

Disponible en [www.sciencedirect.com](http://www.sciencedirect.com)[www.elsevier.es/RIAI](http://www.elsevier.es/RIAI)

Revista Iberoamericana de Automática e Informática industrial 8 (2011) 334–344

## Desarrollo de una Nueva Solución Compacta a la Cinemática de Manipuladores Robóticos basada en Cuaterniones Duales

J. Ramírez-Gordillo <sup>a,\*</sup>, E. A. Merchán-Cruz <sup>a</sup>, E. Lugo-González <sup>b</sup>, R. G. Rodríguez-Cañizo <sup>a</sup>,  
R. Ponce-Reynoso <sup>b</sup>, G. Urriolagoitia-Sosa <sup>b</sup>

<sup>a</sup> Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, IPN, Unidad Azcapotzalco, Av. de las Granjas #682, Col. Sta. Catarina, C.P. 02250, México D.F., México.

<sup>b</sup> Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica, IPN, Unidad Zacatenco, Av. IPN s/n, Col. Lindavista, C.P. 07140, México D.F., México.

### Resumen

Este trabajo presenta una nueva solución compacta basada en cuaterniones duales para el desarrollo de la cinemática de manipuladores robóticos. Se plantea el desarrollo de una herramienta en forma completa para poder observar claramente su correlación con el método de las matrices de transformación homogénea derivadas a partir de los parámetros de Denavit-Hartenberg. Se proponen herramientas para simplificar el uso de los cuaterniones duales para la obtención del modelo cinemático de mecanismos de cadena abierta definiendo la regla de la cadena aplicada a estos. Finalmente se ilustra su aplicación a un par de casos de estudio. *Copyright* ©2011 CEA. Publicado por Elsevier España, S.L. Todos los derechos reservados.

### Palabras Clave:

Modelo Cinemático, Cuaterniones Duales, Manipuladores Robóticos, Solución Compacta.

### 1. Introducción

Las matrices de transformación homogénea son contempladas como base a la solución en la cinemática de mecanismos articulados en la mayoría de la literatura, esta simplifica el problema cuando se trata de manipuladores no redundantes e hiper-redundantes. Sin embargo, un problema adicional que se presenta es la inherente singularidad debido a la ortogonalidad de las matrices en las configuraciones de los manipuladores de cadena abierta, pero el uso de una estrategia como los algoritmos genéticos multiobjetivo son capaces de resolver un sistema de ecuaciones no lineal de un problema sobredeterminado para una solución inversa, aún más rápida que un método numérico tradicional como el *Newton-Raphson* y con la ventaja de no requerir una estimación inicial aproximada de las restricciones para asegurar la convergencia del mismo. No obstante, esto implica un ajuste de coeficientes o pesos en cada ecuación para poder obtener una función de aptitud multiobjetivo que funcione adecuadamente y en forma auto-adaptiva, esto no es fácil de tratar cuando se quieren generar trayectorias como se menciona en Ramírez-Gordillo *et al.* (2009); Merchán-Cruz *et al.* (2011).

El desarrollo de una solución compacta al problema cinemático de manipuladores robóticos, conlleva a documentar el hecho que las soluciones propuestas en Althoefer (1996) y posteriormente en Merchán-Cruz (2005) no pueden generalizarse para el caso de manipuladores espaciales, porque en los algoritmos ó convergen para posición u orientación.

Sin embargo, al obtener los mejores resultados tratan de ajustar el algoritmo con algún método de corrección, aún así la desviación en la posición/orientación es grande. Por lo anterior, no solo es necesario encontrar una herramienta matemática que no permita generar singularidades en las configuraciones espaciales, sino también mantener una relación estrecha entre la posición/orientación como una entidad.

Los trabajos de Hamilton (1853), Cayley (1889), y posteriormente Tait *et al.* (1890) como base de los cuaterniones permiten desarrollar en este trabajo, una estrategia para obtener una solución práctica como el producto de matrices pero sin las singularidades y con un ahorro de tiempo en el cálculo en operaciones como se demuestra en Salamin (1995).

La herramienta del cual se habla, está basada en los cuaterniones y cuyas aplicaciones han sido realizadas en Berthold (1987); Funda (1988); Funda *et al.* (1990); Hart *et al.* (1994); Sánchez-Peña *et al.* (2005), que posteriormente sobre los cuaterniones duales se pueden observar en Perez *et al.* (2004); Daniilidis *et al.* (1996); Akyar (2008); Sahul *et al.* (2008); Husty *et al.* (2007); Pennestrì *et al.* (2009) como trabajos de recién aplicación sobre manipuladores robóticos y mecanismos de cadena cinemática cerrada.

\* Autor en correspondencia.

Correos electrónicos: [jramirezg@ipn.mx](mailto:jramirezg@ipn.mx) (Javier Ramírez-Gordillo), [eamerchan@ipn.mx](mailto:eamerchan@ipn.mx) (Emmanuel A. Merchán-Cruz), [elugog@ipn.mx](mailto:elugog@ipn.mx) (Esther Lugo-González), [rrodriguez@ipn.mx](mailto:rrodriguez@ipn.mx) (Ricardo G. Rodríguez-Cañizo), [rodoponce@yahoo.com](mailto:rodoponce@yahoo.com) (Rodolfo Ponce-Reynoso).

Esta herramienta puede generarse para que su empleo sea sistemático y simplifique las operaciones de cálculo, así como las restricciones en un algoritmo, para ello es necesario proponer un análisis con el objetivo de obtener una compatibilidad directa con (1) y descrita en Denavit *et al.* (1955).

$${}^{i-1}A_i = \begin{bmatrix} \cos\theta_i & -\text{sen}\theta_i \cos\alpha_i & \text{sen}\theta_i \text{sen}\alpha_i & a_i \cos\theta_i \\ \text{sen}\theta_i & \cos\theta_i \cos\alpha_i & -\cos\theta_i \text{sen}\alpha_i & a_i \text{sen}\theta_i \\ 0 & \text{sen}\alpha_i & \cos\alpha_i & d_i \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

En donde:

$\theta_i, \alpha_i, a_i, d_i$ : Son los parámetros Denavit-Hartenberg.  
 ${}^{i-1}A_i$ : Es la matriz de transformación Homogénea.

Así, la matriz homogénea final  ${}^0T_n$  es el producto de las matrices homogéneas en cada articulación y que describen el movimiento espacial de la herramienta en el robot como se muestra en (2).

$${}^0T_n = \prod_{i=1}^n {}^{i-1}A_i \quad (2)$$

**2. Definición del Problema: Cinemática de Manipuladores Basado en Cuaterniones Duales**

La cinemática de manipuladores robóticos a través del álgebra matricial es sencilla de comprender, pese a que las consideraciones de ortogonalidad y singularidades en sistemas redundantes causan complicaciones en el momento de generar trayectorias que definan orientación y posición sin tener la necesidad de solucionarla a través de un enfoque inverso. No obstante el uso del cuaternión dual permite evitar este problema, e incluso su configuración presenta opciones de interpolación de una trayectoria entre dos puntos, manteniendo una relación estrecha con los desplazamientos sucesivos de tornillo.

Los desplazamientos sucesivos de tornillo, describen el movimiento general de un cuerpo rígido por medio de una rotación en torno a un eje único y una traslación a lo largo de un eje paralelo al eje de rotación en forma finita o infinitesimal, simplificando el cálculo del Jacobiano y el análisis de las singularidades como se describen en Aracil *et al.* (2006) y en Kula *et al.* (2006), los cuales son empleados en la cinemática de cuerpos rígidos. Sin embargo, en Aissaoui *et al.* (1996) señala que existen ciertas incertidumbres en las direcciones de los ejes finito de tornillo en la valoración de la orientación y de la posición entre el movimiento de las articulaciones.

Por lo tanto, es necesario presentar en una forma convencional el empleo de cuaterniones duales a la solución del problema cinemático a través de sus ventajas siguientes:

- El álgebra del cuaternión dual es sencilla como el álgebra matricial y mantiene la ortogonalidad en la matriz.
- No hay seguridades en rotaciones espaciales y representan menor cantidad de operaciones en el cálculo que con matrices.

