Discrete Mathematics 11 (1975) 71–78.

UN PROBLEME EXTREMAL POUR LES GRAPHES ET LES HYPERGRAPHES

F. STERBOUL
Université de Paris, Paris, France

Reçu le 18 avril 1974
Révisé le 19 juin 1974

$S(n, h, c)$ est le nombre minimum d'arêtes d'un h-graphe de n sommets, tel que, dans toute c-coloration il existe une arête fortement colorée. On étudie les cas particuliers $c = h$, et $c = h = n - 2$. On montre que ce dernier cas est équivalent à certains problèmes extrémaux de théorie des graphes.

0. Introduction

Un h-graphe (ou hypergraphe uniforme de rang h, voir [1]) est un couple $H = (X, \mathcal{E})$ où $\mathcal{E}$ est un ensemble de parties de cardinal h de X : $\mathcal{E} \subset \mathcal{P}_h(X)$. X est l'ensemble des sommets de H, et $\mathcal{E}$ est l'ensemble des arêtes de H. Dans [8], le problème suivant est étudie: Quel est le nombre minimum d'arêtes d'un h-graphe $H = (X, \mathcal{E})$ tel que $|X| = n$ et que, pour toute coloration des sommets de X avec c couleurs, il existe au moins une arête dont les éléments sont tous de couleur différente? On note $S(n, h, c)$ ce nombre minimum d'arêtes. Dans [8], on donne plusieurs valeurs approchées de $S(n, h, c)$ dans le cas général. On considère ici le cas où $c = h$, et particulièrement le cas $c = h = n - 2$. On montrera que dans ce dernier cas, le problème est équivalent au problème suivant de théorie des graphes: Quel est le nombre minimum d'arêtes d'un graphe de n sommets tel que tout ensemble de quatre sommets contienne un triangle ou un chemin de longeur 3? On étudie les graphes possédant cette propriété. Enfin, on montre que le problème ci-dessus est aussi équivalent au problème classique suivant: Quel est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe, sans triangle ni cycle de longueur 4, ayant n sommets?

1.

Définition 1.1. On appelle *coloration avec c couleurs* de l'ensemble X toute application g surjective de X sur l'ensemble $\{1, 2, ..., c\}$. Pour tout $x \in X$, $g(x)$ est la *couleur* de l'élément x.

Définition 1.2. On note $\mathcal{H}(n, h, c)$ l'ensemble des h-graphes $H = (X, \mathcal{E})$ tels que $|X| = n$ et que, pour toute coloration des sommets de H avec c couleurs, il existe au moins une arête dont tous les éléments sont de couleur différente. $S(n, h, c)$ est donc le nombre minimum d'arêtes d'un élément de $\mathcal{H}(n, h, c)$. On suppose dans toute la suite que $h \geqslant 2$.

Théorème 1.3. $S(n, h, h) \geqslant (n/h)S(n-1, h-1, h-1)$.

Démonstration. Soit $H = (X, \mathcal{E})$ tel que $H \in \mathcal{H}(n, h, h)$ et $|\mathcal{E}| = S(n, h, h)$. Soit $x \in X$, soit $\mathcal{E}_x = \{E: E \ni x, E \in \mathcal{E}\}$ et soit $\mathcal{F}_x = \{F: F = E - \{x\}, E \in \mathcal{E}_x\}$. Soit $H_x = (X - \{x\}, \mathcal{F}_x)$ alors, $H_x \in \mathcal{H}(n-1, h-1, h-1)$. En effet, soit g une coloration quelconque de $X - \{x\}$ en $h-1$ couleurs: $g(X - \{x\}) = [1, 2, ..., h-1]$, et posons $j(y) = g(y)$, $\forall y \in X - \{x\}$ et $j(x) = h$. j est une coloration de X en h couleurs, donc il existe $E \in \mathcal{E}$ telle que $j(E) = [1, 2, ..., h]$. Mais alors $j(E - \{x\}) = [1, 2, ..., h-1]$ et $E - \{x\} \in \mathcal{F}_x$, donc $H_x \in \mathcal{H}(n-1, h-1, h-1)$. Il en résulte que $|\mathcal{F}_x| \geqslant S(n-1, h-1, h-1)$, donc $|\mathcal{E}_x| \geqslant S(n-1, h-1, h-1)$. Or, $h|\mathcal{E}| = \Sigma_{x \in X} |\mathcal{E}_x|$ donc $|\mathcal{E}| \geqslant (n/h)S(n-1, h-1, h-1)$.

