JOURNAL OF ALGEBRA 51, 619–630 (1978)

Über den Rand einer Fittingklasse endlicher auflösbarer Gruppen

K. DOERK

Department of Mathematics, University of Mainz, Mainz, Germany

Communicated by B. Huppert

Received April 7, 1977

In der Theorie der Schunckklassen endlicher auflösbarer Gruppen wurde das Konzept des Randes einer Schunckklasse mit Erfolg benutzt (z.B. in [7] und [12]). Dabei versteht man unter dem (Schunck-)Rand einer Schunckklasse $\mathscr{F}$ die Klasse aller Gruppen $G \notin \mathscr{F}$, deren echte Faktorgruppen alle in $\mathscr{F}$ liegen. Die vorliegende Arbeit entstand bei dem Versuch, auch in der Theorie der Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen durch Betrachtung von Rändern zu Ergebnissen zu kommen. Dabei wird dual zum Fall der Schunckklassen der (Fitting-)Rand $\mathbf{b}(\mathscr{F})$ einer Fittingklasse $\mathscr{F}$ als die Klasse aller endlicher auflösbarer Gruppen $G \notin \mathscr{F}$ definiert, deren echte Normalteiler alle in $\mathscr{F}$ liegen. Während jede Teilklasse eines Schunckrandes wieder ein Schunckrand ist, ist die entsprechende Aussage für Fittingränder i.a. nicht mehr richtig. In dieser Arbeit wird deshalb versucht, Beziehungen zwischen Fittingklassen $\mathscr{F}$ und $\mathscr{H}$ zu finden, für die $\mathbf{b}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{b}(\mathscr{H})$ gilt. Als Hauptergebnis wird in Satz 2 gezeigt, daß im Fall $\mathscr{F} \neq \mathscr{S}$ aus $\mathbf{b}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{b}(\mathscr{H})$ folgt, daß $\mathscr{F}$ und $\mathscr{H}$ in demselben Lockettabschnitt liegen. Insbesondere ist keine nichtleere echte Teilklasse des Randes einer Lockettklasse wieder Rand einer Fittingklasse.

Eng verknüpft mit diesen Fragen ist die Fittingklasse $\mathbf{X}(\mathscr{F})$, die von den $\mathscr{F}$-Radikalen der Gruppen aus $\mathbf{b}(\mathscr{F})$ erzeugt wird, Der Hauptteil des Beweises von Satz 2 besteht darin zu zeigen, daß für $\mathscr{F} \neq \mathscr{S}$ stets $\mathbf{X}(\mathscr{F})$ und $\mathscr{F}$ in demselben Lockett abschnitt liegen. Dabei ist i.a. $\mathbf{X}(\mathscr{F}) \neq \mathscr{F}$, und $X(\mathscr{F})$ ist i.a. auch von der kleinsten Fittingklasse $\mathscr{F}_*$ aus dem Lockettabschnitt zu $\mathscr{F}$ verschieden.

Als eine Anwendung dieser Ergebnisse erhalten wir in Satz 4 eine Charakterisierung der normalen Fittingklassen $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}\mathscr{S}_{p'}$ durch die Eigenschaft, daß ihre Ränder disjunkte Vereinigung nichttrivialer Fittingränder sind.

Alle in diese Arbeit betrachteten Gruppen seien (bis auf Bemerkung 1) endlich und auflösbar. Wir bezeichnen mit

$\mathscr{E}$	die Klasse aller endlichen Gruppen,
$\mathscr{S}$	die Klasse aller endlichen auflösbaren Gruppen,
$\mathscr{S}_\pi$	die Klasse aller endlichen auflösbaren π-Gruppen,
$\mathscr{N}$	die Klasse aller endlichen nilpotenten Gruppen,
$\mathscr{A}$	die Klasse aller abelschen Gruppen.

0021-8693/78/0512–0619$02.00/0

Mit $G \wr H$ bezeichnen wir das reguläre Kranzprodukt der Gruppe G mit der Gruppe H. Ist $U \leqslant G$, so wird mit $\tilde{U} \simeq U \times \cdots_{|H|} \times U$ die U entsprechende Untergruppe des Basisgruppe von $G \wr H$ bezeichnet. Insbesondere ist $\tilde{G}$ die Basisgruppe von $G \wr H$.

Die Grundtatsachen über Fittingklassen findet man in [8]. Im folgenden werden weitergehende Resultate aus der Theorie der Fittingklassen, die wir benutzen werden, kurz zusammengestellt.

Ist $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse, so setzen wir

$$\mathscr{F}^* = \{G \mid (G \times G)_{\mathscr{F}} \text{ ist subdirekt in } G \times G\}$$

und

$$\mathscr{F}_* = \bigcap \{\mathscr{H} \mid \mathscr{H}^* = \mathscr{F}^*\}.$$

Dann gilt:

(I) *P. Lockett* [16]. $\mathscr{F}^*$ ist eine Fittingklasse mit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}^* = (\mathscr{F}^*)^* \subseteq \mathscr{F}\mathscr{A}$. Außerdem ist

$$\{\mathscr{H} \mid \mathscr{H}^* = \mathscr{F}^*\} = \{\mathscr{H} \mid \mathscr{F}_* \subseteq \mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}^*\}.$$

Ist $\mathscr{H}$ eine weitere Fittingklasse mit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}$, so ist $\mathscr{F}^* \subseteq \mathscr{H}^*$.

Ist $\mathscr{F} = \mathscr{F}^*$, so nennen wir $\mathscr{F}$ eine Lockettklasse. Die Klasse von Fittingklassen $\mathscr{H}$ mit $\mathscr{H}^* = \mathscr{F}^*$ nennen wir den Lockettabschnitt zu $\mathscr{F}$. Nach (I) enthält der Lockettabschnitt zu $\mathscr{F}$ genau eine Lockettklasse, nämlich $\mathscr{F}^*$.

(II) *P. Hauck* [11]. Ist $\mathscr{F}$ eine Lockettklasse und sind G und H Gruppen mit $G \notin \mathscr{F}$, so ist $(G \wr H)_{\mathscr{F}} = \widetilde{(G_{\mathscr{F}})}$.

Sind $\mathscr{F}$ und $\mathscr{H}$ Fittingklassen, so ist deren (Fitting-) Produkt $\mathscr{F} * \mathscr{H} = \{G \mid G/G_{\mathscr{F}} \in \mathscr{H}\}$ wieder eine Fittingklasse. Ist $\mathscr{H}$ abgeschlossen bezüglich Bildung epimorpher Bilder, so stimmt $\mathscr{F} * \mathscr{H}$ mit dem üblichen Produkt $\mathscr{F}\mathscr{H}$ von Klassen überein.

(III) *P. Hauck* [11].

(a) Ist $\mathscr{F}$ eine Lockettklasse und $\mathscr{H}$ eine Fittingklasse, so ist $(\mathscr{F} * \mathscr{H})^* = \mathscr{F} * (\mathscr{H}^*)$.

(b) Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse und $\mathscr{H}$ eine Lockettklasse mit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}$. Sei ferner q eine Primzahl. Existiert zu jeder Gruppe $G \in \mathscr{F}$ eine natürliche Zahl n mit $(G \times \cdots_n \times G) \wr C_q \in \mathscr{H}$, so ist $\mathscr{F}^*\mathscr{S}_q \subseteq \mathscr{H}$.

Eine Fittingklasse $\mathscr{F} \neq \{1\}$ heißt normal, wenn in jeder Gruppe $G \in \mathscr{S}$ das $\mathscr{F}$-Radikal $G_{\mathscr{F}}$ eine $\mathscr{F}$-maximale Untergruppe von G ist.

