(\delta\sqrt{2m\left(\frac{2}{r} + \log\frac{r}{2} - 1\right)}\right)$$
$$+ \frac{r^{-m}e^m}{\sqrt{2\pi m}\log x}\left(\sum_{0\leqslant j\leqslant \nu}\frac{\lambda_j(r)}{m^j} + O(m^{-\nu-1})\right),$$

où $r = m/\log\log x$, $\delta = \mathrm{signe}(r-2)$, C est défini dans (3) et les $\lambda_j(r)$ sont des coefficients bornés et dépendant de r.

Démonstration. En écrivant

$$g(z) = \frac{F(z)}{2-z}, \qquad \text{où} \quad F(z) = \frac{2^{1-z}}{\Gamma(1+z)}\prod_{\substack{p\geqslant 3\\ p \text{ premier}}}\frac{(1-p^{-1})^z}{1-zp^{-1}},$$

pour $|z|<3$, on peut appliquer le théorème 1 au terme principal de $N(x, m)$, c'est-à-dire, $T_m(x)$ défini dans (16). Il suffit de montrer la majoration

$$R_m(x) \ll x\frac{\log x}{2^m}\Phi\left(\sqrt{2m\left(\frac{2}{r} + \log\frac{r}{2} - 1\right)}\right)$$
$$+ x\frac{r^{-m}e^m}{\log x} m^{-K-1/2} =: T_1 + T_2,$$

uniformément pour $m \to \infty$ et $m \leqslant (3-\varepsilon)\log\log x$ et pour tout $K \geqslant 0$. La comparaison de T_2 et $R_m(x)$ se décompose en deux cas:

1. $0 < r \leqslant 2-\varepsilon$. On prend $r' = r$ dans (17) et on a

$$R_m(x) \ll x r^{-m} e^m (\log x)^{-2} \ll x\frac{r^{-m}e^m}{\log x} m^{-K-1/2} = T_2,$$

pour tout $K \geqslant 0$.

2. $(2-\varepsilon) \leqslant r < 3$. On prend $r' = 2-\varepsilon$ et on a

$$R_m(x) \ll x(2-\varepsilon)^{-m} (\log x)^{-\varepsilon} \ll x \frac{r^{-m} e^m}{\log x} m^{-K-1/2} = T_2,$$

pour tout $K \geqslant 0$.

Pour T_1, on distingue également deux cas:

1. $|m - 2 \log\log x| \leqslant A \sqrt{\log\log x}$, A étant une constant positive assez grande. Dans ce cas-là, on a $|r-2| \leqslant A(\log\log x)^{-1/2}$ et $T_1 \asymp x 2^{-m} \log x$. Prenons $r' = 2-\varepsilon$, on obtient aisément $R_m(x) \ll x(2-\varepsilon)^{-m} (\log x)^{-\varepsilon} \ll x 2^{-m} (\log x)(\log\log x)^{-K}$, pour tout $K \geqslant 0$.

2. $|m - 2 \log\log x| \geqslant A \sqrt{\log\log x}$. On a $|r-2| \geqslant A(\log\log x)^{-1/2}$. En utilisant les majorations

$$\Phi\left(\sqrt{2m\left(\frac{2}{r} + \log\frac{r}{2} - 1\right)}\right) \ll \frac{e^{-m((2/r)+\log((r/2)-1))}}{\sqrt{m}\, |r-2|}$$

$$\ll A^{-1} \frac{r^{-m} 2^m e^m}{\sqrt{m}\, (\log x)^2} (\log\log x)^{1/2},$$

on obtient

$$x \frac{\log x}{2^m} \Phi\left(\sqrt{2m\left(\frac{2}{r} + \log\frac{r}{2} - 1\right)}\right) \ll x \frac{r^{-m} e^m}{A \log x} m^{-1/2} (\log\log x)^{1/2},$$

et l'estimation se fait de la même manière que T_2 avec le développement asymptotique (par intégration par parties)

$$\Phi(-\sqrt{2\lambda}) = 1 - \Phi(\sqrt{2\lambda}) = \frac{e^{-\lambda}}{2\sqrt{\pi\lambda}} \left(1 + \sum_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \frac{e_j}{(2\lambda)^j} + O(\lambda^{-\nu-1})\right)$$

$$(\lambda \to \infty),$$

les e_j étant des coefficients réels.

Ceci achève la démonstration.

