ELSEVIER Linear Algebra and its Applications 322 (2001) 43–49
www.elsevier.com/locate/laa

Description de $AlgLatT/W(T)$ pour certaines extensions d'opérateurs auto-adjoints

M'hammed Benlarbi Delai

Départment de Mathématiques et Informatique, Faculté des Sciences, Université Mohammed V, BP 1014, Rabat, Morocco

Received 17 December 1997; accepted 22 June 2000

Submitted by R.A. Brualdi

Abstract

Soient H et K deux espaces de Hilbert complexes, A un opérateur auto-adjoint sur H tel que 0 ne soit pas dans le spectre ponctuel de A et N un opérateur nilpotent cyclique sur K. Dans cet article, nous donnons une description complète de $AlgLatT/W(T)$ pour certaines extensions T de A par N. Comme conséquence, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que de telles extensions soient réflexives. Nous montrons aussi que le défaut de réflexivité de ces extensions est fini. © 2001 Elsevier Science Inc. All rights reserved.

AMS classification: 47B

Keywords: Défaut de réflexivité; Opérateurs auto-adjoints; Opérateurs nilpotents; Hauteur d'un vecteur

1. Introduction

Soient H un espace de Hilbert complexe et $\mathscr{L}(H)$ l'algèbre des opérateurs linéaires bornés sur H. Pour $T \in \mathscr{L}(H)$, nous désignons par $LatT$ le treillis des sous-espaces fermés de H invariants pour T, par $AlgLatT$ l'algèbre des opérateurs $S \in \mathscr{L}(H)$ tels que $LatT \subset LatS$, par $W(T)$ la fermeture faible de l'algèbre des polynômes en T et par $\{T\}'$ le commutant de T. Nous appelons défaut de réflexivité de l'opérateur T, la quantité $\alpha(T) = \dim(AlgLatT/W(T))$. Un opérateur $T \in \mathscr{L}(H)$ est dit réflexif si $\alpha(T) = 0$. Soient maintenant H et K deux espaces de Hilbert complexes, $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que 0 n'est pas dans

E-mail address: benlarbi@fsr.ac.ma (M. Benlarbi Delai).

0024-3795/01/$ - see front matter
PII: S 0 0 2 4 - 3 7 9 5 (0 0) 0 0 2 1 0 - X

le spectre ponctuel de A et $N \in \mathscr{L}(K)$ un opérateur nilpotent cyclique d'ordre n de vecteur générateur $e \in K$. Soit T une extension de A par N, l'opérateur T s'écrit suivant la décomposition $H \oplus K$:

$$T = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad \textit{où } X \in \mathscr{L}(K, H).$$

Dans cet article, nous donnons une description explicite de $AlgLatT/W(T)$ dans le cas où $\overline{Vect}_A(T^n e)$ est de codimension finie dans H. Comme application, nous donnons une condition nécessaire et suffisante pour que T soit réflexif et nous déduisons que le défaut de réflexivité de T est au plus égal à celui de N. Plus précisément, nous montrons que $\alpha(T) \leqslant \frac{1}{2}n(n-1)$ et que cette majoration est la meilleure possible, ce qui constitue une réponse partielle au problème posé dans [2].

2. Notations et définitions

Nous commencons par donner brièvemment quelques propriétés des fonctions (non nécessairement bornées) d'opérateurs auto-adjoints [8,9]. Soient $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint et E sa mesure spectrale. Associons au couple (x, y) de vecteurs de H, la mesure complexe $E_{x,y}$ définie par $E_{x,y}(W) = (E(W)x, y)$ où W est un borélien du spectre de A (la mesure $E_{x,x}$ sera notée simplement E_x). Soient f une fonction mesurable complexe définie sur le spectre de A et $D_f = \left\{x \in H : f \in L^2 (E_x)\right\}$. Par $f(A) = \int_{\sigma(A)} f \, \mathrm{d}E$, nous entendons l'unique opérateur ayant pour domaine de définition le sous-espace D_f et caractérisé par:

$$(f(A)x, y) = \int_{\sigma(A)} f \, \mathrm{d}E_{x,y} \quad (x \in D_f, y \in H).$$

Le sous-espace D_f est dense dans H et l'opérateur $f(A)$ est de graphe fermé. De plus, si g est une fonction mesurable bornée, alors pour tout $x \in H$, $g(A)x \in D_f$ et $f(A)g(A)x = g(A)f(A)x$.