(IV) *D. Blessenohl, W. Gaschütz* [2], *A. R. Makan* [15]. Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse. Dann sind gleichwertig:

(a) $\mathscr{F}^* = \mathscr{S}$,

(b) $\mathscr{S} = \mathscr{F}\mathscr{A}$.

(c) Der Untergruppenabschluß von $\{G/G_{\mathscr{F}} \mid G \in \mathscr{S}\}$ enthält nicht alle Gruppen aus $\mathscr{S}$.

(d) Ist $G \in \mathscr{F}$ und p eine Primzahl, so gibt es eine natürliche Zahl $n = n(G, p)$ mit

$$(G \times \underset{n}{\cdots} \times G) \wr C_p \in \mathscr{F}.$$

Dabei bezeichnen wir mit C_p die zyklische Gruppe der Ordnung p. (e) $\mathscr{F}$ ist eine normale Fittingklasse. Nach (I) ist demnach $\mathscr{S}_*$ die kleinste normale Fittingklasse. Schließlich benötigen wir noch das sogenannte Quasi-R_0-Lemma:

(V) *R. A. Bryce, J. Cossey* [3]. Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse und G eine Gruppe mit Normalteilern N_1 und N_2. Sei $N_1 \cap N_2 = 1$, $G/N_1N_2 \in \mathscr{N}$ und $G/N_1 \in \mathscr{F}$. Dann sind $G \in \mathscr{F}$ und $G/N_2 \in \mathscr{F}$ gleichwertig.

1. Einköpfige Gruppen

Wir nennen eine Gruppe G einköpfig, wenn G genau einen maximalen Normalteiler besitzt.

Hilfssatz 1. *Sei G eine Gruppe.*

(a) *Sei $N \lhd G$, G/N sei einköpfig und S sei ein minimales subnormales Supplement zu N in G. Dann ist S einköpfig.*

(b) *Die Gruppe G wird von ihren einköpfigen Subnormalteilern erzeugt. Bezeichnen wir mit K das Erzeugnis der maximalen Normalteiler der einköpfigen Subnormalteiler von G, so ist G/K nilpotent und die p-Sylowgruppen von G/K haben Exponent $\leqslant p$.*

(c) *Seien N_1, N_2 Normalteiler von $G \neq N_1N_2$ mit $N_1 \cap N_2 = 1$ und einköpfigem G/N_i für $i = 1, 2$. Sei S ein minimales subnormales Supplement zu N_1N_2 in G. Dann ist S eine einköpfige Gruppe mit $S/S \cap N_i \simeq G/N_i$ für $i = 1, 2$. Ist außerdem G/N_1N_2 eine p-Gruppe, so ist $S/(S \cap N_1)(S \cap N_2)$ eine zyklische p-Gruppe $\neq 1$.*

Beweis. (a) Sei M/N der einzige maximale Normalteiler von G/N. Wegen $SM = G$ ist dann $S \cap M$ ein maximaler Normalteiler von S. Sei L ein weiterer maximaler Normalteiler von S. Dann ist $L \lhd\lhd G$ und nach Wahl von S ist $LN < G$. Folglich ist $L \leqslant M$ und S ist einköpfig.

(b) Sei M das Erzeugnis aller einköpfigen Subnormalteiler von G. Ist $M < G$, so sei N ein maximaler Normalteiler von G mit $M \leqslant N$. Nach (a) gibt es dann einen einköpfigen Subnormalteiler S von G mit $G = SN$. Wegen $S \leqslant M$ folgt dann $G = N$, entgegen $N < G$. Also ist $M = G$.

Offensichtlich wird G/K von Subnormalteilern von Primzahlordnung erzeugt. Damit ist G/K nilpotent. Angenommen, es gebe eine zyklische Untergruppe V/K von G/K mit $|V/K| = p^2$. Da G/K nilpotent ist, ist V subnormal in G. Sei nun S ein minimales subnormales Supplement zu K in V. Nach (a) ist S ein einköpfiger Subnormalteiler von G. Folglich ist $|V/K| = |KS/K|$ ein Teiler von p, entgegen $|V/K| = p^2$. Damit haben die p-Sylowgruppen von G/K Exponent $\leqslant p$.

(c) Ist $S = G$, so ist nichts zu zeigen. Sei deshalb $S < G$ und M ein maximaler Normalteiler von G mit $S \leqslant M$. Wir setzen $M_i = M \cap N_i$ für $i = 1, 2$ und zeigen, daß M, M_1, M_2, S anstatt G, N_1, N_2, S die in (c) gestellten Voraussetzungen erfüllen. Eine Induktion nach der Gruppenordnung zeigt dann, daß S die gewünschten Eigenschaften besitzt.

Wegen $SN_1N_2 = G$ und $G \neq N_1N_2$ ist $M_1M_2 \neq M$. Angenommen, es sei $SN_i < G$ für ein i. Da G/N_i einköpfig ist und der einzige maximale Normalteiler von G/N_i den Normalteiler N_1N_2/N_i enthält, folgte $G = SN_1N_2 < G$. Also ist $G = SN_1 = SN_2 = MN_1 = MN_2$. Folglich ist $G/N_i \cong M/M_i \cong S/S \cap N_i$ für $i = 1, 2$. Insbesondere folgt $M = SN_1 \cap M = S(N_1 \cap M) = SM_1 = SM_1M_2$. Außerdem ist S ein minimales subnormales Supplement zu M_1M_2 in M. Wegen

$$[M \cap N_1N_2, M] \leqslant [N_1N_2, M] = [N_1, M][N_2, M] \leqslant M_1M_2$$

ist $(M_1 \cap N_1N_2)/M_1M_2 \leqslant \mathbf{Z}(M/M_1M_2)$. Sei nun G/N_1N_2 eine zyklische p-Gruppe. Dann ist $M/M \cap N_1N_2 \cong G/N_1N_2$ eine zyklische p-Gruppe. Folglich ist M/M_1M_2 eine abelsche Gruppe, deren Ordnung durch p teilbar ist. Da M/M_1M_2 einköpfig ist, ist M/M_1M_2 selbst eine zyklische p-Gruppe $\neq 1$.

Hilfssatz 2. *Sei p eine Primzahl und seien G_1, G_2 zwei einköpfige Gruppen, deren Kommutarfaktorgruppen p-Gruppen sind. Dann gibt es eine einköpfige Gruppe S mit folgenden Eigenschaften: S besitzt zwei Normalteiler S_1 und S_2 mit $S_1 \cap S_2 = 1$, S/S_1S_2 ist eine zyklische p-Gruppe $\neq 1$ und $S/S_i \cong G_i$ für $i = 1, 2$.*

Beweis. Sei $G = G_1/G_2$ ein direktes Produkt von G_1 mit G_2 mit vereinigter Faktorgruppe der Ordnung p (siehe [13], I, 9.11). Dann gibt es in G Normalteiler N_1, N_2 mit $G/N_i \cong G_i$ für $i = 1, 2$, $|G/N_1N_2| = p$ und $N_1 \cap N_2 = 1$. Nach Hilfssatz 1 hat dann ein minimales subnormales Supplement S zu N_1N_2 in G die gewünschten Eigenschaften.

2. Die Fittingklasse $\mathbf{X}(\mathscr{F})$

Definition. Ist $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse, so sei $\mathbf{b}(\mathscr{F})$ die Klasse aller Gruppen $G \notin \mathscr{F}$, deren echte Normalteiler alle in $\mathscr{F}$ liegen. Offensichtlich besteht $\mathbf{b}(\mathscr{F})$ aus einköpfigen Gruppen, deren maximaler Normalteiler das $\mathscr{F}$-Radikal ist. Wir nennen $\mathbf{b}(\mathscr{F})$ den Rand von $\mathscr{F}$. Einfache Uberlegungen zeigen, daß $\mathscr{F}$ sich wieder durch seinen Rand bestimmen läßt: Es ist $\mathscr{F}$ die Klasse derjenigen Gruppen, die keine Subnormalteiler aus $\mathbf{b}(\mathscr{F})$ besitzen.

