MATHEMATICS

SUR LES ESPACES NORMÉS NON-ARCHIMÉDIENS. IV

PAR

A. F. MONNA

(Communicated by Prof. W. VAN DER WOUDE at the meeting of March 30, 1957)

Théorème 5. *Tous les systèmes orthogonaux complets ont la même puissance.*

Démonstration. Soient $M^{(1)}$ et $M^{(2)}$ deux systèmes orthogonaux complets dans E. Soit $y^{(1)} \in M^{(1)}$. Développons $y^{(1)}$ en série suivant le système $M^{(2)}$ selon le théorème 4. Dans ce développement au plus une infinité dénombrable et au moins un des coefficients est différent de zéro. Faisons correspondre à chaque $y^{(1)} \in M^{(1)}$ la suite $\{y_n^{(2)}\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ des éléments de $M^{(2)}$ dont le coefficient dans la série est différent de zéro. Montrons ensuite que chaque élément de $M^{(2)}$ paraît dans au moins une des suites q'on a fait correspondre de cette façon aux éléments de $M^{(1)}$. Supposons en effet que $y_{\iota_0}^{(2)}$ ne paraît dans aucune de ces suites. Alors chaque $y^{(1)} \in M^{(1)}$ peut être développé en série suivant $M^{(2)}$ sans usage de $y_{\iota_0}^{(2)}$ et, puisque $M^{(1)}$ est complet, ceci est alors vrai aussi pour tout $x \in E$. En particulier $y_{\iota_0}^{(2)}$ peut être développé suivant $M^{(2)}$ sans $y_{\iota_0}^{(2)}$, c'est à dire $y_{\iota_0}^{(2)}$ appartient à l'espace $\{y_1^{(2)}, \ldots, y_\iota^{(2)}, \ldots\}$ $(\iota \neq \iota_0)$. Cependant, cela n'est pas vrai comme il résulte des propriétés des systèmes orthogonaux.

Soient maintenant $\aleph^{(1)}$ et $\aleph^{(2)}$ les puissances de $M^{(1}$ et $M^{(2)}$. On tire de ce qui précède

$$\aleph^{(2)} \leqq \aleph_0 \, \aleph^{(1)},$$

donc puisque $\aleph_0 \aleph^{(1)} = \aleph^{(1)}$,

$$\aleph^{(2)} \leqq \aleph^{(1)}.$$

On montre de la même façon

$$\aleph^{(1)} \leqq \aleph^{(2)}$$

Donc

$$\aleph^{(1)} = \aleph^{(}$$

ce qu'il fallait démontrer [4]):

Théorème 6. *Soient E un espace complet sur un corps complet sf. K et $\{y_\iota\}$ $(\iota \in I)$ un système orthogonal dans E. Pourque ce système soit complet il faut et il suffit que*

$$\bigcap_{\iota \in I} V_\iota = \theta.$$

[4]) Voir la démonstration analogue dans LÖWIG, l.c.

Démonstration. Il résulte immédiatement de ce qui précède que la condition est suffisante. Supposons, inversement, que le système $\{y_\iota\}$ est complet. Alors, si l'intersection des V_ι contenait des vecteurs $\xi \neq \theta$, on pourrait continuer le procédé de la construction des vecteurs orthogonaux et on pourrait ajouter au système $\{y_\iota\}$ par exemple un vecteur ξ tel que le système $y_\iota(\iota \in I)$ et ξ était encore un système orthogonal complet. Puisque $\{y_\iota\}$ est déjà complet, on pourrait écrire ξ dans la forme (7) et ξ appartenait donc à l'espace $\{y_1, \ldots, y_\iota, \ldots\}$ $(\iota \in I)$ ce qui, d'autre part, est impossible en vertu de la construction du vecteur ξ.