Por lo anterior, el marco de referencia y las operaciones sobre el producto del cuaternión dual pueden simplificar el problema a pesar que el producto de estos no es conmutativo ni asociativo.

**2.1 Cinemática de Manipuladores Basado en Cuaterniones Duales**

El uso de cuaterniones duales tiene la ventaja de proporcionar una formulación conveniente para determinar las ecuaciones cinemáticas de manipuladores robóticos en términos de los ejes en cada articulación, así, el número de ecuaciones necesarias para cada la posición de la herramienta se reducen. Por lo anterior, el marco de referencia que se establece y las operaciones sobre el producto del cuaternión dual permiten tener una relación entre rotación y traslación.

Con base en las transformaciones homogéneas relacionadas con la rotación  $R_{Zi-1,\theta_i}$ , traslación  $T_{Zi-1,d_i}$ , traslación  $T_{Xi-1,a_i}$  y rotación  $R_{Xi-1,\alpha_i}$  respectivamente, originadas en la representación Denavit-Hartenberg. Es posible obtener a través de los cuaterniones una expresión para generar la parte dual y configurar un cuaternión dual, donde se relacionen las rotaciones y traslaciones de cada articulación.

El plano hipercomplejo muestra en *i, j* y *k* un cuaternión puro y como un cuaternión por cada vector relacionado con el eje real *w*, donde un cuaternión puro cumple con algunas propiedades relacionadas con el producto vectorial (Figura 1).

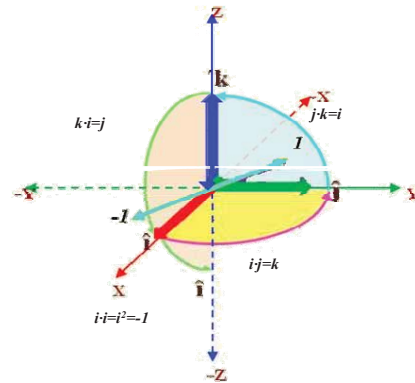


Figura 1: Plano Hipercomplejo

Con base en la teoría del cuaternión es posible obtener un cuaternión dual que describa la rotación y traslación de un cuerpo rígido respecto a un sistema de coordenadas (Figura 2).

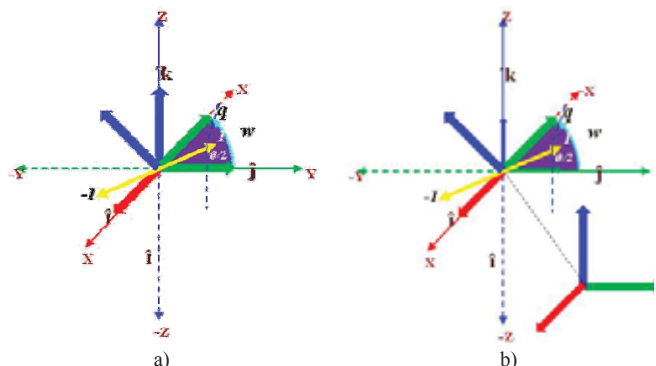


Figura 2: a) Rotación en *i* alrededor de *x*; b) Traslación del sistema sobre *x, y, z*.

La ecuación (3) describe un término de desplazamiento sobre el eje *Z* con *d* unidades en forma análoga de un cuaternión identificado con la entidad dual.

$$q_{z,de} = 0 + \frac{d}{2} k \varepsilon \tag{3}$$

Así, el producto de un cuaternión de rotación y la obtención de su dual de traslación se puede obtener a través de (4).

$$\varepsilon q_{z,de} = q_{z,\theta} q_{z,de} = \left( \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) k \right) \left( 0 + \frac{d}{2} k \varepsilon \right) = \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) k \varepsilon - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \varepsilon \tag{4}$$

En donde:

$\varepsilon q_{z,de}$  : Dual de rotación/traslación en Z.

Por lo tanto, el cuaternión dual  $DQ_{z,\theta,d}$  que describe la rotación de  $\theta$  sobre  $k$  seguida de una traslación en  $d$  unidades sobre el eje Z se muestra en (5).

$$DQ_{z,\theta,d} = \left[ \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) k - \frac{d}{2} \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \varepsilon \quad \frac{d}{2} \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) k \varepsilon \right] \tag{5}$$

Por otro lado, para el desplazamiento en el eje X de  $a$  unidades en forma análoga de un cuaternión identificado con la entidad dual se muestra en (6).

$$q_{x,ae} = 0 + \frac{a}{2} i \varepsilon \tag{6}$$

Así, mediante el mismo procedimiento se obtiene el dual de rotación/traslación para X como se describe en (7).

$$\varepsilon q_{x,ae} = q_{x,\alpha} q_{x,ae} = \left( \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) i \right) \left( 0 + \frac{a}{2} i \varepsilon \right) = \frac{a}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) i \varepsilon - \frac{a}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \varepsilon \tag{7}$$

Por lo tanto, el cuaternión dual  $DQ_{x,\alpha,a}$  que describe la rotación de  $\alpha$  sobre  $i$  seguida de una traslación con  $a$  unidades sobre el eje X se muestra en (8).

$$DQ_{x,\alpha,a} = \left[ \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) i - \frac{a}{2} \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) \varepsilon \quad \frac{a}{2} \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) i \varepsilon \right] \tag{8}$$

Sin embargo, el producto de los cuaterniones duales tiene dos representaciones basadas en la propiedad de no ser conmutativo ni asociativo, es por ello que se propone un método simple para recordar las operaciones de los cuaterniones duales en cualquiera de los casos.

Como primer paso, se contemplan las operaciones básicas de los cuaterniones con una pequeña tabulación, la cual es la base principal para multiplicar dos cuaterniones de manera simple. Se comienza tomando en cuenta el conjunto de los elementos complejos  $i, j, k$ ; estos se repiten en seguida formando una línea principal para representar las operaciones de producto entre ellos (Figura 3).

Así, en la parte inferior de la línea principal muestra los resultados de dichas operaciones de éstas, realizadas en sentido de izquierda a derecha; en la parte superior se muestran también los resultados de las operaciones hechas en sentido derecho a izquierdo, mostrándose en el extremo derecho todas aquellas operaciones del producto entre dos cuaterniones (figura 3).

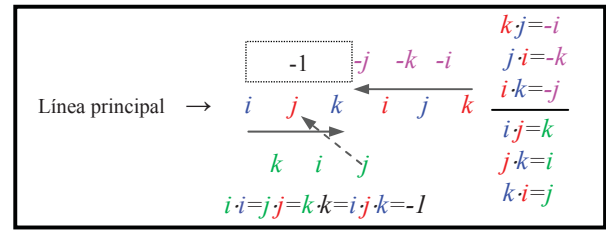


Figura 3: Producto del cuaternión

Ejemplo: Se toman de la línea principal los dos primeros elementos y se realiza en producto  $i \cdot j = k$ , el resultado se muestra en el primer elemento del conjunto mostrado por debajo de la línea principal, sucesivamente se realiza el mismo procedimiento para el siguiente par de elementos  $j \cdot k = i$  hasta obtener  $k \cdot i = j$  en sentido izquierda-derecha. Por otro lado, en sentido derecha-izquierda con los elementos  $k \cdot j = -i, j \cdot i = -k$  y  $i \cdot k = -j$  (Figura 3).

El mismo principio se utiliza para agregar elementos complementarios que permitan generalizar el producto de cuaterniones duales (Figura 4).

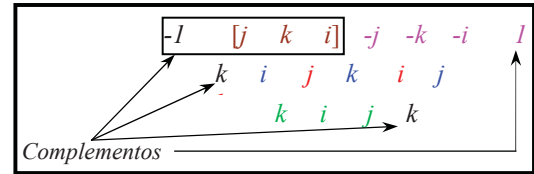


Figura 4: Elementos complementarios

Una vez organizados dichos elementos, se pueden realizar las operaciones que requiere el producto de dos cuaterniones duales, incorporando el símbolo  $\varepsilon$  y cuya propiedad es  $\varepsilon^2=0$ .

