JOURNAL OF ALGEBRA 31, 437–451 (1974)

Liberté des Gros Modules Projectifs

DANIEL LAZARD

Université de Poitiers, Mathématiques, 86 022 Poitiers, France

Communicated by P. M. Cohn

Received June 5, 1973

I. INTRODUCTION

En 1958, Kaplansky [6] inaugura l'étude des modules projectifs de type infini en montrant qu'ils sont somme directe de modules de type dénombrable, et qu'ils sont libres sur les anneaux locaux. Depuis, Bass [2] et Hinohara [5] ont montré que si l'anneau vérifie certaines conditions noethériennes, les modules projectifs de type infini sont libres. On sait aussi que l'existence de modules projectifs de type infini non libres est fortement liée à la topologie du spectre [7]. L'influence de cette topologie peut être éliminée en ne considérant que des modules projectifs de rang constant. Il est donc utile de savoir si un module projectif possède cette propriété. Aussi le paragraphe III est-il consacré à la caractérisation des anneaux commutatifs tels que tout module projectif a un rang constant.

Au paragraphe IV nous donnons un exemple de module projectif de rang constant strictement inférieur à son type (cardinal minimal d'un système de générateurs). Ceci amène à introduire les modules uniformément gros au sens de Bass [2], c'est-à-dire les modules dont le rang est constant et égal au type. Toujours au paragraphe IV, nous montrons qu'un module de rang constant et de type assez grand (par exemple supérieur au cardinal de l'anneau) est uniformément gros.

Puis nous prouvons au paragraphe V qu'un module projectif uniformément gros de type assez grand est toujours libre. En particulier si A est commutatif intègre ou si A n'a qu'un seul idéal bilatère maximal et si P est un module projectif de cardinal infini strictement supérieur à celui de A, alors P est libre; si k est un corps commutatif, tout $k[X_i]_{i\in I}$-module projectif de type strictement supérieur au cardinal de I est libre.

Au paragraphe VI nous montrons qu'un module localement libre (au sens de la topologie de Zariski) et de type non dénombrable est toujours libre.

En appendice nous démontrons le théorème de Gruson (non publié) qui affirme que, pour les modules projectifs, les bases se remontent modulo le radical de Jacobson.

II. Définitions, Notations et Rappels

Tous les modules sont des modules à gauche. Le *type* d'un module est le cardinal minimal d'un système de générateurs. Le *rang* d'un module projectif P est la fonction qui à tout idéal maximal bilatère $\mathfrak{m}$ associe le type de $P/\mathfrak{m}P$. Si l'anneau est commutatif, le rang s'étend évidemment au spectre tout entier si $\mathfrak{p}$ est un idéal premier, $rg_{\mathfrak{p}}(P)$ est la dimension du $A_{\mathfrak{p}}$-module libre $P_{\mathfrak{p}}$. Un module est *gros* si son type est infini, *très gros* si son type n'est pas dénombrable. Un gros module projectif est *uniformément gros* si son rang est constant et égal à son type.

Soient P un A-module projectif et x un élément de P. Posons $P^* = \mathrm{Hom}_A(P, A)$ et $o(x) = \{f(x); f \in P^*\}$. Cet ensemble $o(x)$ est un idéal à droite de type fini engendré par les coefficients de x sur une base d'un module libre dont P est facteur direct. Pour que x engendre un facteur direct libre de P, il faut et il suffit que $o(x) = A$. On dit alors que x est *unimodulaire.*

On appelle trace de P, et on note $\mathrm{Tr}(P)$, l'image de l'application canonique t: $P \otimes_{\mathbf{Z}} P^* \to A$. C'est un idéal bilatère et $\mathrm{Tr}(P) = \sum_{x \in P} o(x)$.

Soient f: $A \to B$ un homomorphisme d'anneaux et g l'application canonique $P \to B \otimes_A P$. On a $o_B(g(x)) = f(o_A(x)) \cdot B$ et $\mathrm{Tr}_B(B \otimes P) = \mathrm{Tr}_A(P) \cdot B$. Si A est commutatif et local, P est libre et $\mathrm{Tr}_A(P) = A$ sauf si $P = 0$, auquel cas $\mathrm{Tr}_A(P) = 0$. Il en résulte que si A est commutatif $\mathrm{Tr}_A(P)$ est un idéal pur (i.e., $A/\mathrm{Tr}_A(P)$ est plat) et que le support de P est constitué des idéaux premiers qui ne contiennent pas $\mathrm{Tr}_A(P)$.

Si α est un ordinal, on désigne par $\aleph_\alpha$ le $(\alpha + 1)$-ème cardinal infini et par ω_α le plus petit ordinal de cardinal $\aleph_\alpha$.

Soient E un ensemble ordonné et c un cardinal; nous dirons que E est *c-noethérien* s'il n'existe pas de partie de E, bien ordonnée pour l'ordre induit et de cardinal strictement supérieur à c. Un espace topologique est *c-noethérien* si l'ensemble de ses ouverts l'est. Un anneau est *c-noethérien* (resp. *c-noethérien à gauche*, *c-noethérien à droite*) si l'ensemble de ses idéaux bilatères (resp. l'ensemble de ses idéaux à gauche, à droite) l'est.

Proposition 1. *Pour qu'un anneau soit c-noethérien (resp. c-noethérien à gauche, à droite), il faut et il suffit que tout idéal bilatère (resp. à gauche, à droite) admette un système de générateurs de cardinal c.*

Si l'anneau est c-noethérien, considérons un idéal I non nul et définissons par récurrence transfinie des éléments x_α de I de manière à ce que x_α n'appartienne pas à l'idéal I_α engendré par les x_β tels que $\beta < \alpha$. On ne s'arrête que quand $I_\alpha = I$ et les x_α ainsi obtenus forment un système de générateurs de I de cardinal au plus c.