Remarquons que si un système orthogonal n'est pas complet, il existe des vecteurs $\xi \neq \theta$, orthogonaux à tous les y_ι. En effet, chaque vecteur de l'intersection des supplémentaires orthogonaux, qui contient alors des vecteurs $\neq \theta$ d'après le théorème précédent, satisfait à cette condition. On sait que l'inverse de cette propriété est vraie dans tout espace euclidien, pas nécessairement séparable: dans un tel espace il n'existe aucun vecteur $\neq \theta$ orthogonal à tous les vecteurs d'un système orthogonal complet. Cependant, cette inversion n'est pas vraie dans les espaces normés non-archimédiens quand on y définit l'orthogonalité telle qu'on l'a fait dans ce qui précède; dans ce qui suit on le verra d'un contre-exemple.

Quant à l'orthogonalité des vecteurs on a le théorème suivant, généralisant la conséquence 1 du théorème 4.

Théorème 7. *Soit $\{y_\iota\}$ $(\iota \in I)$ un système orthogonal complet et soient*

$$x = \sum a_\iota y_\iota$$
$$y = \sum b_\iota y_\iota$$

les développements de x et y suivant ce système. Alors, si

$$\sup_\iota |a_\iota b_\iota| = 0 \tag{8}$$

les vecteurs x et y sont orthogonaux.

Démonstration. Si dans le développement de x et de y, $a_\iota = b_\iota = 0$, on a x et $y \in V_\iota$. Soit I' l'ensemble des indices pour lesquels on a $a_\iota = b_\iota = 0$ $(\iota \in I')$. Il suit de (8) qu'on a alors $a_\iota = 0$ si et seulement si $b_\iota \neq 0$ et, inversement, $b_\iota = 0$ si et seulement si $a_\iota \neq 0$ pour toutes les valeurs de ι qui n'appartiennent pas à I'. Posons

$$F \equiv \bigcap_{\iota \in I'} V_\iota.$$

On a x et $y \in F$. Il suffit maintenant de montrer que x et y sont orthogonal dans F; évidemment ils sont alors aussi orthogonal dans E, dont F est un sous-espace linéaire fermé. Remarquons pour cela que le système orthogonal complet dans E induit dans F un tel système. En considérant les développements de x et y on voit que l'ensemble des indices I'' de ce système est décomposé en deux ensembles disjoints I_1'' et I_2'' tel qu'on a, les V_ι'' étant les supplémentaires orthogonaux dans F,

$$x \in \bigcap_{\iota \in I_1''} V_\iota''$$

$$y \in \bigcap_{\iota \in I_2''} V_\iota''.$$

Il suit de la conséquence 2 du théorème 4 et des isomorphismes montrés pendant la démonstration de ce théorème que ces deux espaces, dont appartiennent x respectivement y, sont des espaces supplémentaires orthogonaux, de sorte que x et y sont orthogonaux.

Ce théorème donne une condition suffisante pour l'orthogonalité des vecteurs. Cependant cette condition n'est pas nécessaire comme on voit de l'exemple suivant.

Exemple. Soit $E_2(P)$ l'espace linéaire des vecteurs $x \equiv (x_1, x_2)$ sur le corps K_P des nombres P-adiques où $x_1, x_2 \in K_P$. En posant

$$\| x \| = \max (|x_1|, |x_2|)$$

on obtient un espace normé non-archimédien complet. Soit

$$a_2 = a_{-n} P^{-n} + \ldots + a_0 + a_1 P + \ldots, \; |a_2| = P^n.$$

La distance de l'élément $(0, a_2)$ à un élément $(x_1, 0)$ est égale à

$$\max (|x_1|, |a_2|).$$

La plus petite distance de $(0, a_2)$ au sous-espace linéaire fermé des vecteurs $(x_1, 0)$ $(x_1 \in K_P)$ est égale à

$$\inf_{x_1 \in K_p} \max (|x_1|, P^n) = P^n.$$

Cette distance est atteinte en tout élément $(x_1, 0)$ tel que $|x_1| \leqq P^n$ par exemple pour $x_1 = 0$. Il s'ensuit que les vecteurs $e_1 \equiv (1, 0)$ et $e_2 \equiv (0, 1)$ sont orthogonaux. Les espaces $\{e_1\}$ et $\{e_2\}$ sont des espaces supplémentaires orthogonaux et on a pour tout $x \in E_2(P)$