Corollaire 1.4. $2\binom{n}{h}/(n-h+2) \leqslant S(n, h, h) \leqslant \binom{n-1}{h-1}$.

Démonstration. La borne supérieure est conséquence d'un théorème de [8]. La borne inférieure est démontrée par récurrence, en utilisant le Théorème 1.3, et l'égalité $S(n-h+2, 2, 2) = n-h+1$ (voir [8]).

2.

Définition 2.1. Soit $H = (X, \mathcal{E})$ un h-graphe, avec $|X| = n$. $\bar{H}$ est le $(n-h)$-graphe: $\bar{H} = (X, \bar{\mathcal{E}})$ avec $\bar{\mathcal{E}} = \{\bar{E}: \bar{E} = X - E, E \in \mathcal{E}\}$.

Définition 2.2. Soit $G = (X, \mathcal{E})$ un graphe et $S \subset X$. On note G_S le graphe $G_S = (S, \mathcal{E}_S)$ avec $\mathcal{E}_S = \{E: E \in \mathcal{E}, E \subset S\}$.

Définition 2.3. On note $\mathcal{G}(n)$ l'ensemble de tous les graphes $G = (X, \mathcal{E})$ tels que $|X| = n$ et que pour tout $S \subset X$, avec $|S| = 4$, le graphe G_S contienne un triangle (K_3) ou un chemin de longueur $3(P_3)$. On note $f(n)$ le nombre minimum d'arêtes d'un graphe de $\mathcal{G}(n)$.

On suppose pour cette définition que $n \geqslant 4$.

Théorème 2.4. $S(n, n-2, n-2) = f(n)$.

Démonstration. Il suffit de démontrer

$$H \in \mathcal{H}(n, n-2, n-2) \Longleftrightarrow \bar{H} \in \mathcal{G}(n).$$

Soit $H = (X, \mathcal{E})$ un $(n-2)$-graphe, avec $|X| = n$. Soit g une coloration de X en $n-2$ couleurs. Une même couleur ne peut être affectée à plus de trois sommets distincts. On a donc 2 cas:

1er *cas*. Il existe trois sommets ayant la même couleur: $g(x_1) = g(x_2) = g(x_3) = 1$. Et, $g(x_4) = 2, g(x_5) = 3, \ldots, g(x_n) = n-2$. Pour que $H \in \mathcal{H}(n, n-2, n-2)$ il faut donc qu'il existe $E \in \mathcal{E}$ telle que $E \supset X - \{x_1, x_2, x_3\}$, donc qu'il existe une arête $\bar{E}$ de $\bar{H}$ telle que $\bar{E} \subset \{x_1, x_2, x_3\}$.

2ème *cas*. Il existe deux couples de sommets ayant la même couleur. $g(x_1) = g(x_2) = 1, g(x_3) = g(x_4) = 2$, et $g(x_5) = 3, g(x_6) = 4, \ldots, g(x_n) = n-2$. Pour que $H \in \mathcal{H}(n, n-2, n-2)$ il faut donc qu'il existe $E \in \mathcal{E}$ telle que $E \supset X - \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $|E \cap \{x_1, x_2\}| = 1$ et $|E \cap \{x_3, x_4\}| = 1$, donc il faut qu'il existe une arête $\bar{E}$ de $\bar{H}$ telle que $|\bar{E} \cap \{x_1, x_2\}| = 1$ et $|\bar{E} \cap \{x_3, x_4\}| = 1$.