Réciproquement, supposons que tout idéal admette un système de générateurs de cardinal $c = \aleph_\alpha$, mais qu'il existe une famille bien ordonnée strictement croissante, indiciée par l'ordinal $\omega_{\alpha+1}$ d'idéaux I_β. Soit x_i ($i \in J$) un système de générateurs de $I = \bigcup I_\beta$, tel que card$(J) = c$; choisissons $\beta(i)$ tel que $x_i \in I_{\beta(i)}$. Comme $\bigcup I_{\beta(i)} = \bigcup I_\beta$, les $\beta(i)$ forment une partie cofinale de $\omega_{\alpha+1}$ de cardinal $\aleph_\alpha$, ce qui est absurde.

COROLLAIRE 1. *Un anneau de cardinal c est c-noethérien* (*resp. c-noethérien à gauche, à droite*).

Si K est un corps, l'anneau $K[X_i]_{i\in I}$ *est* card(I)*-noethérien.*

Soit $\mathfrak{a}$ un idéal de $K[X_i]_{i\in I}$. A toute partie finie J de I on associe $\mathfrak{a}_J = \mathfrak{a} \cap K[X_i]_{i\in J}$, qui est un idéal de type fini. En réunissant les systèmes de générateurs finis de ces $\mathfrak{a}_J$ on obtient un système de générateurs de $\mathfrak{a}$, de cardinal I.

Un ensemble ordonné est *c-artinien*, s'il est *c-noethérien* pour l'ordre opposé; on parlera de même d'anneaux et d'espaces topologiques *c-artiniens*.

PROPOSITION 2. *Un anneau de cardinal c est c-artinien.*

Soit I_α une famille bien ordonnée décroissante d'idéaux et soit x_α un élément de $I_\alpha - I_{\alpha+1}$. Il est clair que le cardinal de l'ensemble des α est inférieur ou égal à celui de l'anneau.

Les définitions précédentes diffèrent de celles d'autres auteurs. Ainsi Gruson et Jensen dans un article à paraître appellent c-noethérien un ensemble ordonné tel que toute partie filtrante possède une partie cofinale de cardinal c. Un tel ensemble est clairement c-noethérien en notre sens, mais la réciproque est fausse comme le montre l'ensemble des parties finies d'un ensemble.

III. MODULES PROJECTIFS DE RANG CONSTANT

Dans ce paragraphe, les anneaux sont supposés commutatifs.

THÉORÈME 1 (Vasconcelos [9]). *Un module projectif de rang constant fini est de type fini.*

PROPOSITION 3 (Bass [1]). *Soit A un anneau de radical de Jacobson J. Un module projectif P tel que P/JP* $= 0$ *est nul.*

Beck [4] a ainsi généralisé ce résultat:

PROPOSITION 4. *Avec les notations de la proposition* 3, *si P est un module projectif tel que P/JP est un A/J-module libre, alors P est libre.*

Nous donnons en appendice une forme plus forte de ce résultat, due à Gruson.

Voici une autre généralisation de la proposition 3 que nous ne savons malheureusement démontrer que dans le cas commutatif.

PROPOSITION 5. *Soit A un anneau commutatif de radical J. Si P est un A-module projectif tel que P/JP est de type fini, alors P est de type fini.*

Grâce au théorème de Kaplansky [6], on peut supposer P de type dénombrable. Le théorème 1 montre qu'il suffit de montrer que le rang de P est localement constant. Soit X_n l'ensemble des points $\mathfrak{p}$ de $\mathrm{Spec}(A)$ tels que $\mathrm{rang}_{\mathfrak{p}}(P) \geqslant n$. On sait qu'il est ouvert et l'hypothèse montre que $X_n \cap \mathrm{Spec}(A/J)$ est fermé dans $\mathrm{Spec}(A/J)$. Autrement dit, il existe un idéal I de A tel que les idéaux maximaux contenant I sont exactement les idéaux maximaux de X_n. Il est clair que X_n est la plus petite partie de $\mathrm{Spec}(A)$ stable par générisation et spécialisation contenant $V(I)$, et les propositions 3.1 et 3.2 de [7] montrent que X_n est fermé, c'est-à-dire que le rang de P est localement constant.

THÉORÈME 2. *Soit A un anneau commutatif; les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Tout module projectif a un rang constant.*

(2) *Tout module plat monogène est libre.*

(3) *Tout module plat de type fini est projectif de rang constant.*

(4) *Tout module plat de type fini est projectif, et A ne possède pas d'idempotent non trivial.*

(5) *Les seuls ouverts stables par spécialisation de* $\mathrm{Spec}(A)$ *sont* $\varnothing$ *et* $\mathrm{Spec}(A)$.

(6) *Si (x_n) est une suite d'éléments de A non tous nuls et tels que $x_n = x_n x_{n+1}$ pour tout n, alors $x_n = 1$ pour n assez grand.*

Ce théorème est implicitement contenu dans [7].

Compte tenu qu'un module plat de type fini est projectif si et seulement si son rang est localement constant, les assertions 1, 3, 4, 5 expriment que les relations intervenant dans l'assertion (ii) du théorème 7.4 de [7] n'ont qu'une seule classe d'équivalence.

LEMME 1. *Le support définit une bijection de l'ensemble des idéaux purs (i.e., idéaux I* tels que *A/I est plat) sur l'ensemble des ouverts du spectre, stables par spécialisation.*

Soit I un tel idéal pur. Comme $(A/I)_{\mathfrak{p}}$ est libre pour tout idéal premier $\mathfrak{p}$, il est clair que supp(I) est ouvert stable par spécialisation. Réciproquement, la proposition 5.4 de [7] associe un idéal pur à tout ouvert stable par spécialisation, et cet idéal est unique, comme on le voit localement. Il est évident que les applications ainsi définies sont réciproques l'une de l'autre, et que ceci montre que (2) $\Leftrightarrow$ (5).