Dans toute la suite, si $A \in \mathscr{L}(H)$, nous désignons par $\sigma(A)$ le spectre de A, $\sigma_p(A)$ le spectre ponctuel de A. Si $y_1, y_2, \ldots, y_r \in H$, $\overline{Vect}_A(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ est le sous-espace fermé de H invariant pour A engendré par $y_1, y_2, \ldots, y_r$ et $Vect(y_1, y_2, \ldots, y_r)$ est le sous-espace de H engendré par $y_1, y_2, \ldots, y_r$.

3. Hauteur d'un vecteur x pour un opérateur auto-adjoint $A \in \mathscr{L}(H)$

Définition 1. Soient $A \in \mathscr{L}(H)$ et $x \in H$. La hauteur de x dans H, notée $v(x)$, est définie par $v(x) = \mathrm{Max}\{p \geqslant 0 : x \in A^p(H)\}$. Si $x \in A^p(H)$ pour tout $p \geqslant 0$, on convient $v(x) = \infty$.

Notations et remarques. Dans tout ce qui suit, si $A \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint, nous posons $\Delta_k = \sigma(A)\backslash]-1/k, 1/k[$ $(k \in \mathbb{N}^*)$ et nous associons à chaque entier p la suite de fonctions ${h_k}^{(p)}$ définie par:

$$ {h_k}^{(p)}(t) = \begin{cases} \frac{1}{t^p} & \text{pour } t \in \Delta_k, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1} $$

Notons que pour $p \in \mathbb{N}$ et $k \in \mathbb{N}^*$ donnés, ${h_k}^{(p)}(A)$ définit un opérateur linéaire borné sur H. De plus, on a les propriétés suivantes:

(i) pour tout $q \geqslant p$, ${h_k}^{(p)}(A)A^q = A^q {h_k}^{(p)}(A) = E(\Delta_k)A^{q-p}$,
(ii) pour tout $0 \leqslant q \leqslant p$, ${h_k}^{(p)}(A)A^q = A^q {h_k}^{(p)}(A) = {h_k}^{(p-q)}(A)$.

Commencons par donner quelques lemmes qui nous seront utiles dans la suite.

Lemme 2. *Si $A \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint tel que $0 \notin \sigma_p(A)$ et $x \in H$, alors $v(x) = \operatorname{Max}\{p \geqslant 0 : \lim_{k\to\infty} h_k^{(p)}(A)x$ existe dans $H\}$.*

Preuve. Si $x = A^p y \in A^p(H)$, alors $h_k^{(p)}(A)x = h_k^{(p)}(A)A^p y = E(\Delta_k)y$. Comme Δ_k croit vers $\sigma(A) - \{0\}$, $0 \notin \sigma_p(A)$ et E est σ-additive, alors $E(\Delta_k)$ converge vers I pour la topologie forte des opérateurs, par suite $\lim_{k\to\infty} h_k^{(p)}(A)x = y$. Inversement si $\lim_{k\to\infty} h_k^{(p)}(A)x = y$ existe dans H, alors $A^p y = \lim_{k\to\infty} E(\Delta_k)x = x$. $\square$

Le lemme suivant peut s'obtenir via la représentation spectrale des opérateurs auto-adjoints, cependant une démonstration implicite de ce lemme se trouve dans [9].