Remarquons que ce théorème nous permet de raffiner le résultat non publié de Delange (5) en écrivant $m = [2 \log\log x + t\sqrt{2 \log\log x}]$, où $[y]$ désigne la partie entière de y, on a

$$\frac{1}{x} N(x, m) = C \frac{\log x}{2^m} \left(\Phi(t) + \frac{e^{-t^2/2}}{\sqrt{2\pi}} \sum_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \frac{\pi_j(t) + \wp_j(u)}{(2 \log\log x)^{j/2}}\right.$$

$$\left. + O_T((\log\log x)^{-(\nu+1)/2})\right),$$

uniformément pour $|t| := |(m - 2\log\log x)/\sqrt{2\log\log x}| \leqslant T$. Ici les $\pi_j(t)$ sont des polynômes de t de degré $3j-1$, les $\wp_j(u)$ sont des fonctions périodiques de $u := \{2\log\log x - t\sqrt{2\log\log x}\}$ de période 1, $\{y\}$ étant la partie fractionnaire de y. En particulier, on a

$$\pi_1(t) = -\frac{t^2}{6} + \frac{2}{3} - \frac{F'(2)}{C}, \qquad \wp_1(u) = -u.$$

Considérons maintenant la quantité $S(x, m) := x^{-1} \sum_{j \geqslant m} N(x, j)$:

$$xS(x, m) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z|=r} \frac{z^{-m}}{z-1} \sum_{1 \leqslant n \leqslant x} z^{\Omega(n)}\, dz \qquad (m \in \mathbf{N}^+, 1 < r < 2).$$

Avec la même méthode, on arrive à

THÉORÈME 3. *Soit $r = m/\log\log x$. On a, uniformément pour $m \to \infty$ et $m \leqslant (2-\varepsilon)\log\log x$,*

$$S(x, m+1) = \Phi\left(\delta\sqrt{2m\left(\frac{1}{r} + \log r - 1\right)}\right) + \frac{r^{-m}e^m}{\sqrt{2\pi m}\log x}\left(\sum_{0 \leqslant j \leqslant \nu} \frac{\beta_j(r)}{m^j} + O(m^{-\nu-1})\right)$$

où $\delta = \operatorname{signe}(1-r)$ et les $\beta_j(r)$ sont des coefficients dépendant de r.

Remarque. Ce théorème comprend les résultats de Delange dans [7] et [12, p. 19–21], et ceux de Kubilius [16, Théorème 9.1] comme cas particuliers. Il est également utile pour le problème étudié par Delange dans [10].

4. DÉMONSTRATION ANALYTIQUE DU THÉORÈME DE NICOLAS

Notre démonstration analytique du théorème de Nicolas (4) repose sur le lemme suivant. Posons

$$P(z, s) := \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - zp^{-s}} =: \frac{1}{1 - z2^{-s}}\, Q(z, s) \qquad (\Re e\, s > 1),$$

le membre droite fournissant un prolongement analytique de la fonction $z \mapsto P(z, s)$.

Lemme 1. *Soient* $m \in \mathbf{N}^+$, $s = \sigma + it$, $1 < \sigma < \log 3/\log 2$, *et* $2^\sigma < r < 3^\sigma$. *On a*

$$N(x, m) = N_1(x, m) + N_2(x, m),$$

où

$$N_1(x, m) = \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{(2^{-m}x)^s}{s} Q(2^s, s)\, \mathrm{d}s$$

$$N_2(x, m) = -\sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z| = r} z^{-m-1-j} \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{(2^j x)^s}{s} Q(z, s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}z.$$

Démonstration. On part de la représentation intégrale de $N(x, m)$:

$$N(x, m) = \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z| = r_0} z^{-m-1} \frac{1}{2i\pi} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{x^s}{s} P(z, s)\, \mathrm{d}s\, \mathrm{d}z$$
$$(0 < r_0 < 2^\sigma, \sigma > 1). \tag{18}$$

Formellement, le résultat du lemme s'obtient en intervertissant l'ordre des deux intégrales et en appliquant le théorème des résidus:

$$\frac{1}{2i\pi} \oint_{|z| = r_0} z^{-m-1} P(z, s)\, \mathrm{d}z = 2^{-ms} Q(2^s, s) + \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z| = r} z^{-m-1} \frac{Q(z, s)}{1 - z2^{-s}}\, \mathrm{d}z, \tag{19}$$

où $2^\sigma < r < 3^\sigma$, et en développant le facteur $(1 - z2^{-s})^{-1}$ en série géométrique.