Así, es posible realizar el producto con  $\varepsilon$  de manera conmutativa frente a los operadores  $i, j, k$ . Por lo tanto, las operaciones se elaboran en sentido de abajo-arriba-derecha-izquierda y abajo-arriba-izquierda-derecha (Figura 5).

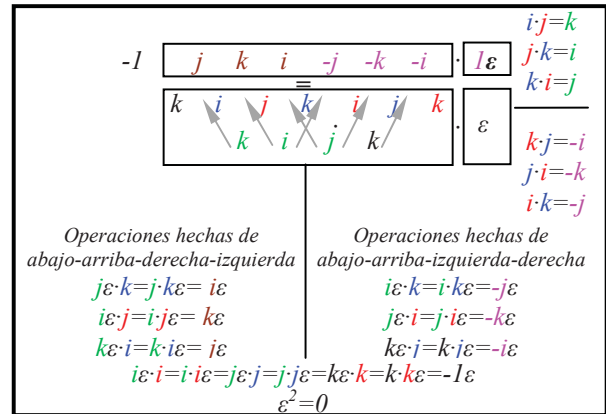


Figura 5: Elementos complementarios

Ejemplo: Se realiza el producto del primer par de elementos situados en el centro de la línea principal en el sentido abajo-arriba-derecha-izquierda  $j \cdot k = i \varepsilon$ , donde el operador  $\varepsilon$  se encuentra frente al número complejo  $j$ , sin embargo,  $j \cdot k = i \varepsilon$  tiene a  $\varepsilon$  frente al número complejo  $k$ , presentando en mismo resultado  $i \varepsilon$  (Figura 5).

En cambio, la operación  $k\varepsilon j = -i\varepsilon$  realizada en el sentido abajo-arriba-izquierda-derecha del último par de elementos (lado derecho) no es conmutativa pero el símbolo  $\varepsilon$  con los complejos  $k, j$  si lo es, así  $kj\varepsilon = -i\varepsilon$ . Por lo anterior, el producto de cuaterniones duales puede mostrarse en la tabla 1 y representada por (9).

Tabla 1: Productos de Cuaterniones duales

$q^*p$	$p_1, l$	$p_2, i$	$p_3, j$	$p_4, k$	$p_5, l\varepsilon$	$p_6, i\varepsilon$	$p_7, j\varepsilon$	$p_8, k\varepsilon$
$q_1, l$	1	i	j	k	$l\varepsilon$	$i\varepsilon$	$j\varepsilon$	$k\varepsilon$
$q_2, i$	i	-1	k	-j	$i\varepsilon$	- $l\varepsilon$	$k\varepsilon$	- $j\varepsilon$
$q_3, j$	j	-k	-1	i	$j\varepsilon$	- $k\varepsilon$	- $l\varepsilon$	$i\varepsilon$
$q_4, k$	k	j	-i	-1	$k\varepsilon$	$j\varepsilon$	- $i\varepsilon$	- $l\varepsilon$
$q_5, l\varepsilon$	$l\varepsilon$	$i\varepsilon$	$j\varepsilon$	$k\varepsilon$	0	0	0	0
$q_6, i\varepsilon$	$i\varepsilon$	- $l\varepsilon$	$k\varepsilon$	- $j\varepsilon$	0	0	0	0
$q_7, j\varepsilon$	$j\varepsilon$	- $k\varepsilon$	- $l\varepsilon$	$i\varepsilon$	0	0	0	0
$q_8, k\varepsilon$	$k\varepsilon$	$j\varepsilon$	- $i\varepsilon$	- $l\varepsilon$	0	0	0	0

$$\begin{aligned}
 Q_l &= q_1 * p_1 - q_2 * p_2 - q_3 * p_3 - p_4 * p_4 \\
 Q_{2i} &= q_2 * p_1 + q_1 * p_2 - q_4 * p_3 + p_3 * p_4 \\
 Q_{3j} &= q_3 * p_1 + q_4 * p_2 + q_1 * p_3 - p_2 * p_4 \\
 Q_{4k} &= q_4 * p_1 - q_3 * p_2 + q_2 * p_3 + p_1 * p_4 \\
 Q_{5l\varepsilon} &= q_5 * p_1 - q_6 * p_2 - q_7 * p_3 - p_8 * p_4 + q_1 * p_5 - q_2 * p_6 - q_3 * p_7 - q_4 * p_8 \\
 Q_{6i\varepsilon} &= q_6 * p_1 + q_5 * p_2 - q_8 * p_3 + p_7 * p_4 + q_2 * p_5 + q_1 * p_6 - q_1 * p_7 + q_3 * p_8 \\
 Q_{7j\varepsilon} &= q_7 * p_1 + q_8 * p_2 + q_5 * p_3 - p_6 * p_4 + q_3 * p_5 + q_4 * p_6 + q_1 * p_7 - q_2 * p_8 \\
 Q_{8k\varepsilon} &= q_8 * p_1 - q_7 * p_2 + q_6 * p_3 + p_5 * p_4 + q_4 * p_5 - q_3 * p_6 + q_2 * p_7 + q_1 * p_8
 \end{aligned} \tag{9}$$

De modo que el producto resultante de (5) y (8) permiten mantener las características del eslabón con respecto a un marco de referencia anterior y respecto a los movimientos relativos compatible con los parámetros Denavit-Hartenberg, al mismo tiempo que facilita tener en cualquier caso un marco de referencia establecido por el usuario y evitar las singularidades debido al manejo de ángulos medios en una relación de rotación/traslación de los sistemas coordenados en cada articulación como se muestra en (10).

$$DQ_{DH}^T = DQ_{z,\theta_1,\alpha} DQ_{x,\theta_2,\alpha} = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \\ \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\hat{i} \\ \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\hat{j} \\ \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right)\hat{k} \end{pmatrix} \begin{bmatrix} q_w \\ q_x \\ q_y \\ q_z \\ q_{x\varepsilon} \\ q_{y\varepsilon} \\ q_{z\varepsilon} \end{bmatrix} \tag{10}$$

$$\begin{pmatrix} -\frac{d_1}{2}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) - \frac{a_1}{2}\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \\ -\frac{d_1}{2}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \frac{a_1}{2}\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \\ \frac{d_1}{2}\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) + \frac{a_1}{2}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \\ \frac{d_1}{2}\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) - \frac{a_1}{2}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_1}{2}\right) \end{pmatrix} \varepsilon$$

### 2.2 Cuaterniones Duales y Matrices de Transformación Homogénea

La transformación de un cuaternión dual a una matriz de transformación homogénea es necesaria para visualizar los resultados, sin embargo, obtener una equivalencia con la matriz de transformación homogénea representada por la convención Denavit-Hartenberg tiene una parte compleja y ésta es el desplazamiento, el cual se demuestra en los siguientes desarrollos.