Lemme 3. *Si $A \in L(H)$ est auto-adjoint cyclique de vecteur générateur $x_0 \in H$, alors $H = \left\{f(A)x_0 : f \in L^2(E_{x_0})\right\}$.*

Lemme 4. *Soient $A \in \mathscr{L}(H)$ un opérateur auto-adjoint tel que $0 \notin \sigma_p(A)$ et $x_0 \in H$. Si $\overline{Vect}_A(x_0)$ est de codimension finie dans H, alors $v(x_0) = \operatorname{Max}\left\{p \geqslant 0 : \exists\, h^{(p)} \in L^2(E_{x_0})\right.$ tel que $\left.h^{(p)}(A)A^p = I\right\}$.*

Preuve. En vertu du Lemme 2, il suffit de montrer, que pour tout $p \geqslant 0$, $h_k^{(p)}(A)x_0$ converge dans H quand $k \to \infty$ si et seulement si il existe $h^{(p)} \in L^2(E_{x_0})$ telle que $h^{(p)}(A)A^p = I$. Supposons que $\lim_{k\to\infty} h_k^{(p)}(A)x_0$ existe dans H et soit $\left\{x_1, x_2, \dots x_q\right\}$ une base de vecteurs propres de $A|_{(H\ominus\overline{Vect}_A(x_0))}$. Il est clair que $\lim_{k\to\infty} h_k^{(p)}(A)(\bigoplus_{i=0}^{i=q} x_i)$ existe dans H, donc d'après le Lemme 3, il existe une fonction $h^{(p)} \in L^2(E_{\bigoplus_{i=0}^{i=q} x_i})$ telle que $\lim_{k\to\infty} h_k^{(p)}(A)(\bigoplus_{i=0}^{i=q} x_i) = h^{(p)}(A)$ $(\bigoplus_{i=0}^{i=q} x_i)$. Comme $E_{\bigoplus_{i=0}^{i=q} x_i} = \bigoplus_{i=0}^{i=q} E_{x_i}$, alors pour tout $i = 0, \dots, q$ on obtient $x_i \in D_{h^{(p)}}$, $\lim_{k\to\infty} h_k^{(p)}(A)x_i = h^{(p)}(A)x_i$ et $h^{(p)}(A)A^p x_i = \lim_{k\to\infty} E(\Delta_k)x_i =$

x_i. Compte tenu de la fermeture du graphe de $h^{(p)}(A)$, il résulte que pour tout $x \in H$ $A^p x \in D_h$ et $h^{(p)}(A)A^p x = x$.

Inversement, si $p \in \mathbb{N}$ et $h^{(p)} \in L^2(E_{x_0})$ telle que $h^{(p)}(A)A^p = I$, alors $\lim_{k\to\infty} h_k^{(p)}(A)x_0 = \lim_{k\to\infty} E(\Delta_k)h^{(p)}(A)x_0 = h^{(p)}(A)x_0$. □

Remarque. Si on note $v(x_0) = m$ dans le Lemme 4, on obtient les propriétés suivantes faciles à établir:

Pour tout $0 \leqslant p \leqslant m$, il existe $h^{(p)} \in L^2(E_{x_0})$ telle que:

(i) $h^{(p)}(A)A^p = I$ et $\lim_{k\to\infty} h_k^{(p)}(A)x_0 = h^{(p)}(A)x_0$,

(ii) pour tout $p \geqslant m$, $h^{(m)}(A)A^p = A^{p-m}$,

(iii) pour tout $0 \leqslant p \leqslant m$, $h^{(m)}(A)A^p x_0 = h^{(m-p)}(A)x_0$.

4. Description de AlgLatT/W(T)

Dans ce qui suit, $A \in \mathscr{L}(H)$ est un opérateur auto-adjoint tel que $0 \notin \sigma_p(A)$, $N \in \mathscr{L}(K)$ un opérateur nilpotent cyclique d'ordre n de vecteur générateur $e \in K$ et T l'opérateur défini sur $H \oplus K$ par:

$$T = \begin{bmatrix} A & X \\ 0 & N \end{bmatrix} \quad \text{où } X \in \mathscr{L}(K, H).$$