Ist π eine Primzahlmenge, so setzen wir

$$\mathbf{b}_\pi(\mathscr{F}) = \{G \in \mathbf{b}(\mathscr{F}) \mid | G/G_{\mathscr{F}} | \in \pi\}.$$

Wir verschaffen uns zunächst die Möglichkeit, aus Randgruppen neue Randgruppen zu konstruieren:

Hilfssatz 3. *Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse und p eine Primzahl. Sei außerdem $G_1 \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F})$ und G_2 eine einköpfige Gruppe aus $\mathscr{F}$ mit $\mathbf{O}^p(G_2) < G_2$. Bilden wir zu G_1 und G_2 die Gruppe S aus Hilfssatz 2, so ist $S \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F})$.*

Beweis. Wäre $S \in \mathscr{F}$, so wäre wegen $S/S_2 \cong G_2 \in \mathscr{F}$ auch $G_1 \cong S/S_1 \in \mathscr{F}$ nach (V), entgegen $G_1 \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F})$. Also ist $S \notin \mathscr{F}$. Sei nun M der maximale Normalteiler von S. Wegen $M/S_1 \lhd S/S_1 \cong G_1 \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F})$ ist $M/S_1 \in \mathscr{F}$. Außerdem ist wegen $M/S_2 \trianglelefteq S/S_2 \cong G_2 \in \mathscr{F}$ auch $M/S_2 \in \mathscr{F}$. Aus (V) folgt daher $M \in \mathscr{F}$. Da S einköpfig ist, ist S damit in $\mathbf{b}_p(\mathscr{F})$.

Ein Schunckrand kann nach [7] endlich viele Isomorphietypen von Gruppen enthalten. Der nächste Satz zeigt, daß dies für Fittingklassen $\mathscr{F}$ mit $\mathscr{F} \neq \mathscr{S}$ nie der Fall ist:

Satz 1. *Sei p eine Primzahl und $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse mit $\mathbf{b}_p(\mathscr{F}) \neq \varnothing$. Dann gibt es zu jeder Gruppe $G_1 \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F})$ eine Gruppe $S \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F})$, die G_1 als echte Faktorgruppe besitzt. Insbesondere enthält $\mathbf{b}_p(\mathscr{F})$ unendlich viele nichtisomorphe Gruppen.*

Beweis. Sei zunächst $C_p \in \mathscr{F}$. Dann ist nach [10] auch die zyklische Gruppe G_2 der Ordnung p^n in $\mathscr{F}$ enthalten. Wir bilden zu G_1 und G_2 die Gruppe $S \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F})$ aus Hilfssatz 3. Nach Hilfssatz 2 ist G_1 eine Faktorgruppe von S. Wählt man außerdem n hinreichend groß, so ist $| G_1 | < | S |$.

Ist $C_p \notin \mathscr{F}$, so ist $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{S}_{p'}$ nach [10]. Wir bilden nun mit G_1 und $G_2 = G_1$ die Gruppe S aus Hilfssatz 2. Wegen $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{S}_{p'}$ ist dabei $S \notin \mathscr{F}$. Dieselben Argumente wie beim Beweis von Hilfssatz 3 zeigen nun, daß $S \in \mathbf{b}_p(F)$ gilt. Wegen $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{S}_{p'}$ ist wieder $| G_1 | < | S |$.

Nach [7] ist jede Teilklasse eines Schunckrandes wieder ein Schunckrand. Dies ist für Fittingränder nach Satz 1 nicht richtig. Wir betrachten deshalb den Fall zweier Fittingklassen $\mathscr{F}$ und $\mathscr{H}$ mit $\mathbf{b}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{b}(\mathscr{H})$. Dabei sind die folgenden zu $\mathscr{F}$ gebildeten Fittingklassen von großer Hilfe:

DEFINITION. Ist $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse, so sei $\mathbf{X}(\mathscr{F})$ die von den $\mathscr{F}$-Radikalen der Gruppen aus $\mathbf{b}(\mathscr{F})$ erzeugte Fittingklasse. Entsprechend sei $\mathbf{X}_\pi(\mathscr{F})$ die von den $\mathscr{F}$-Radikalen der Gruppen aus $\mathbf{b}_\pi(\mathscr{F})$ erzeugte Fittingklasse. Offensichtlich ist $\mathbf{X}_\pi(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{X}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{F}$.

HILFSSATZ 4. *Seien $\mathscr{F}$ und $\mathscr{H}$ Fittingklassen.*

(a) *Genau dann ist $\mathbf{b}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{b}(\mathscr{H})$, wenn $\mathbf{X}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$.*

(b) *Es ist $\mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathscr{F})) = \mathbf{X}(\mathscr{F})$.*

Beweis. (a) Aus $\mathbf{b}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{b}(\mathscr{H})$ folgt sofort $\mathbf{X}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{X}(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$. Sei umgekehrt $\mathbf{X}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$ und $G \in \mathbf{b}(\mathscr{F})$. Wegen $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{F}$ ist $G \notin \mathscr{H}$ und wegen $G_{\mathscr{F}} \in \mathbf{X}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{H}$ ist daher $G_{\mathscr{F}} = G_{\mathscr{H}}$. Folglich ist $G \in \mathbf{b}(\mathscr{H})$.

(b) Nach (a) ist $\mathbf{b}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{b}(\mathbf{X}(\mathscr{F})) \subseteq \mathbf{b}(\mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathscr{F})))$. Daraus folgt mit (a) dann $\mathbf{X}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{X}(\mathbf{X}(\mathscr{F}))$.

HILFSSATZ 5. *Sei p eine Primzahl und $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse mit $\mathbf{b}_p(\mathscr{F}) \neq \varnothing$. Ist $G \in \mathscr{F}$ eine einköpfige Gruppe mit $O^p(G) < G$ und ist N der maximale Normalteiler von G, so ist $N \in \mathbf{X}_p(\mathscr{F})$.*

Beweis. Sei $G_1 \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F})$ und $G_2 = G$. Wir bilden zu G_1 und G_2 die Gruppe $S \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F})$ aus Hilfssatz 3. Ist M der maximale Normalteiler von S, so ist $M \in \mathbf{X}_p(\mathscr{F})$ und $M/S_1 \cong (G_1)_{\mathscr{F}} \in \mathbf{X}_p(\mathscr{F})$. Nach (V) ist daher auch $N \cong M/S_2 \in \mathbf{X}_p(\mathscr{F})$.

HILFSSATZ 6. *Seien $\mathscr{F}$ und $\mathscr{H}$ Fittingklassen mit $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}$. Ist p eine Primzahl mit $\mathbf{b}_p(\mathscr{H}) \neq \varnothing$, so ist $\mathbf{X}_p(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{X}_p(\mathscr{H})$.*

Beweis. Sei $G \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F})$. Ist $G \notin \mathscr{H}$, so ist $G \in \mathbf{b}_p(\mathscr{H})$ und damit $G_{\mathscr{F}} \in \mathbf{X}_p(\mathscr{H})$. Ist $G \in \mathscr{H}$, so ist $G_{\mathscr{F}} \in \mathbf{X}_p(\mathscr{H})$ nach Hilfssatz 5. Da $\mathbf{X}_p(\mathscr{F})$ von den $\mathscr{F}$-Radikalen der Gruppen aus $\mathbf{b}_p(\mathscr{F})$ erzeugt wird, ist daher $\mathbf{X}_p(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{X}_p(\mathscr{H})$.