Arithmétiquement, en posant $\psi(k) := k2^{-\Omega(k)}$, les représentations intégrales du lemme se traduisent en les expressions

$$N_1(x, m) = \sum_{\substack{1 \leqslant \psi(k) \leqslant 2^{-m}x \\ k \text{ impair}}} 1$$

$$N_2(x, m) = -\sum_{j \geqslant 1} \frac{1}{2i\pi} \oint_{|z| = r} z^{-m-1-j} \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant 2^j x \\ \ell \text{ impair}}} z^{\Omega(\ell)}\, \mathrm{d}z.$$

Le second terme se simplifie en

$$N_2(x, m) = -\sum_{j > m} \frac{1}{2\pi} \oint_{|z| = r} z^{-j-1} \sum_{\substack{1 \leqslant \ell \leqslant 2^{j-m}x \\ \ell \text{ impair}}} z^{\Omega(\ell)}\, \mathrm{d}z = -\sum_{\substack{1 \leqslant \psi(k) \leqslant 2^{-m}x \\ \Omega(k) > m \\ k \text{ impair}}} 1.$$

On retrouve donc la formule de Halász (cf. [4]):

$$N(x, m) = \sum_{\substack{1 \leqslant \psi(k) \leqslant 2^{-m}x \\ \Omega(k) \leqslant m \\ k \text{ impair}}} 1,$$

qui correspond, formellement, à un changement de variable $z \mapsto 2^s z$ dans (18). Cela achète la démonstration.

Remarque. Posons

$$N'(x, m) = \sum_{\substack{1 \leqslant n \leqslant x \\ \Omega(n) = m \\ n \text{ impair}}} 1 \qquad (x \geqslant 1, m \in \mathbf{N}).$$

Il est évident que l'on a

$$N(x, m) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} N'\left(\frac{x}{2^j}, m - j\right) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant m} N'\left(\frac{x}{2^{m-j}}, j\right).$$

On montre facilement que

$$N_1(x, m) = \sum_{j \geqslant 0} N'\left(\frac{x}{2^{m-j}}, j\right),$$

et

$$N_2(x, m) = -\sum_{j > m} N'\left(\frac{x}{2^{m-j}}, j\right) = -\sum_{j \geqslant 1} N'(2^j x, m + j),$$

toutes les séries ne contenant qu'un nombre fini de termes. En particulier, puisque $N'(x, m) = 0$ si $m > (\log x)/\log 3$, on a le résultat suivant.

COROLLAIRE 2. *Si $m \geqslant \log x/\log 3$, alors $N(x, m)$ vérifie*

$$N(x, m) = \sum_{\substack{1 \leqslant \psi(k) \leqslant 2^{-m}x \\ k \text{ impair}}} 1 \tag{20}$$

Démonstration. On a

$$N_2(x, m) = 0, \qquad \text{si} \quad m + 1 > \frac{\log x + \log 2}{\log 3},$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que la suite $\{\psi(k)\}_{k \text{ impair}, k \geqslant 1}$ tend vers l'infini avec k, avec un taux supérieur à $k^{1-\log(2)/\log(3)} \approx k^{0,369}$. Signalons également une formule exacte de Nicolas [18]:

$$N(x, m) = N(2^{-\mu}x, m - \mu), \qquad \text{où} \quad \mu = \left\lceil \frac{m \log 3 - \log x}{\log \frac{3}{2}} \right\rceil,$$

pour $m \geqslant \log x$. On constate que si $x/2^m \ll 1$, alors $x/2^\mu \ll 1$ et $m - \mu \ll 1$. Ces deux formules sont donc utiles, d'un point de vue calculatoire, lorsque $x/2^m \ll 1$.

Lemme 2. *Si $x/2^m \to \infty$, alors $N_1(x, m)$ vérifie le développement asymptotique*

$$N_1(x, m) = \frac{x}{2^m} \log \frac{x}{2^m} \left(C + \sum_{1 \leqslant j \leqslant \nu} \frac{\varpi_j \left(\log \log \frac{x}{2^m} \right)}{\left(\log \frac{x}{2^m} \right)^j} + O\left(\frac{\left(\log \log \frac{x}{2^m} \right)^{\nu+1}}{\left(\log \frac{x}{2^m} \right)^{\nu+1}} \right) \right),$$

où les $\varpi_j(X)$ sont des polynômes de X de degré j.