El producto de un cuaternión de referencia respecto a uno que gira en el espacio está representado por (11), esto implica que los elementos se reorganicen de tal forma que pueda ser fácil de interpretar.

$$\begin{matrix} \times & 1 & i & j & k & & A_1 & A_2 & A_3 & A_4 \\ W & w & wi & wj & wk & \Rightarrow & A1 & w & -x & -y & -z \\ Xi & xi & -x & xk & -xj & & Ai & xi & wi & -zi & yi \\ Yj & yj & -yk & -y & yi & & Aj & yj & zj & wj & -xj \\ Zk & zk & zj & -zi & -z & & Ak & zk & -yk & xk & wk \end{matrix} \tag{11}$$

Por otro lado, el producto de un cuaternión que gira en el espacio respecto al cuaternión de referencia está representado en (12), que de igual forma los elementos son reorganizados.

$$\begin{matrix} \times & W & Xi & Yj & Zk & & B1 & B2 & B3 & B4 \\ 1 & w & xi & yj & zk & \Rightarrow & B1 & w & xi & yj & zk \\ i & wi & -x & yk & -zj & & B2 & -x & wi & -zj & yk \\ j & wj & -xk & -y & zi & & B3 & -y & zi & wj & -xk \\ k & wk & xj & -yi & -z & & B4 & -z & -yi & xj & wk \end{matrix} \tag{12}$$

Reorganizadas en una forma matricial  $A$  y  $B$  pueden ser multiplicadas a través del álgebra matricial, como se muestra en (13) y su desarrollo en (14) y (15).

$$A \times B = \begin{bmatrix} w & -x & -y & -z \\ x & w & -z & y \\ y & z & w & -x \\ z & -y & x & w \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w & x & y & z \\ -x & w & -z & y \\ -y & z & w & -x \\ -z & -y & x & w \end{bmatrix} \tag{13}$$

$$M = \begin{bmatrix} w^2 + x^2 + y^2 + z^2 & wx - xw - yz + zy & wy + xz - yw - zx & wz - xy + yx - zw \\ xw - wx + zy - yz & w^2 + x^2 - y^2 - z^2 & xy - wz - zw + yx & xz + wy + zx + yw \\ yw - zx - wy + xz & yx + zw + wz + xy & w^2 - x^2 + y^2 - z^2 & yz + zy - wx - xw \\ zw + yx - xy - wz & zx - yw + xz - wy & zy + yz + xw + wx & w^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{bmatrix} \tag{14}$$

$$M = \begin{bmatrix} w^2 + x^2 + y^2 + z^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & w^2 + x^2 - y^2 - z^2 & 2xy - 2zw & xz + wy + zx + yw \\ 0 & 2xy + 2zw & w^2 - x^2 + y^2 - z^2 & yz + zy - wx - xw \\ 0 & 2xz - 2yw & 2yz + 2xy & w^2 - x^2 - y^2 + z^2 \end{bmatrix} \tag{15}$$

La matriz  $M$  de (15) puede simplificarse dividiendo entre  $w^2 + x^2 + y^2 + z^2$ .

$$M = \begin{bmatrix} \frac{w^2 + x^2 + y^2 + z^2}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{w^2 + x^2 - y^2 - z^2}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & \frac{2xy - 2zw}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & \frac{2yw + 2xz}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ 0 & \frac{2xy + 2zw}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & \frac{w^2 - x^2 + y^2 - z^2}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & \frac{2yz - 2xw}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ 0 & \frac{2xz - 2yw}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & \frac{2yz + 2xy}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & \frac{w^2 - x^2 - y^2 + z^2}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1 - 2(y^2 + z^2)}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & \frac{2xy - 2zw}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & \frac{2yw + 2xz}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ 0 & \frac{2(xy + zw)}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & \frac{1 - 2(x^2 + z^2)}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & \frac{2yz - 2xw}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \\ 0 & \frac{2(xz - yw)}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & \frac{2yz + 2xy}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} & \frac{1 - 2(x^2 + y^2)}{w^2 + x^2 + y^2 + z^2} \end{bmatrix} \tag{17}$$

Se sabe que  $w^2 + x^2 + y^2 + z^2 = I$ , entonces en (17) puede ser representada por (18), a través de ésta se transforma un cuaternión a una matriz de rotación y mediante las identidades conocidas se puede desarrollar la expresión (10)

$$R = \begin{bmatrix} 1 - 2(q_y^2 + q_z^2) & 2(q_x q_y - q_z q_w) & 2(q_x q_z + q_y q_w) \\ 2(q_x q_y + q_z q_w) & 1 - 2(q_x^2 + q_z^2) & 2(q_x q_z - q_y q_w) \\ 2(q_x q_z - q_y q_w) & 2(q_y q_z + q_x q_w) & 1 - 2(q_x^2 + q_y^2) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Al utilizar las identidades trigonométricas descritas por (19), (20), (21), (22), (23) y (24), son suficientes para reducir cada término de la ecuación (18).

$$\sin\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} \quad (19)$$

$$\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} \quad (20)$$

$$\cos(x)\cos(y) = \frac{\cos(x+y) + \cos(x-y)}{2} \quad (21)$$

$$\sin(x)\sin(y) = \frac{\cos(x-y) - \cos(x+y)}{2} \quad (22)$$

$$\sin(x)\cos(y) = \frac{\sin(x+y) + \sin(x-y)}{2} \quad (23)$$

$$\cos(x)\sin(y) = \frac{\sin(x+y) - \sin(x-y)}{2} \quad (24)$$

Al tomar la parte real de (10) y sustituir en (18) se obtiene cada término del primer renglón en la matriz R, simplificándose de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} R(1,1) &= 1 - 2(q_y^2 + q_z^2) = 1 - 2\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 \\ &= 1 - 2\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right) = 1 - 2\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 \left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 + \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2\right)\right) \\ &= 1 - 2\left(\left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right)^2\right) = 1 - 2\left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right) = 1 - \frac{2 - 2\cos\theta}{2} = \frac{2 - 2 + 2\cos\theta}{2} = \cos(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(1,2) &= 2(q_x q_y - q_z q_w) = 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1 - \cos\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos\alpha}{2}\right)\right) \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} - \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} - \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} - \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} \\ &= -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(-\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) \\ &= \left(\cos\alpha\right)\left(-2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = \left(\cos\alpha\right)\left(-2\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{2}\right) = -\sin(\theta)\cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(1,3) &= 2(q_x q_z + q_y q_w) = 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 4\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = 4\left[\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{2}\right]\left[\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2}\right] \\ &= 4\left(\frac{\sin(\theta)\sin(\alpha)}{4}\right) = \sin(\theta)\sin(\alpha) \end{aligned}$$

Para los elementos del segundo renglón de la matriz R.

$$\begin{aligned} R(2,1) &= 2(q_x q_y + q_z q_w) = 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1 - \cos\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos\alpha}{2}\right)\right) \\ &= \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} - \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} + \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{2} + \frac{2\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} \\ &= 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{\theta}{2} + \frac{\theta}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta}{2} - \frac{\theta}{2}\right)}{2} = \sin(\theta) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(2,2) &= 1 - 2(q_x^2 + q_z^2) = 1 - 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 \\ &= 1 - 2\left(\left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right)\left(\frac{1 - \cos\alpha}{2}\right) + \left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 1 - 2\left(\frac{(1 - \cos\alpha) + \cos\theta - \cos\theta - \cos\alpha}{4} + \frac{(1 + \cos\alpha) - \cos\theta - \cos\theta - \cos\alpha}{4}\right) \\ &= 1 - 2\frac{2 - 2\cos\theta - 2\cos\alpha}{4} = \cos(\theta)\cos(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(2,3) &= 2(q_x q_z - q_y q_w) = 2\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2\right) \\ &= 2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{1 - \cos\theta}{2}\right) - \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\frac{1 + \cos\theta}{2}\right)\right) \\ &= \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} - \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} - \frac{2\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} - \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)}{2} \\ &= \left(-2\cos(\theta)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = \left(-2\cos(\theta)\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2}\right) = -\cos(\theta)\sin(\alpha) \end{aligned}$$

Para los elementos del tercer renglón de la matriz R.

$$R(3,1) = 2(q_x q_z - q_y q_w) = 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) = 0$$

$$\begin{aligned} R(3,2) &= 2(q_x q_z + q_y q_w) = 2\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right) \\ &= 2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 + \sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2\right) \\ &= 2\left(\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\left(\left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 + \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2\right)\right) = 2\frac{\sin\left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2}\right) + \sin\left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\alpha}{2}\right)}{2} = \sin(\alpha) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R(3,3) &= 1 - 2(q_y^2 + q_z^2) = 1 - 2\left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 + \left(\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 \\ &= 1 - 2\left(\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right)^2 \left(\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)\right)^2 + \sin\left(\frac{\theta}{2}\right)^2 = 1 - 2\left(\frac{1 - \cos\alpha}{2}\right) = \frac{2 - 2 + 2\cos\alpha}{2} = \cos(\alpha) \end{aligned}$$

Finalmente, los elementos son validados para la matriz de transformación homogénea con respecto a la orientación definida en (1) de acuerdo a la convención Denavit-Hartenberg.

$$R = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta)\cos(\alpha) & \sin(\theta)\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta)\cos(\alpha) & -\cos(\theta)\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\alpha) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \quad (25)$$

Sin embargo, los elementos de la columna de traslación en la matriz homogénea de 4x4 son más complejos de visualizar.