SATZ 2. (a) *Ist $\mathscr{F} \neq \mathscr{S}$, so ist $\mathbf{X}(\mathscr{F})^* = \mathscr{F}^*$, d.h. $\mathbf{X}(\mathscr{F})$ und $\mathscr{F}$ liegen in demselben Lockettabschnitt.*

(b) *Sind $\mathscr{F} \neq \mathscr{S}$ und $\mathscr{H}$ Fittingklassen mit $\mathbf{b}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{b}(\mathscr{H})$, so ist $\mathscr{F}^* = \mathscr{H}^*$.*

Beweis. Die Aussage unter (b) folgt aus (a) sofort mit Hilfssatz 4. Es genügt deshalb die Aussage unter (a) zu beweisen. Wir setzen $\mathscr{X} = \mathbf{X}(\mathscr{F})$.

(a) Wir zeigen zuerst in Schritten: Ist $\mathscr{X}^* \neq \mathscr{F}^*$, so ist $\mathscr{F}$ eine normale Fittingklasse.

(1) Es ist $\mathscr{F} \nsubseteq \mathscr{X}^*$: Aus $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{X}^*$ folgte $\mathscr{F}^* \subseteq (\mathscr{X}^*)^* = \mathscr{X}^*$ nach (I). Wegen $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{F}$ folgt aus (I) außerdem $\mathscr{X}^* \subseteq \mathscr{F}^*$. Also wäre $\mathscr{F}^* = \mathscr{X}^*$, entgegen der Annahme $\mathscr{F}^* \neq \mathscr{X}^*$.

(2) Wir setzen $\mathscr{Y}_p = \{G \in \mathscr{F} \backslash \mathscr{X} \mid p \text{ teilt } |G/G_{\mathscr{X}^*}|\}$. Ist $G \in \mathscr{Y}_p$, so ist $G \wr C_q \in \mathscr{F}$ für alle Primzahlen $q \neq p$: Wir setzen $H = G \wr C_q$ und nehmen $H \notin \mathscr{F}$ an. Ist $\tilde{G}$ die Basisgruppe von H, so ist deshalb $\tilde{G} = H_{\mathscr{F}}$. Sei nun N ein minimales subnormales Supplement zu $\tilde{G}$ in H. Nach Hilfssatz 1 ist N einköpfig. Außerdem hat $N_{\mathscr{F}} = N \cap G_{\mathscr{F}}$ Index q in N. Folglich ist $N \in \mathbf{b}_q(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{b}_q(\mathscr{X})$. Setzen wir $\mathscr{H} = \mathscr{X}^*\mathscr{S}_q$, so ist daher $N \in \mathscr{H}$ und damit $N \leqslant H_{\mathscr{H}}$. Nach (III) ist $\mathscr{H}$ eine Lockettklasse, und da p ein Teiler von $|G/G_{\mathscr{X}^*}|$ ist, ist $G \notin \mathscr{X}^*\mathscr{S}_q = \mathscr{H}$. Aus (II) folgt daher $H_{\mathscr{H}} = \widetilde{(G_{\mathscr{H}})}$. Wegen $N \leqslant H_{\mathscr{H}}$ ergibt sich damit

$$H = \tilde{G}N \leqslant \tilde{G}(H_{\mathscr{H}}) = \tilde{G}(\widetilde{G_{\mathscr{H}}}) = \tilde{G},$$

ein Widerspruch zu $\tilde{G} < H$. Folglich ist $H \in \mathscr{F}$.

(3) Sei π die Menge der Primzahlen p mit $\mathscr{Y}_p \neq \varnothing$. Ist $p \in \pi$ and $H \in \mathscr{F}$, so ist $H \wr C_q \in \mathscr{F}$ für alle $q \neq p$: Nach Wahl von p gibt es eine Gruppe $G \in \mathscr{Y}_p$. Dann ist auch $G \times H \in \mathscr{Y}_p$. Aus (2) folgt daher $(G \times H) \wr C_q \in \mathscr{F}$ und $G \wr C_q \in \mathscr{F}$. Wegen $\widetilde{(G \times H)}\, C_q/\tilde{G} \simeq H \wr C_q$ und $\widetilde{(G \times H)}\, C_q/\tilde{H} \simeq G \wr C_q$ folgt aus (V) nun $H \wr C_q \in \mathscr{F}$.

(4) Es ist $|\pi| \geqslant 2$: Nach (1) ist $\pi \neq \varnothing$. Wir nehmen $\pi = \{p\}$ an. Dann ist $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{X}^*\mathscr{S}_p$. Da $\mathscr{X}^*\mathscr{S}_p$ nach (III) eine Lockettklasse ist, ist $\mathscr{F}^* \subseteq \mathscr{X}^*\mathscr{S}_p$. Es folgt $\mathscr{F}^*\mathscr{S}_p \subseteq \mathscr{X}^*\mathscr{S}_p\mathscr{S}_p = \mathscr{X}^*\mathscr{S}_p$. Wegen $\mathscr{X}^* \subseteq \mathscr{F}^*$ ist daher $\mathscr{F}^*\mathscr{S}_p = \mathscr{X}^*\mathscr{S}_p$. Andererseits folgt wegen (3) aus (III) nun $\mathscr{F}^*\mathscr{S}_{p'} = \mathscr{F}^*$. Damit gilt $\mathscr{X}^*\mathscr{S}_{p'} \subseteq \mathscr{F}^*\mathscr{S}_{p'} = \mathscr{F}^* \subseteq \mathscr{X}^*\mathscr{S}_p$, also $\mathscr{X}^*\mathscr{S}_{p'} = \mathscr{X}^*$. Folglich ist $\mathscr{X}^*\mathscr{N} = \mathscr{X}^*\mathscr{S}_p = \mathscr{F}^*\mathscr{N}$. Nach [6], 4.4 ist dann $\mathscr{X}^* = \mathscr{F}^*$, entgegen $\mathscr{X}^* \neq \mathscr{F}^*$. Damit ist $|\pi| \geqslant 2$.

(5) Nach (4) ist $|\pi| \geqslant 2$. Aus (3) folgt daher $G \wr C_q \in \mathscr{F}$ für alle $G \in \mathscr{F}$ und alle Primzahlen q. Damit ist $\mathscr{F}$ nach (IV) eine normale Fittingklasse.

(b) Sei $\mathscr{S}_*$ die kleinste normale Fittingklasse. Dann ist $\mathscr{X} = \mathbf{X}(\mathscr{S}_*) = \mathscr{S}_*$:

Es ist $\mathbf{b}_p(\mathscr{S}_*) \neq \varnothing$ für alle Primzahlen p (Nach [17] weiß man sogar, daß es zu jeder endlichen abelschen Gruppe A eine Gruppe $G \in \mathscr{S}$ gibt mit $G/G_{\mathscr{S}_*} \simeq A$). Aus Hilfssatz 5 folgt daher, daß der maximale Normalteiler jeder einköpfigen Gruppe aus $\mathscr{S}_*$ in $\mathscr{X}$ enthalten ist. Nach Hilfssatz 1b ist damit $\mathscr{S}_* \subseteq \mathscr{X}\mathscr{N}$. Wegen $\mathscr{S}_*\mathscr{A} = \mathscr{S}$ ist daher $\mathscr{X}\mathscr{N}\mathscr{A} = \mathscr{S}$. Damit ist $\mathscr{X}$ nach (IV) eine normale Fittingklasse, d.h. $\mathscr{S}_* \subseteq \mathscr{X}$. Wegen $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{S}_*$ ist daher $\mathscr{X} = \mathscr{S}_*$.