Démonstration. La démonstration se trouve dans la thèse de Balazard [2, p. 92–102] et dans [1, Théorème 3].

On peut donner une expression explicite du polynôme $\varpi_j(X)$ de la manière suivante. En écrivant (cf. [1])

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} \prod_{\substack{p \geqslant 3 \\ p \text{ premier}}} \frac{1}{1 - 2^s p^{-s}} &= \frac{1}{s} \zeta(s)^{2^s} (1 - 2^{-s})^{2^s} \prod_{\substack{p \geqslant 3 \\ p \text{ premier}}} \frac{(1 - p^{-s})^{2^s}}{1 - 2^s p^{-s}} \\ &= (s-1)^{-2} \sum_{j \geqslant 0} \sum_{0 \leqslant h \leqslant j} C_{j,h} (s-1)^j \left(\log \frac{1}{s-1} \right)^h, \end{aligned}$$

pour $s \sim 1$, $s \notin]-\varepsilon, 1]$, $\varepsilon > 0$, $\zeta(s)$ étant la fonction zêta de Riemann, on a

$$\varpi_j(X) = \sum_{0 \leqslant h \leqslant j} \binom{j}{h} (-1)^h K^{(j-h)}(2-j)\, C_{j,h} X^h, \qquad \text{avec} \quad K(z) := \frac{1}{\Gamma(-z)},$$

pour $j = 0, 1, 2, \ldots$.

Lemme 3. *Soient $m \in \mathbf{N}^+$ et $2 < r < 3$. La quantité $N_2(x, m)$ satisfait à la majoration*

$$N_2(x, m) \ll r^{-m} x (\log x)^{r-1}.$$

Démonstration. D'un théorème de Tenenbaum [27, p. 205] (cf. aussi [27, Ex. II.6.3(b)]), on dispose d'abord de la majoration

$$\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{(2^jx)^s}{s}\,Q(z,s)\,\mathrm{d}s \ll 2^jx(\log 2^jx)^{\Re e\, z-1} \qquad (|z|\leqslant 3-\varepsilon),$$

pour tout $j=0, 1, 2, ..., m$. On a donc

$$N_2(x,m) \ll \sum_{j\geqslant 1} r^{-m-j}2^jx(\log 2^jx)^{r-1} \ll r^{-m}x(\log x)^{r-1} \qquad (2<r<3), \tag{21}$$

ce qu'il fallait démontrer.

Remarquons que, si $m\geqslant(2+\varepsilon)\log\log x$, la majoration du Lemme 3 vérifie, en considérant $m=o(\log x)$ et $m\asymp\log x$,

$$r^{-m}x(\log x)^{r-1} \ll \frac{x}{2^m}\left(\log\frac{x}{2^m}\right)(\log x)^{-2q(\varepsilon/2)}.$$

où $q(t)=(1+t)\log(1+t)-t$. En regroupant les résultats des lemmes précédents et en utilisant cette remarque, on obtient le théorème suivant qui raffine celui de Nicolas (cf. (4)).

THÉORÈME 4. *La quantité* $N(x,m)$ *vérifie, lorsque* $m\geqslant(2+\varepsilon)\log\log x$ *et* $x/2^m\to\infty$,

$$N(x,m)=C\frac{x}{2^m}\log\frac{x}{2^m}\left(1+O_\varepsilon\left((\log x)^{-2q(\varepsilon/2)}+\frac{\log\log\frac{x}{2^m}}{\log\frac{x}{2^m}}\right)\right). \tag{22}$$

Si, en plus, $m/\log\log x\to\infty$, *on a le développement asymptotique*

$$N(x,m)=\frac{x}{2^m}\log\frac{x}{2^m}\left(C+\sum_{1\leqslant j\leqslant v}\frac{\varpi_j\left(\log\log\frac{x}{2^m}\right)}{\left(\log\frac{x}{2^m}\right)^j}+O\left(\frac{\left(\log\log\frac{x}{2^m}\right)^{v+1}}{\left(\log\frac{x}{2^m}\right)^{v+1}}\right)\right),$$

où les $\varpi_j(X)$ *sont les polynômes de* X *de degré* j.

