Journal of Functional Analysis **195**, 167–189 (2002)
doi:10.1006/jfan.2002.3963

Distance entre éléments d'un semi-groupe dans une algèbre de Banach

J. Esterle[1,2]

Laboratoire de Mathematiques Pures, U.M.R.5467, Université Bordeaux 1, 351 cours de la Liberation, 33405-Talence, France
E-mail: esterle@math.u-bordeaux.fr

and

A. Mokhtari

Centre Universitaire de Laghouat, 3000 Laghouat, Algeria

Communicated by Paul Malliavin

Received September 8, 2001; accepted February 26, 2002

Soit $(a^t)_{t>0}$ un semi-groupe dans une algèbre de Banach, et soit n un entier positif. On montre que si $\limsup_{n\to+\infty} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, alors ou bien $a^t = 0$ pour $t>0$, ou bien la sous-algèbre A engendrée par le semi-groupe $(a^t)_{t>0}$ est unitaire, et il existe $u \in A$ tel que $a^t = e^{tu}$ pour $t>0$. Un exemple très simple montre que la constante $\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ est optimale.

Let $(a^t)_{t>0}$ be a semigroup in a Banach algebra, and let n be a positive integer. We show that if $\limsup_{n\to+\infty} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, then either $a^t = 0$ for $t>0$, or the closed subalgebra A generated by the semigroup $(a^t)_{t>0}$ is unital, and there exists $u \in A$ such that $a^t = e^{tu}$ for $t>0$. A simple example shows that the constant $\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ is best possible.

1. INTRODUCTION

Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $(a^t)_{t>0}$ un semi-groupe dans une algèbre de Banach. On montre ici que si $\limsup_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(1+n)^{1+\frac{1}{n}}}$, alors ou bien $a^t = 0$ pour $t>0$, ou bien la sous-algèbre fermée A engendrée par $(a^t)_{t>0}$ est

[1] Le travail du premier auteur fait partie du programme de recherche du Réseau européen "Analysis and Operators," contrat HPRN-CT-00116-2000, financé par la Communauté Européenne.

[2] To whom correspondence should be addressed.

0022-1236/02 $35.00

unitaire, et il existe $u \in A$ tel que $a^t = e^{tu}$ pour $t > 0$. Ce résultat avait été obtenu par le second auteur dans [10] pour $n = 1$ en supposant $(a^t)_{t>0}$ continu pour $t > 0$ et borné à l'origine, puis dans une partie non publiée de sa thèse pour $n = 1$ et $n = 2$ en supposant seulement $(a^t)_{t>0}$ continu pour $t > 0$. La méthode présentée ici, valable pour tout entier positif, permet d'éliminer toute hypothèse de continuité.

Le point de départ de cet article est la discussion des semi-groupes dans $\mathbb{C}$, c'est à dire des applications $\theta : K^+ \to \mathbb{C}$ telles que $\theta(s + t) = \theta(s)\theta(t)$ pour $s \in K^+$, $t \in K^+$, K^+ désignant l'ensemble des élements strictement positifs d'un sous-corps K de $\mathbb{R}$. On vérifie que si θ n'est pas continu alors ou bien $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma + 1))| = 2$, ou bien $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma + 1))| = +\infty$ pour tout $\gamma \in K^+$. Soit maintenant $(a^t)_{t\in K^+}$ un semi-groupe dans une algèbre de Banach commutative A. 0n voit que si $\gamma \in K^+$, et si $\limsup_{t\to 0^+} \rho(a^t - a^{t(\gamma+1)}) < 2$, $\rho(a^t - a^{t(\gamma+1)})$ désignant le rayon spectral de $a^t - a^{t(\gamma+1)}$, alors l'application $t \mapsto \phi(a^t)$ est continue sur K^+ pour tout $\phi \in \hat{A}$.

Un deuxième ingrédient tout à fait élémentaire de cet article est basé sur l'étude des variations de la fonction $f : x \mapsto x - x^{\gamma+1}$ sur l'intervalle $[0, 1]$ pour $\gamma > 0$. On voit que si $\delta \in]0, \frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}[$ alors $f^{-1}([0, \delta])$ est la réunion de deux intervalles disjoints $[0, s_1]$ et $[s_2, 1]$. On en déduit que si $\limsup_{t\to 0^+} \rho(a^t - a^{t(\gamma+1)}) < \frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$ et si le semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$ n'est pas quasinilpotent alors $A/Rad(A)$ est unitaire, A désignant la sous-algèbre fermée engendrée par le semi-groupe. On montre plus précisément au Théorème 3.3 que dans ce cas il existe un idempotent J de A, un élément u de JA et une application additive $r : K^+ \to Rad(JA)$ possédant les propriétés suivantes:

(i) $\phi(J) = 1$ pour $\phi \in \hat{A}$.
(ii) $(a^t - Ja^t)_{t\in K^+}$ est un semi-groupe quasinilpotent.
(iii) $a^t = e^{tu+r(t)}$ pour $t \in K^+$.

Un exemple très simple montre que la constante $\frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$ est optimale pour le résultat ci-dessus.

Soit $\gamma > 0$, et soit $(a^t)_{t\in K^+}$ un semi- groupe non quasinilpotent tel que $\limsup_{t\to 0^+} \|(a^t - a^{t(\gamma+1)})\| < \frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$. On montre au Théorème 3.2 que dans ce cas on a la décomposition plus précise $Ja^t = e^{tu}$ pour $t \in K^+$, avec $u \in JA$. Ceci revient à montrer que l'application additive $r : K^+ \to Rad(A)$ obtenue plus haut est continue. Ceci provient d'un résultat simple d'Analyse complexe : il existe une fonction analytique g sur le disque ouvert U de centre 0 et de rayon $\frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$ telle que $g(0) = 0$ et telle que $e^{g(z)} - e^{(\gamma+1)g(z)} = z$

pour $z \in U$. On montre alors que si l'hypothèse ci-dessus est vérifiée alors $tu + r(t) = g(Ja^t - Ja^{t(\gamma+1)})$ pour t assez petit. On en déduit que $\limsup_{t\to 0^+} \|r(t)\| < +\infty$, et on voit alors facilement que l'application r est continue. On est donc ramené au cas d'un semi-groupe quasinilpotent.

Soit n un entier positif, et soit $((c^t)_{t\in K_+})$ un semi-groupe quasinilpotent tel que $\limsup_{t\to 0^+} \|c^t - c^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. On veut montrer que $c^t = 0$ pour $t \in K^+$. Les outils pour conclure proviennent de nouveau de l'Analyse Complexe. D'après un théorème d'Arens et Calderòn [1], l'équation $x - x^{n+1} = u$ possède une unique solution dans R si R est une algèbre de Banach radicale, donnée par la formule $x = g(u)$ où g est une fonction holomorphe au voisinage de l'origine. On montre que la série de Taylor de g a l'origine est à coefficients positifs et a pour rayon de convergence $\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. Ceci prouve en particulier que si x est quasinilpotent, et si $\|x\| \geqslant \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, alors $\|x - x^{n+1}\| > \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. On en déduit le résultat cherché. Par conséquent si un semi-groupe non nul $(a^t)_{t\in K^+}$ vérifie $\limsup_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, alors avec les notations ci-dessus on a bien $a^t - Ja^t = 0$ pour $t \in K^+$, donc l'algèbre fermée A engendrée par le semi-groupe est unitaire d'unité J, et $a^t = Ja^t = e^{tu}$ pour $t \in K^+$.

Dans la dernière partie de l'article on s'intéresse aux semi-groupes $(a^t)_{t\in K^+}$ tels que $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. On ne peut pas espérer des résultats aussi précis qu'avec les limites supérieures,car on peut construire des semi-groupes très discontinus tels que $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t\| = 0$, ce qui implique trivialement que $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| = 0$ pour $n \geqslant 1$. D'autre part on peut construire un semi-groupe $(a^t)_{t>0}$ dans l'algèbre c_o, continu pour $t > 0$ tel que $\|a^t\| = 1$ pour $t > 0$ et tel que $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(\gamma+1)}\| = 0$ pour tout $\gamma > 0$.

Soit $n \geqslant 1$ un entier, et soit x un élément d'une algèbre de Banach commutative A tel que $\|x\| \geqslant \frac{n}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ et $\|x - x^{n+1}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. On voit facilement que dans ce cas il existe un idempotent non nul J de A tel que $\{\phi \in \hat{A} \mid \phi(J) = 1\} = \{\phi \in \hat{A} \mid |\phi(x)| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\}$. On donne au Théorème 5.2 une formule explicite pour calculer un tel idempotent, valable pour tout entier positif n. Cette formule coincide pour $n = 1$ avec la formule donnée par le premier auteur dans [6], et pour $n = 2$ est plus maniable que la formule donnée par le second auteur dans la partie non publiée de sa thèse [11]. Nous renvoyons à [4] pour la comparaison entre ces idempotents. On trouvera également dans [4] des formules plus génerales du même type, avec des applications aux algèbres de Banach à unité approchée bornée. Le

Théorème 5.2 implique notamment que si une algèbre de Banach A ne possède aucun idempotent non nul alors on a $\liminf_{t\to 0^+}\|a^t\| = 0$ pour tout semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$ d'éléments de A tel que $\liminf_{t\to 0^+}$ $\|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$.

Dans le cas général on se limite aux semi-groupes qui sont localement bornés, c'est à dire aux semi-groupes tels que $\sup_{\alpha\leqslant t\leqslant\beta}\|a^t\| < +\infty$ pour $0<\alpha<\beta<+\infty$. On montre que si la condition ci-dessus est vérifiée par un semi-groupe localement borné non nul alors la sous-algèbre fermée A engendrée par le semi-groupe contient une suite croissante (J_p) d'idempotents telle que $\bigcup_{p\geqslant 1} J_pA$ est dense dans A. Si le semi-groupe $(a^t)_{t>0}$ est continu alors on a un résultat plus précis: ou bien A est unitaire, et dans ce cas il existe $u\in A$ tel que $a^t = e^{tu}$ pour $t>0$, ou bien il existe une suite $(j_p)_{p\geqslant 1}$ d'idempotents non nuls de A telle que $Span\{j_pA\}_{p\geqslant 1}$ est dense dans A et telle que pour tout $p\geqslant 1$ il existe $u_p\in j_pA$ vérifiant $j_pa^t = e^{tu_p}$ pour $p\geqslant 1$.

Les méthodes utilisées dans les quatrièmes et cinquièmes parties de cet article ne donnent des résultats concernant le comportement asymptotique en 0 de $\|a^t - a^{(\gamma+1)}\|$ que dans le cas où γ est entier. On peut se demander si on peut obtenir des résultats analogues pour $\gamma>0$, au moins en ce qui concerne les semi-groupes localement bornés. On donne à la fin de l'article des résultats très partiels dans cette direction pour les rationnels positifs. L'étude des semi-groupes d'opérateurs fortement continus sera developpée ultérieurement.

2. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE EN 0 DU RAYON SPECTRAL DE LA DIFFÉRENCE ENTRE ÉLÉMENTS D'UN SEMI-GROUPE

Si K est un sous-corps de $\mathbb{R}$, on notera K^+ l'ensemble des éléments strictement positifs de K. Soit $\theta : K^+ \to \mathbb{C}$ une application non identiquement nulle vérifiant $\theta(s+t) = \theta(s)\theta(t)$ pour $s\in K^+$, $t\in K^+$, de sorte que $\theta(t)\neq 0$ pour $t\in K^+$. On va tout d'abord établir en utilisant des arguments classiques deux propriétés concernant le comportement asymptotique de θ au voisinage de 0. Ces résultats sont bien connus dans le cas où $K=\mathbb{R}$ (voir [9, Section 4.17]).

Pour $\tau>0$, posons $F_\tau = \{\log(|\theta(t)|\}_{t\in K\cap]0,\tau[}$, et soit $F := \bigcap_{\tau>0}\bar{F}_\tau$. Si $a\in F$, $b\in F$, il existe deux suites $(s_n)_{n\geqslant 1}$ et $(t_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de K^+ qui convergent vers 0 telles que $a = \lim_{n\to+\infty}\log(|\theta(s_n)|)$ et $b = \lim_{n\to+\infty}\log(|\theta(t_n)|)$. Quitte à remplacer la suite $(t_n)_{n\geqslant 1}$ par une sous-suite, on peut supposer que $t_n<s_n$ pour $n\geqslant 1$, et on obtient $a-b = \lim_{n\to+\infty}\log(|\theta(s_n-t_n)|)\in F$. Donc F est un sous-groupe additif de $\mathbb{R}$ et ou bien F est dense dans $\mathbb{R}$, de sorte que $F=\mathbb{R}$, ou bien il existe $\alpha\geqslant 0$ tel que $F=\alpha\mathbb{Z}$. Dans le deuxième cas soit $(t_n)_{n\geqslant 1}$ une

suite d'éléments de K^+ qui converge vers 0 telle que $\alpha = \lim_{n\to+\infty} \log(|\theta(t_n)|)$. Alors $\frac{\alpha}{2} = \lim_{n\to+\infty} \log(|\theta(t_n)|^{\frac{1}{2}}) = \lim_{n\to+\infty} \log(|\theta(\frac{1}{2}\, t_n)|) \in F$, de sorte que $\alpha = 0$. Dans ce cas $\lim_{t\to 0^+} \log(|\theta(t)|) = 0$. Si on pose $\psi(t) = \log|\theta(t)|$ pour $t \in K^+$, $\psi(t) = -\psi(-t)$ pour $t \in -K^+$ et $\psi(0) = 0$, on voit que ψ est un morphisme additif de K dans $\mathbb{R}$ qui est continu en 0, donc continu sur K. On a $\psi(t) = t\psi(1)$ pour $t \in \mathbb{Q}$, et par continuité on obtient $\psi(t) = t\psi(1)$ pour $t \in K$. On voit donc que θ vérifie l'une des deux propriétés suivantes

$$\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t)| = +\infty \textit{ et il existe pour tout } u \geqslant 0 \textit{ une suite } (t_n)_{n\geqslant 1}$$
$$\textit{d'éléments de } K^+ \textit{ qui converge vers } 0 \textit{ telle que } u = \lim_{n\to+\infty} |\theta(t_n)|, \tag{2.1}$$

$$\lim_{t\to 0^+} |\theta(t)| = 1 \textit{ et il existe } a \in \mathbb{R} \textit{ tel que } |\theta(t)| = e^{ta} \textit{ pour } t \in K^+. \tag{2.2}$$

Posons maintenant $\phi(t) = \frac{\theta(t)}{|\theta(t)|}$ pour $t \in K^+$, $G_\tau = \{\phi(t)\}_{t\in K^+\cap]0,\tau[}$ pour $\tau > 0$, $G = \bigcap_{\tau>0} \bar{G}_\tau$. De même que plus haut on voit que G est un sous-groupe multiplicatif du cercle unité $\mathbb{T}$. Soit $H = \{x \in \mathbb{R} \mid e^{ix} \in G\}$. Alors H est un sous-groupe fermé de $\mathbb{R}$ donc ou bien $H = \mathbb{R}$, de sorte que $G = \mathbb{T}$, ou bien il existe $\beta \geqslant 0$ tel que $H = \beta\mathbb{Z}$. Comme $2\pi \in H$, il existe dans le deuxième cas un entier $p \geqslant 1$ tel que $\beta = \frac{2\pi}{p}$. Posons $u = e^{\frac{2i\pi}{p}}$. On a alors $G = \{u^k\}_{0\leqslant k\leqslant p-1}$. Soit $(t_n)_{n\geqslant 1}$ une suite d'éléments de K^+ qui converge vers 0 telle que $\lim_{n\to+\infty} \phi(t_n) = u$, et soit v une valeur d'adhérence de la suite $(\phi(\frac{t_n}{p}))_{n\geqslant 1}$. On a $v^p = u$, et $v^p = 1$ puisque $v \in G$. Donc $p = 1$, et $G = \{1\}$. Par conséquent $\lim_{t\to 0^+} \phi(t) = 1$. Posons $\phi(t) = \phi^{-1}(-t)$ pour $t \in -K^+$ et $\phi(0) = 1$. Alors ϕ est continu en 0, donc uniformément continu sur K, et il existe un morphisme de groupe continu $\tilde{\phi} : (\mathbb{R}, +) \to \mathbb{T}$ tel que $\tilde{\phi}(t) = \phi(t)$ pour $t \in K^+$. Ceci montre qu'il existe $b \in \mathbb{R}$ tel que $\phi(t) = e^{itb}$ pour $t \in K^+$. Donc θ vérifie l'une des propriétés suivantes

$$\limsup_{t\to 0^+} \left|1 - \frac{\theta(t)}{|\theta(t)|}\right| = 2, \textit{ et pour tout } u \in \mathbb{T} \textit{ il existe une suite } (t_n)_{n\geqslant 1}$$
$$\textit{d'elements de } K^+ \textit{ qui converge vers } 0 \textit{ telle que } \lim_{n\to+\infty} \frac{\theta(t_n)}{|\theta(t_n)|} = u. \tag{2.3}$$

$$\lim_{t\to 0^+} \frac{\theta(t)}{|\theta(t)|} = 1, \textit{ et il existe } b \in \mathbb{R} \textit{ tel que } \frac{\theta(t)}{|\theta(t)|} = e^{itb} \textit{ pour } t \in K^+. \tag{2.4}$$

On a alors le lemme suivant

LEMME 2.1. *Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$ et soit $\theta : K^+ \to \mathbb{C}$ une application non nulle telle que $\theta(s+t) = \theta(s)\theta(t)$ pour $s \in K^+$, $t \in K^+$.*

(i) *Si* $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t)| = +\infty$, *alors* $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma+1))| = +\infty$ *pour* $\gamma \in K^+$.

(ii) *Si* $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t)| < +\infty$, *et si* $\limsup_{t\to 0^+} |1-\theta(t)| > 0$, *alors* $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma+1))| = 2$ *pour* $\gamma \in K^+$.

(iii) *Si* $\lim_{t\to 0^+} \theta(t) = 1$, *alors il existe* $c \in \mathbb{C}$ *tel que* $\theta(t) = e^{tc}$ *pour* $t \in K^+$.

Démonstration. Il est évident que si γ est rationnel, et si $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t)| = +\infty$, alors $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma+1))| = +\infty$, puisque $|\theta(t(\gamma+1))| = |\theta(t)|^{\gamma+1}$ pour $\gamma \in K^+$, mais on va voir que ce résultat est valable pour tout $\gamma \in K^+$. Fixons $\gamma \in K^+$, et supposons que $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma+1))| < +\infty$. Soit $R > \limsup_{t\to 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma+1))|$, et soit $t_0 \in K^+$ tel que $|\theta(t) - \theta(t(\gamma+1))| < R$ pour $t \in E :=]0, t_0[\bigcap K$.

Soit $t \in E$ et supposons que $|\theta(t(\gamma+1))| \geqslant 2R$. On a alors

$$2R\left|1 - \frac{1}{\theta(t\gamma)}\right| \leqslant \left|\theta(t(\gamma+1)) - \frac{\theta(t(\gamma+1))}{\theta(t\gamma)}\right| = |\theta(t(\gamma+1)) - \theta(t)| \leqslant R.$$

Donc $|1 - \frac{1}{\theta(t\gamma)}| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|\theta(t\gamma)| \leqslant 2$. Supposons maintenant que $t \in E$ et que $|\theta(t)| \geqslant 2R$. On a

$$2R|1 - \theta(t\gamma)| \leqslant |\theta(t) - \theta(t(\gamma+1))| \leqslant R,$$

donc $|1 - \theta(t\gamma)| \leqslant \frac{1}{2}$ et $|\theta(t\gamma)| \geqslant \frac{1}{2}$. Soit alors $t \in E$ tel que $|\theta(t)| \leqslant \frac{|\theta(t_0)|}{2R}$. On a $t_0 - t \in E$ et $|\theta(t_0 - t)| = \frac{|\theta(t_0)|}{|\theta(t)|} \geqslant 2R$. D'après ce qui précède, $|\theta((t_0 - t)\gamma)| \geqslant \frac{1}{2}$, donc $|\theta(t\gamma)| \leqslant 2|\theta(t_0\gamma)|$. Finalement si $t \in E$, et si $|\theta(t(\gamma+1))| \leqslant 2R$ et $|\theta(t)| \geqslant \frac{|\theta(t_0)|}{2R}$, alors $|\theta(t\gamma)| = \frac{|\theta(t(\gamma+1))|}{|\theta(t)|} \leqslant \frac{4R^2}{|\theta(t_0)|}$. Posons $M = \max(2, 2|\theta(t_0\gamma)|, \frac{4R^2}{|\theta(t_0|})$. On obtient $|\theta(t\gamma)| \leqslant M$ pour $t \in K$, $0 < t < t_0$. Donc s'il existe $\gamma \in K^+$ tel que $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma+1))| < +\infty$ on a $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t)| = \limsup_{t\to 0^+} |\theta(t\gamma)| < +\infty$, ce qui prouve (i).

Supposons maintenant que $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t)| < +\infty$ et que $\limsup_{t\to 0^+} |1 - \theta(t)| > 0$. Alors θ vérifie (2.2) et (2.3). Soit $\gamma \in K^+$. On a $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t) - \theta(t(\gamma+1))| \leq \limsup_{t\to +0^+} |\theta(t)| + \limsup_{t\to +0^+} |\theta(t\gamma)| = 2$. D'autre part d'après la propriété (2.3) il existe une suite $(s_n)_{n\geqslant 1}$ d'éléments de K^+ qui converge vers 0 telle que $\lim_{n\to +\infty} \frac{\theta(s_n)}{|\theta(s_n)|} = -1$. Posons $t_n = \frac{s_n}{\gamma}$ pour $n \geqslant 1$. Comme $\lim_{n\to+\infty} |\theta(s_n| = \lim_{n\to+\infty} |\theta(t_n| = 1$, et comme $\lim_{n\to+\infty} \theta(t_n\gamma) = -1$, on a $\lim_{n\to+\infty} |\theta(t_n) - \theta(t_n(\gamma+1)| = \lim_{n\to+\infty} |\theta(t_n)||1 - \theta(t_n\gamma)| = 2$. Donc dans ce cas $\limsup_{t\to 0^+} |\theta(t_n) - \theta(t_n(\gamma+1)| = 2$ pour tout $\gamma \in K^+$, ce qui prouve (ii).