(c) Sei p eine Primzahl. Dann ist $\mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*) = \mathscr{S}_*$:

(1) Ist q eine Primzahl und $G \in \mathbf{b}_q(\mathscr{S}_*)$, so ist $G \in \mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*)\,\mathscr{S}_p\mathscr{N}$: Ist $q = p$, so ist $G \in \mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*)\,\mathscr{S}_p$. Sei nun $q \neq p$, $A = G \wr C_p$ und $\tilde{G}$ die Basisgruppe von A. Sei weiterhin Ω die Menge aller minimalen subnormalen Supplemente zu $\tilde{G}$ in A. Ist $N \in \Omega$, so ist N nach Hilfssatz 1 einköpfig und $N \cap \tilde{G}$ ist der einzige maximale Normalteiler von N. Dabei ist $N/N \cap \tilde{G}$ eine p-Gruppe.

Wir setzen $M = \langle N \mid N \in \Omega \rangle$ und $K = \langle N \cap \tilde{G} \mid N \in \Omega \rangle$. Dann sind M and K Normalteiler von A und M/K ist eine p-Gruppe.

Sei nun $N \in \Omega$. Ist $N \in \mathscr{S}_*$, so ist $N \cap \tilde{G} \in \mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*)$ nach Hilfssatz 5. Ist $N \notin \mathscr{S}_*$, so ist $N/N_{\mathscr{S}_*}$ nach (IV) abelsch. Da N einköpfig ist und $N/N \cap \tilde{G}$ eine p-Gruppe ist, ist $N/N_{\mathscr{S}_*}$ eine zyklische p-Gruppe. Andererseits ist wegen $G \in \mathbf{b}_q(\mathscr{S}_*)$ die Gruppe $\tilde{G}/(\tilde{G})_{\mathscr{S}_*}$ eine q-Gruppe. Und da N einköpfig ist und wegen $N_{\mathscr{S}_*} < N$ ist $(\tilde{G})_{\mathscr{S}_*} \cap N = N_{\mathscr{S}_*}$. Folglich hat $N_{\mathscr{S}_*}$ Index p in N und es gilt $N \in b_p(\mathscr{S}_*)$. Damit ist auch in diesem Fall $N \cap \tilde{G} = N_{\mathscr{S}_*} \in \mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*)$. Folglich ist $K \in \mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*)$. Sei nun B eine Kopie von G in $\tilde{G}$. Da im regulären Kranzprodukt $G \wr C_p$ stets $[C_p, \tilde{G}] \geqslant (\tilde{G})'$ gilt, ist

$$M \cap \tilde{G} \geqslant [M, \tilde{G}] \geqslant [C_p, \tilde{G}] \geqslant (\tilde{G})' \geqslant B'.$$

Folglich ist $KB' \leqslant M \cap \tilde{G}$. Wegen $K \in \mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*)$ und da M/K eine p-Gruppe ist, ist KB' und damit auch B' in $\mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*)\, \mathscr{S}_p$. Damit erhalten wir $G \simeq B \in \mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*)\, \mathscr{S}_p \mathscr{N}$.

(2) Nach (b) ist $\mathscr{S}_* = \mathbf{X}(\mathscr{S}_*)$ und aus (1) folgt $\mathbf{X}(\mathscr{S}_*) \subseteq \mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*)\, \mathscr{S}_p \mathscr{N}$. Wegen $\mathscr{S}_* \mathscr{A} = \mathscr{S}$ ist daher $\mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*)\, \mathscr{S}_p \mathscr{N} \mathscr{A} = \mathscr{S}$. Nach (IV) ist folglich $\mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*)$ eine normale Fittingklasse. Damit ist $\mathscr{S}_* \subseteq \mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*) \subseteq \mathbf{X}(\mathscr{S}_*) = \mathscr{S}_*$, d.h. $\mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*) = \mathscr{S}_*$.

(d) Wir zeigen abschließend, daß $\mathbf{X}(\mathscr{F})$ für eine normale Fittingklasse $\mathscr{F} \neq \mathscr{S}$ wieder normal ist: Wegen $\mathscr{F} \neq \mathscr{S}$ gibt es eine Primzahl p mit $\mathbf{b}_p(\mathscr{F}) \neq \varnothing$. Aus Hilfssatz 6 folgt daher $\mathbf{X}_p(\mathscr{S}_*) \subseteq \mathbf{X}_p(\mathscr{F})$. Mit (c) erhalten wir damit $\mathscr{S}_* \subseteq \mathbf{X}_p(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{X}(\mathscr{F})$, d.h. $\mathbf{X}(\mathscr{F})$ ist normal.

Bemerkung 1. Da wir den Rand einer Fittingklasse im Universum $\mathscr{S}$ der auflösbaren endlichen Gruppen bilden, ist $\mathbf{b}(\mathscr{S}) = \varnothing$ und $\mathbf{X}(\mathscr{S}) = \{1\}$. Folglich ist Satz 2 für $\mathscr{F} = \mathscr{S}$ nicht richtig. Dieser Schönheitsfehler läßt sich durch eine Vergrößerung des Universums zu der Klasse $\mathscr{E}$ aller endlichen Gruppen bereinigen:

(1) Ist $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse endlicher auflösbarer Gruppen, so sei $\bar{\mathbf{b}}(\mathscr{F})$ die Klasse aller Gruppen $G \in \mathscr{E} \backslash \mathscr{F}$, deren echte Normalteiler in $\mathscr{F}$ liegen. Offensichtlich ist $\mathbf{b}(\mathscr{F}) \subseteq \bar{\mathbf{b}}(\mathscr{F})$. Analog zu $\mathbf{X}(\mathscr{F})$ sei $\bar{\mathbf{X}}(\mathscr{F})$ die Fittingklasse, die von den $\mathscr{F}$-Radikalen der Gruppen aus $\bar{\mathbf{b}}(\mathscr{F})$ erzeugt wird. Wegen $\mathbf{b}(\mathscr{F}) \subseteq \bar{\mathbf{b}}(\mathscr{F})$ ist dann $\mathbf{X}(\mathscr{F}) \subseteq \bar{\mathbf{X}}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{F}$.

(2) Es ist $\bar{\mathbf{X}}(\mathscr{S}) = \mathscr{S}_*$: Sei G eine beliebige endliche auflösbare Gruppe und E eine einfache nichtabelsche endliche Gruppe. Sei außerdem $Z = G \wr E$ und $\tilde{G}$ die Basisgruppe von Z. Ist B eine Kopie von G in $\tilde{G}$, so ist $G' \simeq B' \trianglelefteq (\tilde{G})' \triangleleft Z' \in \bar{\mathbf{b}}(\mathscr{S})$. Also ist $G' \in \bar{\mathbf{X}}(\mathscr{S})$. Nach (IV) ist daher $\mathscr{S}_* \subseteq \bar{\mathbf{X}}(\mathscr{S})$. Umgekehrt ist nach [9] jeder auflösbare Subnormalteiler einer perfekten Gruppe in $\mathscr{S}_*$ enthalten. Folglich ist $G_{\mathscr{S}} \in \mathscr{S}_*$ für alle $G \in \bar{\mathbf{b}}(\mathscr{S})$. Damit ist $\bar{\mathbf{X}}(\mathscr{S}) \subseteq \mathscr{S}_*$. Zusammen ergibt sich $\bar{\mathbf{X}}(\mathscr{S}) = \mathscr{S}_*$.

(3) Satz 2 gilt mit $\bar{\mathbf{X}}(\mathscr{F})$ für alle Fittingklassen $\mathscr{F}$, d.h. für alle Fittingklassen $\mathscr{F}$ gilt $(\bar{\mathbf{X}}(\mathscr{F}))^* = \mathscr{F}^*$: Nach (2) ist $\bar{\mathbf{X}}(\mathscr{S}) = \mathscr{S}_*$, d.h. $(\bar{\mathbf{X}}(\mathscr{S}))^* = \mathscr{S} = (\mathscr{S}_*)^*$. Ist $\mathscr{F} \neq \mathscr{S}$, so ist $\mathbf{X}(\mathscr{F})^* = \mathscr{F}^*$ nach Satz 2. Aus $\mathbf{X}(\mathscr{F}) \subseteq \bar{\mathbf{X}}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{F}$ folgt daher $(\mathbf{X}(\mathscr{F}))^* = (\bar{\mathbf{X}}(\mathscr{F}))^* = \mathscr{F}^*$ nach (I).