$$x = x_1 e_1 + x_2 e_2.$$

Il existe des vecteurs orthogonal à $\{e_1\}$ et $\{e_2\}$. En effet, si $a(a_1, a_2)$ est un tel vecteur, il faut avoir

$$\| a \| = \inf_{x_1 \in K_p} \max (|a_1 - x_1|, |a_2|)$$

$$\| a \| = \inf_{x_2 \in K_p} \max (|a_1|, |a_2 - x_2|).$$

Puisque les membres à droites sont égaux respectivement à $|a_2|$ et $|a_1|$, cette condition est vérifiée si $|a_1| = |a_2|$. Il existe donc une infinité de tels vecteurs. Cet exemple fait voir qu'il peut exister des vecteurs orthogonaux à tous les vecteurs d'un système orthogonal complet. Il montre aussi que la condition du théorème 7 n'est pas nécessaire. Les vecteurs (a, a), $(a \neq 0)$ et $(1, 0)$ sont orthogonaux tandis que max $(|a|, 0) \neq 0$.

On voit de cet exemple qu'il existe des vecteurs mutuellement orthogonaux qui ne sont pas linéairement indépendants. Cependant, cela n'est pas possible pour les systèmes orthogonaux.

Théorème 8. *Pour tout système orthogonal on a: les vecteurs de ce système sont linéairement indépendants.*

Démonstration. Supposons qu'on a la relation

$$a_1 y_1 + \dots + a_n y_n = \theta \tag{9}$$

où $y_1, \dots, y_n$ appartiennent au système. Selon la remarque 3, suivant le théorème 4, on peut extendre le système donné à un système orthogonal complet. En désignant par V_1 le supplémentaire orthogonal de $\{y_1\}$ dans ce système complet, on a

$$\{y_2, \dots, y_n\} \subset V_1.$$

En écrivant (9) dans la forme

$$a_1 y_1 + \xi = \theta,$$

on a donc $\xi \in V_1$. Puisque E est la somme directe de $\{y_1\}$ et V_1, il s'ensuit $a_1 = 0$ et $\xi = \theta$. On montre de la même façon $a_2 = \dots = a_n = 0$, d'où résulte l'indépendance des vecteurs.

Ce résultat est évidemment une conséquence de la définition des systèmes orthogonaux. D'après la définition un système orthogonal n'est pas simplement un ensemble de vecteurs mutuellement orthogonaux puisqu'on y exige aussi une relation entre les vecteurs et les supplémentaires orthogonaux. Dans l'exemple précédent les vecteurs $(1, 0)$, $(0, 1)$ et (a, a) ne constituent pas un système orthogonal.

Quant à l'orthogonalité des vecteurs mentionnons les études de M. Springer [5]) concernant les espaces vectoriels E de dimension finie sur un corps K, munie d'une valuation non-archimédienne discrète. Il y définie une notion d'orthogonalité au moyen d'une forme quadratique définite sur E. Il serait intéressant de savoir s'il y a des relations entre les deux notions d'orthogonalité. Springer montre, par exemple, que 'espace est une somme directe de deux sous-espaces qui sont orthogonaux dans son sens. C'est une conséquence du théorème 13 du premier article (p. 482) que ces espaces sont aussi orthogonaux dans notre sens.

Considérons enfin les fonctionelles linéaires dans E. Il existe des fonctionelles non identiquement égales à zéro et la forme est la même que celle, indiquée par Fleischer dans le cas qu'il considère (il suppose que la valuation de K est discrète). Une fonctionelle linéaire est déterminée par un ensemble borné $\{C_\iota\}$ $(C_\iota \in K)$ où ι parcourt l'ensemble d'indices I.