Para ello, se toma la parte dual de (10) y con base en la matriz asimétrica (26), se emplea su transpuesta (27) para transformar la parte dual del cuaternión dual en un vector de traslación que describe el posicionamiento sobre los ejes principales (Figura 2 b).



$$H^+ = \begin{pmatrix} 0 & -t_x & -t_y & -t_z \\ t_x & 0 & -t_z & t_y \\ t_y & t_z & 0 & -t_x \\ t_z & -t_y & t_x & 0 \end{pmatrix} \quad (26)$$

$$H^- = H^{+T} = \begin{pmatrix} 0 & t_x & t_y & t_z \\ -t_x & 0 & t_z & -t_y \\ -t_y & -t_z & 0 & t_x \\ -t_z & t_y & -t_x & 0 \end{pmatrix} \quad (27)$$

Así, en cada representación matricial por cada componente se tiene:

$$H_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \quad H_y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad H_z = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

En donde la matriz asimétrica  $H$  es complemento de (18) que transforma de un cuaternión dual a un punto en el espacio cartesiano.

$$t = \hat{q}_0 2H^- \varepsilon \hat{q}_\varepsilon^T \quad (28)$$

No obstante, la expresión (28) necesita ser caracterizada en sus elementos básicos para operar. Por lo tanto, para encontrar la traslación sobre el eje  $X$  se obtiene como:

$$t_x = \hat{q}_0 2 \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon \hat{q}_\varepsilon^T \quad (29)$$

Donde el producto resultante es:

$$t_x = \begin{pmatrix} -2\cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_x}{2}\right) \left[ \frac{-d_i \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_x}{2}\right)}{2} - \frac{a_i \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_x}{2}\right)}{2} \right] \\ + 2\cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_x}{2}\right) \left[ \frac{-d_i \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_x}{2}\right)}{2} + \frac{a_i \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_x}{2}\right)}{2} \right] \\ - 2\sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_x}{2}\right) \left[ \frac{d_i \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_x}{2}\right)}{2} + \frac{a_i \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_x}{2}\right)}{2} \right] \\ + 2\sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_x}{2}\right) \left[ \frac{d_i \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_x}{2}\right)}{2} - \frac{a_i \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_x}{2}\right)}{2} \right] \end{pmatrix} \quad (30)$$

Al Simplificar (30) se tiene (31).

$$\begin{aligned} t_x &= a_i \left[ \left( \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_x}{2}\right) \right)^2 + \left( \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_x}{2}\right) \right)^2 - \left( \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_x}{2}\right) \right)^2 - \left( \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_x}{2}\right) \right)^2 \right] \\ &= a_i \left[ \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right)^2 \left( \sin\left(\frac{\alpha_x}{2}\right)^2 + \cos\left(\frac{\alpha_x}{2}\right)^2 \right) - \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right)^2 \left( \cos\left(\frac{\alpha_x}{2}\right)^2 + \sin\left(\frac{\alpha_x}{2}\right)^2 \right) \right] \\ &= a_i \left[ \left( \cos\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \right)^2 - \left( \sin\left(\frac{\theta_x}{2}\right) \right)^2 \right] = a_i \left[ \frac{1 + \cos(\theta_x)}{2} - \frac{1 - \cos(\theta_x)}{2} \right] = a_i \frac{2\cos\theta_x}{2} = a_i \cos(\theta_x) \end{aligned} \quad (31)$$

Ésta es la expresión del primer elemento en la cuarta columna de la matriz homogénea descrita en (1).

La traslación sobre el eje  $Y$  se obtiene por el mismo procedimiento que la expresión anterior.

$$t_y = \hat{q}_0 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon \hat{q}_\varepsilon^T \quad (32)$$

$$t_y = \begin{pmatrix} -2\sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_y}{2}\right) \left[ \frac{-d_i \sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_y}{2}\right)}{2} - \frac{a_i \cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_y}{2}\right)}{2} \right] \\ + 2\sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_y}{2}\right) \left[ \frac{-d_i \sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_y}{2}\right)}{2} + \frac{a_i \cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_y}{2}\right)}{2} \right] \\ + 2\cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_y}{2}\right) \left[ \frac{d_i \cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_y}{2}\right)}{2} + \frac{a_i \sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_y}{2}\right)}{2} \right] \\ - 2\cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_y}{2}\right) \left[ \frac{d_i \cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_y}{2}\right)}{2} - \frac{a_i \sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_y}{2}\right)}{2} \right] \end{pmatrix} \quad (33)$$

Al reducir (33), se obtiene (34) que corresponde al segundo elemento de la cuarta columna en la matriz (1) como  $R(2,4) = t_y = a_i \sin(\theta_y)$ .

$$\begin{aligned} t_y &= a_i \left[ 2\cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\left(\sin\left(\frac{\alpha_y}{2}\right)\right)^2 + 2\cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{\alpha_y}{2}\right)\right)^2 \right] \\ &= a_i \left[ 2\sin\left(\frac{\theta_y}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_y}{2}\right) \right] = a_i \left[ 2 \left( \frac{\sin\left(\frac{\theta_y}{2} + \frac{\theta_y}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_y}{2} - \frac{\theta_y}{2}\right) \right) \right] = a_i \sin(\theta_y) \end{aligned} \quad (34)$$

Finalmente, para calcular el desplazamiento sobre el eje  $Z$ , se realiza de manera similar que los procedimientos anteriores y se obtiene (36):

$$t_z = \hat{q}_0 2 \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \varepsilon \hat{q}_\varepsilon^T \quad (35)$$

$$t_z = \begin{pmatrix} -2\sin\left(\frac{\theta_z}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_z}{2}\right) \left[ \frac{-d_i \sin\left(\frac{\theta_z}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_z}{2}\right)}{2} - \frac{a_i \cos\left(\frac{\theta_z}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_z}{2}\right)}{2} \right] \\ - 2\sin\left(\frac{\theta_z}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_z}{2}\right) \left[ \frac{-d_i \sin\left(\frac{\theta_z}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_z}{2}\right)}{2} + \frac{a_i \cos\left(\frac{\theta_z}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_z}{2}\right)}{2} \right] \\ + 2\cos\left(\frac{\theta_z}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_z}{2}\right) \left[ \frac{d_i \cos\left(\frac{\theta_z}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_z}{2}\right)}{2} + \frac{a_i \sin\left(\frac{\theta_z}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_z}{2}\right)}{2} \right] \\ + 2\cos\left(\frac{\theta_z}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_z}{2}\right) \left[ \frac{d_i \cos\left(\frac{\theta_z}{2}\right)\cos\left(\frac{\alpha_z}{2}\right)}{2} - \frac{a_i \sin\left(\frac{\theta_z}{2}\right)\sin\left(\frac{\alpha_z}{2}\right)}{2} \right] \end{pmatrix} \quad (36)$$

Al reducir (36), se llega a obtener (37) como el tercer elemento de la cuarta columna de la matriz (1), donde  $R(3,4) = t_z = d_i$ .

$$t_z = d_i \left[ \begin{array}{c} \left( \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \right)^2 \left( \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \right)^2 + \left( \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \right)^2 \left( \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \right)^2 + \dots \\ \left( \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \right)^2 \left( \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \right)^2 + \left( \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \right)^2 \left( \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \right)^2 \end{array} \right] \quad (37)$$

$$= d_i \left[ \left( \sin\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \right)^2 \left[ \left( \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \right)^2 + \left( \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \right)^2 \right] + \left( \cos\left(\frac{\theta_i}{2}\right) \right)^2 \left[ \left( \sin\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \right)^2 + \left( \cos\left(\frac{\alpha_i}{2}\right) \right)^2 \right] \right] = d_i$$