En réunissant les deux cas, pour que $H \in \mathcal{H}(n, n-2, n-2)$ il faut et il suffit que tout ensemble $\{x_1, x_2, x_3\}$ de sommets contienne une arête du graphe $\bar{H}$ et que pour tout couple d'ensembles disjoints $\{x_1, x_2\}$ et $\{x_3, x_4\}$ il existe une arête de $\bar{H}$ joignant $\{x_1, x_2\}$ à $\{x_3, x_4\}$. On vérifie aisément que ceci est encore équivalent à: pour tout $S = \{x_1, x_2, x_3, x_4\}$, $\bar{H}_S$ contient un sous-graphe partiel isomorphe à K_3 ou P_3.

3.

Ce paragraphe est consacré à l'étude des graphes de $\mathcal{G}(n)$.

Définition 3.1. On note $\mathcal{G}(n, d)$ l'ensemble des graphes de $\mathcal{G}(n)$ possédant un sommet de degré d.

On note $f(n, d)$ le nombre minimum d'arêtes d'un graphe de $\mathcal{G}(n, d)$. On a donc $f(n) = \mathrm{Min}\{f(n, d): 0 \leqslant d \leqslant n-1\}$.

Pour un graphe G quelconque, on note $D(G)$ le plus grand des degrés de ses sommets.

On vérifie aisément que $\mathcal{G}(n, 0) = \{G_0\}$, où le graphe G_0 est l'union d'un sommet isolé x_0 et d'une clique sur un ensemble Z de $n-1$ sommets, et que $\mathcal{G}(n, 1) = \{G_1, G_2\}$, où G_1 est obtenu à partir de G_0 par adjonction d'une arête $\{x_0, y_0\}$, $y_0 \in Z$, et où G_2 est obtenu à partir de G_1 par suppression d'une arête $\{y_0, y_1\}$, $y_1 \in Z$, $y_1 \neq y_0$.

Théorème 3.2. *Soit $G = (X, \mathcal{E})$ un graphe appartenant à $\mathcal{G}(n, d)$, alors $|\mathcal{E}| \geqslant \binom{n-1}{2} - \binom{d}{2} + f(d)$ et $D(G) \geqslant (n-1)((n-d-2)/(n-d-1))$.*

Démonstration. Soit $G = (X, \mathcal{E})$, $G \in \mathcal{G}(n, d)$ et soit $x_0 \in X$, x_0 sommet de degré d. Soit Y le voisinage de x_0, $Y = \{y: y \in X, \{x_0, y\} \in \mathcal{E}\}$ et $Z = X - Y - \{x_0\}$.

(1) $G_Y \in \mathcal{G}(d)$ donc Y contient au moins $f(d)$ arêtes de G.

(2) G_Z est le graphe complet sur Z. En effet, soit $\{z_1, z_2\} \subset Z$ le triplet $\{x_0, z_1, z_2\}$ contient au moins une arête de G, qui ne peut être que $\{z_1, z_2\}$. Donc Z contient $\binom{n-d-1}{2}$ arêtes de G.

(3) Pour tout $y \in Y$,

$$m(y, Z) = |\{E: E \in \mathcal{E}, E = \{y, z\}, z \in Z\}| \geqslant |Z| - 1.$$

En effet, dans le cas contraire on aurait $\exists\{z_1, z_2\} \subset Z$ avec $\{y, z_1\} \notin \mathcal{E}$ et $\{y, z_2\} \notin \mathcal{E}$. Mais alors G_S avec $S = \{x_0, y, z_1, z_2\}$ ne contiendrait ni K_3 ni P_3. Il en résulte que le nombre d'arêtes joignant Y à Z est au moins égal à $d(n-d-2)$:

$$m(Y, Z) = \sum_{y \in Y} m(y, Z) = \sum_{z \in Z} m(z, Y) \geqslant d(n-d-2).$$

Il en résulte qu'il existe $z_0 \in Z$ tel que $m(z_0, Y) \geqslant d(n-d-2)/(n-d-1)$. Le degré du sommet z_0 est au moins égal à $|Z| - 1 + m(z_0, Y)$, ce qui prouve la seconde partie du théorème.