---

[5]) T. A. Springer, Quadratic forms over fields with a discrete valuation I. Proc. Kon. Ned. Akad. v. Wetensch. **58**, 352–362 (1955). Voir Lemma 4, p. 355.

Si $\{y_\iota\}$ est un système orthogonal complet, normé comme on l'a indiqué ci-dessus, et $f(x)$ est une fonctionelle linéaire on a pour

$$x=\sum_{k=1}^{\infty} x_k\, y_{\iota_k} \qquad (x_k \in K)$$

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty} C_{\iota_k}\, x_k.$$

L'espace dual E^* est l'espace des suites bornées sur l'ensemble des indices I [6]), normé par

$$\| f \| = \sup_{\iota \in I} | C_\iota |.$$

D'après ce qui précède E^* est aussi isomorphe à un espace de la forme $\{e_1, \ldots, e_\alpha, \ldots\}$. Puisque, si la dimension de E est infinie, la puissance de E^* est plus grande que la puissance de E, il suit que la puissance des systèmes orthogonaux complets de E^* dépasse la puissance de ces systèmes dans E.

Comme chez Fleischer il en résulte qu'il n'existe aucun espace réflexif de dimension infinie [7]).

Au moyen de l'espace dual on définit la convergence faible d'une suite d'éléments $\{x^{(n)}\}$ vers un élément x: c'est le cas si on a

$$\lim f(x^{(n)})=f(x)$$

pour tout $f \in E^*$. On a le théorème suivant.

Théorème 9. *Une suite $\{x^{(n)}\}$, convergeant faiblement vers un élément x, converge aussi vers x suivant la norme.*

Démonstration. Il suffit de montrer ce théorème dans un espace de la forme $\{e_1, \ldots, e_\iota, \ldots\}$ $(\iota \in I)$, normé de la façon connue, puisque E est isomorphe à un tel espace et puisque la norme est équivalente à la norme de E.

Si la suite $\{x^{(n)}\}$ converge faiblement vers x, la suite $\{x^{(n)}-x\}$ converge faiblement vers θ. On peut donc supposer que la suite donnée converge faiblement vers θ. Pour chaque $x^{(n)}$ il n'y a qu'au plus une infinité dénombrable de coordonnées $\neq 0$ et, d'après la forme des fonctionelles, ce sont seulement ces coordonnées qui sont d'importance pour la valeur de la fonctionelle. Pour $n=1, 2, \ldots$ on obtient ainsi un ensemble dénombrable d'indices tel que pour chaque indice, appartenant à cet ensemble, au moins une des coordonnées est $\neq 0$. On peut supposer sans nuire la généralité que ce sont les indices $1, 2, \ldots, n, \ldots$; il suffit d'omettre de I les indices qui n'appartiennent pas à l'ensemble dénombrable et de changer les numéros des indices restant, ce qui peut s'effectuer sans

---

[6]) Il faut distinguer cette notation de la notation pour les espaces supplémentaires dans ce qui précède; il n'y a pas de diffusion à craindre.

[7]) Dans *MV* j'ai déjà traité le cas des espaces séparables.

aucune inversion de l'ordre des indices. Bien entendu, il n'est plus vrai que chaque $x_i^{(n)}$ est $\neq 0$.

Ceci étant fait, on sait que

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{\infty} C_i x_i^{(n)} = 0 \tag{10}$$

pour chaque suite bornée $\{C_i\}$

$$|C_i| < M. \tag{11}$$

Il faut montrer qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{1\leqq i<\infty} |x_i^{(n)}| = 0. \tag{12}$$

Par une substitution de

$$a_i = \begin{cases} 1 \text{ pour } i=i_0 \\ 0 \text{ pour } i\neq i_0 \end{cases}$$

dans (10) on voit qu'on a pour chaque valeur i_0 de i

$$\lim_{n\to\infty} x_{i_0}^{(n)} = 0. \tag{13}$$

Supposons maintenant qu'on a

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \sup_{i} |x_i^{(n)}| > \varepsilon > 0. \tag{14}$$

Soit n_1 la plus petite valeur de n tel qu'on a

$$\sup_{1\leqq i<\infty} |x_i^{(n)}| > \varepsilon. \tag{15}$$

Cette valeur existe en vertu de (14).