On peut, bien entendu, poursuivre le même calcul en incluant les contributions de 3, 5, 7, ... dans (19) et, en général, le terme principal de la contribution du nombre premier p est de l'ordre $x/p^m(\log x/p^m)^{p-1}$. Mais la nature asymptotique de telles formules nécessite le découpage de m en intervalles plus compliquées. Par exemple, on a

$$\frac{x}{3^m}\left(\log\frac{x}{3^m}\right)^2 \ll \frac{x}{2^m}\log\frac{x}{2^m},$$

si $m > (\log 3/2)^{-1}\log\log x \approx 2,4663\log\log x$; et

$$\frac{x}{5^m}\left(\log\frac{x}{5^m}\right)^4 \ll \frac{x}{3^m}\left(\log\frac{x}{3^m}\right)^2,$$

si $m > 2(\log 5/3)^{-1}\log\log x \approx 3,9152\log\log x$, etc.

En ce qui concerne la quantité $S(x,m)$, en utilisant l'expression intégrale

$$xS(x,m) = \frac{1}{2i\pi}\oint_{|z|=r_0}\frac{z^{-m}}{z-1}\frac{1}{2i\pi}\int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty}\frac{x^s}{s}\prod_{p\ \text{premier}}\frac{1}{1-zp^{-s}}\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}z$$
$$(\sigma > 1,\ 1 < r_0 < 2^\sigma),$$

et la même méthode, on obtient le

THÉORÈME 5. *La quantité $S(x,m)$ vérifie, lorsque $m \geqslant (2+\varepsilon)\log\log x$ et $x/2^m \to \infty$, l'expression asymptotique*

$$S(x,m) = C2^{-m+1}\log\frac{x}{2^m}\left(1 + O_\varepsilon\left((\log x)^{-2q(\varepsilon/2)} + \frac{\log\log\frac{x}{2^m}}{\log\frac{x}{2^m}}\right)\right), \tag{23}$$

le terme d'erreur étant uniforme en m. Si en plus $m/\log\log x \to \infty$, alors $S(x,m)$ vérifie le développement asymptotique

$$S(x,m) = 2^{-m}\log\frac{x}{2^m}\left(2C + \sum_{1\leqslant j\leqslant \nu}\frac{\tilde{\varpi}_j\left(\log\log\frac{x}{2^m}\right)}{\left(\log\frac{x}{2^m}\right)^j}\right.$$
$$\left. + O\left(\frac{\left(\log\log\frac{x}{2^m}\right)^{-\nu-1}}{\left(\log\frac{x}{2^m}\right)^{\nu+1}}\right)\right),$$

où les $\tilde{\varpi}_j(X)$ sont des polynômes de X de degré j.

Remarquons que la formule (23) se déduit aisément de la formule de Nicolas (4) (cf. (22)).

En appliquant la formule (20), on obtient, pour $m \geqslant \log x/\log 3$,

$$S(x, m) = \sum_{0 \leqslant j \leqslant (\log x/\log 2) - m} \; \sum_{\substack{1 \leqslant \psi(k) \leqslant 2^{-m-j}x \\ k \text{ impair}}} 1,$$

qui est utile lorsque $1 \leqslant x/2^m \ll 1$.

Rajoutons que Delange (cf. [12, 5]) a obtenu, par la méthode de Selberg, une formule asymptotique de $S(x, m)$, dans le cas où $m = \lambda \log\log x$, $0 < \lambda < 2$, $\lambda \neq 1$.

5. CONCLUSION

Pour les quantités $N(x, m)$ et $S(x, m)$, nous avons montré que, par les méthodes de Selberg, de van der Waerden, de Balazard, Delange et Nicolas, et par la nôtre, on arrive à une caractérisation complète par les formules asymptotiques (souvent les développements asymptotiques). Ces méthodes constituent un ensemble d'outils analytiques assez performants que nous appliquerons aux autres problèmes arithmétiques dont les fonctions génératrices sont méromorphes. Il faut signaler que si la fonction génératrice n'est pas du type méromorphe, comme par exemple, le cas $\omega(n)$, la situation devient plus compliquée parce qu'aucun facteur ne joue un rôle prépondérant quand le deuxième paramètre (m) devient grand (cf. [14]).