LEMME 2. (i) *Soit I un idéal pur de type dénombrable de A; il existe un système de générateurs $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I tel que $x_n = x_n x_{n+1}$ pour tout n.*

(ii) *Si (x_n) est une suite d'éléments de A telle que $x_n = x_n x_{n+1}$ pour tout n, l'idéal I qu'elle engendre est pur.*

(i) Si $z_1, \ldots, z_n$ sont des éléments de I, comme $z_i = z_i \cdot 1$ dans A, on sait qu'il existe $t \in I$ tel que $z_i = z_i \cdot t$ pour $i = 1, \ldots, n$ (c'est une propriété caractéristique de la pureté). Soit donc un système de générateurs $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de I. Il existe x_1 tel que $y_1 = y_1 x_1$. On définit de même par récurrence x_{n+1} tel que $y_{n+1} = y_{n+1} x_{n+1}$ et $x_n = x_n x_{n+1}$. Il est clair que les x_n forment le système de générateurs cherché de I.

(ii) Soient $z_1, \ldots, z_k$ des éléments de I. Les relations entre les x_n montrent immédiatement qu'il existe n tel que $z_i = \lambda_i x_n$ pour tout i, et donc que $z_i = z_i x_{n+1}$, ce qui montre la pureté de l'idéal engendré par les x_n.

Remarquons que cette démonstration n'utilise pas la commutativité de A, et montrons l'équivalence de 5 et de 6. Compte-tenu du corollaire 2.3 de [7], et du lemme 2, il suffit de montrer que si (x_n) est une suite d'éléments de A tels que $x_n = x_n x_{n+1}$ pour tout n et engendrant A comme idéal, alors $x_n = 1$ pour n assez grand. Mais les hypothèses montrent que $1 = \sum \lambda_i x_i$. Comme $x_n = x_n x_{n+1}$, il vient $1 = \lambda x_n$ pour $n = \max\{i\}$ c'est-à-dire $1 = \lambda x_n x_{n+1} = x_{n+1}$. On en déduit immédiatement que $x_k = 1$ pour tout $k > n$.

THÉORÈME 3. *Si A est un anneau commutatif, les conditions suivantes sont équivalentes:*

(1) *Tout module projectif a un rang localement constant.*

(2) *Tout module plat monogène est projectif.*

(3) *Tout module plat de type fini est projectif.*

L'équivalence de (2) et de (3) et l'implication (3) $\Rightarrow$ (1) proviennent du lemme 2 et du théorème 5.7 de [7]. Supposons (1) vérifié, et considérons un module plat monogène A/I. L'idéal I est réunion filtrante d'idéaux purs de type dénombrable I_α qui sont projectifs [7, Corollaire 2.3]. Soit $P = \bigoplus I_\alpha$. On a une suite exacte $P \to A \to A/I \to 0$. Le support de A/I est le cosupport de I, et donc de P. Celui-ci est ouvert et fermé par (1), et le rang de A/I est localement constant.

COROLLAIRE. (a) *Les conditions du théorème* 3 *sont vérifiées s'il existe une famille finie d'idéaux premiers dont l'intersection est contenue dans le radical de Jacobson. C'est le cas en particulier si*

(i) Spec(A) *est noethérien.*

(ii) *A n'a qu'un nombre fini d'idéaux premier minimaux.*

(iii) Max(A) (*ensemble des idéaux maximaux muni de la topologie de Zariski*) *est noethérien.*

(iv) *A est semi-local.*

(b) *Si en outre A ne possède pas d'idempotents non triviaux, il vérifie les conditions du théorème* 2. *C'est en particulier le cas si A est intègre.*

La première assertion résulte du corollaire 3.4 de [7]. Le reste est évident, sauf peut être (iii); mais si Max(A) est noethérien, il n'a qu'un nombre fini de composantes irréductibles, de la forme $V(\mathfrak{p}_i)$ où $\mathfrak{p}_i$ est premier; il est clair que $\bigcap \mathfrak{p}_i$ est contenu dans le radical de Jacobson.

IV. MODULES UNIFORMÉMENT GROS

Pour qu'un module projectif soit libre, il est évidemment nécessaire qu'il soit de rang constant mais cette condition n'est pas suffisante car il peut exister des modules projectifs de rang constant strictement inférieur à leur type.

EXEMPLE 1. *Soient $c < c'$ deux cardinaux infinis. Il existe un anneau A et un A-module projectif de rang constant c et de type c'.*

Soient k un corps, I et I' deux ensembles de cardinaux c et c' respectivement. Posons $A_0 = k[X_{i,n}]_{i\in I', n\in\mathbb{N}}$, et prenons pour A le quotient de A_0 par l'idéal engendré par les $X_{i,n} - X_{i,n}X_{i,n+1}$ et les $X_{i,m}X_{j,n}$ $(i \neq j)$. Désignons par $x_{i,n}$ l'image de $X_{i,n}$ dans A. L'idéal $P_i = (x_{i,1},..., x_{i,n},...)$ est pur de type dénombrable (Lemme 2), et donc projectif. Le module $P = \bigoplus_{i\in I'} P_i$ est un idéal, et en tout point du spectre son rang est 0 ou 1. Comme c'est une somme directe, il est nécessairement de type c'. Donc $Q = P \oplus A^{(I)}$ est de rang constant c et de type c'.

Il est donc nécessaire de trouver des critères affirmant qu'un module de rang constant est uniformément gros (i.e., le type est égal au rang).