Supposons maintenant que $\lim_{t\to +\infty} \theta(t) = 1$. Alors θ vérifie les propriétés (2.2) et (2.4), ce qui prouve (iii). ∎

Si A est une algèbre de Banach,on notera $\hat{A}$ l'ensemble des caractères de A, et on notera $\rho(x)$ le rayon spectral d'un élément x de A. Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$. On dira qu'une famille $(a^t)_{t\in K^+}$ d'éléments de A est un semi-groupe si $a^{s+t} = a^s a^t$ pour $s \in K^+$, $t \in K^+$, et on dira qu'un semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$ est quasinilpotent si $\rho(a^t) = 0$ pour $t \in K^+$ (ce qui équivaut à $\rho(a^1) = 0$).

Nous aurons besoin plus loin du résultat bien connu suivant

LEMME 2.2. *Soit A une algèbre de Banach commutative unitaire, et soit G l'ensemble des éléments inversibles g de A tels que $\phi(g) = 1$ pour tout $\phi \in \hat{A}$. Alors l'application $x \to e^x$ est une bijection de $Rad(A)$ sur G.*

Démonstration. Soit I l'unité de A, et soient $x \in Rad(A)$, $y \in Rad(A)$ tels que $e^x = e^y$. On a $(x-y)(I + \sum_{k\geqslant 2} \frac{\sum_{0\leqslant p\leqslant k-1} x^p y^{k-1-p}}{k!}) = 0$. Comme $I + \sum_{k\geqslant 2} \frac{\sum_{0\leqslant p\leqslant k-1} x^p y^{k-1-p}}{k!} \in Rad(A)$, $I + \sum_{k\geqslant 2} \frac{\sum_{0\leqslant p\leqslant k-1} x^p y^{k-1-p}}{k!}$ est inversible dans A et $x = y$. D'autre part si $g \in G$ alors la série $\sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}\frac{(g-I)^k}{k}$ converge dans $Rad(A)$. Posons $x = \sum_{k\geqslant 1}(-1)^{k+1}\frac{(g-I)^k}{k}$. Il résulte des propriétés standard du calcul fonctionnel holomorphe que $g = e^x$, ce qui achève la démonstration. ∎

On a le résultat général suivant.

THÉORÈME 2.3. *Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$, soit $(a^t)_{t\in K^+}$ un semi-groupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par $(a^t)_{t\in K^+}$ et soit $\gamma \in K^+$.*

Si $\limsup_{t\to 0} \rho(a^t - a^{t(\gamma+1)}) < \frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$ alors $A/Rad(A)$ est unitaire, et il existe un idempotent J de A, un élément u de JA et une application $r : t \to r(t)$ de K^+ dans $Rad(JA)$ possédant les propriétés suivantes

(i) $\phi(J) = 1$ *pour tout* $\phi \in \hat{A}$.
(ii) $r(s+t) = r(s) + r(t)$ *pour* $s \in K^+$, $t \in K^+$.
(iii) $Ja^t = e^{tu+r(t)}$ *pour* $t \in K^+$, *où* $e^v = J + \sum_{k\geqslant 1} \frac{v^k}{k!}$ *pour* $v \in JA$.
(iv) $(a^t - Ja^t)_{t\in K^+}$ *est un semi-groupe quasinilpotent.*

Démonstration. Soit $\phi \in \hat{A}$. D'après le Lemme 2.1, on a $|\phi(a^{t(\gamma+1)})| = |\phi(a^t)|^{\gamma+1}$ pour $t \in K^+$. Soit $\delta \in \mathbb{R}$ tel que $\limsup_{t\to 0^+} \rho(a^t - a^{t(\gamma+1)}) < \delta < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$. Il existe $t_0 \in K^+$ tel que $|\,|\phi(a^t)| - |\phi(a^t)|^{\gamma+1}| \leqslant |\phi(a^t) - \phi(a^{t(\gamma+1)})| \leqslant \delta$ pour $t \in E_0 := K^+ \cap]0, t_0]$. La fonction $f : x \mapsto x - x^{\gamma+1}$ est positive sur $[0, 1]$, croissante sur $[0,(\gamma+1)^{-\frac{1}{\gamma}}]$ et décroissante sur $[(\gamma+1)^{-\frac{1}{\gamma}},1]$, et $f((\gamma+1)^{-\frac{1}{\gamma}})=\frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$.

Soient s_1 et s_2, avec $s_1<s_2$, les deux solutions sur $]0,1[$ de l'équation $f(x)=\delta$. On a $|\phi(a^t)|<s_1$ ou $|\phi(a^t)|>s_2$ pour $t\in E_0$. Soit $t\in E_0$. Comme $|\phi(a^{rt})|=|\phi(a^t)|^r$ pour $r\in\mathbb{Q}^+$, on voit que si $|\phi(a^t)|<1$ alors un sous-ensemble dense de l'intervalle $[|\phi(a^t)|,1]$ ne rencontre pas $[s_1,s_2]$. Par conséquent $|\phi(a^t)|\geqslant s_2$ pour $\phi\in\hat{A}$. En particulier $|\phi(a^{t_0})|\geqslant s_2$ pour $\phi\in\hat{A}$ ce qui prouve que $\hat{A}$ est compact. D'après les Théorème 3.6.3 et 3.6.6 de [12], l'algèbre quotient $A/Rad(A)$ est unitaire, et il existe un idempotent J de A tel que $\phi(J)=1$ pour tout $\phi\in\hat{A}$. Il est clair que $(a^t-Ja^t)_{t\in K^+}$ est un semi-groupe quasinilpotent.

L'algèbre $B=JA$ a pour unité J. Posons $b^t=Ja^t$ pour $t\in K^+$. Soit $\psi\in\hat{B}$. Il existe $\phi\in\hat{A}$ tel que $\psi(Jx)=\phi(x)$ pour $x\in A$. On a $s_2^t|1-\psi(b^{t\gamma})|\leqslant|\phi(a^t)-\phi(a^{t(\gamma+1)})|\leqslant\delta<1$ pour $t\in E_0$ et par conséquent il existe $t_1\in E_0$ tel que $\rho(J-b^t)<1$ pour $t\in E_1:=K\cap]0,t_1]$. Posons $u_t=\sum_{k\geqslant1}\frac{(-1)^{k+1}(b^t-J)^k}{k}$ pour $t\in E_1$. On a $b^t=e^{u_t}$ pour $t\in E_1$.

Soit maintenant $t\in K^+$, et soit n le plus petit entier positif tel que $t\leqslant nt_1$. On pose $u_t=nu_{\frac{t}{n}}$, de sorte que $b^t=e^{u_t}$. Soit $\psi\in\hat{B}$, et soit $\phi\in\hat{A}$ tel que $\phi(x)=\psi(Jx)$ pour $x\in A$. D'après le Lemme 2.1 il existe $c_\phi\in\mathbb{C}$ tel que $\psi(b^t)=\phi(a^t)=e^{tc_\phi}$ pour $t\in K^+$. Les notations étant les mêmes que plus haut on voit que $\psi(u_{\frac{t}{n}})$ coincide avec la détermination principale du logarithme de $\psi(b^t)^{\frac{1}{n}}$. Donc $\psi(u_{\frac{t}{n}})=\frac{tc_\phi}{n}$ et $\psi(u_t)=n\psi(u_{\frac{t}{n}})=tc_\phi$.

Posons $u=t_1^{-1}u_{t_1}$, $r(t)=u_t-tu$. On a $\psi(r(t))=tc_\phi-tc_\phi=0$, donc $r(t)\in Rad(A)$ pour $t\in K^+$. On a $e^{r(s)+r(t)}=e^{-(s+t)u}b^{s+t}=e^{r(s+t)}$ et il résulte du Lemme 2.2 que $r(s+t)=r(s)+r(t)$ pour $s\in K^+$, $t\in K^+$, ce qui achève la démonstration. ∎

On a alors le corollaire suivant

Corollaire 2.4. *Soit K un sous-corps de R, soit $(a^t)_{t\in K^+}$ un semi-groupe non nul dans une algèbre de Banach commutative semisimple, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par $(a^t)_{t\in K^+}$ et soit $\gamma\in K^+$.*

Si $\limsup_{t\to0}\rho(a^t-a^{t(\gamma+1)})<\frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$ *alors A est unitaire, et il existe un élément u de A tel que $a^t=e^{tu}$ pour $t\in K^+$.*

On va maintenant donner un exemple très simple qui montre que la constante $\frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$ est optimale.

Exemple 2.5. Pour $t>0$, $x\in[0,1]$, posons $a^t(x)=x^t$.

Alors $\|a^t - a^{t(\gamma+1)}\|_\infty = \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$ pour $\gamma > 0$, $t > 0$, et la sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}(0,1)$ engendrée par le semi-groupe $(a^t)_{t>0}$ est semi-simple et non unitaire.

En effet on déduit du théorème de Stone–Weierstrass que la sous-algèbre fermée de $\mathscr{C}(0,1)$ engendrée par a^1 coincide avec $\mathscr{M} := \{f \in \mathscr{C}(0,1) \,|\, f(0) = 0\}$. Donc la sous-algbre fermée de $\mathscr{C}(0,1)$ engendrée par $(a^t)_{t>0}$ coincide également avec $\mathscr{M}$, qui est semisimple et non unitaire. D'autre part pour $\gamma > 0$, $t > 0$ on a $\|a^t - a^{t(\gamma+1)}\|_\infty = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} x - x^{1+\gamma} = \frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$.

3. DISTANCE ENTRE ÉLÉMENTS D'UN SEMI-GROUPE: RÉDUCTION AU CAS DES SEMI-GROUPES QUASINILPOTENTS

La fonction $f : x \mapsto e^x - e^{(\gamma+1)x}$ est une bijection de $]-\frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}, +\infty[$ sur $]-\infty, \frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}[$. Le lemme suivant traduit le fait que que le rayon de convergence du développement de Taylor en 0 de la fonction réciproque $f^{-1} :]-\infty, \frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}[\to]-\frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}, +\infty[$ est égal à $\frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$.