Así, se demuestra la correspondencia de cada uno de los elementos sobre la herramienta propuesta en este trabajo, qué a través del empleo de cuaterniones duales, se relacionan los elementos que componen la matriz de transformación homogénea (1) y que define la correlación cinemática espacial obtenida a partir del planteamiento convencional de Denavit-Hartenberg para pares cinemáticos inferiores sobre una cadena cinemática abierta, comúnmente aplicada a manipuladores robóticos y donde la matriz de transformación homogénea, es ampliamente utilizada en la representación de posición-orientación de mecanismos articulados.

$${}_{i-1}T_i = \begin{bmatrix} \cos(\theta_i) & -\sin(\theta_i)\cos(\alpha_i) & \sin(\theta_i)\sin(\alpha_i) \\ \sin(\theta_i) & \cos(\theta_i)\cos(\alpha_i) & -\cos(\theta_i)\sin(\alpha_i) \\ 0 & \sin(\alpha_i) & \cos(\alpha_i) \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_i \cos(\theta_i) \\ a_i \sin(\theta_i) \\ d_i \\ 1 \end{bmatrix}$$

**3. Implementación y Resultados**

La implementación de los cuaterniones duales para el diseño de ecuaciones cinemáticas en mecanismos articulados ofrece una solución rápida en aplicaciones de cómputo, tanto en la generación de las ecuaciones por articulación como en el corto tiempo de obtención y su resultado es fácil en demostrar al igual que su visualización. Cabe mencionar que todos los algoritmos se programaron en MATLAB®.

CASO I: Para un manipulador robótico de dos grados de libertad no redundante y donde los parámetros Denavit-Hartenberg se muestran en la tabla 2; se obtienen las ecuaciones de enlace cinemático a través de cuaterniones duales (Figura 6).

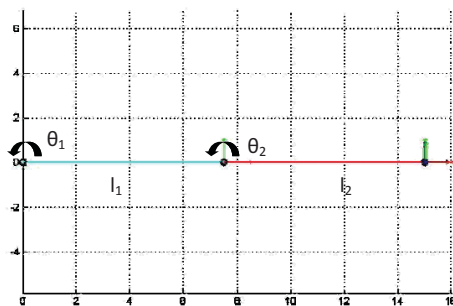


Figura 6: Robot de dos grados de libertad.

Tabla 2. Parámetros Denavit-Hartenberg de un mecanismo articulado de dos grados de libertad

i	θ	α	a	d
1	θ1	0	l1	0
2	θ2	0	l2	0

Al sustituir los parámetros de la tabla 2 en (10), se tiene para cada articulación la (38) y (39) respectivamente.

$${}^0DQ_1^{DH} = \left[ \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)k \quad \frac{l_1}{2}\cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right)i\varepsilon \quad \frac{l_1}{2}\sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right)j\varepsilon \right] \quad (38)$$

$${}^1DQ_2^{DH} = \left[ \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)k \quad \frac{l_2}{2}\cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)i\varepsilon \quad \frac{l_2}{2}\sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)j\varepsilon \right] \quad (39)$$

El producto de estos dos cuaterniones duales resulta en un tercer cuaternión dual que representa la posición y orientación de la herramienta sobre el manipulador y el cual se muestra en (40).

$${}^0DQ_2^{DH} = \left[ \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)k \quad \left( \frac{l_1}{2}\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \frac{l_2}{2}\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right) i\varepsilon \quad \dots \right] \quad (40)$$

$$\dots \left( \frac{l_1}{2}\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \frac{l_2}{2}\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) \right) j\varepsilon$$

Al transformar el cuaternión dual en una matriz de transformación homogénea se tiene:

$$T = \begin{bmatrix} 1 - 2\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)^2 & -2\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right) & 0 & \left[ 2\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\left(\frac{l_1}{2}\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \frac{l_2}{2}\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\right) \right. \\ -2\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\left(\frac{l_1}{2}\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \frac{l_2}{2}\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\right) & 1 - 2\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)^2 & 0 & \left. 2\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\left(\frac{l_1}{2}\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \frac{l_2}{2}\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\right) \right] \\ 2\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\left(\frac{l_1}{2}\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \frac{l_2}{2}\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\right) & 0 & 0 & \left. + 2\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\left(\frac{l_1}{2}\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2}{2}\right) + \frac{l_2}{2}\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)\right) \right] \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (41)$$

Al Simplificar (41) a través de las identidades se llega a expresión conocida (42).

$${}^0T_2 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_1 + \theta_2) & -\sin(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \cos(\theta_1) + l_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \\ \sin(\theta_1 + \theta_2) & \cos(\theta_1 + \theta_2) & 0 & l_1 \sin(\theta_1) + l_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (42)$$

Así, se observa que existe una total relación matemática entre un cuaternión dual y la matriz de transformación homogénea debido a su ortogonalidad.

CASO II: La metodología puede generalizarse para cualquier tipo de manipulador robótico con pares cinemáticos de revolución y prismático, para ejemplo la solución directa clásica de un robot PUMA (Figura 7).

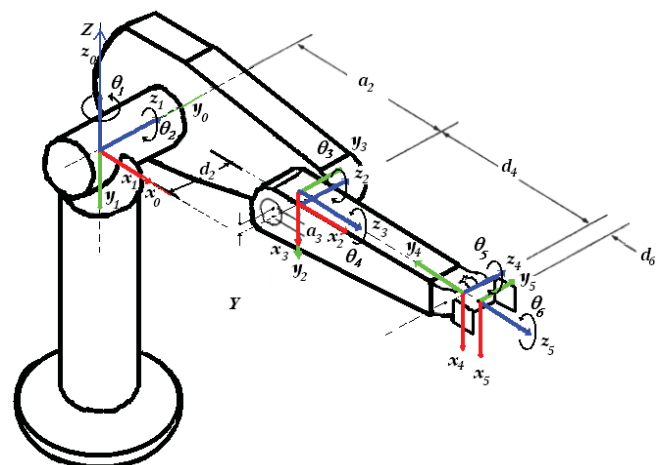


Figura 7: Sistema de coordenadas para el robot PUMA.

La Tabla 3 describe los Denavit-Hartenberg referentes a los sistemas de coordenadas en cada articulación del robot PUMA.

Tabla 3. Parámetros D-H del robot PUMA de seis grados de libertad

i	$\theta$	$\alpha$	a	d
1	$\theta_1=0$	$-\pi/0$	0	0
2	$\theta_2=0$	0	a2	d2
3	$\theta_3=\pi/2$	$\pi/2$	a3	0
4	$\theta_4=0$	$-\pi/2$	0	d4
5	$\theta_5=0$	$\pi/2$	0	0
6	$\theta_6=0$	0	0	d6

Así, se obtiene un conjunto de expresiones de la (43) a la (48) que describen a cada articulación en términos de cuaterniones duales como una secuencia de movimientos relativos entre los mismos elementos eslabonados del manipulador robótico y a través de una metodología sistemática basada en los parámetros Denavit-Hartenberg permite reducir hasta cierto punto, la cantidad de cálculos a emplear para relacionar dichos movimientos como una sola entidad que describa la relación espacial entre rotación/traslación del elemento final del manipulador y el marco de referencia fijo.