THÉORÈME 4. *Si A est un anneau commutatif tel que tout module projectif a un rang constant, tout gros module projectif est uniformément gros.*

C'est une conséquence du théorème 1 et du fait que tout projectif est somme directe de projectifs de type dénombrable [6].

LEMME 3. *Soient A un anneau non nécessairement commutatif et P un A-module projectif de rang constant r non dénombrable. Alors $P = \bigoplus_{j \in J} Q_j \oplus Q$ où*

(a) *Q_j est uniformément gros de type dénombrable.*

(b) *le cardinal de J est égal à r.*

(c) $\mathrm{Tr}(Q) \neq A$.

D'après [6], $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ avec $\mathrm{type}(P_i) = \aleph_0$ et $\mathrm{card}\, I = t$; en outre $\mathrm{Tr}(P) = \sum_{i \in I} \mathrm{Tr}(P_i)$. Comme le rang est constant non nul, $\mathrm{Tr}(P)$ n'est contenu dans aucun idéal bilatère maximal, i.e., $\mathrm{Tr}(P) = A$, et il existe des éléments $1, 2, \ldots, n$ de I tels que $\sum_1^n \mathrm{Tr}(P_i) = \mathrm{Tr}(P_1 \oplus \cdots \oplus P_n) = A$. Considérons l'ensemble $\mathscr{E}$ des couples $(I', \mathscr{P})$ où I' est une partie de I et $\mathscr{P}$ une partition de I' en ensembles finis I_α tels que $\mathrm{Tr}(\bigoplus_{i \in I_\alpha} P_i) = A$; ordonnons le par l'ordre $(I', \mathscr{P}) \leqslant (I'', \mathscr{P}')$ défini par «$I' \subset I''$, et les éléments de $\mathscr{P}'$ qui rencontrent I' sont contenus dans I' et appartiennent à $\mathscr{P}$». D'après ce qui précède, $\mathscr{E}$ est non vide; il est évidemment inductif et possède un élément maximal $(I', \mathscr{P})$. Posons $R_\alpha = \bigoplus_{i \in I_\alpha} P_i$ pour tout ensemble fini I_α de la partition $\mathscr{P}$, et $Q = \bigoplus_{i \notin I'} P_i$. La maximalité de $(I', \mathscr{P})$ montre que $\mathrm{Tr}(Q) \neq A$. Soit $\mathfrak{m}$ un idéal maximal bilatère tel que $\mathfrak{m} \supset \mathrm{Tr}(Q)$. On a $A/\mathfrak{m} \otimes P = \bigoplus (A/\mathfrak{m} \otimes R_\alpha)$. Comme $\mathrm{type}(A/\mathfrak{m} \otimes R_\alpha) \leqslant \aleph_0$ et type $(A/\mathfrak{m} \otimes P) = r$, le cardinal de l'ensemble des α est r. Une somme directe dénombrable de R_α est clairement un module uniformément gros de type dénombrable. En regroupant les R_α par paquets dénombrables, on obtient donc les Q_j cherchés.

THÉORÈME 5. *Tout module projectif uniformément gros est somme directe de modules uniformément gros de type dénombrable.*

Supposons que $\mathrm{type}(P) = r$ dans la démonstration précédente. Ceci implique $\mathrm{card}(I) = \mathrm{card}(J) = r$, et donc $\mathrm{card}(I - I') \leqslant r$. Il existe donc une application injective $f\colon I - I' \to J$. Posons $Q'_{f(i)} = Q_{f(i)} \oplus P_i$ et $Q_j' = Q_j$ si $j \notin \mathrm{Im}(f)$. Il est immédiat que les Q_j' sont uniformément gros de type dénombrables et que $P = \bigoplus_{j \in J} Q_j'$.

THÉORÈME 6. *Soit A un anneau pour lequel le radical de Jacobson est égal à l'intersection des idéaux bilatères maximaux. Il existe un plus petit cardinal infini $c_0(A)$ tel que tout module projectif de rang constant et de type $c \geqslant c_0(A)$ est uniformément gros.*

Soit $\mathrm{Max}\, A$ l'ensemble des idéaux bilatères maximaux, soit P un module projectif de rang constant et de type $c > \aleph_0$; on a $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ avec type $(P_i) = \aleph_0$ et $\mathrm{card}(I) = c$. On va montrer que si $c > \mathrm{card}(\mathrm{Max}\, A)$, le rang de P est égal à c. A tout idéal maximal bilatère $\mathfrak{m}$, associons l'ensemble $I_{\mathfrak{m}} = \{i \in I, P_i/\mathfrak{m}P_i \neq 0\}$. Comme un module projectif nul modulo le radical de Jacobson est nul [1], on a $I = \bigcup_{\mathrm{Max}\,A} I_{\mathfrak{m}}$, ce qui donne le résultat, en remarquant que card $I_{\mathfrak{m}} \leqslant \mathrm{rang}(P)$. En effet l'égalité $I = \bigcup_{\mathrm{Max}\,A} I_{\mathfrak{m}}$ implique $\mathrm{card}(I) \leqslant \mathrm{card}(\mathrm{Max}\, A).\ \mathrm{rang}(P) = \sup(\mathrm{card}(\mathrm{Max}\, A), \mathrm{rang}(P))$.

Exemple 2. *La condition sur A ne peut être supprimée dans le thèoréme 6.*

Soient V un espace vectoriel de dimension $\aleph_0$ et $A = \mathrm{End}(V)$. Bien que le radical de A soit nul, A possède un seul idéal bilatère maximal $\mathfrak{m}$, l'ensemble des endomorphismes d'image finie. Si e est un projecteur d'image finie, $P = Ae$ est donc un module projectif de rang constant nul tel que $\mathrm{Tr}(P) = \mathfrak{m}$. Pour tout ensemble I, le module $P^{(I)}$ est de type card(I) et de rang constant nul.