Soit ensuite r_1 la plus petite valeur de r tel qu'on a simultanément

$$\sup_{1\leqq i\leqq r} |x_i^{(n_1)}| > \varepsilon \tag{16}$$

et

$$\sup_{r+1\leqq i<\infty} |x_i^{(n_1)}| < \varepsilon. \tag{17}$$

Cette valeur r_1 existe en vertu de (15) et puisqu'on a pour tout n

$$\lim_{i\to\infty} x_i^{(n)} = 0. \tag{18}$$

Soit $1\leqq i_1\leqq r$ une valeur de i telle qu'on a

$$\sup_{1\leqq i\leqq r} |x_i^{(n_1)}| = |x_{i_1}^{(n_1)}|.$$

Déterminons ensuite successivement une suite bornée d'éléments de K. Choisissons $C_{i_1} \in K$ tel que

$$|C_{i_1}| = 1$$

et

$$C_i = 0 \text{ pour } 1\leqq i\leqq r_1,\ i\neq i_1.$$

A ce moment les C_i pour $i \geqq r_1 + 1$ restent indéterminés, à condition cependant qu'on a $|C_i| \leqq 1$.

Il suit alors de (16) et (17) et l'inégalité triangulaire forte

$$(19) \qquad \left| \sum_{i=1}^{\infty} C_i\, x_i^{(n_1)} \right| = |C_{i_1}|\ \ |x_{i_1}^{(n_1)}| > \varepsilon.$$

Déterminons, en partant de n_1 et r_1, les suites croissantes $\{n_k\}$ et $\{r_k\}$ comme il suit.

Soit n_k le plus petit nombre $> n_{k-1}$ tel que

$$(20) \qquad \sup_{1 \leqq i < \infty} |x_i^{(n_k)}| > \varepsilon$$

$$(21) \qquad \sup_{1 \leqq i \leqq r_{k-1}} |x_i^{(n_k)}| < \varepsilon.$$

Il suit de (13) et (14) que ce nombre existe.

Puis, soit r_k le plus petit nombre $> r_{k-1}$ tel que

$$(22) \qquad \sup_{r_{k-1}+1 \leqq i \leqq r_k} |x_i^{(n_k)}| > \varepsilon$$

$$23) \qquad \sup_{r_k+1 \leqq i < \infty} |x_i^{(n_k)}| < \varepsilon.$$

Il suit de (18), (20), (21) que ce nombre existe.

Soit $r_{k-1} + 1 \leqq i_k \leqq r_k$ une valeur de i telle qu'on a

$$(24) \qquad \sup_{r_{k-1}+1 \leqq i \leqq r_k} |x_i^{(n_k)}| = |x_{i_k}^{(n_k)}|$$

Déterminons ensuite les éléments C_i pour $i \geqq r_1 + 1$, qui en premier lieu ont été resté arbitraire à condition que qu'on ait $|C_i| \leqq 1$.

On pose

$$|C_{i_k}| = 1$$

$$C_i = 0 \text{ pour } r_{k-1} + 1 \leqq i \leqq r_k,\ i \neq i_k.$$

On a ainsi déterminé une suite bornée $\{C_i\}$. En vertu de (21), (22), (23), (24) on a

$$(25) \qquad \left| \sum_{i=1}^{\infty} C_i\, x_i^{(n_k)} \right| = |C_{i_k}| \cdot |x_{i_k}^{(n_k)}| > \varepsilon.$$

Cependant on a selon (10)

$$\lim_{k \to \infty} \sum C_i\, x_i^{(n_k)} = 0,$$

en contradiction avec (25). Le théorème est ainsi démontré [8]).