$${}^0DQ_1^{DH} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\theta_1}{2}\right) \quad 0\varepsilon \quad 0i\varepsilon \quad 0j\varepsilon \quad 0k\varepsilon \right] \quad (43)$$

$${}^1DQ_2^{DH} = \left[ \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right) \quad 0i \quad 0j \quad \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)k \quad -\frac{d2}{2} \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)\varepsilon \quad \frac{a2}{2} \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)i\varepsilon \quad \frac{a2}{2} \sin\left(\frac{\theta_2}{2}\right)j\varepsilon \quad \frac{d2}{2} \cos\left(\frac{\theta_2}{2}\right)k\varepsilon \right] \quad (44)$$

$${}^2DQ_3^{DH} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right)i \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right)j \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right)k \quad -\frac{a3\sqrt{2}}{4} \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right)\varepsilon \quad \frac{a3\sqrt{2}}{4} \cos\left(\frac{\theta_3}{2}\right)i\varepsilon \quad \frac{a3\sqrt{2}}{4} \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right)j\varepsilon \quad \frac{a3\sqrt{2}}{4} \sin\left(\frac{\theta_3}{2}\right)k\varepsilon \right] \quad (45)$$

$${}^3DQ_4^{DH} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right) \quad -\frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right)i \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right)j \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right)k \quad -\frac{d4\sqrt{2}}{4} \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right)\varepsilon \quad \frac{d4\sqrt{2}}{4} \sin\left(\frac{\theta_4}{2}\right)i\varepsilon \quad \frac{d4\sqrt{2}}{4} \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right)j\varepsilon \quad \frac{d4\sqrt{2}}{4} \cos\left(\frac{\theta_4}{2}\right)k\varepsilon \right] \quad (46)$$

$${}^4DQ_5^{DH} = \left[ \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\theta_5}{2}\right) \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \cos\left(\frac{\theta_5}{2}\right)i \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\theta_5}{2}\right)j \quad \frac{\sqrt{2}}{2} \sin\left(\frac{\theta_5}{2}\right)k \quad 0\varepsilon \quad 0i\varepsilon \quad 0j\varepsilon \quad 0k\varepsilon \right] \quad (47)$$

$${}^5DQ_6^{DH} = \left[ \cos\left(\frac{\theta_6}{2}\right) \quad 0i \quad 0j \quad \sin\left(\frac{\theta_6}{2}\right)k \quad -\frac{d6}{2} \sin\left(\frac{\theta_6}{2}\right)\varepsilon \quad 0i\varepsilon \quad 0j\varepsilon \quad \frac{d6}{2} \cos\left(\frac{\theta_6}{2}\right)k\varepsilon \right] \quad (48)$$

Finalmente, para obtener el cuaternión dual  ${}^0DQ_6^{DH}$  que relaciona la posición y orientación del efector final del manipulador PUMA con respecto a la base de éste, es necesario realizar el producto de los seis cuaterniones duales como se indica en (49).

De esta manera la relación entre las rotaciones de todas las articulaciones se pueden identificarse en los primeros cuatro elementos del cuaternión dual  $qw$ ,  $qx$ ,  $qy$ , y  $qz$ , mostradas en (50) a (53), los cuales describen la orientación espacial; los últimos cuatro elementos del cuaternión dual  $q_{w\varepsilon}$ ,  $q_{x\varepsilon}$ ,  $q_{y\varepsilon}$  y  $q_{z\varepsilon}$  se establecen en (54) a (57) y muestran el desplazamiento.

$${}^0DQ_6^{DH} = \prod_{i=1}^n {}^{i-1}DQ_i^{DH} = {}^0DQ_1^{DH} {}^1DQ_2^{DH} {}^2DQ_3^{DH} {}^3DQ_4^{DH} {}^4DQ_5^{DH} {}^5DQ_6^{DH} \quad (49)$$

$$qw = \frac{1}{4} \left( \begin{aligned} &\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6}{2}\right) - \\ &\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6}{2}\right) \end{aligned} \right) \quad (50)$$

$$qx = \frac{1}{4} \left( \begin{aligned} &\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \\ &\cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) \end{aligned} \right) \quad (51)$$

$$qy = \frac{1}{4} \left( \begin{aligned} &\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \\ &\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) \end{aligned} \right) \quad (52)$$

$$qz = \frac{1}{4} \left( \begin{aligned} &\sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6}{2}\right) - \\ &\sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 + \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 + \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 + \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 + \theta_6}{2}\right) \end{aligned} \right) \quad (53)$$





$$\begin{aligned}
 qz\varepsilon = & \frac{a_2}{8} \left( \begin{aligned} & \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \\ & \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) \end{aligned} \right) + \\
 & \frac{a_3}{8} \left( \begin{aligned} & \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \\ & \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \sin\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) \end{aligned} \right) + \\
 & \frac{d_2}{8} \left( \begin{aligned} & \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \\ & \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) \end{aligned} \right) + \\
 & \frac{d_4}{8} \left( \begin{aligned} & \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \\ & \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) \end{aligned} \right) + \\
 & \frac{d_6}{8} \left( \begin{aligned} & -\cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 - \theta_2 - \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \\ & \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 - \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) + \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 - \theta_5 - \theta_6}{2}\right) - \cos\left(\frac{\theta_1 + \theta_2 + \theta_3 + \theta_4 + \theta_5 - \theta_6}{2}\right) \end{aligned} \right)
 \end{aligned} \tag{57}$$

Las ecuaciones son mostradas en forma extensa para observar la intuitiva relación de orientación/posición expresado en un cuaternión dual. Sin embargo, puede mostrarse a través de la evaluación numérica tomando en cuenta los siguientes valores constantes y angulares para cada articulación:

$$\theta_1=90^\circ, \theta_2=0^\circ, \theta_3=90^\circ, \theta_4=0^\circ, \theta_5=0^\circ, \theta_6=0^\circ, a_2=431.8 \text{ mm}, a_3=-20.32 \text{ mm}, d_2=149.09 \text{ mm}, d_4=433.07 \text{ mm}, d_6=56.25 \text{ mm}.$$

El resultado numérico de cuaternión dual es el que se muestra en (58).

$${}^0DQ_6^{DH} = [0.5 \quad -0.5i \quad 0.5j \quad 0.5k \quad -272.6325 \varepsilon \quad 187.9275 i\varepsilon \quad 262.4725 j\varepsilon \quad 198.0875 k\varepsilon] \tag{58}$$

Su representación en una matriz homogénea es:

$${}^0T_6 = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & -149.09 \\ 0 & 0 & 1 & 921.12 \\ -1 & 0 & 0 & 20.32 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{59}$$

#### 4. Discusión

El método desarrollado presenta la ventaja de calcular la posición y orientación en una sola función cuando se aplica a mecanismos articulados hiper-redundantes de cadena cinemática abierta en análisis bidimensionales; para posicionar y orientar la herramienta cuando se quiere solucionar trayectorias en un análisis espacial, la ventaja es mayor, debido a que las ecuaciones cinemáticas de cada articulación generadas por el empleo de cuaterniones duales mantienen la ortogonalidad de la matriz homogénea final, esto permite el no generar singularidades cuando los requerimiento de posición y orientación se establecen.

Sin embargo, el desarrollo es únicamente para mecanismo articulados en serie y con parámetros Denavit-Hartenberg, esto debido a que un desarrollo cinemático tradicional con matrices homogéneas no hay una relación intuitiva entre rotación y traslación, observándose rápidamente que esta relación es independiente, por lo que en soluciones a la cinemática inversa a través de un algoritmo numérico conlleva aun mayor número de soluciones o configuraciones que satisfacen la condición de posición/orientación con una mayor probabilidad de tener una singularidad.

Son evidentes los resultados que el producto matricial requiere y que es en mayor cantidad de operaciones que los cuaterniones duales, también es obvio que el álgebra del cuaternión dual proporciona un método eficiente para la representación de ecuaciones en la solución a la cinemática, permitiendo reducir la cantidad de ecuaciones y del tiempo en el cálculo matemático. Mucho más se tiene que hacer con respecto al análisis de cuaternión dual en la finalidad de sustituir la tradicional representación del método homogéneo, sin embargo, comparado con otras estrategias como los cuaterniones dobles manifiesta una gran diferencia con respecto a los cuaterniones duales en la solución cinemática. El primero reúne dos características distintas provenientes de una matriz doble que reúne la rotación y traslación sobre un eje, muy similar al empleada por el desplazamiento de tornillo; sin embargo la reformulación conlleva a una transformación compuesta de cuaterniones dobles en un marco de referencia invariable y el cual intuitivamente aumenta la complejidad del análisis aun cuando éste pretende mantener la sistematización de la convención Denavit-Hartenberg.