Corollaire 1. (1) *Si* $\mathrm{card}(\mathrm{Max}\, A) \leqslant \aleph_\alpha$, *on a* $c_0(A) \leqslant \aleph_{\alpha+1}$.

(2) *Si A est commutatif* $c_0(A) \neq \aleph_1$.

(3) *Il n'y a pas de borne absolue pour* $c_0(A)$.

La deuxième assertion n'est autre que le théorème 1 qui s'exprime $c_0(A) \leqslant \aleph_1 \Rightarrow c_0(A) = \aleph_0$. La troisième assertion n'est autre que l'assertion de l'exemple 1.

Il convient de donner d'autres majorations de $c_0(A)$. Soit (C) la relation d'équivalence suivante sur $\mathrm{Max}(A)$: $\mathfrak{m}$ équivaut à $\mathfrak{m}'$ si pour tout module projectif P on a type $(P/\mathfrak{m}P) = \mathrm{type}(P/\mathfrak{m}'P)$ (cf. [7]). Si $\mathfrak{m}$ et $\mathfrak{m}'$ sont équivalents pour (C), il est clair que $I_{\mathfrak{m}} = I_{\mathfrak{m}'}$ dans la démonstration du théorème 6. Donc:

Corollaire 2. *Si le cardinal de l'ensemble des classes pour (C) est inférieur ou égal à $\aleph_\alpha$, on a $c_0(A) \leqslant \aleph_{\alpha+1}$. En particulier si A est commutatif et l'ensemble des C-classes est dénombrable, $c_0(A) = \aleph_0$.*

Théorème 7. *Soit A un anneau vérifiant la condition du théorème 6. Si les idéaux (bilatères) qui sont traces de modules projectifs forment un ensemble $\aleph_\gamma$-artinien, on a $c_0(A) \leqslant \aleph_{\gamma+1}$.*

Soit $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ un module projectif de rang constant avec $\mathrm{type}(P) = \mathrm{card}(I) = t$ et $\mathrm{rang}(P) = r \leqslant t$. Soit $\mathfrak{m}_0$ un idéal maximal. L'ensemble $I_{\mathfrak{m}_0} = \{i \in I, P_i/\mathfrak{m}_0 P_i \neq 0\}$ a un cardinal inférieur ou égal à r; posons $I_1 = I - I_{\mathfrak{m}_0}$ et $P_1 = \bigoplus_{i \in I_1} P_i$; il est clair que $P_1/\mathfrak{m}_0 P_1 = 0$ et donc $\mathrm{Tr}(P_1) \subset \mathfrak{m}_0 \subsetneqq \mathrm{Tr}(P) = A$. Effectuons une récurrence transfinie: si $P_\alpha = \bigoplus_{i \in I_\alpha} P_i$, soit $\mathfrak{m}_\alpha$ un idéal maximal tel que $P_\alpha/\mathfrak{m}_\alpha P_\alpha \neq 0$, i.e., $\mathrm{Tr}(P_\alpha) \not\subset \mathfrak{m}_\alpha$. C'est possible, car un module projectif nul modulo le radical de Jacobson est nul, ce qui entraîne que $\mathrm{Tr}(P_\alpha)$ n'est pas contenu dans le radical de Jacobson. Posons $I_{\mathfrak{m}_\alpha} = \{i \in I_\alpha , P_i/\mathfrak{m}_\alpha P_i \neq 0\}$, $I_{\alpha+1} = I_\alpha - I_{\mathfrak{m}_\alpha}$ et

$$P_{\alpha+1} = \bigoplus_{i \in I_{\alpha+1}} P_i .$$

On a $\mathrm{card}(I_{\mathfrak{m}_\alpha}) \leqslant r$, $\mathrm{Tr}(P_{\alpha+1}) \subset \mathrm{Tr}(P_\alpha)$ et cette inégalité est stricte car $\mathrm{Tr}(P_\alpha) \not\subset \mathfrak{m}_\alpha$ et $\mathrm{Tr}(P_{\alpha+1}) \subset \mathfrak{m}_\alpha$. Si α est un ordinal limite, on pose

$$I_\alpha = \bigcap_{\beta<\alpha} I_\beta , \qquad P_\alpha = \bigoplus_{i\in I_\alpha} P_i = \bigcap_{\beta<\alpha} P_\beta ,$$

et on a donc $\mathrm{Tr}(P_\alpha) = \bigcap_{\beta<\alpha} (\mathrm{Tr}) P_\beta$. La récurrence s'arrête quand $P_\alpha = 0$, i.e., $I_\alpha = \varnothing$. Comme $I = \bigcup I_{\mathfrak{m}_\alpha}$, on voit que $t = \mathrm{card}(I) \leqslant r$. $\aleph_\gamma = \sup(r, \aleph_\gamma)$. Si $t > \aleph_\gamma$ on a $t \leqslant r$, c'est-à-dire $t = r$.

COROLLAIRE. *Si* $\mathrm{card}(A) \leqslant \aleph_\alpha$, *on a* $c_0(A) \leqslant \aleph_{\alpha+1}$ *autrement dit, un module projectif de rang constant et de cardinal transfini supérieur à celui de l'anneau est uniformément gros.*

V. LIBERTÉ DES MODULES UNIFORMÉMENT GROS

Maintenant que l'on possède des critères permettant d'affirmer qu'un module projectif est uniformément gros, on peut aborder la question centrale de cet article: les modules uniformément gros sont-ils tous libres? Disons tout de suite que l'on ne connaît pas de contre-exemple; en particulier, on ne connaît pas d'autres gros modules projectifs sur un anneau intègre que les modules libres. Commençons par résumer les résultats connus.