Enfin, d'après (1), (2) et (3),

$$|\mathcal{E}| \geqslant f(d) + \binom{n-d-1}{2} + d(n-d-2) + d = \binom{n-1}{2} - \binom{d}{2} + f(d).$$

Corollaire 3.3. $f(n, d) \geqslant \binom{n-1}{2} - \binom{d}{2} + f(d)$.

Corollaire 3.4. *Si* $G \in \mathcal{G}(n)$, $D(G) \geqslant n-1-(n-1)^{1/2}$.

Démonstration. Soit $G \in \mathcal{G}(n)$, alors $G \in \mathcal{G}(n, D(G))$; donc d'après le Théorème 3.2, $D(G) \geqslant (n-1)(n-D(G)-2)(n-D(G)-1)^{-1}$ d'où $(D(G))^2 - 2(n-1)D(G) + (n-1)(n-2) \leqslant 0$, d'où le résultat.

Théorème 3.5. *Si* $2d \leqslant n-1$, $f(n, d) = \binom{n-1}{2} - \binom{d}{2} + f(d)$.

Démonstration. D'après le Corollaire 3.3, il suffit de montrer que si $2d \leqslant n-1$, il existe $G \in \mathcal{G}(n, d)$ ayant exactement $\binom{n-1}{2} - \binom{d}{2} + f(d)$ arêtes. Soit $X = \{x_0\} \cup Y \cup Z$, avec $|X| = n$, $|Y| = d$, $|Z| = n-d-1$. Soit $G_1 = (Z, \mathcal{E}_1)$ le graphe complet sur Z. Soit $G_2 = (Y, \mathcal{E}_2)$ tel que $G_2 \in \mathcal{G}(d)$ et $|\mathcal{E}_2| = f(d)$. Soit

$$\mathcal{E}_3 = \{E: E = \{x_0, y\}, y \in Y\}.$$

Soit $\mathcal{F}_4$ un ensemble de d arêtes couplant Y dans Z (ce qui est possible car $d \leqslant n-d-1$). Soit

$$\mathcal{E}_4 = \{E: E = \{y, z\}, y \in Y, z \in Z, E \notin \mathcal{F}_4\}.$$

Enfin, soit $G = (X, \mathcal{E})$ avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_1 \cup \mathcal{E}_2 \cup \mathcal{E}_3 \cup \mathcal{E}_4$. On a

$$|\mathcal{E}| = \binom{n-d-1}{2} + f(d) + d + d(n-d-1) - d = \binom{n-1}{2} - \binom{d}{2} + f(d).$$

Comme x_0 est un sommet de G de degré d, il reste donc à montrer que $G \in \mathcal{G}(n)$: soit $S \subset X$, avec $|S| = 4$.

1er *cas.* $|S \cap Z| \geqslant 3$. Alors, d'après la définition de $\mathcal{E}_1$, S contient K_3.

2ème *cas.* $|S \cap Z| = 2$ et $x_0 \in S$: $S = \{x_0, y, z_1, z_2\}$. On a $\{x_0, y\} \in \mathcal{E}$, $\{z_1, z_2\} \in \mathcal{E}$ et on a ou bien $\{y, z_1\} \in \mathcal{E}_4$ ou bien $\{y, z_2\} \in \mathcal{E}_4$, car sinon $\mathcal{F}_4$ ne serait pas un couplage. Donc S contient P_3.

3ème *cas.* $|S \cap Z| = 2$ et $x_0 \notin S$: $S = \{y_1, y_2, z_1, z_2\}$. $\{z_1, z_2\} \in \mathcal{E}$ et, comme $\mathcal{F}_4$ est un couplage, au moins une des deux arêtes $\{y_1, z_1\}$ et $\{y_2, z_1\}$ appartient à $\mathcal{E}$, ainsi qu'une des deux arêtes $\{y_1, z_2\}$ et $\{y_2, z_2\}$. Donc S contient K_3 ou P_3.

4ème *cas.* $|S \cap Z| = 1$ et $x_0 \in S$: $S = \{x_0, y_1, y_2, z\}$. $\{x_0, y_1\}$ et $\{x_0, y_2\} \in \mathcal{E}$, et ou bien $\{y_1, z\}$ ou bien $\{y_2, z\} \in \mathcal{E}$. Donc S contient P_3.