(4) Gilt für $\mathscr{F} \neq \mathscr{S}$ die sogenannte Locketvermutung, d.h. gilt $\mathscr{S}_* = \mathscr{F} \cap \mathscr{S}_*$, so ist $\mathbf{X}(\mathscr{F}) = \bar{\mathbf{X}}(\mathscr{F})$ (Die Lockettvermutung gilt nach [4] zum Beispiel für alle primitiv gesättigten Formationen, nach [1] gibt es jedoch Fittingklassen, für die sie nicht richtig ist.):

Ist $G \in \bar{\mathbf{b}}(\mathscr{F})$ und ist G auflösbar, so ist $G_{\mathscr{F}} \in \mathbf{X}(\mathscr{F})$.
Ist dagegen G nicht auflösbar, so ist $G_{\mathscr{F}} \in \mathscr{F} \cap \mathscr{S}_*$ nach [9].
Aus Satz 2 folgt jedoch mit (I), daß $\mathscr{S}_* \subseteq \mathbf{X}(\mathscr{F})$. Also ist stets $G_{\mathscr{F}} \in \mathbf{X}(\mathscr{F})$ für alle $G \in \bar{\mathbf{b}}(\mathscr{F})$. Damit ist $\bar{\mathbf{X}}(\mathscr{F}) \subseteq \mathbf{X}(\mathscr{F})$ und es gilt $\bar{\mathbf{X}}(\mathscr{F}) = \mathbf{X}(\mathscr{F})$.

Bemerkung 2. Sei $\mathscr{F} \neq \mathscr{S}$ eine Lockettklasse. Ist $\mathscr{H}$ eine Fittingklasse mit $\mathbf{b}(\mathscr{H}) \subseteq \mathbf{b}(\mathscr{F})$, so ist nach Satz 2 entweder $\mathscr{H} = \mathscr{S}$ oder $\mathscr{H}^* = \mathscr{F}^* = \mathscr{F}$. Wegen $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}$ gilt im zweiten Fall sogar $\mathscr{F} = \mathscr{H}$. Folglich sind außer $\varnothing$ und $\mathbf{b}(\mathscr{F})$ keine Teilklassen von $\mathbf{b}(\mathscr{F})$ wieder Ränder von Fittingklassen. Insbesondere gilt: Ist $\varnothing \subset \mathscr{H} \subset \mathbf{b}(\mathscr{F})$, so ist

$$\mathscr{Y} = \{G \mid G \text{ hat keinen Subnormalteiler isomorph zu einer Gruppe aus } \mathscr{H}\}$$

keine Fittingklasse. Denn wäre $\mathscr{Y}$ eine Fittingklasse, so wäre $\mathbf{b}(\mathscr{Y}) = \mathscr{K}$.

Die Bildung von $\mathbf{X}(\mathscr{F})$ zu $\mathscr{F} \neq \mathscr{S}$ ist nach Satz 2 eine Möglichkeit, im Lockett abschnitt zu $\mathscr{F}$ nach unten zu gehen. Im allgemeinen ist jedoch $\mathbf{X}(\mathscr{F}) \neq \mathscr{F}_*$, wie Satz 3 zeigt:

SATZ 3. *Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse.*

(a) *Ist p eine Primzahl mit $\mathscr{F}\mathscr{S}_p \neq \mathscr{F}$ und ist $G \in \mathscr{F}$, so hat $G/G_{\mathbf{X}(\mathscr{F})}$ elementarabelsche p-Sylowgruppen.*

(b) *Ist $\mathscr{F}\mathscr{S}_p \neq \mathscr{F}$ für alle Primzahlen p und ist $G \in \mathscr{F}$, so ist $G/G_{\mathbf{X}(\mathscr{F})}$ ein direktes Produkt von elementarabelschen Gruppen.*

Beweis. (a) Nach Satz 2 und (I) ist $G/G_{\mathbf{X}(\mathscr{F})}$ abelsch. Wir können deshalb o.B.d.A. annehmen, daß $G/G_{\mathbf{X}(\mathscr{F})}$ eine p-Gruppe ist. Sei nun N ein einköpfiger Subnormalteiler von G und M der maximale Normalteiler von N. Ist N/M eine q-Gruppe mit $q \neq p$, so ist $N \subseteq G_{\mathbf{X}(\mathscr{F})}$, also $N \in \mathbf{X}(\mathscr{F})$.

Ist N/M eine p-Gruppe, so ist $M \in \mathbf{X}(\mathscr{F})$ nach Hilfssatz 5. Aus Hilfssatz 1 folgt daher, daß $G/G_{\mathbf{X}(\mathscr{F})}$ elementarabelsch ist.

(b) Da $G/G_{\mathbf{X}(\mathscr{F})}$ nach Satz 2 und (I) abelsch ist, folgt (b) sofort aus (a).

Als Anwendung von Satz 2 werden die normalen Fittingklassen durch eine Eigenschaft ihres Randes characterisiert. Dazu benötigen wir den folgenden Hilfssatz:

Hilfssatz 7. *Sei π eine Primzahlmenge und seien $\mathscr{F}$ und $\mathscr{H}$ Fittingklassen mit $\mathbf{b}(\mathscr{H}) = \mathbf{b}_\pi(\mathscr{F}) \neq \varnothing$. Dann ist $\mathscr{H} = \mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'}$ und $\mathscr{F}^* = \mathscr{F}^*\mathscr{S}_{\pi'}$.*

Beweis. Wegen $\mathbf{b}(\mathscr{H}) \subseteq \mathbf{b}(\mathscr{F})$ ist $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}$ und nach Satz 2 ist $\mathscr{F}^* = \mathscr{H}^*$. Aus $b_{\pi'}(\mathscr{H}) = \varnothing$ folgt außerdem $\mathscr{H}\mathscr{S}_{\pi'} = \mathscr{H}$. Insbesondere ist daher $\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'} \subseteq \mathscr{H}$. Sei nun $G \in \mathbf{b}(\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'}) = \mathbf{b}_\pi(\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'})$. Ist $G \in \mathbf{b}(\mathscr{H})$, so ist $G \in \mathbf{b}_\pi(\mathscr{H})$. Ist $G \notin \mathbf{b}(\mathscr{H})$, so folgt wegen $\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'} \subseteq \mathscr{H}$ nun $G \in \mathscr{H}$. Wegen $\mathscr{F}^* = \mathscr{H}^*$ ist dann $G/G_{\mathscr{F}}$ abelsch. Damit ist $G/G_{\mathscr{F}}$ eine zyklische π-Gruppe. Folglich ist $G_{\mathscr{F}} = G_{\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'}}$ und $G \in \mathbf{b}_\pi(\mathscr{F}) = \mathbf{b}(\mathscr{H})$, entgegen $G \notin \mathbf{b}(\mathscr{H})$. Wir erhalten also $\mathbf{b}(\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'}) \subseteq \mathbf{b}_\pi(\mathscr{F})$. Da die umgekehrte Inklusion trivialerweise richtig ist, ist $\mathbf{b}(\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'}) = \mathbf{b}_\pi(\mathscr{F}) = \mathbf{b}(\mathscr{H})$, also $\mathscr{H} = \mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'}$. Aus $\mathscr{F}^* = \mathscr{H}^*$ folgt daher $\mathscr{F}^* = (\mathscr{F}S_{\pi'})^*$. Aus (III) folgt dann $\mathscr{F}^* = \mathscr{F}^*\mathscr{S}_{\pi'}$.