THÉORÈME 8. (1) *Si A est commutatif de spectre maximal noethérien, tout module projectif de rang constant infini est libre; si A ne possède pas d'idempotents non triviaux, tout gros module projectif est libre* [5].

(2) *Si le quotient de A par son radical de Jacobson est noethérien à gauche, tout module projectif uniformément gros est libre* [2].

(3) *Si le quotient de A par son radical de Jacobson est noethérien à droite, tout module projectif uniformément gros de type $\geqslant \aleph_1$ est libre* [2].

Notons que la technique d'Hinohara peut être utilisée pour donner une démonstration de la deuxième assertion plus simple que celle de Bass.

THÉORÈME 9. *Etant donné un anneau A, il existe un plus petit cardinal infini $c_1(A)$ tel que tout A module projectif uniformément gros de type supérieur ou égal à $c_1(A)$ est libre.*

Soit P un très gros module projectif uniformément gros. D'après le théorème 5, $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$, les P_i étant uniformément gros de type $\aleph_0$. On peut écrire $I = J^2$ et poser $Q_j = \bigoplus_{k \in J} P_{j,k}$. Le module Q_j est uniformément gros. Si on montre que Q_j contient un unimodulaire, P contiendra un facteur direct libre de même type que lui et sera donc libre [2]. Supposons que type $(P) = \text{card}\, I = \text{card}\, J > c$, en désignant par c le cardinal de l'ensemble des classes d'isomorphie de A-module projectifs uniformément gros de type $\aleph_0$. Pour tout j, il existe une suite $k_1, \ldots, k_n, \ldots$ d'éléments de J tels que tous les P_{j,k_n} soient isomorphes. Comme $\text{Tr}(P_{j,k_1}) = A$, il existe

$$f_1, \ldots, f_m \in P^*_{j,k_1} \qquad \text{et} \qquad x_1, \ldots, x_m \in P_{j,k_1}$$

tels que $f_1(x_1) + \cdots + f_m(x_m) = 1$. Grâce aux isomorphismes ci-dessus, on peut supposer que $f_n \in P^*_{j,k_n}$ et $x_n \in P_{j,k_n}$ pour tout n, et $x_1 + \cdots + x_m$ est alors unimodulaire. C.Q.F.D.

Comme on ne connaît pas c à priori, il faut donner d'autres majorations de $c_1(A)$.

THÉORÈME 10. *Soit A un anneau, J son radical de Jacobson.*

(1) *Si A/J est $\aleph_\alpha$-noethérien à gauche ou à droite, $c_1(A) \leqslant \aleph_{\alpha+1}$.*

(2) *Si A est commutatif et si son spectre maximal est $\aleph_\alpha$-noethérien, on a $c_1(A) \leqslant \aleph_{\alpha+1}$.*

Soit $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$ une somme directe de modules projectifs uniformément gros telle que card $I > \aleph_\alpha$. Pour tout i, on a $\text{Tr}(P_i) = A$. Bien ordonnons I; on peut donc construire par récurrence transfinie des éléments $x_i \in P_i$ et $f_i \in P_i{}^*$ tels que $f_i(x_i) \notin \sum_{j<i} (Af_j(x_j) + J)$ (resp. $f_i(x_i) \notin \sum_{j<i} (f_j(x_j)A + J)$, resp. $D(f_i(x_i)) \not\subset \bigcup_{j<i} D(f_j(x_j))$). L'hypothèse sur card$(I)$ montre que l'on s'arrête quand $\sum (Af_i(x_i) + J) = A$ (resp. $\sum (f_i(x_i)A + J) = A$, resp. $\bigcup D(f_j(x_j)) = A$). Il existe donc $i_1, \ldots, i_n$ et $a_{i_1}, \ldots, a_{i_n}$ tels que $a_{i_1} f_{i_1}(x_{i_1}) + \cdots + a_{i_n} f_{i_n}(x_{i_n}) = 1$ (resp. $f_{i_1}(x_{i_1})\, a_{i_1} + \cdots + f_{i_n}(x_{i_n})\, a_{i_n} = 1$).

L'élément $a_{i_1} x_{i_1} + \cdots + a_{i_n} x_{i_n} \in P_{i_1} \oplus \cdots \oplus P_{i_n}$ (resp. $x_{i_1} + \cdots + x_{i_n}$) est clairement un unimodulaire, ce qui démontre le résultat, compte-tenu de la démonstration du théorème 9.

COROLLAIRE 1. *Tout A module projectif de rang constant et de cardinal infini strictement supérieur à* card(A) *est libre.*

Il suffit de remarquer que type $P >$ card A équivaut à card $P >$ card A. Le cas où A est fini est facile. Il faut supposer P de cardinal infini, comme on le voit avec un module de longueur 3 sur l'anneau des matrices 2×2 sur un corps fini.

COROLLAIRE 2. *Si A est commutatif et vérifie les conditions du théorème* 2 (*en particulier si A est intègre*), *tout module projectif tel que* $\operatorname{card} P > \operatorname{card} A$ *est libre.*

Si A est fini, il est local et tout module projectif est libre.

COROLLAIRE 3. *Soit k un corps commutatif. Si $A = k[X_i]_{i \in I}$, tout A-module projectif tel que* $\operatorname{rang}(P) > \operatorname{card} I$ *est libre.*

Si I est fini, cela résulte du théorème 8 et de [3, corollaire 22.4].

Remarques. (1) Si on savait montrer que tout gros module projectif sur $k[X_i]_{i \in \mathbf{N}}$ est libre, on montrerait facilement que tout gros module projectif est libre sur les anneaux de polynômes.