BIBLIOGRAPHIE

1. R. Balasubramanian et K. Ramachandra, On the number of integers n such that $nd(n) \leqslant x$, *Acta Arithmetica* **44** (1988), 313–322.
2. M. Balazard, "Sur la Répartition des Valeurs de Certaines Fonctions Arithmétiques Additives," Thèse, Université de Limoges, 1987.
3. M. Balazard, Comportement statistique du nombre de facteurs premiers des entiers, *in* "Séminaire de Théorie des Nombres, Paris 1987-1988," pp. 1–27 Birkhäuser, (1990).
4. M. Balazard, H. Delange, et J.-L. Nicolas, Sur le nombre de facteurs premiers des entiers, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences, Série I, Paris* **306** (1988), 511–514.
5. M. Balazard, J.-L. Nicolas, C. Pomerance, et G. Tenenbaum, Grandes déviations pour certaines fonctions arithmétiques, *Journal of Number Theory* **40** (1992), 146–164.
6. N. Bleistein, Uniform asymptotic expansions of integrals with stationary point near algebraic singularity, *Communications on Pure and Applied Mathematics* **19** (1966), 353–370.
7. H. Delange, Sur le nombre des diviseurs premiers de n, *Acta Arithmetica* **7** (1962), 191–215.
8. H. Delange, Sur des formules de Atle Selberg, *Acta Arithmetica* **19** (1971), 105–146.
9. H. Delange, Sur un théorème de Rényi III, *Acta Arithmetica* **23** (1973), 153–182.
10. H. Delange, On the integers n for which $\Omega(n) = k$ (II), *Monatshefte für Mathematik* **116** (1993), 175–196.

11. J. Dieudonné, "Calcul infinitésimal," Hermann, Paris, 1968.
12. P. Erdős et J.-L. Nicolas, Sur la fonction: nombre de facteurs premiers de *n*, *L'Enseignement Mathématique* **27** (1981), 3–27.
13. D. Hensley, The distribution of the number of factors in a factorization, *Journal of Number Theory* **26** (1987), 179–191.
14. A. Hildebrand et G. Tenenbaum, On the number of prime factors of an integer, *Duke Mathematical Journal* **56** (1988), 471–501.
15. H.-K. Hwang, "Théorèmes Limites pour les Structures Combinatoires et les Fonctions Arithmétiques," Thèse, École polytechnique, (1994).
16. J. Kubilius, "Probabilistic Methods in the Theory of Numbers," American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 1964.
17. R. Lugannani et S. O. Rice, Saddlepoint approximation for the distribution of the sum of independent random variables, *Advances in Applied Probability* **12** (1980), 475–479.
18. J.-L. Nicolas, Autour de formules dues à A. Selberg, *in* "Colloque en l'honneur de H. Delange Publication de l'Université Paris-Sud," pp. 122–134, 1982.
19. J.-L. Nicolas, Sur la distribution des nombres entiers ayant une quantité fixée de facteurs premiers, *Acta Arithmetica* **44** (1984), 191–200.
20. K. K. Norton, On the number of restricted prime factors of an integer. III, *L'Enseignement Mathématique* **28** (1982), 31–52.
21. A. Oppenheim, On an arithmetic function (II), *Journal of the London Mathematical Society* **2** (1927), 123–130.
22. L. G. Sathe, On a problem of Hardy and Ramanujan on the distribution of integers having a given number of prime factors, *Journal of the Indian Mathematical Society* **17** (1953), 63–141; and **18** (1954), 27–81.
23. A. Selberg, Note on a paper by L. G. Sathe, *Journal of the Indian Mathematical Society* **18** (1954), 83–87.
24. G. Szekeres et P. Turán, Über das zweite Hauptproblem der "Factorisatio Numerorum," *Acta Litterarum ac Scientiarum, Szeged* **6** (1932–1934), 143–154.
25. N. M. Temme, Uniform asymptotic expansions of the incomplete gamma functions and the incomplete beta function, *Mathematics of Computations* **29** (1975), 1109–1114.
26. N. M. Temme, The asymptotic expansion of the incomplete gamma functions, *SIAM Journal on Mathematical Analysis* **10** (1979), 757–766.
27. G. Tenenbaum, "Introduction à la Théorie Analytique et Probabiliste des Nombres," Institut Élie Cartan, Université de Nancy I, Nancy, France, 1990.
28. B. L. van der Waerden, On the method of saddle-points, *Applied Scientific Research* **B2** (1951), 33–45.
29. D. Wolke, On a problem of A. Rényi, *Monatshefte für Mathematik* **111** (1991), 323–330.
30. R. Wong, "Asymptotic Approximations of Integrals," Academic Press, Inc., Boston, 1989.
31. J. Wu, Sur un problème de Rényi, *Monatshefte für Mathematik* **117** (1994), 303–322.