Por otro lado, el método propuesto con cuaterniones duales mantiene la simplicidad de la convención Denavit-Hartenberg y la relación asociada de la rotación con la traslación es simple, además de su sencillez algebraica para el diseño de ecuaciones en la síntesis de mecanismos, facilita el diseño de funciones para la planeación de trayectorias. No obstante, se tiene la certeza que el método de los cuaterniones duales combinado con algoritmos evolutivos como estrategias de búsqueda para trayectorias pueden satisfacer condiciones de posición y orientación sin complejidad alguna. Así, se pueden tener valores angulares que cumplan con lo anterior sin llegar un extensivo desarrollo matemático en búsqueda de la solución al problema

cinemático inverso, debido a que se cuenta con las condiciones para que a través de un método heurístico se pueden tener valores aproximados tan aceptables como los obtenidos por el proceso determinístico con su porcentaje de error muy pequeño.

Finalmente, es importante destacar que el análisis algebraico en la solución a la cinemática directa es fácil y conforme aumentan los grados de libertad, aumentan la cantidad de elementos a tratar y a simplificar, pero esto no es imposible. Asimismo, la cantidad de operaciones entre el producto de dos cuaterniones duales consta de un total de 88 (48 multiplicaciones, 22 sumas y 18 restas), a comparación de 104 que necesitan el producto de dos matrices homogéneas de  $4 \times 4$  (64 multiplicaciones y 40 sumas); es decir, el producto de cuaterniones duales presenta un 15% menos en operaciones generales por un 25% menos en multiplicaciones respecto a el producto de matrices.

### Development of a New Compact Solution to the Kinematics of Robot Manipulators based on Dual Quaternions

#### Abstract

This paper presents a new compact solution based on dual quaternions for the development of the kinematics of robotics manipulators. The development of a tool to be able to observe clearly its correlation with the method the matrices of homogenous transformation derived of the parameters Denavit-Hartenberg. Tools set out to simplify the use of the dual quaternions for the obtaining of the kinematic model of mechanisms of open chain defining the rule of the applied chain these. Finally its application to a pair of cases of study acquires knowledge.

#### Keywords:

Kinematic Model, Dual Quaternions, Robot Manipulators, Compact Solution.

#### Agradecimientos

Los autores de este trabajo desean agradecer el apoyo al CONACYT México (proyecto SEP-CONACYT 49701/25232) y al IPN por los medios para la realización de esta investigación.

#### Referencias

- Aissaoui, R., Mecheri, H., Hagemester, N. & de Guise, J. A. (1996), Robust Estimation of Screw Axis from 3D pose using Dual Quaternion Algebra. *Laboratoire de recherche en imagerie et orthopédie, département de génie de la production automatisée. École de Technologie Supérieure. Montréal, (Québec), Canada.*
- Akyar, B. (2008), Dual Quaternions in Spatial Kinematics in an Algebraic Sense. *Turkish Journal of Mathematics*, ISSN:1300-0098 **32**(2), pp.373-391.
- Althoefer, K. (1996), Neuro-Fuzzy Motion Planning for Robotic Manipulators. *PhD Thesis, Department of Electric of Electronic and Electrical Engineering. King's College London, University of London, London, UK.*
- Aracil, R., Saltarén, R. J., Sabater, J. M. & Reinoso, O. (2006), Robots Paralelos: Máquinas con un Pasado para una Robótica del Futuro. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)*, ISSN: 1697-7912, **3**(1), 16-28.
- Berthold, K. P. H. (1987), Closed-Form Solution of Absolute Orientation Using Unit Quaternions. *Journal of the Optical Society of America*, ISSN:0740-3232, **4**, pp. 629-642.
- Cayley, A. (1889), On The Application of Quaternion to the Theory of Rotation. *The Collected Mathematical Papers, Cambridge at the University Press.*, **1**, pp. 405-409.
- Daniilidis, K. & Bayro-Corrochano, E. (1996), The Dual Quaternion Approach to Hand-eye Calibration. *Proceedings of the 13th International Conference on Pattern Recognition*, ISSN:0-8186-7282-X, **1**, pp. 318-322.
- Denavit, J. & Hartenberg, R. S. (1955), A Kinematic Notation for Lower-Pair Mechanics based on Matrices. *ASME, Journal Applied Mechanics*, ISSN: 0021-8936, **22**(2), pp. 215-221.
- Funda, J. (1988), A Computational Analysis Of Line- Oriented Screw Transformations In Robotics. *Department of Computer and Information Science, School of Engineering and Applied Science, University of Pennsylvania.*
- Funda, J., Taylor, R. H. & Paul, R. P. (1990), On Homogeneous Transforms, Quaternions, and Computational Efficiency. *IEEE Transactions on Robotics and Automation*, ISSN:1042-296X, **6**(3), pp. 382-388.
- Hamilton, W. R. (1853), Lecture on Quaternions. *The Halls of Trinity College.*
- Hart, J. C., Francis, G. K. & Kauffman, L. H. (1994), Visualizing Quaternion Rotation. *ACM Transactions on Graphics*, ISSN:0730-0301, **13**(3), pp. 256 - 276.
- Husty, M. L., Purner, F. M. & Schrocker, H.-P. (2007), A New and Efficient Algorithm for the Inverse Kinematics of a General Serial 6R Manipulator. *Mechanism and machine theory*, ISSN: 0094-114X, **42**(1), pp. 66-81.
- Kula, L. & Yayli, Y. (2006), Dual Split Quaternions and Screw Motions in Minkowski 3- Space. *Iranian Journal of Science & Technology, Transaction A*, ISSN: 1028-6276, **30**(A3).
- Merchán-Cruz, E. A. (2005), Soft-Computing Techniques in the Trajectory Planning of Trajectory Planning of Robot Manipulators Sharing a Common Workspace. *Ph.D. Thesis, Department of Automatic Control and Systems Engineering, The U. Sheffield, UK.*
- Pennestrì, E. & Valentini, P. P. (2009), Dual Quaternions as a Tool for Rigid Body Motion Analysis: A Tutorial with an Application to Biomechanics. *MULTIBODY DYNAMICS 2009, ECCOMAS Thematic Conference*, doi: 10.1.1.157.3845.
- Perez, A. & McCarthy, J. M. (2004), Dual Quaternion Synthesis of a Parallel 2-TPR Robot. *Proceedings of the WORKSHOP on Fundamental Issues and Future Research Directions for Parallel Mechanisms and Manipulators*, pp. 1-9.
- Ramírez-Gordillo, J., Muñoz-César, J. J., Gómez-Terán, A., Valencia-Lazcano, A. & Soria-Moya, A. L. (2009), Trajectory Generation of Robot Manipulator using an Artificial Potential Function and Genetic Algorithms. *Applied Mechanics and Materials: Electromechanical and Systems Engineering*, ISSN:1660-9336, **15**, 73-78.
- Sahul, S., Biswall, B. B. & Subudhi, B. (2008), A Novel Method for Representing Robot Kinematics using Quaternion Theory. *IEEE Sponsored Conference on Computational Intelligence, Control And Computer Vision In Robotics & Automation, NIT Rourkela*, pp. 75-82.
- Salamin, E. (1995), Applications of Quaternions to Computation with Rotations. *Working Paper, Stanford AI Lab*, pp. 1-9.
- Sánchez-Peña, R. S. & Alonso, R. J. (2005), Control de Vehículos Espaciales. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)*, ISSN: 1697-7912, **2**(3), 6-24.
- Tait, P. G. & M.A. (1890), An Elementary Treatise on Quaternions. *Cambridge at the University, Third Edition.*
- E. A. Merchán-Cruz, E. Lugo-González, J. Ramírez-Gordillo, R. G. Rodríguez-Cañizo, J. G. M. Sandoval-Pineda, L. H. Hernández-Gómez. (2011), Síntesis Genética de Mecanismos para Aplicaciones en Prótesis de Miembro Inferior. *Revista iberoamericana de automática e informática industrial (RIAI)*, ISSN: 1697-7912, **8**(2), 45-51.