Théorème 5. *Soit T l'opérateur défini ci-dessus. Supposons que $\overline{Vect}_A(T^n e)$ est de codimension finie dans H. Soient $v(T^n e)$ la hauteur de $T^n e$ dans H et $m =$* Min$(v(T^n e), n-1)$. *Pour $0 \leqslant p \leqslant m$, soit $h^{(p)} \in L^2(E_{T^n e})$ telle que $h^{(p)}(A)A^p = I$. Il y a équivalence pour $S \in \mathscr{L}(H \oplus K)$ entre les deux assertions suivantes*:

(i) *$LatT \subset LatS$,*

(ii) *Il existe $Q \in W(T)$ et $C \in \mathscr{L}(H \oplus K)$ tels que $S = Q + C$ avec $C|_H = 0$,*
$C(T^i e) \in Vect_T(T^{n-m}e - h^{(m)}(A)T^n e)$ pour $i = 0, \ldots, n-m-1$,
$C(T^i e) \in Vect_T(T^i e - h^{(n-i)}(A)T^n e)$ pour $i = n-m, \ldots, n-1$.

Preuve. Supposons que $LatT \subset LatS$. On a $LatA \subset Lat(S|_H)$, donc $S|_H \in W(A)$ par [7] et par suite, d'après le calcul fonctionnel pour un opérateur auto-adjoint, il existe une fonction g mesurable bornée telle que $S|_H = g(A)$. D'autre part comme $\overline{Vect}_T(T^i e) = Vect(T^i e, T^{i+1}e, \ldots, T^{n-1}e) \oplus \overline{Vect}_A(T^n e) \in LatS$, on obtient en vertu du Lemme 3 $S(T^i e) = P_i(T)T^i e + f_i(A)T^n e$, avec P_i polynôme de degré inférieur ou égal à $n-i-1$ et $f_i \in L^2(E_{T^n e})(0 \leqslant i \leqslant n-1)$. Quitte à retrancher P_0 de S, nous pouvons supposer sans perdre de généralité que $P_0 = 0$.

1^{ere}**étape**. Soient $x \in H$ et $0 \leqslant i \leqslant n-1$. Nous allons évaluer de deux facons $S(T^i e + x)$. On a $S(T^i e + x) \in \overline{Vect}_T(T^i e + x) = Vect(T^i e + x, \ldots, T^{n-1}e + A^{n-i-1}x) + \overline{Vect}_A(T^n e + A^{n-i}x)$, il existe donc $Q_i \in \mathbb{C}[X]$ de degré inférieur ou égal à $n-i-1$ et $\alpha_i \in L^2(E_{T^n e + A^{n-i}x})$ tels que $S(T^i e + x) = P_i(T)T^i e +$

$f_i(A)T^n e + g(A)x = Q_i(T)(T^i e + x) + \alpha_i(A)(T^n e + A^{n-i}x)$. Il résulte que $(P_i(T) - Q_i(T))T^i e = Q_i(A)x + \alpha_i(A)(T^n e + A^{n-i}x) - g(A)x - f_i(A)T^n e \in Vect(T^i e, T^{i+1}e, \ldots, T^{n-1}e) \cap H = \{0\}$, donc on obtient:

$$f_i(A)T^n e + g(A)x = P_i(A)x + \alpha_i(A)(T^n e + A^{n-i}x). \tag{1}$$

Comme $h_k^{(n-i)}(A)A^{n-i} = E(\Delta_k)$ converge fortement vers I, on obtient en substituant $-h_k^{(n-i)}(A)T^n e$ à x dans l'equation (1), $f_i(A)A^{n-i}T^n e = (g(A) - P_i(A))T^n e$. Il résulte que pour tout $x \in \overline{Vect}_A(T^n e)$, $A^{n-i}x \in D_{f_i}$ et $f_i(A)A^{n-i}|_{\overline{Vect}_A(T^n e)} = g(A) - P_i(A)|_{\overline{Vect}_A(T^n e)}$ puisque $f_i(A)$ est de graphe fermé. D'autre part, si $\{e_1, e_2, \ldots, e_q\}$ est une base de vecteurs propres de $A|_{(H \ominus \overline{Vect}_A(T^n e))}$, en substituant $\bigoplus_{j=1}^{j=q} e_j$ à x dans (1), on obtient $f_i(A)T^n e = \alpha_i(A)T^n e$ et $\alpha_i(A)A^{n-i}e_j = (g(A) - P_i(A))e_j$ $(j = 1, \ldots, q)$. Il en résulte que $\alpha_i(A)A^{n-i}T^n e = (g(A) - P_i(A))T^n e$, donc pour tout $x \in H$ on a $A^{n-i}x \in D_{\alpha_i}$ et $\alpha_i(A)A^{n-i}x = (g(A) - P_i(A))x$ puisque $\alpha_i(A)$ est de graphe fermé. En tenant compte de $P_0 = 0$, il vient:

$$\begin{aligned} &S|_H = g(A) = \alpha_0(A)A^n, \\ &S(T^i e) = P_i(T)T^i e + \alpha_i(A)T^n e, \\ &\alpha_i(A)A^{n-i} = \alpha_0(A)A^n - P_i(A). \end{aligned}$$

2^{eme}**étape**. Posons $Q = \alpha_0(A)T^n$. Montrons que $Q \in W(T)$. Comme $\alpha_0(A)A^n = g(A)$ est borné, $\alpha_0(A)T^n$ l'est aussi puisque T est une extension de dimension finie de A. Soit la suite de fonctions $\alpha_{0,k}$ définie par $\alpha_{0,k}(t) = \alpha_0(t)\chi_{\{t:|\alpha(t)| \leqslant k\}}$ où χ est la fonction caractéristique. D'après le théorème de convergence dominée, il en résulte que $\alpha_{0,k}(A)A^n$ converge vers $\alpha_0(A)A^n$ pour la topologie faible des opérateurs et que $\alpha_{0,k}(A)T^n e$ converge vers $\alpha_0(A)T^n e$. Par suite, $\alpha_{0,k}(A)T^n$ converge faiblement vers $\alpha_0(A)T^n$. D'après le calcul fonctionnel pour un opérateur auto-adjoint, on peut approximer faiblement $\alpha_{0,k}(A)$ par un polyňome en A, ce qui permet de conclure. Posons maintenant $C = S - Q$ et montrons que C vérifie les conditions du théorème. On a $C|_H = 0$ et d'après la première étape, on peut écrire:

$$\begin{aligned} &C(T^i e) = P_i(T)T^i e + \alpha_i(A)T^n e - \alpha_0(A)T^{n+i}e, \\ &\alpha_i(A)A^{n-i} = \alpha_0(A)A^n - P_i(A). \end{aligned}$$

Si $0 \leqslant i \leqslant n-m-1$, en écrivant $P_i = X^{n-m-i}B_i(X) + R_i(X)$ avec $B_i \in \mathbb{C}[X]$ et R_i polynôme de degré inférieur ou égal à $n-m-i-1$, on obtient $\lim_{k\to\infty} R_i(A)h_k^{(n-i)}(A)T^n e = B_i(A)h^{(m)}(A)T^n e + \alpha_0(A)T^{n+i}e - \alpha_i(A)T^n e$. Par suite, $R_i = 0$ et $C(T^i e) = B_i(T)(T^{n-m}e - h^{(m)}(A)T^n e) \in Vect_T(T^{n-m}e - h^{(m)}(A)T^n e)$. Si $n-m \leqslant i \leqslant n-1$, alors on a $\alpha_i(A)T^n e = \alpha_0(A)T^{n+i}e - P_i(A)h^{(n-i)}(A)T^n e$, donc $C(T^i e) = P_i(T)(T^i e - h^{(n-i)}(A)T^n e) \in Vect_T(T^i e - h^{(n-i)}(A)T^n e)$.

Inversement, supposons les conditions du théorème satisfaites. Il suffit de montrer que $LatT \subset LatC$. Soit $y \in H \oplus K$, il existe $x \in H$ et $a_i \in \mathbb{C}$ tels que $y = x + \sum_{i=0}^{i=n-1} a_i T^i e$. Nous pouvons supposer que $y = x + \sum_{i=k}^{i=n-1} a_i T^i e$ avec $a_k = 1$.