Lemme 3.1. *Soit $\gamma > 0$, et soit U le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$. Il existe une fonction analytique $g : U \to \mathbb{C}$ telle que $g(0) = 0$ et telle que $e^{g(z)} - e^{(\gamma+1)g(z)} = z$ pour $z \in U$.*

Démonstration. Posons $f(z) = e^z - e^{(\gamma+1)z}$. Comme $f(0) = 0$, et comme $f'(0) = -\gamma \neq 0$, il résulte du théorème d'inversion locale qu'il existe deux voisinages ouverts V et W de 0 tels que la restriction de f à V soit une transformation conforme de V sur W. Il existe donc une fonction analytique $g : W \to V$ telle que $g(f(z)) = z$ pour $z \in V$ et telle que $f(g(z)) = z$ pour $z \in W$. On a $g(0) = 0$. Soit $\sum_{k \geqslant 1} \alpha_k z^k$ le développement de Taylor de g en 0. Comme $f(\mathbb{R}) \subset \mathbb{R}$, $\alpha_k \in \mathbb{R}$ pour $k \geqslant 1$. Soit R le rayon de convergence de la série $\sum_{k \geqslant 1} \alpha_k z^k$. On étend g au disque ouvert $D(0, R)$ en posant $g(z) = \sum_{k \geqslant 1} \alpha_k z^k$ pour $|z| < R$, et on a $f(g(z)) = z$ pour $|z| < R$. Pour $x \in]-R, R[$ on a $f'(g(x)) \neq 0$, donc $g(x) \neq \frac{1}{\gamma}\log(\frac{1}{\gamma+1})$. L'étude des variations de f sur $\mathbb{R}$ montre alors que $x = f(g(x)) \neq f(\frac{1}{\gamma}\log(\frac{1}{\gamma+1})) = \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$. Donc $R \leqslant \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$.

Soient s_1 et s_2, avec $s_1 \leqslant s_2$, les deux solutions (ou la solution double) de l'équation $f(x) = R$ sur $]-\infty, 0[$, et soit s_3 la solution de l'équation $f(x) = -R$ sur $]0, +\infty[$.

Si $|z|<R$, on a $R>|f(g(z))|\geqslant||e^{g(z)}|-|e^{(\gamma+1)g(z)}||=|e^{Re(g(z))}-e^{(\gamma+1)Re(g(z))}|$. Donc ou bien $\mathrm{Re}(g(z))\in]-\infty,s_1[$, ou bien $\mathrm{Re}(g(z))\in]s_2,s_3[$. Comme $\mathrm{Re}(g(0))=0$, un argument de connexité montre que $s_2<\mathrm{Re}(g(z))<s_3$.

D'autre part $e^{s_2}|1-e^{\gamma g(z)}|\leqslant e^{Re(g(z))}|1-e^{\gamma g(z)}|=|e^{g(z)}-e^{(\gamma+1)g(z)}|<R\leqslant\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$. Comme $e^{s_2}>\frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}}$, on obtient $|1-e^{\gamma g(z)}|<\frac{\gamma}{\gamma+1}<1$ pour $|z|<R$. Donc $\gamma\,\mathrm{Im}(g(z))\in\bigcup_{k\in\mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2}+2k\pi,\frac{\pi}{2}+2k\pi[$. Comme $\mathrm{Im}(g(0))=0$, un argument de connexité montre que $\gamma|\mathrm{Im}(g(z))|<\frac{\pi}{2}$ pour $|z|<R$. On voit donc que $g(D(0,R))$ est borné.

Soit $\lambda\in\mathbb{C}$ tel que $|\lambda|=R$. Il existe une suite $(z_n)_{n\geqslant1}$ d'éléments de $D(0,R)$ telle que $\lim_{n\to+\infty}z_n=\lambda$ et telle que la suite $(g(z_n))_{n\geqslant1}$ soit convergente. Posons $\mu(\lambda)=\lim_{n\to+\infty}g(z_n)$. On a $f(\mu(\lambda))=\lambda$.

Si $f'(\mu(\lambda))\neq0$, il existe d'après le théorème d'inversion locale un voisinage ouvert V_λ de $\mu(\lambda)$ et un voisinage ouvert W_λ de λ tels que la restriction de f à V_λ soit une tranformation conforme de V_λ sur W_λ. Soit $g_\lambda: W_\lambda\to V_\lambda$ l'application réciproque. Comme $z_n\in W_\lambda$ et $g(z_n)\in V_\lambda$ pour n assez grand on voit que g et g_λ coincident au voisinage de z_n pour n assez grand, donc g et g_λ coincident sur la composante connexe de λ dans $W_\lambda\cap D(0,R)$. Ceci montre que λ est un point régulier de la série entière $\sum_{k\geqslant1}\alpha_n z^n$. Mais cette série admet au moins un point singulier λ tel que $|\lambda|=R$, et on a alors $f'(\mu(\lambda))=0$.

Donc $\mu(\lambda)=-\frac{\log(\gamma+1)}{\gamma}+\frac{2ik\pi}{\gamma}$, avec $k\in\mathbb{Z}$, et $\lambda=f(\mu(\lambda))=e^{\frac{2ik\pi}{\gamma}}\frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$, ce qui montre que $R=|\lambda|=\frac{\gamma}{(1+\gamma)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$. La fonction g construite ci-dessus vérifie donc les conditions du lemme. ∎

On a alors le théorème suivant

THÉORÈME 3.2. *Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$, soit $(a^t)_{t\in K^+}$ un semi-groupe non quasinilpotent dans une algèbre de Banach, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par $(a^t)_{t\in K^+}$ et soit $\gamma>0$. Si* $\limsup_{t\to0^+}\|a^t-a^{t(\gamma+1)}\|<\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$, *alors il existe un idempotent J de A et $u\in JA$ vérifiant les propriétés suivantes*

(i) $\phi(J)=1$ *pour* $\phi\in\hat{A}$,
(ii) $(a^t-Ja^t)_{t\in K^+}$ *est un semi-groupe quasinilpotent*,
(iii) $Ja^t=e^{tu}$ *pour* $t\in K^+$.

Démonstration. On reprend les notations du Théorème 2.3. Il suffit de montrer que l'application additive $r:K^+\to Rad(JA)$ est de la forme $r(t)=t.r(1)$. Posons $B=JA$, et posons $u(t)=tu+r(t)$ pour $t\in K^+$. Soit

$g : z \mapsto \sum_{k \geqslant 1} \alpha_k z^k$ la fonction analytique sur le disque ouvert U de centre 0 et de rayon $\frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$ obtenue au Lemme 3.1, soit $\delta \in]0, \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}[$ et soit $t_0 \in K^+$ tel que $\|a^t - a^{t(\gamma+1)}\| \leqslant \delta$ pour $t \in E := K \cap]0, t_0]$. Comme la série $\sum_{k \geqslant 1} |\alpha_k| \delta^k$ est convergente, la série $\sum_{k \geqslant 0} \alpha_k (Ja^t - Ja^{t(\gamma+1)})^k$ converge dans B pour $t \in E$. Posons $v(t) = g(Ja^t - Ja^{t(\gamma+1)}) := \sum_{k \geqslant 0} \alpha_k (Ja^t - Ja^{t(\gamma+1)})^k$. D'après les propriétés standard du calcul fonctionnel holomorphe, on a $e^{v(t)} - e^{(\gamma+1)v(t)} = Ja^t - Ja^{(\gamma+1)t} = e^{u(t)} - e^{(\gamma+1)u(t)}$.

La fonction $f : z \mapsto e^z - e^{(\gamma+1)z}$ est entière. Posons $h(z_1, z_2) = \frac{f(z_1) - f(z_2)}{z_1 - z_2}$ pour $z_1 \neq z_2$ et $h(z_1, z_2) = f'(z_1)$ pour $z_1 = z_2$. Alors h est une fonction entière sur $\mathbb{C}^2$. Comme $f'(0) \neq 0$, il existe $\varepsilon > 0$ tel que f soit injective sur le disque ouvert $D(0, \varepsilon)$. Par conséquent $h(z_1, z_2) \neq 0$ pour $|z_1| < \varepsilon$, $|z_2| < \varepsilon$.

Pour $t \in E$, on a $\rho(u(t)) = t\rho(u)$, donc $\lim_{t \to 0^+} \rho(u(t)) = 0$, et $\rho(Ja^t - Ja^{(\gamma+1)t}) = \rho(e^{u(t)} - e^{(\gamma+1)u(t)}) = \rho(e^{tu} - e^{t(\gamma+1)u}) \leqslant e^{t\rho(u)} \rho(J - e^{t\gamma u})$. Donc $\lim_{t \to 0^+} \rho(Ja^t - Ja^{(\gamma+1)t}) = 0$. Comme $g(0) = 0$ on a $\lim_{t \to 0^+} \rho(v(t)) = 0$. Donc pour t assez petit on a $\phi(h(u(t), v(t)) = h(\phi(u(t), \phi(v(t)) \neq 0$ pour tout $\phi \in \hat{B}$, et dans ce cas $h(u(t), v(t))$ est inversible dans B. Donc il existe $t_1 \in E$ tel que $u(t) = v(t)$ pour $t \in K \cap]0, t_1[$.

Posons $M = \|J\| \sum_{k \geqslant 1} |\alpha_k| \delta^k$. On a $\limsup_{t \to 0^+} \|r(t)\| \leqslant M$. Soit maintenant $l \in A^*$. On pose $\theta(t) = \mathrm{Re}\,(l(r(t))$ pour $t \in K^+$, $\theta(0) = 0$ et $\theta(t) = -\mathrm{Re}\, l(r(-t))$ pour $t \in -K^+$. De même qu'au début du paragraphe précédent on voit que l'ensemble G des valeurs d'adherence de θ en 0 est un sous-groupe additif borné de $\mathbb{R}$. Donc $G = \{0\}$ et θ est continue sur K. Donc $\mathrm{Re}\, l(r(t)) = t\, \mathrm{Re}\, l(r(1))$ pour $t \in K^+$. De même $\mathrm{Im}\, l(r(t)) = t\, \mathrm{Im}\, l(r(1))$, et $l(r(t)) = tl(r(1))$ pour $t \in K^+$. On voit donc que $Ja^t = e^{t(u + r(1))}$ pour $t \in K^+$, ce qui achève la démonstration. ∎

4. COMPORTEMENT ASYMPTOTIQUE EN 0 DE LA DISTANCE ENTRE ÉLÉMENTS D'UN SEMI-GROUPE QUASINILPOTENT

Soit $n \geqslant 1$. L'application $x \mapsto x - x^{n+1}$ est strictement croissante sur $[-\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}, \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}]$. Notons $\phi_n : [-\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}(1 - \frac{(-1)^n}{(n+1)}), \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}] \to [-\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}, \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}]$ l'application réciproque. Alors ϕ_n est strictement croissante, dérivable sur $]-\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}, \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}[$ et ϕ_n' n'est pas bornée sur $[0, \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}[$. Le résultat suivant traduit notamment le fait que le rayon de convergence du développement de Taylor en 0 de ϕ_n est égal à $\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$.

Lemme 4.1. *Soit $n \geqslant 1$ un entier, et soit U le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. Il existe une application h analytique sur U et continue sur $\bar{U}$ telle que $h(0)=0$ et telle que $h(z)-h(z)^{n+1}=z$ pour $z \in U$. De plus $h^{(k)}(0) \geqslant 0$ pour $k \geqslant 1$, et $h(\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}) = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$.*

Démonstration. Posons $f(z) = z - z^{n+1}$ pour $z \in \mathbb{C}$, soit V le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, et soit $\Gamma = \partial V$ le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. Soient $z_1 \in V, z_2 \in V$. On a $f(z_1) - f(z_2) = (z_1 - z_2)(1 - \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} z_1^k z_2^{n-k})$. Comme $|\sum_{0 \leqslant k \leqslant n} z_1^k z_2^{n-k}| < 1$, f est injective sur V.