Der folgende Satz zeigt, daß sich die normalen Fittingklassen $\mathscr{F} \neq \mathscr{F}\mathscr{S}_{p'}$ dadurch charakterisieren lassen, daß sich deren Ränder in eine disjunkte Vereinigung nichttrivaler Fittinggränder zerlegen läßt:

Satz 4. (a) *Sei $|I| \neq 1$ und seien $\mathscr{F}_i$, $i \in I$ Fittingklassen mit $\mathscr{F}_i \neq \mathscr{S}$ für alle $i \in I$. Sei $\mathscr{F}$ eine weitere Fittingklasse mit $\mathbf{b}(\mathscr{F}) = \bigcup_{i\in I} \mathbf{b}(\mathscr{F}_i)$ und $\mathbf{b}(\mathscr{F}_i) \cap \mathbf{b}(\mathscr{F}_j) = \varnothing$ für $i \neq j$. Dann ist $\mathscr{F}$ eine normale Fittingklasse und es gibt Primzahlmengen π_i, $i \in I$, mit $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$ für $i \neq j$ und $\mathscr{F}_i = \mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi_i'}$ für alle $i \in I$.*

(b) *Ist $\mathscr{F}$ eine normale Fittingklasse und $\{\pi_i \mid i \in I\}$ eine Partition der Menge aller Primzahlen, so ist*

$$\mathbf{b}(\mathscr{F}) = \bigcup_{i\in I} \mathbf{b}(\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi_i'}) \qquad \text{mit} \quad \mathbf{b}(\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi_i'}) = \mathbf{b}_{\pi_i}(\mathscr{F}).$$

Beweis. (a) Nach Satz 2 ist $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}_i \subseteq \mathscr{F}_i^* = \mathscr{F}^*$ für alle $i \in I$. Seien nun $i, j \in I$ mit $i \neq j$. Ist $G \in \mathbf{b}(\mathscr{F}_i)$, so ist $G_{\mathscr{F}_i} \in \mathscr{F}_j$ wegen $G \in \mathbf{b}(\mathscr{F})$ und $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{F}_j$. Aus $\mathbf{b}(\mathscr{F}_i) \cap \mathbf{b}(\mathscr{F}_j) = \varnothing$ folgt daher $G \in \mathscr{F}_j$. Ist p eine Primzahl und ist $G_i \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F}_i)$, $G_j \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F}_j)$, so bilden wir zu G_i und G_j die Gruppe S aus Hilfssatz 3. Wegen $G_i \in \mathscr{F}_j$ und $G_j \in \mathscr{F}_i$ ist dann $S \in \mathbf{b}_p(\mathscr{F}_i) \cap \mathbf{b}_p(\mathscr{F}_j) = \varnothing$, ein Widerspruch. Folglich gibt es Primzahlmengen π_i, $i \in I$ mit $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$ für $i \neq j$ und $\mathbf{b}(\mathscr{F}_i) = \mathbf{b}_{\pi_i}(\mathscr{F})$. Aus Hilfssatz 7 folgt dann $\mathscr{F}_i = \mathscr{F}_\pi\mathscr{F}_{\pi_i'}$ und $\mathscr{F}^* = \mathscr{F}^*\mathscr{S}_{\pi_i'}$ für alle $i \in I$. Wegen $\pi_i \cap \pi_j = \varnothing$ erhalten wir $\mathscr{F}^* = \mathscr{F}^*\mathscr{S} = \mathscr{S}$, d.h. $\mathscr{F}$ ist normal.

(b) Es genügt offensichtlich zu zeigen: Ist π eine Primzahlmenge, so ist $\mathbf{b}(\mathscr{F}\mathscr{S}_\pi) = \mathbf{b}_\pi(\mathscr{F})$. Ist $G \in \mathbf{b}_\pi(\mathscr{F})$, so ist $G_{\mathscr{F}} = G_{\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'}}$, also $G \in \mathbf{b}(\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'})$. Sei umgekehrt $G \in \mathbf{b}(\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'})$. Dann ist $G/G_{\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'}}$ eine p-Gruppe mit $p \in \pi$ und es ist $G_{\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'}}/G_{\mathscr{F}}$ eine π'-Gruppe. Da $\mathscr{F}$ normal ist, ist $G/G_{\mathscr{F}}$ abelsch. Aus der Einköpfigkeit von G folgt daher $G_{\mathscr{F}} = G_{\mathscr{F}\mathscr{S}_{\pi'}}$ und damit ist $G \in \mathbf{b}_\pi(\mathscr{F})$.

Als letzte Anwendung von Satz 2 beweisen wir

Satz 5. *Seien $\mathscr{X}$ und $\mathscr{Y}$ Fittingklassen mit $\mathscr{X} \nsubseteq \mathscr{Y}$. Außerdem sei $\mathscr{H} =$*

$H(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = \{G \mid G_{\mathscr{X}} \in \mathscr{Y}\}$ ebenfalls eine Fittingklasse. Dann ist $\mathscr{Y} \subseteq \mathscr{H}$ und $\mathscr{Y}^* = (\mathscr{X} \cap \mathscr{Y})^* = \mathscr{X}^* \cap \mathscr{Y}^* = \mathscr{H}^* \subseteq \mathscr{X}^*$.

Beweis. Ist $\mathbf{b}(\mathscr{H}) = \varnothing$, so ist $\mathscr{H} = \mathscr{S}$ und $\mathscr{X} \subseteq \mathscr{Y}$. Also ist $\mathbf{b}(\mathscr{H}) \neq \varnothing$. Sei $G \in \mathbf{b}(\mathscr{H})$. Ist $G_{\mathscr{X}} < G$, so ist $G_{\mathscr{X}} = (G_{\mathscr{X}})_{\mathscr{X}} \in \mathscr{Y}$ und damit $G \in \mathscr{H}$, entgegen $G \in \mathbf{b}(\mathscr{H})$. Folglich ist $G \in \mathscr{X}$ und damit $G_{\mathscr{H}} = G_{\mathscr{X}}$. Also ist $G \in \mathbf{b}(\mathscr{Y}) \cap \mathbf{b}(\mathscr{X} \cap \mathscr{Y})$. Aus Satz 2 erhalten wir dann $\mathscr{H}^* = \mathscr{Y}^* = (\mathscr{X} \cap \mathscr{Y})^*$. Nach [16], 2.3 ist $(\mathscr{X} \cap \mathscr{Y})^* = \mathscr{X}^* \cap \mathscr{Y}^*$.

FOLGERUNGEN. Seien $\mathscr{X}$ und $\mathscr{Y}$ Fittingklassen mit $\mathscr{X} \nsubseteq \mathscr{Y}$.

(a) Ist $\mathscr{Y}$ oder $\mathscr{X} \cap \mathscr{Y}$ eine Lockettklasse und ist $H(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ eine Fittingklasse, so ist $H(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = \mathscr{Y}$.

(b) Ist $\mathscr{Y}$ eine normale Fittingklasse und $\mathscr{X}$ eine nichtnormale Fittingklasse, so ist $H(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ keine Fittingklasse.

(c) Ist $\mathscr{N} \nsubseteq \mathscr{X}$, so ist $H(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ keine Fittingklasse.

Beweis. (a) Nach Satz 5 ist $\mathscr{X} \cap \mathscr{Y} \subseteq \mathscr{Y} \subseteq \mathscr{H} \subseteq \mathscr{H}^* = \mathscr{Y}^* = (\mathscr{X} \cap \mathscr{Y})^*$. Ist $\mathscr{Y}^* = \mathscr{Y}$ oder $(\mathscr{X} \cap \mathscr{Y})^* = \mathscr{X} \cap \mathscr{Y}$, so ist daher $\mathscr{H} = \mathscr{Y}$.