Supposons que $0 \leqslant k \leqslant n-m-1$, donc $Cy \in Vect_T(T^{n-m}e - h^{(m)}(A)T^n e)$. En tenant compte de $h^{(m)}(A)A^i = A^{i-m}$ pour $i \geqslant m$ et $h^{(m)}(A)T^{n+i}e = h^{(m-i)}(A)T^n e$ pour $0 \leqslant i \leqslant m$, on obtient $T^{n-m-k}y - h^{(m)}(A)T^{n-k}y = T^{n-m}e - h^{(m)}(A)T^n e + \sum_{i=1}^{i=m-1} a_{m+k-i}(T^{n-i}e - h^{(i)}(A)T^n e) \in Vect(y, Ty, \ldots, T^{n-m-k}y) + \overline{Vect_A}(T^{n-k}y) = \overline{Vect_T}(y)$. Il en résulte que $T^{n-m}e - h^{(m)}(A)T^n e \in \overline{Vect_T}(y)$, donc $Cy \in \overline{Vect_T}(y)$. Si $n-m \leqslant k \leqslant n-1$, alors $Cy \in Vect_T(T^k e - h^{(n-k)}(A)T^n e)$. En tenant compte de $h^{(n-k)}(A)T^{n+i}e = h^{(n-k-i)}(A)T^n e$ pour $0 \leqslant i \leqslant n-k$ et $h^{(n-k)}(A)A^{n-k} = I$, on obtient $y - h^{(n-k)}(A)T^{n-k}y = T^k e - h^{(n-k)}(A)T^n e + \sum_{i=k+1}^{i=n-1} a_i(T^i e - h^{(n-i)}(A)T^n e) \in \overline{Vect_T}(y)$ donc $T^k e - h^{(n-k)}(A)T^n e \in \overline{Vect_T}(y)$ et $Cy \in \overline{Vect_T}(y)$. Ainsi pour tout $y \in H$, on a $Cy \in \overline{Vect_T}(y)$, ce qui achève la démonstration.

Remarque. Sous les mêmes conditions du théorème 5, l'opérateur T vérifie la propriété $AlgLatT \cap \{T\}' = W(T)$. Supposons que $LatT \subset LatS$ et $ST = TS$. En vertu du théorème 5, on peut écrire $S = Q + C$ avec $Q \in W(T)$, $C|_H = 0$ et $Ce = P_0(T)(T^{n-m}e - h^{(m)}(A)T^n e)$ ($P_0 \in \mathbb{C}[X]$). Posons $C_1 = C - P_0(T)(T^{n-m} - h^{(m)}(A)T^n)$. Comme $C_1 e = 0$ et $C_1 T = TC_1$, $C_1 = 0$ et donc $S = Q + P_0(T)(T^{n-m} - h^{(m)}(A)T^n) \in W(T)$.

Corollaire 6. *Le défaut de réflexivité $\alpha(T)$ de l'opérateur T est donné par la formule*:

$$\alpha(T) = nm - \frac{m(m+1)}{2}.$$

Preuve. D'après le théorème 5, on a $S \in AlgLatT$ si et seulement si S s'écrit d'une facon unique sous la forme $S = C + W(T)$ avec $C|_H = 0$, $Ce = 0$, $C(T^i e) \in Vect_T(T^{n-m}e - h^{(m)}(A)T^n e)$ pour $i = 1, \ldots n-m-1$ et $C(T^i e) \in Vect_T(T^i e - h^{(n-i)}(A)T^n e)$ pour $i = n-m, \ldots, n-1$; ce qui permet de calculer $\alpha(T)$. □

Corollaire 7. *L'opérateur T est réflexif si et seulement si $m = 0$.*

Preuve. En tenant compte que $m \leqslant n-1$, le résultat découle immédiatement du Corollaire 6. □

Remarques. Soient M_x l'opérateur de multiplication dans $L^2(\mu)$ où μ est une mesure positive bornée à support compact P et D une matrice diagonale inversible de $\mathbb{C}^q$. Considérons $A = M_x \oplus D$. Il est facile de voir que la condition $0 \notin \sigma_p(A)$ équivaut à $\mu\{0\} = 0$. Soient $f_0 \in L^2(\mu)$ et $y_0 \in \mathbb{C}^n$ tels que $T^n e = f_0 \oplus y_0$.