Soit $\lambda \in U$. Posons $\phi(z) = z - \lambda$, $\psi(z) = z - z^{n+1} - \lambda$. Pour $z \in \Gamma$, on a

$$|\phi(z)| \geqslant |z| - |\lambda| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}} - \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}} = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\left(1 - \frac{n}{n+1}\right) = \frac{1}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$$

$= |z|^{n+1} = |\phi(z) - \psi(z)|$. Il résulte alors du théorème de Rouché que l'équation $\psi(z) = 0$ possède une solution dans V, et $U \subset f(V)$.

L'application f est une application conforme de V sur l'ouvert $f(V)$. Soit $h : f(V) \to V$ l'application réciproque, et soit $h(z) = \sum_{k \geqslant 0} \alpha_k z^k$ le développement de Taylor de h en 0. On a $h(z) - h^{n+1}(z) = z$ pour $z \in f(V)$, et $\alpha_0 = h(0) = 0$. Soit R le rayon de convergence de la série $\sum_{k \geqslant 1} \alpha_k z^k$. Comme $U \subset f(V)$, on a $R \geqslant \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. D'autre part on a $h' - (n+1)h^n h' = 1$, donc $\alpha_1 = h'(0) = 1$.

Soit $k \geqslant 2$. Il existe un polynôme Q_k de k variables à coefficients positifs tel que $h^{(k)} = (n+1)h^n h^{(k)} + Q_k(h, h', \ldots, h^{(k-1)})$. On voit donc par une récurrence immédiate que $h^{(k)}(0) \geqslant 0$ pour $k \geqslant 2$. Par conséquent $\alpha_k \geqslant 0$ pour $k \geqslant 1$. On a évidemment $h(t) = \phi_n(t)$ pour $0 \leqslant t < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ (ce qui prouve que $R = \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ puisque la dérivée de ϕ_n n'est pas bornée sur $[0, \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}[$).
Comme $\alpha_k \geqslant 0$ pour $k \geqslant 1$, on en déduit que la série.

$\sum_{k \geqslant 1} \alpha_k (\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}})^k$ est convergente et a pour somme $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. ∎

On en déduit le résultat suivant, qui avait été obtenu par le premier auteur dans [7] pour $n = 1$ (voir également [2, 3]).

Lemme 4.2. *Soit A une algèbre de Banach, soit $n \geqslant 1$ un entier, soit h la fonction analytique construite au Lemme 4.1 et soit $u \in A$. Si $\|u\| \leqslant \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ alors la série $\sum_{k \geqslant 1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} u^k$ converge dans A, et si on* *pose* $h(u) := \sum_{k \geqslant 1} \frac{h^{(k)}(0)}{k!} u^k$, *on a* $h(u) - h(u)^{n+1} = u$. *De plus* $\|h(u)\| \leqslant h(\|u\|) \leqslant \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$.

Démonstration. D'après les propriétés standard du calcul fonctionnel holomorphe, on a $h(ru) - h(ru)^n = ru$ pour $r \in [0, 1[$, et par continuité $h(u) - h(u)^{n+1} = u$. D'autre part $\|h(u)\| \leqslant \sum_{k \geqslant 1} \frac{|h^{(k)}(0)|}{k!} \|u\|^k = h(\|u\|) \leqslant \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$.

Lemme 4.3. *Soit* A *une algèbre de Banach, et soit* $u \in A$. *Si* u *est quasinilpotent alors* $x = h(u)$ *est l'unique élément quasinilpotent de* A *vérifiant* $x - x^{n+1} = u$.

Démonstration. Cette propriété est une conséquence d'un thèorème classique d'Arens et Calderon [1], mais on peut en donner une démonstration directe. Soit $\tilde{A}$ l'algèbre obtenue en ajoutant une unité I à A. Posons $x = h(u)$.

On voit comme plus haut que $x - x^{n+1} = u$. Si $y \in A$ vérifie $y - y^{n+1} = u$, alors $uy = yu$, donc $xy = yx$. On a $(x - y)(I - \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} x^k y^{n-k}) = 0$. Comme x et y sont quasinilpotents, $I - \sum_{0 \leqslant k \leqslant n} x^k y^{n-k}$ est inversible dans $\tilde{A}$, et $x = y$. ∎

On déduit alors des lemmes précédents le résultat suivant, établi par le premier auteur dans [7] pour $n = 1$, et par le second auteur dans la partie non publiée de sa thèse [11] pour $n = 2$ (avec la condition restrictive $\|x\| < \frac{2}{\sqrt{3}}$).

Théorème 4.4. *Soit* A *une algèbre de Banach, soit* $n \geqslant 1$ *un entier, et soit* $x \in A$ *tel que* $\|x\| \geqslant \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. *Si* x *est quasinilpotent, alors* $\|x - x^{n+1}\| > \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$.

Démonstration. Supposons que $\|x - x^{n+1}\| \leqslant \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, et soit h la fonction analytique construite au Lemme 4.1. D'après ce qui précède, on a $x = h(x - x^{n+1})$. Il est clair que la fonction h est transcendante. Comme $\lim_{k \to +\infty} \|(x - x^{n+1})^k\|^{\frac{1}{k}} = 0$, on a $\|x\| < \sum_{k \geqslant 1} \frac{|h^{(k)}(0)|}{k!} \|u\|^k \leqslant h(\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}) = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. ∎

Corollaire 4.5. *Soit* K *un sous-corps de* $\mathbb{R}$, *soit* $(a^t)_{t \in K^+}$ *un semi-groupe quasinilpotent dans une algèbre de Banach, et soit* $n \geqslant 1$ *un entier.*

Si $\limsup_{t \to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, *alors* $a^t = 0$ *pour* $t \in K^+$.

Démonstration. Soit $t \in K^+$. Si $a^t \neq 0$ on aurait a la fois $\limsup_{p\to+\infty} \|a^{\frac{t}{p}}\| \geqslant \limsup_{p\to+\infty} \|a^t\|^{\frac{1}{p}} \geqslant 1$ et $\limsup_{p\to+\infty} \|a^{\frac{t}{p}} - a^{\frac{t(n+1)}{p}}\| < \frac{n}{(1+n)^{1+\frac{1}{n}}}$, ce qui contredirait le Théorème 4.4. ∎

On a alors le théorème suivant.

THÉORÈME 4.6. *Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$, soit $(a^t)_{t\in K^+}$ un semi-groupe dans une algèbre de Banach, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par $(a^t)_{t\in K^+}$ et soit $n \geqslant 1$ un entier.*

Si $\limsup_{t\to 0^+} \|(a^t - a^{t(n+1)})\| < \frac{n}{(1+n)^{1+\frac{1}{n}}}$ *alors ou bien $a^t = 0$ pour $t \in K^+$, ou bien A est unitaire, et il existe un élément u de A tel que $a^t = e^{tu}$ pour $t \in K^+$.*

Démonstration. Supposons que $(a^t)_{t\in K^+}$ est quasinilpotent. Il résulte alors du Corollaire 4.5 que $a^t = 0$ pour $t \in K^+$. Dans le cas contraire on sait d'après le Théorème 3.2 qu'il existe un idempotent J de A, avec $\phi(J) = 1$ pour $\phi \in \hat{A}$ et un élément u de JA tels que $Ja^t = e^{tu}$ pour $t \in K^+$. Soit $B = A/JA$ et soit π la surjection canonique de A sur B. Comme π est contractante, et comme $\phi(J) = 1$ pour $\phi \in \hat{A}$, B est radicale, et il résulte du Corollaire 4.5 que $\pi(a^t) = 0$ pour $t \in K^+$. Donc $a^t = Ja^t = e^{tu}$ pour $t \in K^+$ et A est unitaire d'unité J, ce qui achève la démonstration du théorème. ∎

On va maintenant donner un exemple simple qui montre que la constante $\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ est ici aussi optimale. Soit $\mathscr{A}(\mathbb{D})$ l'algèbre des fonctions continues sur le disque unité fermé dont la restriction au disque unité ouvert $\mathbb{D}$ est holomorphe, munie de la norme $\|f\|_\infty = \max_{|z|\leqslant 1} |f(z)| = \max_{|z|=1} |f(z)|$ qui en fait une algèbre de Banach uniforme. Pour $z \in \mathbb{C}$, z non réel $\leqslant 0$, $t > 0$ on pose $z^t = |z|e^{it\, arg(z)}$, $arg(z)$ designant la détermination de l'argument de z qui appartient à $]-\pi, \pi[$, et on pose $z^t = 0$ pour $t = 0$. On pose également $a^t(z) = (\frac{1-z}{2})^t$ pour $|z| \leqslant 1$, $t > 0$. Il est alors bien connu et facile de voir que $(a^t)_{t>0}$ est un semi-groupe continu dans $\mathscr{A}(\mathbb{D})$, et $\|a^t\|_\infty = 1$ pour $t > 0$. On a alors l'exemple suivant, qui provient de la partie non publiée de la thèse du second auteur [11].

EXEMPLE 4.7. Soit $\mathscr{M} = \{f \in \mathscr{A}(\mathbb{D}) \,|\, f(1) = 0\}$, et posons $\phi(z) = e^{\frac{z+1}{z-1}}$ pour $|z| \leqslant 1$, $z \neq 1$. Soit $\mathscr{R}$ l'algèbre quotient $\mathscr{M}/\phi\mathscr{M}$, et soit $\pi : \mathscr{M} \to \mathscr{R}$ la surjection canonique. Alors $\mathscr{R}$ est radicale, la sous-algèbre fermée engendrée par $\pi(a^t)_{t>0}$ coincide avec $\mathscr{R}$, le semigroupe $\pi(a^t)_{t>0}$ est continu, $\|\pi(a^t)\| \leqslant 1$ pour $t > 0$, et on a $\lim_{t\to 0^+} \|\pi(a^t) - \pi(a^{t(n+1)})\| = \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

En effet on déduit du fait que les polynômes sont denses dans $\mathscr{A}(\mathbb{D})$ que la sous-algèbre de $\mathscr{A}(\mathbb{D})$ engendrée par a^1 est dense dans $\mathscr{M}$. Donc la sous-algèbre fermée de $\mathcal{R}$ engendrée par le semi-groupe $(\pi(a^t))_{t>0}$ coincide avec $\mathcal{R}$. L'application $t \mapsto \pi(a^t)$ est une application continue de $]0, +\infty[$ dans $\mathcal{R}$, et il est clair que $\|\pi(a^t)\| \leqslant 1$ pour $t > 0$. Comme $\mathcal{M}$ est le seul idéal maximal de $\mathcal{A}(\mathbb{D})$ contenant $\phi\mathcal{M}$, $\mathcal{R}$ est radicale.