En appelant faiblement convergente une suite $\{x^{(n)}\}$ si $\lim f(x^{(n)})$ existe pour tout $f \in E^*$, on montre d'une façon analogue le théorème suivant.

[8]) Ce théorème donne une correction de ce que j'avais écrit dans *MV* p. 207. Il y a quelques années que M. Ingleton m'écrivait qu'il avait démontré l'identité de la convergence forte et la convergence faible. Une publication ne m'est pas connue.

Théorème 10. *L'espace E est faiblement complet, c.à.d. toute suite faiblement convergente converge faiblement vers un élément x.*

On montre que la suite converge fortement vers un élément x et pour cela il suffit de montrer que

$$\lim_{n\to\infty} \| x^{(n)} - x^{(n+1)} \| = 0$$

puisque l'espace est supposé complet et en vertu de l'inégalité triangulaire forte. En remarquant qu'on a

$$\lim_{n\to\infty} f(x^{(n)} - x^{(n+1)}) = 0$$

on peut alors reprendre la démonstration précédente.

On définit, comme il est connu, une topologie qui correspond à la convergence faible. Soient $x_0 \in E$, $\varepsilon > 0$, n un nombre entier quelconque et $f_1, \ldots, f_n \in E^*$. Un voisinage $U_{f_1,\ldots,f_n;\varepsilon}(x_0)$ de x_0 dans la topologie faible sur E est l'ensemble des éléments x satisfaisant à

$$|f_i(x - x_0)| < \varepsilon, \quad i = 1, \ldots, n.$$

La convergence d'une suite par rapport à cette topologie, c.à.d. en appelant convergente vers x_0 une suite $x^{(n)}$ si pour tout voisinage $U(x_0)$ il existe $n_0(U)$ tel que $x^{(n)} \in U(x_0)$ pour tout $n > n_0(U)$, est identique à la convergence faible définie ci-dessus. Cependant, si la dimension est infinie, la topologie forte, définie par la norme, n'est pas identique à la topologie faible. On le voit de l'exemple suivant, dû à Köthe [9]) et adapté ici au cas non-archimédien. On suppose $\aleph = \aleph_0$.

Soit A l'ensemble des éléments x tels qu'on a

$$\| x \| = \sup_{1 \leqq i < \infty} |x_i| \geqq 1.$$

Montrons que θ est un point d'accumulation de A dans la topologie faible. Soit $U_{f_1,\ldots,f_m;\varepsilon}(\theta)$ un voisinage de θ. Supposons que $f_1, \ldots, f_n$ $(n \leqq m)$ sont linéairement indépendants tandis que, éventuellement, les autres f_i y dépendent d'une façon linéaire. Choisissons $x_i (i = n+1, \ldots)$ tels qu'on a

$$\sup_{n+1 \leqq i < \infty} |x_i| \geqq 1.$$

Déterminons ensuite $x_1, \ldots, x_n$ au moyen des équations

$$\begin{cases} a_1^{(1)} x_1 + \ldots + a_n^{(1)} x_n = -\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i^{(1)} x_i \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ a_1^{(n)} x_1 + \ldots + a_n^{(n)} x_n = -\sum\limits_{i=n+1}^{\infty} a_i^{(n)} x_i, \end{cases}$$

[9]) G. Köthe. Die Teilräume eines linearen Koordinatenraumes. Math. Ann. 114, 99–125 (1937).

où $\{a_i^{(j)}\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ est la suite bornée par laquelle f_j est déterminé. L'élément $x \equiv \{x_i\}$ $(i = 1, 2, \ldots)$ satisfait alors à

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i^{(j)} x_i = 0, \qquad j = 1, \ldots, m$$

de sorte que x appartient au voisinage U tandis qu'aussi $x \in A$.

Cependant, θ n'est évidemment pas un point d'accumulation de A dans la topologie forte. Il en résulte qu'il n'existe aucune suite d'éléments de A convergeant faiblement vers θ, bien que θ est un point d'accumulation faible de A.