1. Supposons que μ est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue dt. Soit $a(t) \in L^1(dt)$ une fonction positive telle que $d\mu = a(t)dt$. En combinant le Corollaire 7 et le Lemme 2, on obtient T non réflexif si et seulement si $\int_P \frac{a(t)|f_0(t)|^2}{t^2}\mathrm{d}t < \infty$.

2. Supposons que $\mu = \sum_{r=0}^{r=\infty} c_r \delta_{x_r}$ telle que pour tout r, $x_r \neq 0$, $c_r > 0$ et $\sum_{r=0}^{r=\infty} c_r < \infty$ (δ_{x_r} est la mesure de Dirac au point x_r). On obtient T non réflexif si et seulement si $\sum_{r=0}^{r=\infty} \frac{c_r |f_0(x_r)|^2}{{x_r}^2} < \infty$.

Corollaire 8. *Le défaut de réflexivité $\alpha(T)$ de l'opérateur T est au plus égal à $\frac{1}{2}n(n-1)$, de plus cette majoration est la meilleure possible.*

Preuve. L'inégalité $\alpha(T) \leqslant \frac{1}{2}n(n-1)$ résulte immédiatement du Corollaire 6. Soit $A = M_x$ l'opérateur de multiplication par x dans $H = L^2([0,1], t^{2(n-1)}dt)$. Soient N nilpotent cyclique d'ordre n de vecteur générateur $e \in K$ et $X \in \mathscr{L}(K, H)$ défini par $X(N^i e) = \delta_{n-1,i}$ pour $i = 0, \ldots, n-1$ ($\delta_{n-1,i}$ est le symbole de Kronecher). Comme $h_k^{(n-1)}(A)$ converge vers la fonction $\frac{1}{t^{n-1}}$ dans $H = L^2([0,1], t^{2(n-1)}dt)$ et H est cyclique de vecteur générateur la fonction constante égale à 1 et, il résulte que $m = n-1$ par le Lemme 2, donc d'après le Corollaire 6, le défaut de réflexivité $\alpha(T)$ de l'opérateur T est égal à $\frac{1}{2}n(n-1)$. $\square$

Remerciement

L'auteur tient à remercier B. Charles et O. El-Fallah pour toutes les discussions fructueuses qu'il a eues avec eux.

References

[1] M. Benlarbi Delai, B. Charles, Description de AlgLatA pour un opérateur A algébrique, Linear Algebra Appl. 187 (1993) 105–108.
[2] M. Benlarbi Delai, Extension d'opérateur auto-adjoint et défaut de réflexivité, Linear Algebra Appl. 297 (1999) 81–85.
[3] J.B. Conway, A Course in Functional Analysis, Graduate Texts in Mathematics, Springer, Berlin.
[4] J.A. Deddens, P.A. Fillmore, Reflexive linear transformations, Linear Algebra Appl. 10 (1975) 89–93.
[5] A. Faouzi, Sur la forme de Jordan des extensions d'opérateurs linéaires (problème de Carleson), thèse d'Univérsité de Montepellier II.
[6] D. Hadwin, C. Laurie, Reflexive binormal operators, J. Func. Anal. 123 (1994) 99–108.
[7] D. Sarason, Invariant subspaces and unstarred algebras, Pac. J. Math. 17 (1966) 511–517.
[8] W. Rudin, Functional Analysis, Tata McGraw-Hill, New Delhi.
[9] K. Yosida, Functional Analysis, Springer, Berlin.