On a $|\arg(a^t(z))| < \frac{t\pi}{2}$ pour $t > 0$, $|z| < 1$, $z \neq 1$, donc $a^t(z) - |a^t(z)|$ converge uniformément vers 0 sur $\bar{\mathbb{D}}$ quand $t \to 0^+$. On en déduit que $\limsup_{t\to 0^+} \|\pi(a^t) - \pi(a^{t(n+1)})\| \leqslant \limsup_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\|_\infty \leqslant \max_{0\leqslant x\leqslant 1} x - x^{n+1} = \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$.

Comme le semi-groupe $(a^t)_{t>0}$ est continu, on a $\lim_{t\to 0^+} \|\pi(a^t)\| = 1$, et on déduit alors du Théorème 4.4 que $\lim_{t\to 0^+} \|\pi(a^t) - \pi(a^{t(n+1)}\| = \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$.

5. LIMITE INFÉRIEURE EN 0 DE LA DISTANCE ENTRE ÉLÉMENTS D'UN SEMI-GROUPE

Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$. On se propose maintenant de discuter les semi-groupes $(a^t)_{t\in K^+0}$ d'éléments d'une algèbre de Banach tels que $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. On ne peut pas espérer obtenir ici des résultats aussi précis qu'avec les limites supérieures. En effet soit $(b^t)_{t>0}$ un semi-groupe dans une algèbre de Banach tel que $\limsup_{t\to 0^+} \|b^t\| < +\infty$, et soit $\theta :]0, +\infty[\to]0, +\infty[$ une application telle que $\theta(s + t) = \theta(s)\theta(t)$ pour $s > 0$, $t > 0$ et telle que $\liminf_{t\to 0^+} \theta(t) = +\infty$.

Posons $a^t = \theta(t)b^t$ pour $t > 0$. D'après la Propriété (2.1) on a $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t\| = 0$, d'où trivialement $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| = 0$ pour $n \geqslant 1$.

De même soit $\phi :]0, +\infty[\to \mathbb{T}$ une application telle que $\phi(s + t) = \phi(s)\phi(t)$ pour $s > 0, t > 0$ et telle que $\limsup_{t\to 0^+} |1 - \phi(t)| > 0$, soit A une algèbre de Banach unitaire et soit $u \in A$. Posons $a^t = \phi(t)e^{tu}$ pour $t > 0$. Il résulte de la Propriété (2.3) et du Lemme 2.1 que $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| = 0$ et $\limsup_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| = 2$ pour $n \geqslant 1$.

Même si on suppose que $(a^t)_{t>0}$ est continu, le fait que $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1^{1+\frac{1}{n}}}$ n'implique pas que la sous-algèbre fermée engendrée par le semi-groupe $(a^t)_{t>0}$ est unitaire, comme le montre l'exemple suivant (on note c_o l'algèbre des suites d'éléments de $\mathbb{C}$ qui convergent vers 0, munie de la norme $\|(x_p)_{p\geqslant 1}\|_\infty := \max_{p\geqslant 1} (|x_p|)$.

Exemple 5.1. Posons $a^t = (e^{-t(p!)^2})_{p\geqslant 1}$ pour $t > 0$. Alors l'algèbre engendrée par $(a^t)_{t>0}$ est dense dans c_o, et $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(\gamma+1)}\|_\infty = 0$ pour $\gamma > 0$.

En effet on déduit du théorème de Stone–Weierstrass appliqué à l'algèbre obtenue en adjoignant une unité à c_o que l'algèbre engendrée par $(a^t)_{t>0}$ est dense dans c_o. Posons $t_p = \frac{p}{(p!)^2}$ pour $p \geqslant 1$, et soit $\gamma > 0$. On a $t_p(q!)^2 \geqslant p$ pour $q \geqslant p$ et $t_p(q!)^2 \leqslant \frac{1}{p}$ pour $1 \leqslant q < p$. Pour p assez grand on a $e^{-p} \leqslant \frac{1}{(\gamma+1)^{\frac{1}{\gamma}}} \leqslant e^{\frac{-1}{p}}$, donc $\|a^{t_p} - a^{t_p(\gamma+1)}\|_\infty \leqslant \max(e^{-\frac{1}{p}} - e^{-\frac{(\gamma+1)}{p}}, e^{-p} - e^{-(\gamma+1)p})$, ce qui montre que $\liminf_{t \to 0^+} \|a^t - a^{t(\gamma+1)}\|_\infty = 0$ pour $\gamma > 0$.

On va cependant obtenir un certain nombre de résultats, basés sur le fait que si un élément x d'une algèbre de Banach commutative A vérifie $\|x\| \geqslant \frac{n}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ et $\|x - x^{n+1}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, avec $n \geqslant 1$ entier, alors A possède un idempotent non nul. Plus précisément il est alors facile de voir (cf. le résultat ci-dessous) que l'ensemble $\Omega = \{\phi \in \hat{A} \mid |\phi(x)| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}\}$ est une partie ouverte, compacte et non vide de $\hat{A}$, et par conséquent A possède un idempotent non nul J tel que $\Omega = \{\phi \in \hat{A} \mid \phi(J) = 1\}$.

Dans le cas $n = 1$ on sait d'après [7] que $J = \frac{I}{2} + (x - \frac{I}{2})(I - 4x + 4x^2)^{-\frac{1}{2}}$, I désignant l'unité de l'algèbre $\tilde{A}$ obtenue en ajoutant une unité à A. On va maintenant donner une formule explicite valable pour un entier $n \geqslant 1$ quelconque. On peut déduire de cette formule que si une algèbre de Banach A possède une unité approchée bornée séquentielle $(e_p)_{p \geqslant 1}$ telle que $\liminf_{p \to +\infty} \|e_p - e_p^{n+1}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ alors A possède une unité approchée bornée séquentielle formée d'idempotents. Nous renvoyons pour cette question à [4], où on trouvera des résultats plus généraux dans cette direction.

La méthode est inspirée de la méthode de calcul des projecteurs basée sur l'identité de Bézout dans le théorème des noyaux en algèbre linéaire. On va utiliser de nouveau la fonction analytique introduite au Lemme 4.1.

Théorème 5.2. *Soit A une algèbre de Banach, soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $x \in A$ tel que $\|x\| \geqslant \frac{n}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ et $\|x - x^{n+1}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. Soit U le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, et soit h la fonction analytique sur U construite au Lemme 4.1. Alors $|\phi(x)| \neq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ pour $\phi \in \hat{A}$, $I - (n+1)h^n(x - x^{n+1})$ est inversible dans l'algèbre $\tilde{A}$ obtenue en ajoutant une unité I à A, et $J :=$*

$$(I - (n+1)h^n(x - x^{n+1}))^{-1} \left(\sum_{2 \leqslant k \leqslant n+1} C_{n+1}^k (x - h(x - x^{n+1}))^{k-1} h(x - x^{n+1})^{n+1-k} \right)$$

est un idempotent non nul de A vérifiant $x - h(x - x^{n+1}) = J(x - h(x - x^{n+1}))$. *De plus si* $\phi \in \hat{A}$ *on a* $\phi(J) = 1$ *si* $|\phi(x)| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, *et* $\phi(x) = 0$ *si* $\phi(x) < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$.

Démonstration. Soit $u \in A$ tel que $\|u\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. Comme $\|h(u)\| \leqslant h(\|u\|) < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, $I - (n+1)h^n(u)$ est inversible dans $\tilde{A}$. Soit $y \in A$. On a

$$\begin{aligned} y + h(u) - (y + h(u))^{n+1} - u = {} & y(I - (n+1)h^n(u)) \\ & - y^2\left(\sum_{2 \leqslant k \leqslant n+1} C_{n+1}^k y^{k-2} h(u)^{n+1-k}\right). \end{aligned}$$

Posons maintenant $u = x - x^{n+1}$, $y = x - h(u)$, $b = (I - (n+1)h(u)^n)^{-1}$ $(\sum_{2 \leqslant k \leqslant n+1} C_{n+1}^k y^{k-2} h(u)^{n+1-k})$. Comme $(y + h(u)) - (y + h(u))^{n+1} - u = 0$, on a $y = y^2 b$, donc $y^2 b^2 = yb$, et $J = yb$ est un idempotent de A. Comme $\|h(u)\| < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, on a $y \neq 0$ et $J \neq 0$ puisque $y = Jy$. Soit maintenant $\phi \in \hat{A}$. Comme $|\phi(x)| - |\phi(x)|^{n+1} \leqslant |\phi(x - x^{n+1})| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, on a $|\phi(x)| \neq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$.

On a vu dans la démonstration du Lemme 4.1 que la fonction $z \mapsto z - z^{n+1}$ est injective sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. Comme $\phi(x) - \phi(x)^{n+1} = \phi(h(u)) - \phi(h(u))^{n+1}$ et comme $|\phi(h(u))| \leqslant h(\|u\|) < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ on voit que si $|\phi(x)| < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ alors $\phi(y) = \phi(x) - \phi(h(u)) = 0$, donc $\phi(J) = 0$. D'autre part si $|\phi(x)| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, alors $\phi(x) \neq \phi(h(u))$ donc $\phi(y) \neq 0$ et $\phi(J) = 1$ puisque $y = Jy$. ∎

On peut évidemment calculer la fonction h donnée par le Lemme 4.1 dans le cas $n = 1$. On trouve $h(z) = \frac{1-(1-4z)^{\frac{1}{2}}}{2}$ pour $|z| \leqslant \frac{1}{4}$, où $(1 - 4z)^{\frac{1}{2}}$ est donné par le développement en série usuel. La formule du Théorème 5.2 donne alors $J = (I - 2h(x - x^2))^{-1})(x - h(x - x^2)) = (x - \frac{I}{2} + \frac{1}{2}(I - 4x + 4x^2)^{\frac{1}{2}})$ $(I - 4x + 4x^2)^{-\frac{1}{2}} = \frac{I}{2} + (x - \frac{I}{2})(I - 4x + 4x^2)^{-\frac{1}{2}}$, ce qui est la formule donnée par le premier auteur dans [7].

On déduit du Théorème 5.2 le corollaire suivant, qui est un peu moins precis que le Théorème 4.4.

COROLLAIRE 5.3. *Soit A une algèbre de Banach. Si A ne possède aucun idempotent non nul, alors* $\|x - x^{n+1}\| \geqslant \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ *pour tout $x \in A$ tel que* $\|x\| \geqslant \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$.

Le corollaire suivant montre que si A ne possède aucun idempotent non nul on ne peut avoir $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ que dans le cas trivial où $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t\| = 0$.

COROLLAIRE 5.4. *Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$, et soit $(a^t)_{t\in K^+}$ un semi-groupe dans une algèbre de Banach A. On suppose que A ne possède aucun idempotent non nul.*

(i) *Si* $\limsup_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, *alors* $a^t = 0$ *pour* $t \in K^+$.

(ii) *Si* $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t\| > 0$, *alors* $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| \geqslant \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$.