(2) Rappelons que le problème suivant reste ouvert: Existe-t-il des modules projectifs uniformément gros qui ne sont pas libres?

VI. MODULES LOCALEMENT LIBRES

Dans ce paragraphe nous supposons les anneaux commutatifs.

DÉFINITION. Un A-module P est dit localement libre s'il existe une famille finie d'éléments (t_i) de A telle que $\sum At_i = A$ et que P_{t_i} soit un A_{t_i} module libre. On définit de même un module localement projectif.

THÉORÈME 11. *Un module localement projectif est projectif.*

C'est un cas particulier du théorème suivant.

THÉORÈME 11 bis (Gruson). *Soit $f\colon A \to B$ un homomorphisme universellement injectif d'anneaux commutatifs. Un A-module P tel que $B \otimes P$ est projectif est lui-même projectif.*

C'est une conséquence immédiate des résultats 3.1.3, 2.5.1, et 1.2.1 de la 2ème partie de [8].

PROPOSITION 6. *Soit P un très gros module localement libre, et soient $t_1, \ldots, t_n$ des éléments de A tels que $\sum At_i = A$ et que P_{t_i} soit un A_{t_i}-module libre. Alors $P = \bigoplus_{j \in J} P_j$, les modules P_j étant de type dénombrable et tels que $(P_j)_{t_i}$ soit un A_{t_i}-module libre pour tout i et tout j.*

Choisissons, pour tout i une partie B_i de P dont l'image dans P_{t_i} est une base. Si E_n est une partie de P, désignons par E_{n+1} la réunion des E_{n+1}^i, en appelant E_{n+1}^i la partie de B_i qui intervient dans la décomposition de l'image de E_n sur l'image de B_i dans P_{t_i}. Si $E = E_0$ est une partie de P, il est clair que $E' = \bigcup E_n$ engendre un sous module Q de P tel que les Q_{t_i} sont libres. En outre Q est un facteur direct de P car il est clair que les $(P/Q)_{t_i}$ sont libres et que P/Q est donc projectif. Si E est réduit à un élément, Q est de type dénombrable.

Soit $\mathscr{E}$ l'ensemble des couples (N, D) où N est un facteur direct de P et D une décomposition $N = \bigoplus_{j \in J_D} N_j$ de N en somme directe de modules de type dénombrable vérifiant: (1) les $(N_j)_{t_i}$ sont libres, (2) les $(P/N)_{t_i}$ sont libres. Ordonnons $\mathscr{E}$ par l'ordre ≪$N \subset N'$ et D' prolonge D≫. Ce qui précède montre que $\mathscr{E}$ est non vide, inductif et que (N, D) ne peut être maximal que si $P = N$, ce qui montre la proposition.

Théorème 12. *Un très gros module localement libre de rang constant est libre.*

Ce théorème résulte de la proposition 6, de l'argument du théorème 9 et du lemme suivant.

Lemme 5. *Soitent $t_1, \ldots, t_n$ des éléments de A tels que $\sum At_i = A$. Soient $P_1, \ldots, P_n$ des modules projectifs tels que P_i possède un élément x_i dont l'image dans $(P_i)_{t_i}$ est A_{t_i}-unimodulaire. Alors $x = x_1 + \cdots + x_n$ est unimodulaire dans $P_1 \oplus \cdots \oplus P_n$.*

En effet $o(x)_{t_i} = A_{t_i}$ pour tout i. Donc $o(x) = A$. Ceci montre que, dans la proposition 6, toute somme directe de n modules P_j contient un unimodulaire et que P contient un facteur direct libre de type card(J) = type(P).

Problème. Un gros module localement libre de rang constant est-il libre ?

APPENDICE:

Relèvement des Bases Modulo le Radical d'après L. Gruson

Il y a déjà assez longtemps, Gruson a démontré mais n'a jamais publié le théorème suivant qui améliore le théorème de Beck ([4] ou proposition 4):

Théorème. *Soient P un A-module projectif et $\mathfrak{a}$ un idéal bilatère contenu dans le radical de A. Si $P/\mathfrak{a}P$ est un $A/\mathfrak{a}$-module libre de base C il existe une base B de P donc l'image dans $P/\mathfrak{a}P$ est C.*

Désignons pour simplifier par $\bar{?}$ le foncteur $A/\mathfrak{a} \otimes_A ?$.

LEMME 1. *Pour tout $x \in P$, on a $x \in \mathscr{o}(x) \cdot P$.*

Cela s'obtient immédiatement en écrivant P comme facteur direct d'un module libre, en le décomposant sur une base de celui-ci, et en projetant sur P.

LEMME 2. *Soient $e_1, \ldots, e_n$ des éléments de P tels que $\bar{e}_1, \ldots, \bar{e}_n$ forment une base d'un facteur direct libre e de P; les e_i forment une base du module L qu'ils engendrent et L est un facteur direct de P.*

Les hypothèses se traduisent dans le diagramme commutatif suivant

$$\begin{tikzcd} A^n \arrow[r, "f"] \arrow[d] & P \arrow[r, "g"] \arrow[d] & A^n \arrow[d] \\ \bar{A}^n \arrow[r, "\bar{f}"] & \bar{P} \arrow[r, "\bar{g}"] & \bar{A}^n \end{tikzcd}$$

dans lequel g est un relèvement quelconque de $\bar{g}$ (P est projectif) et où $\bar{g} \circ \bar{f} = \mathrm{id}$. Comme coker $(g \circ f)$ est de type fini, il est nul grâce à par Nakayama. Donc $g \circ f$ admet une section, ce qui montre que $\ker(g \circ f)$ est de type fini et que $\overline{\ker(g \circ f)} = \ker(\bar{g} \circ \bar{f})$. Donc, (lemme de Nakayama) $\ker(g \circ f) = 0$, et $g \circ f$ est un isomorphisme; la conclusion est maintenant immédiate.