(b) Ist $\mathscr{Y}$ normal und $H(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ eine Fittingklasse, so ist nach Satz 5 auch $\mathscr{X}$ normal.

(c) Ist $\mathscr{X} \cap \mathscr{S}_p = \{1\}$ so ist $H(\mathscr{X}, \mathscr{Y}) = H(\mathscr{X}, \mathscr{Y}\mathscr{S}_p)$.

Ist $H(\mathscr{X}, \mathscr{Y})$ eine Fittingklasse, so folgt daher $\mathscr{Y}^*\mathscr{S}_p = (\mathscr{Y}\mathscr{S}_p)^* \subseteq \mathscr{X}^*$ aus Satz 5. Damit ist $\mathscr{S}_p \subseteq \mathscr{X}^*$ und folglich auch $\mathscr{S}_p \subseteq \mathscr{X}$, entgegen $\mathscr{S}_p \cap \mathscr{X} = \{1\}$.

BEISPIELE. (a) Sei $\pi' \neq \varnothing$. Nach Satz 4 ist dann $\mathbf{b}(\mathscr{S}_*\mathscr{S}_\pi) = \mathbf{b}_{\pi'}(\mathscr{S}_*)$. Aus Satz 2 folgt daher $\mathbf{X}(\mathscr{S}_*)\ \mathscr{S}_\pi = \mathscr{S}_*$. Da es nach [17] zu jeder endlichen abelschen Gruppe A eine Gruppe G gibt mit $G/G_{\mathscr{S}_*} \simeq A$, zeigt dies, daß die Voraussetzung $\mathscr{F}\mathscr{S}_p \neq \mathscr{F}$ in Satz 3 notwendig ist.

(b) Sei $\pi' \neq \varnothing$. Dann ist $\mathbf{X}(\mathscr{S}_\pi) = \mathscr{S}_\pi \cap \mathscr{S}_* = (\mathscr{S}_\pi)_*$: Aus Satz 2 folgt $\mathbf{X}(\mathscr{S}_\pi) \supseteq (\mathscr{S}_\pi)_*$ und nach [4] ist $\mathscr{S}_\pi \cap \mathscr{S}_* = (\mathscr{S}_\pi)_*$. Sei nun $G \in \mathbf{b}(\mathscr{S}_\pi)$. Dann ist G einköpfig und $G' = G_{\mathscr{S}_\pi}$. Folglich ist $G_{\mathscr{S}_\pi} = G' \leqslant G_{\mathscr{S}_*}$ und $\mathbf{X}(\mathscr{S}_\pi) \subseteq \mathscr{S}_\pi \cap \mathscr{S}_*$.

(c)[1] Sei A die sogenannte Lauschgruppe (siehe [14]) und B eine Untergruppe von A von Primzahlindex. Sei außerdem $\mathscr{B}$ die zu B im Sinne von [14] gehörende Fittingklasse. Ist G eine Gruppe, so ist entweder $G \in \mathscr{B}$ oder G_B ist ein maximaler Normalteiler von G. Ist nun $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse, so ist deshalb $\mathbf{X}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{B}$. Also ist $\mathbf{X}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{F} \cap \mathscr{C}$, wobei $\mathscr{C}$ der Durchschnitt aller solcher Fittingklassen $\mathscr{B}$ ist.

(d) Sei $\mathscr{F}$ eine Fittingklasse und sei $q = 2n + 1$ eine Primzahl mit ungeradem n. Ist die Diedergruppe $D_{2.q^a}$ für ein $a \geqslant 1$ in $\mathscr{F}$ enthalten, so ist $\mathbf{X}(\mathscr{F}) \neq \mathscr{F}$:

[1] Auf dieses Beispiel hat uns Dr. J. Cossey aufmerksam gemacht.

Sei $\mathscr{X}_a$ die Klasse aller Gruppen G, deren Elemente auf der Menge der Elemente der Ordnung q^a in $\mathbf{O}_2(G)$ durch Konjugation nur gerade Permutationen bewirken. Nach [5] ist $\mathscr{X}_a$ eine normale Fittingklasse mit $\mathscr{C} \subseteq \mathscr{X}_a$. Aus (c) folgt daher $\mathbf{X}(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{X}_a$. Ist andererseits t eine Involution aus $D_{2 \cdot q^a}$, so induziert t auf den $q^{a-1}(q-1) = q^{a-1} \cdot n \cdot 2$ Elementen der Ordnung q^a von $D_{2 \cdot q^a}$ durch Konjugation eine Permutation, die Produkt von $q^{a-1} \cdot n$ Transpositionen ist. Folglich ist $D_{2q^a} \notin \mathscr{X}_a$.

(e) Es ist $(\mathscr{N}^2)_* \subset \mathbf{X}(\mathscr{N}^2) \subset \mathscr{N}^2$: Wegen $D_6 \in \mathscr{N}^2$ ist $\mathbf{X}(\mathscr{N}^2) \subset \mathscr{N}^2$ nach (d). Außerdem ist die Diedergruppe D_{10} als echter Normalteiler einer einköpfigen Gruppe der Ordnung 20 aus $\mathscr{N}^2$ nach Hilfssatz 5 in $\mathbf{X}(\mathscr{N}^2)$. Wegen $D_{10} \notin \mathscr{S}_*$ ist $(\mathscr{N}^2)_* \subset \mathbf{X}(\mathscr{N}^2)$.

Literatur

1. T. R. Berger and J. Cossey, An example in the theory of normal Fitting classes, *Math. Z.* **154** (1977), 287–294.
2. D. Blessenohl und W. Gaschütz, Über normale Schunck- und Fittingklassen, *Math. Z.* **118** (1970), 1–8.
3. R. A. Bryce und J. Cossey, Metanilpotent Fitting classes, *J. Austr. Math. Soc.* **17** (1974), 285–304.
4. R. A. Bryce and J. Cossey, A problem in the theory of normal Fitting classes, *Math. Z.* **141** (1975), 99–110.
5. A. R. Camina, A note on Fitting classes, *Math. Z.* **136** (1974), 351–352.
6. J. Cossey, Products of Fitting classes, *Math. Z.* **141** (1975), 289–295.
7. K. Doerk, Über Homomorphe endlicher auflösbarer Gruppen, *J. Algebra* **30** (1973), 12–30.
8. B. Fischer, W. Gaschütz, und B. Hartley, Injektoren endlicher auflösbarer Gruppen, *Math. Z.* **102** (1967), 337–339.
9. W. Gaschütz, Zwei Bemerkungen über normale Fittingklassen, *J. Algebra* **30** (1974), 277–278.
10. B. Hartley, On Fischer's dualization of formation theory, *Proc. London Math. Soc.* **19** (1969), 193–207.
11. P. Hauck, Zur Theorie der Fittingklassen endlicher auflösbarer Gruppen, Dissertation Universität Mainz, 1978.
12. T. O. Hawkes, The family of Schunck classes as a lattice, *J. Algebra* **39** (1976), 527–550.
13. B. Huppert, "Endliche Gruppen I," Springer-Verlag, Berlin-Heidelberg-New York, 1967.
14. H. Lausch, On normal Fitting classes, *Math. Z.* **130** (1973), 67–72.
15. A. R. Makan, Fitting classes with the wreath product property are normal, *J. London Math. Soc.* **8** (1974), 245–246.
16. P. Lockett, The Fitting class $\mathscr{F}^*$, *Math. Z.* **137** (1974), 131–136.
17. A. Scarselli, Una osservazione sulla classe di Fitting normale minima, *Lincei—Rend. Sci. Fis. Mat. e Nat.* **58** (1975), 499–500.