Démonstration. (i) provient du fait que $\liminf_{p\to +\infty} \|a^{\frac{t}{p}}\| \geqslant 1$ si $a^t \neq 0$. D'autre part posons $m = \liminf_{t\to 0^+} \|a^t\|$. On a $m^2 = \liminf_{t\to 0^+} \|a^t\|^2 \geqslant \liminf_{t\to 0^+} \|a^{2t}\| = m$. Donc si $m > 0$, alors $m \geqslant 1$, et l'assertion (ii) découle immédiatement du Théorème 5.2. ∎

On va maintenant utiliser le Théorème 5.2 pour étudier les semi-groupes tels que $\liminf_{t\to +\infty} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$. On sait déjà que la sous-algèbre fermée engendrée par $(a^t)_{t\in K^+}$ possède un idempotent non nul si $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t\| > 0$. On va maintenant introduire une condition plus forte. On dira qu'un semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$ est *localement borné si* $\sup_{t\in[\alpha,\beta]\cap K} < +\infty$ pour $0 < \alpha \leqslant \beta < +\infty$. Il résulte évidemment du théorème de Banach–Steinhaus qu'un semi-groupe $(T^t)_{t\in K^+}$ d'opérateurs bornés sur un espace de Banach qui est continu sur K^+ pour la topologie forte des opérateurs est localement borné. D'autre part si $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t\| = 0$ et s'il existe $s \in K^+$ tel que $a^s \neq 0$, alors le semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$ n'est pas localement borné puisque $\|a^{s-t}\|\|a^t\| \geqslant \|a^s\|$ pour $0 < t < s$.

On dira qu'une suite d'idempotents $(J_p)_{p\geqslant 1}$ d'une algèbre de Banach est *croissante* si $J_{p+1}J_p = J_p$ pour $p \geqslant 1$, ce qui implique que $J_qJ_p = J_p$ pour $q \geqslant p \geqslant 1$.

THÉORÈME 5.5. *Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$, soit $(a^t)_{t\in K^+}$ un semi-groupe dans une algèbre de Banach tel que* $\liminf_{t\to +\infty} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ *et soit A la sous-algèbre fermée engendrée par le semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$.*

Si le semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$ est localement borné et non nul, alors il existe une suite croissante $(J_p)_{p\geqslant 1}$ d'idempotents non nuls de A telle que $\hat{A} = \bigcup_{p\geqslant 1} \{\phi \in \hat{A} \mid \phi(J_p) = 1\}$ et telle que $\bigcup_{p\geqslant 1} J_pA$ est dense dans A.

Démonstration. Soit $\delta \in]\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\|, \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}[$ et soit $(t_p)_{p\geqslant 1}$ une suite décroissante d'éléments de K^+ qui converge vers 0 telle que $\|a^{t_p} - a^{t_p(n+1)}\| \leqslant \delta$ pour $p \geqslant 1$. Comme $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t\| \geqslant 1$, on peut supposer que $\|a^{t_p}\| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ pour $p \geqslant 1$. Soit J_p l'idempotent associé à a^{t_p} par le Théorème 5.2.

Soit $\phi \in \hat{A}$. Comme $\phi(a^t) \neq 0$ pour $t \in K^+$, on a $\limsup_{t\to 0^+} |\phi(a^t)| < +\infty$, et d'après la Propriété 2.2 il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $|\phi(a^t)| = e^{t\alpha}$ pour $t \in K^+$. Donc $|\phi(a^{t_p})| = |\phi(a^{t_{p+1}})|^{\frac{t_p}{t_{p+1}}}$ pour $p \geqslant 1$. Si $\phi(J_{p+1}) = 0$ alors $|\phi(a^{t_{p+1}})| < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. Donc on a également $|\phi(a^{t_p})| < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, ce qui montre que $\phi(J_p) = 0$. On a donc $J_p = J_{p+1}J_p$ pour $p \geqslant 1$, et la suite $(J_p)_{p\geqslant 1}$ est croissante. Considérons à nouveau $\phi \in \hat{A}$. Comme $\lim_{t\to 0^+} |\phi(a^t)| = 1$, on a $|\phi(a^{t_p})| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ pour p suffisamment grand, et par conséquent $\hat{A} = \bigcup_{p\geqslant 1} \{\phi \in \hat{A} \mid \phi(J_p) = 1\}$. Soit M l'adhérence de l'idéal $\bigcup_{p\geqslant 1} J_pA$, et soit $\pi : A \to A/M$ la surjection canonique. L'algèbre quotient A/M est radicale, et il résulte du Corollaire 5.4 que $\liminf_{t\to 0^+} \|\pi(a^t)\| = 0$. Comme $\pi(a^t)$ est localement borné, on voit que $\pi(a^t) = 0$ pour $t \in K^+$. Donc $M = A$, ce qui achève la démonstration. ∎

Le corollaire suivant montre qu'en ce qui concerne les semi-groupes continus pour $t > 0$ vérifiant $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ ou bien la sous-algèbre fermée engendrée par le semi-groupe est unitaire, ou bien on a une situation analogue à celle de l'Exemple 5.1.

Corollaire 5.6. *Soit $(a^t)_{t>0}$ un semi-groupe non nul dans une algèbre de Banach, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par $(a^t)_{t>0}$, et soit $n \geqslant 1$ un entier On suppose que $(a^t)_{t>0}$ est continu sur $]0, +\infty[$ et que $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(n+1)}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$.*

Alors ou bien A est unitaire, et dans ce cas il existe $u \in A$ tel que $a^t = e^{tu}$ pour $t > 0$, ou bien il existe une suite $(j_p)_{p\geqslant 1}$ d'idempotents non nuls de A vérifiant les conditions suivantes

(i) *$j_pj_q = 0$ pour $p \neq q$.*

(ii) *$\hat{A} = \bigcup_{p\geqslant 1} \{\phi \in \hat{A} \mid \phi(j_p) = 1\}$, et Span$\{j_pA\}_{p\geqslant 1}$ est dense dans A.*

(iii) *Pour $p \geqslant 1$ il existe $u_p \in j_pA$ tel que $j_pa^t = e^{tu_p}$ pour $t > 0$, où $e^v = j_p + \sum_{k\geqslant 1} \frac{t^kv^k}{k!}$ pour $v \in j_pA$.*

Démonstration. On reprend les notations de la démonstration du Théorème 5.5. Soit $(J_p)_{p\geqslant 1}$ la suite croissante d'idempotents donnée par le théorème. S'il existe $p \geqslant 1$ tel que $J_q = J_p$ pour $q \geqslant p$, alors A est unitaire d'unité $J := J_p$. Il résulte du Théorème 5.2 que $J \in a^{t_p}\tilde{A}$, où $\tilde{A}$ désigne l'algèbre obtenue en adjoignant une unité à A, et on a donc $\lim_{t\to 0^+} \|J - Ja^t\| = 0$. Il résulte alors du Théorème 9.4.2 de [9] qu'il existe $u \in A$ tel que $a^t = e^{tu}$ pour $t > 0$.

Supposons maintenant que pour tout $p \geqslant 1$ il existe $q > p$ tel que $J_q \neq J_p$. Quitte à remplacer la suite $(J_p)_{p\geqslant 1}$ par unez sous-suite on peut supposer que $J_p \neq J_{p+1}$ pour $p \geqslant 1$. Posons $j_1 = J_1$ et $j_p = J_p - J_{p-1}$ pour $p \geqslant 2$. Soit $p \geqslant 2$. On a $j_pJ_{p-1} = J_pJ_{p-1} - J_{p-1} = 0$, donc $j_pJ_q = j_pJ_{p-1}J_q = 0$ pour $1 \leqslant q \leqslant p-1$. Ceci montre que $j_pj_q = 0$ pour $p \neq q$. D'autre part $Span\{j_pA\}_{p\geqslant 1} = \bigcup_{p\geqslant 1} J_pA$, donc $Span\{j_pA\}_{p\geqslant 1}$ est dense dans A, ce qui implique que $\hat{A} = \bigcup_{p\geqslant 1} \{\phi \in \hat{A} \mid \phi(j_p) = 1\}$.

Soit $p \geqslant 1$. Comme $J_p \in a^{t_p}A$, et comme $j_p = J_pj_p$, on a $\lim_{t\to 0^+} \|j_p - j_pa^t\| = 0$. On déduit alors à nouveau du Théorème 9.4.2 de [9] qu'il existe $u_p \in j_pa^t$ tel que $j_pa^t = e^{tu_p}$ pour $t > 0$, ce qui achève la démonstration. ∎

Les résultats de cet article donnent une idée assez complète du comportement asymptotique en 0 de $\|a^t - a^{t(n+1)}\|$ pour $n \geqslant 1$ entier, et les constantes intervenant dans les diverses inégalités obtenues sont optimales. Signalons cependant que si A est unitaire d'unité I et si $x \in A$ est quasinilpotent alors $x = g(e^x - e^{(\gamma+1)x})$, où g est la fonction analytique construite au Lemme 3.1, ce qui donne un certain contrôle sur $\|x\|$ si $\|e^x - e^{(\gamma+1)x}\| < \frac{\gamma}{(\gamma+1)^{1+\frac{1}{\gamma}}}$. Il serait interessant d'expliciter les inégalités obtenues ainsi. La même question se pose pour les élements quasinilpotents x vérifiant $\|(I+x) - (I+x)^{n+1}\| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ car il ne semble pas que la fonction analytique sur le disque ouvert de centre 0 et de rayon $\frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$ associée à cette inégalité ait ses dérivées successives en 0 de signe constant pour n suffisamment grand.

On peut également se demander si on peut obtenir des résultats concernant le comportement asymptotique en 0 de $\|a^t - a^{t(\gamma+1)}\|$ pour $\gamma > 0$ dans le cas d'un semi-groupe quasinilpotent. Pour γ rationnel ceci revient à étudier le comportement de $\|a^{tp} - a^{t(p+q)}\|$ avec p et q entiers positifs premiers entre eux. On ne peut espérer obtenir des majorations de $\|x\|$ en fonction de $\|x^p - x^{p+q}\|$ pour $p \geqslant 2$ dans une algèbre de Banach radicale à cause des algèbres triviales où le produit de deux éléments quelconques est nul, mais on travaille ici avec des algèbres de Banach radicales R possédant un semi-groupe rationnel non nul, et on sait que de telles algèbres ont une structure très riche : le premier auteur a montré dans [6] que si on admet l'hypothèse du continu alors une telle algèbre contient une copie de toute algèbre intègre non unitaire de cardinal $2^{\aleph_0}$. En particulier si on admet l'hypothèse du continu il existe pour tout groupe abélien totalement ordonné $\mathcal{G}$ de cardinal $2^{\aleph_0}$ un morphisme injectif $\Phi : \mathcal{G}^+ \to R$ tel que $\Phi(s+t) = \Phi(s)\Phi(t)$ pour $s \in \mathcal{G}^+$, $t \in \mathcal{G}^+$, $\mathcal{G}^+$ désignant l'ensemble des éléments strictement positifs de $\mathcal{G}$.

Nous concluons cet article avec des résultats partiels concernant le cas où γ est un rationnel positif. Nous utiliserons la variante suivante du Théorème 5.2 (la formule explicite du Théorème 5.2 reste valable dans ce contexte, mais nous n'en aurons pas besoin plus loin).