5ème *cas.* $|S \cap Z| = 1$ et $x_0 \notin S$: $S = \{z, y_1, y_2, y_3\}$. Comme $G_Y \in \mathcal{G}(d)$, $\{y_1, y_2, y_3\}$ contient au moins une arête: par exemple, $\{y_1, y_2\} \in \mathcal{E}$. D'autre part, au moins 2 des trois ensembles $\{y_1, z\}$, $\{y_2, z\}$, $\{y_3, z\}$ appartiennent à $\mathcal{E}$. Donc S contient K_3 ou P_3.

6ème *cas.* $S \cap Z = \emptyset$ et $x_0 \in S$: $S = \{x_0, y_1, y_2, y_3\}$. $\{x_0, y_1\}$, $\{x_0, y_2\}$, $\{x_0, y_3\} \in \mathcal{E}$, et $\{y_1, y_2, y_3\}$ contient une arête de $\mathcal{E}$. Donc S contient K_3.

7ème *cas.* $S \cap Z = \emptyset$ et $x_0 \notin S$: $S \subset Y$. Comme $G_Y \in \mathcal{G}(d)$, S contient K_3 ou P_3.

Pour tout graphe G, on note $\alpha(G)$ son nombre de stabilité et $k(G)$ sa connectivité.

Lemme 3.6. *Si $G \in \mathcal{G}(n)$, $\alpha(G) \leqslant 2$.*

Démonstration. D'après la définition de $\mathcal{G}(n)$, si $G \in \mathcal{G}(n)$ tout ensemble de trois sommets contient une arête de G.

Lemme 3.7. *Si $G \in \mathcal{G}(n)$, et si tout sommet de G est de degré $\geqslant 2$, alors $k(G) \geqslant 2$.*

Démonstration. Montrons qu'avec les hypothèses du lemme, $k(G) \leqslant 1$ est impossible.

1er *cas.* $k(G) = 0$. Alors, $G = (X, \mathcal{E})$ a au moins deux composantes connexes $H_1 = (X_1, \mathcal{E}_1)$ et $H_2 = (X_2, \mathcal{E}_2)$. Comme tout sommet de G est de degré au moins 2, on a $|X_1| \geqslant 3$ et $|X_2| \geqslant 3$. Mais alors un ensemble $S = \{x_1, y_1, x_2, y_2\}$ avec $x_1 \in X_1$, $y_1 \in X_1$, $x_2 \in X_2$, $y_2 \in X_2$, ne contiendrait ni K_3 ni P_3.

2ème *cas.* $k(G) = 1$. Alors, $G = (X, \mathcal{E})$ possède un point d'articulation x_0. En désignant par $H_1 = (X_1, \mathcal{E}_1)$ et $H_2 = (X_2, \mathcal{E}_2)$ deux composantes connexes du graphe G_{X-x_0}, on a $|X_1| \geqslant 2$ et $|X_2| \geqslant 2$, et on termine la démonstration comme dans le 1er cas.

Théorème 3.8. *Si $G \in \mathcal{G}(n)$, et si tout sommet de G est de degré 2, alors G est hamiltonien.*

Démonstration. Le théorème est une conséquence immédiate des Lemmes 3.6 et 3.7, et du théorème suivant de Chvátal et Erdös [4]:

Théorème 3.9. *Soit G un graphe ayant au moins 3 sommets. Si $k(G) \geqslant \alpha(G)$, alors G est hamiltonien.*

Remarque. Le Théorème 3.8 sera amélioré dans le Paragraphe 4.

4.

Définition 4.1. On note $\mathcal{G}(n)$ l'ensemble des graphes $G = (X, \mathcal{E})$ tels que $|X| = n$ et G ne contienne ni triangle ni cycle de longueur 4. On note $e(n)$ le nombre maximum d'arêtes d'un graphe de $\mathcal{G}(n)$.

Définition 4.2. Soit $G = (X, \mathcal{E})$ un graphe. On note G^* le graphe $G^* = (X, \mathcal{E}^*)$ avec $\mathcal{E}^* = \{E\colon E \subset X, |E| = 2, E \notin \mathcal{E}\}$.