LEMME 3. *Pour tout x de P, il existe $e_1, \ldots, e_n \in P$ tels que $x \in \sum Ae_i$ et que les $\overline{e_i}$ soient des éléments distincts de C.*

Soit $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ un système de générateurs de $\mathscr{o}(x)$. Le lemme 1 nous affirme que $x = \sum \lambda_i x_i$. Soit $\overline{x_i} = \sum_j \overline{\mu_{ij}} f_j$ la décomposition de $\overline{x_i}$ sur C. Soient $e_j \in P$ tels que $\bar{e}_j = f_j$, pour tout j, et Q un supplémentaire de $\sum Ae_j$ (lemme 2).

En choisissant convenablement le relèvement μ_{ij} de $\overline{\mu_{ij}}$, on a donc

$$x_i - \sum_j \mu_{ij} e_j \in \mathfrak{a}Q,$$

pour tout i. Soit $\alpha_j = \sum_i \lambda_i \mu_{ij}$; ce qui précède montre que

$$x - \sum_j \alpha_j e_j \in \mathscr{o}(x) \cdot \mathfrak{a}Q,$$

c'est-à-dire $\mathscr{o}(x) \subset \sum \alpha_j A + \mathscr{o}(x)\mathfrak{a}$; Nakayama nous donne $\mathscr{o}(x) = \sum \alpha_j A$, puisque $\sum \alpha_j A \subset \mathscr{o}(x)$. On peut donc écrire $x - \sum \alpha_j e_j = \sum \alpha_j x_j'$ avec $x_j' \in \mathfrak{a}Q$. Si on pose $e_j' = e_j + x_j'$, le lemme est démontré, car $\overline{e_j'} = \overline{e_j}$.

LEMME 4. *Le théorème est vrai si P est de type dénombrable.*

Soit $x_1, \ldots, x_n, \ldots$ un système de générateurs de P.

Définissons par récurrence des éléments $e_1, \ldots, e_{k(n)}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} Ax_i \subset \sum_{j=1}^{k(n)} Ae_j = L_n$$

et que les $\overline{e_j}$ soient des éléments distincts de C. Soit x'_{n+1} l'image de x_{n+1} dans $Q = P/L_n$. On peut appliquer le lemme 3 à Q et x'_{n+1}, ce qui permet de définir $e_{k(n)+1}, \ldots, e_{k(n+1)}$.

Les e_j ainsi définis sont linéairement indépendants (lemme 2) et engendrent P.

Démonstration du théorème. On écrit P comme somme directe de modules de type dénombrables $P = \bigoplus_{i \in I} P_i$. Remarquons d'abord que tout sous module de type dénombrable Q_0 de P est contenu dans un sous module de type dénombrable Q de P tel que Q soit somme d'une partie des P_i et que $\overline{Q}$ ait pour base une partie de C. Soit en effet $(e_j)_{j \in J}$ un relèvement de C dans P. Soient par récurrence Q_n' le sous module engendré par Q_n et ceux des e_j tels que e_j intervienne dans la décomposition des éléments de $\overline{Q_n}$ sur C, et Q_{n+1} la somme des P_i qui interviennent dans la décomposition de Q_n'. Il est clair que $Q = \bigcup Q_n = \bigcup Q_n'$ est le module cherché.

Définissons par récurrence transfinie des sous-modules Q_u de P (u ordinal) tels que $Q_u = \bigcup_{u' < u} Q_{u'}$ si u est un ordinal limite et que $Q_0 = 0$; nous voulons en outre que, pour tout u, Q_u soit une somme partielle des P_i et que $\overline{Q_u}$ soit engendré par une partie de C. Si $Q_u \neq P$, on peut appliquer l'argument précédent à P/Q_u pour construire $Q_{u+1} \supset Q_u$ de manière que Q_{u+1}/Q_u soit somme directe partielle dénombrable des P_i et que Q_{u+1}/Q_u soit engendrée par une partie de C. Il est clair que $Q_{u+1} = Q_u \oplus Q_{u+1}/Q_u$ satisfait aux conditions cherchées. La récurrence s'arrête quand $Q_u = P$; ainsi $P = \bigoplus (Q_{u+1}/Q_u)$ selon l'argument classique de Kaplanski, [8, lemme 3.1.2] et il suffit d'appliquer le lemme 4 à chacun des Q_{u+1}/Q_u pour conclure.

Bibliographie

1. H. Bass, Finistic dimension and a homological generalisation of semi-primary rings, *Trans. Amer. Math. Soc.* **95** (1960), 466–488.
2. H. Bass, Big projective modules are free, *Ill. J. Math.* **7** (1963), 24–31.
3. H. Bass, *K*-theory and stable algebra, *Publ. Math. de l'I.H.E.S.* n° 22 (1964).
4. I. Beck, Projective and free modules, *Math. Z.* **129** (1972), 231–234.
5. Y. Hinohara, Projective modules over weakly noetherian rings, *J. Math. Soc. Japan* **15** (1963), 75–88, 474–475.
6. I. Kaplansky, Projective modules, *Ann. of Math.* **68** (1958), 372–377.
7. D. Lazard, Disconnexités des spectres d'anneaux et des préschémas, *Bull. Soc. Math. France* **95** (1967), 95–108.

8. M. Raynaud et L. Gruson, Critères de platitude et de projectivité, *Invent. Math.* **13** (1971), 1–89.
9. W. Vasconcelos, On projective modules of finite rank, *Proc. Amer. Math. Soc.* **22** (1969), 430–433.