LEMME 5.7. *Soit $n \geqslant 1$ un entier, soit x un élément d'une algèbre de Banach tel que $\rho(x) \geqslant \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ et $\rho(x - x^{n+1}) < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par x, soit $\tilde{A}$ l'algèbre obtenue en adjoignant une unité I à A et soit C_n le cercle de centre 0 et de rayon $\frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ orienté positivement.*

Alors $x - \lambda$ est inversible dans $\tilde{A}$ pour $|\lambda| = \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, et $J := \frac{1}{2i\pi}\int_{C_n} \lambda^{-1}x(x-\lambda I)^{-1}\, d\lambda$ est un idempotent non nul de $x\tilde{A} \subset A$ tel que $\phi(J) = 1$ pour $\phi \in \hat{A}, |\phi(x)| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, et $\phi(J) = 0$ pour $\phi \in \hat{A}, |\phi(x)| < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$.

Démonstration. Soit ϕ un caractère de $\tilde{A}$. Comme $|\,|\phi(x)| - |\phi(x)^{n+1}|\,| \leqslant \rho(x - x^{n+1})| < \frac{n}{(n+1)^{1+\frac{1}{n}}}$, on a $|\phi(x)| \neq \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. Posons $F(z) = 1$ pour $|z| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$ et $F(z) = 0$ pour $|z| < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, et soit C le cercle de centre 0 et de rayon $\|x\| + 1$ orienté positivement. Il résulte de propriétés standard du calcul fonctionnel holomorphe que $J := F(x) = \int_C (\lambda I - x)^{-1}\, d\lambda - \int_{C_n} (\lambda I - x)^{-1}\, d\lambda$ est un idempotent de $\tilde{A}$ tel que $\phi(J) = 1$ pour $\phi \in \hat{A}$, $|\phi(x)| > \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$, et $\phi(J) = 0$ pour $\phi \in \hat{A}$, $|\phi(x)| < \frac{1}{(n+1)^{\frac{1}{n}}}$. D'autre part $\frac{1}{2i\pi}\int_C (\lambda I - x)^{-1} d\lambda = I = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_n} \frac{I}{\lambda}\, d\lambda$, et $J = \frac{1}{2i\pi}\int_{C_n} \lambda^{-1}x(x-\lambda I)^{-1}\, d\lambda \in x\tilde{A} \subset A$. ∎

PROPOSITION 5.8. *Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$, soit $(a^t)_{t>0}$ un semi-groupe localement borné dans une algèbre de Banach, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par le semi-groupe $(a^t)_{t>0}$ et soient p et q deux entiers positifs.*

Si $\liminf_{t\to 0^+} \|a^t - a^{t(\frac{p}{q}+1)}\| < \frac{p}{q(p+1)^{1+\frac{1}{p}}}$, alors ou bien $a^t = 0$ pour $t > 0$, ou bien il existe une suite croissante $(J_k)_{k\geqslant 1}$ d'idempotents non nuls de A tels que $\hat{A} = \bigcup_{k\geqslant 1} \{\phi \in \hat{A} \mid \phi(J_k) = 1\}$ et telle que $\bigcup_{k\geqslant 1} J_k A$ est dense dans A.

Démonstration. Supposons qu'il existe $t \in K^+$ tel que $a^t \neq 0$. Comme le semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$ est localement borné, il résulte de propriétés élémentaires bien connues des fonctions sous-additives sur $\mathbb{R}$ que $\lim_{t\to+\infty} \|a^t\|^{\frac{1}{t}} = \inf_{t\in K^+} \|a^t\|^{\frac{1}{t}}$. Il existe donc $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\lim_{t\to+\infty} e^{t\alpha}\|a^t\| = 0$.

Soit A la sous-algèbre fermée engendrée par le semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$, soit $H = \{x \in A \mid xA = \{0\}\}$, soit $B := A/H$ et soit $\pi : A \to B$ la surjection canonique. Posons $b^t = \pi(a^t)$ pour $t \in K^+$. Si $x \in A$, et si $\pi(x)B = 0$, alors $xyz = 0$ pour $y \in A,\ z \in A$. En particulier $xa^t = 0$ pour $t \in K^+$ et $\pi(x) = 0$. On va maintenant utiliser des normes auxiliaires introduites en 1953 par Feller [8] pour étudier les semi-groupes d'opérateurs non bornés au voisinage de l'origine. Soit $M := \{y \in B \mid \|y\|_0 := \sup_{t\in K^+} e^{t\alpha}\|yb^t\| < +\infty\}$. Alors M est un idéal de B, et $b^t \in M$ pour $t \in K^+$, donc M est dense dans B.

On a $\|xy\|_0 \leqslant \|x\|\|y\|_0$ pour $x \in B,\ y \in M$. Soit M^* l'ensemble des éléments non nuls de M, et posons $\|x\|_1 = \sup_{y\in M^*} \frac{\|xy\|_0}{\|y\|_0}$ pour $x \in B$. On obtient une norme sous-multiplicative sur B, et on a $\|x\|_1 \leqslant \|x\|$ pour $x \in B$. Soit B_1 la complétée de B pour la norme $\|.\|_1$.

Comme $\|b^s y\|_0 \leqslant e^{-\alpha s}\|y\|_0$ pour $y \in B$, on a $\|b^s\|_1 \leqslant e^{-\alpha s}$ pour $s \in K^+$. Notons $\theta(\phi)$ la restriction de ϕ à B pour $\phi \in \hat{B}_1$. Il est clair que $\theta : \hat{B}_1 \to \hat{B}$ est continue et injective. Soit maintenant $\phi \in \hat{B}$. Pour $y \in M,\ t \in K^+$ on a $e^{t\alpha}|\phi(b^t)|\,|\phi(y)| \leqslant \|y\|_0$. Comme le semi-groupe $(b^t)_{t\in K^+}$ est localement borné, on a $\limsup_{t\to 0^+} |\phi(b^t)| < +\infty$, et il résulte alors de la Propriété 2.2 que $\lim_{t\to 0^+} |\phi(b^t)| = 1$. Donc $|\phi(y)| \leqslant \|y\|_0$ pour $y \in M$. On a alors $|\phi(y)|^{m+1} \leqslant \|y\|_0\|y\|_1^m$ pour $m \geqslant 1$, et $|\phi(y)| \leqslant \|y\|_1$ pour $y \in M$. Il existe donc $\psi \in \hat{B}_2$ tel que $\psi(y) = \phi(y)$ pour $y \in M$. Par continuité on a $\psi(y) = \phi(y)$ pour $y \in B$, et θ est surjective. D'autre part $\hat{A}$ est trivialement homéomorphe à $\hat{B}$, et on voit que $\hat{A}$ et $\hat{B}_1$ sont homéomorphes. On a vu que $\|b^s\|_1 \leqslant e^{-\alpha s}$ pour $s \in K^+$. Soit $L = \liminf_{t\to 0^+} \|b^t - b^{t(\frac{p}{q}+1)}\|_1$ et soit $(t_k)_{k\geqslant 1}$ une suite d'éléments de K^+ qui converge vers 0 telle que $L = \lim_{k\to+\infty}\|b^{t_k} - b^{t_k(\frac{p}{q}+1)}\|_1$. On a alors $\limsup_{k\to+\infty} \|b^{t_k(\frac{mp}{q}+1)} - b^{t_k(\frac{(m+1)p}{q}+1)}\|_1 \leqslant L$ pour $0 \leqslant m \leqslant q-1$, et par conséquent $\limsup_{t\to 0^+} \|b^{t_k} - b^{t_k(1+p)}\|_1 < \frac{p}{(p+1)^{1+\frac{1}{p}}}$. Comme $\hat{A}$ et $\hat{B}_1$ sont homéomorphes, on en déduit que $\limsup_{k\to+\infty} \rho(a^{t_k} - a^{t_k(1+p)}) < \frac{p}{(p+1)^{1+\frac{1}{p}}}$. Il résulte du Théorème 4.4 que B n'est pas radicale, donc A n'est pas radicale. Soit $\phi \in \hat{A}$. Comme le semi-groupe $(a^t)_{t\in K^+}$ est localement borné, on a $\lim_{t\to 0^+} |\phi(a^t)| = 1$. On voit donc qu'il existe $k_0 \geqslant 1$ tel que a^{t_k} vérifie les conditions du Lemme 5.7 pour $k \geqslant k_0$. Soit J_k l'idempotent associé à a^{t_k} par le Lemme 5.7. Les mêmes arguments que dans la démonstration du Théorème 5.5 montrent que la suite $(J_k)_{k\geqslant k_0}$ vérifie les conditions de la Proposition. ∎

On déduit alors immédiatement du Théorème 3.2 le résultat suivant.

COROLLAIRE 5.9. *Soit K un sous-corps de $\mathbb{R}$, soit $(a^t)_{t\in K^+}$ un semi-groupe localement borné dans une algèbre de Banach, soit A la sous-algèbre fermée engendrée par $(a^t)_{t\in K^+}$ et soient p et q deux entiers positifs.*

Si $\limsup_{t\to 0^+} \|(a^t - a^{t(\frac{p}{q}+1)})\| < \frac{p}{q(p+1)^{1+\frac{1}{p}}}$, *alors ou bien* $a^t = 0$ *pour* $t \in K^+$, *ou bien A est unitaire, et il existe un élément u de A tel que* $a^t = e^{tu}$ *pour* $t \in K^+$.

REFERENCES

1. R. F. Arens et A. P. Calderòn, Analytic functions of several Banach algebras elements, *Ann. of Math.* **62** (1955), 204–216.
2. M. Berkani, Inégalités dans les algèbres de Banach, *Bull. Soc. Math. Belg. Série B* **42** (1990), 105–116.
3. M. Berkani et J. Esterle, Banach algebras with left sequential approximate identities close to their square, *Oper. Theory Adv. Appl.* **24** (1985), 29–40.
4. M. Berkani, J. Esterle et A. Mokhtari, Distance entre puissances d'une unité approchée bornée, *J. London Math. Soc.*, à paraitre.
5. M. Berkani et M. Sarih, Extension de certaines inegalités dans les algèbres de Banach, *Pitman Res. Notes Math. Ser.* **377** (1998), 56–69.
6. J. Esterle, "Elements for a Classification of Commutative Radical Banach Algebras," Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 975, pp. 4–65, Springer, Berlin, 1983.
7. J. Esterle, "Quasimultipliers, Representations of H^∞, and the Closed Ideal Problem for Commutative Banach Algebras," Springer Lecture Notes in Mathematics, vol. 975, pp. 66–162, Springer, Berlin, 1983.
8. W. Feller, On the generation of unbounded semigroups of bounded operators, *Annals of Math.* **58** (1953), 166–174.
9. E. Hille et R. S. Phillips, "Functional Analysis and Semigroups," Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, vol. XXXI, Providence, RI, 1957.
10. A. Mokhtari, Distance entre éléments d'un semigroupe continu dans une algèbre de Banach, *J. Operator Theory* **20** (1988), 375–380.
11. A. Mokhtari, Thèse, Université Bordeaux I, 1988.
12. C. E. Rickart, "General Theory of Banach algebras," Van Nostrand, Princeton, 1960.