Théorème 4.2. $G \in \mathcal{G}(n) \Leftrightarrow G^* \in \mathcal{G}(n)$.

Démonstration. $G \in \mathcal{G}(n)$ si et seulement si pour tout $S \subset X$, avec $|S| = 4$, G_S contient K_3 ou P_3. C'est encore équivalent à: pour tout $S \subset X$, avec $|S| = 4$, G_S^* est contenu dans $K_{1,3}$ ou dans P_3 ($K_{1,3}$ est le graphe biparti complet dont les deux parties sont de cardinal 1 et 3). Ceci est encore équivalent à: G_S^* ne contient ni triangle ni C_4.

Corollaire 4.3. $S(n, n-2, n-2) = f(n) = \binom{n}{2} - e(n)$.

Corollaire 4.4. *Si $G \in \mathcal{G}(n)$, avec $G = (X, \mathcal{E})$, il existe $x \in X$ tel que $d_G(x) \leqslant (n-1)^{1/2}$.*

Démonstration. Le Corollaire 3.4 et le Théorème 4.2.

Le Corollaire 4.4 contient en particulier le théorème suivant de Erdős et Sachs [6]:

Théorème 4.5. *Soit G un graphe régulier de degré d tel que $G \in \mathcal{G}(n)$, alors, $n \geqslant d^2 + 1$.*

Il existe de nombreux articles sur les graphes ne contenant pas de cycle de longueur 4, avec ou sans triangles, réguliers ou non [3,5,6,7,9].

Il résulte des travaux de ces auteurs que:

(A) $$n^{3/2}\left(\tfrac{1}{4}\sqrt{2} + o(1)\right) \leqslant e(n) \leqslant n^{3/2}\left(\tfrac{1}{2} + o(1)\right).$$

Théorème 4.6. *Il existe un entier n_0 tel que si $n \geqslant n_0$, si $G \in \mathcal{G}(n)$ et si tous les sommets de G sont de degré $\geqslant 2$, alors G est pancyclique (i.e., contient des cycles de longueur K pour tout K, $3 \leqslant K \leqslant n$).*

Démonstration. Il résulte des hypothèses et du Théorème 3.8 que G est hamiltonien. D'autre part, il résulte du Corollaire 4.3 et de l'inégalité (A) qu'il existe un entier n_0 tel que, si $n \geq n_0$, on a $f(n) > \frac{1}{4}n^2$. Le Théorème 4.6 est alors une conséquence du Théorème suivant de Bondy [2]:

Théorème 4.7. *Si G est hamiltonien, et $G = (X, \mathcal{E})$ avec $|X| = n$ et $|\mathcal{E}| > \frac{1}{4}n^2$, alors G est pancyclique.*

Références

[1] C. Berge, Graphes et hypergraphes (Dunod, Paris, 1970).
[2] J.A. Bondy, Pancyclic graphes I, J. Combin. Theory 11 (1971) 80–84.
[3] W.G. Brown, On the non-existence of a type of regular graphs of girth 5, Can. J. Math. 19 (1967) 644–648.
[4] V. Chvátal et P. Erdős, A note on hamiltonian circuits, Discrete Math. 2 (1972) 111–113.
[5] P. Erdős, On sequences of integers no one of which divides the product of two others and related problems, Mitt. Forschungsinstitutes Math., Tomsk 2 (1938) 74–82.
[6] P. Erdős et H. Sachs, Reguläre Graphen gegebener Taillenweite mit minimaler Knotenzahl, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle-Wittenberg Math.-Natur. Reihe 12 (1963) 251–258.
[7] I. Reiman, Über ein Problem von K. Zarankiewicz, Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 9 (1958) 269–278.
[8] F. Sterboul, A new combinatorial parameter, Internl. Colloq. on Infinite and Finite Sets, Keszthely, 1973, to appear.
[9] G. Wegner, A smallest graph of girth 5 and valency 5, J. Combin. Theory 14(B) (1973) 203–208.