

HISTORIA MATHEMATICA 3 (1976), 5-19

PROBLÈMES DE L'HISTOIRE DE  
L'ANALYSE MATHÉMATIQUE AU XIXÈME SIÈCLE.  
CAS DE KARL WEIERSTRASS ET DE RICHARD DEDEKIND

BY PIERRE DUGAC, UNIVERSITY OF PARIS

*L'exposé qui suit a été fait le 23 août 1974 à Tokyo, dans le cadre du colloque "Examen de l'historiographie mathématique à la lumière des tendances récentes", présidé par J. Dieudonné et A. Kobori. Invité à y prendre part, peu de temps avant le début du XIVème Congrès international d'histoire des sciences, l'auteur n'a pas pu faire paraître cette rédaction dans les Texts of symposia (Proceedings No. 1) publiés avant le début de ce congrès.)*

## SUMMARIES

*Le but de notre exposé va être de présenter nos recherches, basées sur des documents inédits, portant sur l'histoire de l'analyse mathématique au XIVème siècle (et en particulier sur les oeuvres de Karl Weierstrass Weierstrass et de Richard Dedekind), et de signaler quelques "problèmes non résolus" que nous avons rencontrés. Nous allons essayer de montrer dans quelle mesure ces documents inédits ont permis de mieux comprendre cette époque du développement de l'analyse mathématique.*

*The aim of our expositions is to present our research based on unpublished documents, relating to the history of analysis in the XIX century (and in particular to the work of Karl Weierstrass and Richard Dedekind), and to note some "unsolved problems" that we have encountered. We try to show the extent to which these unpublished documents permitted a better understanding of this period in the development of analysis.*

1. *Karl Weierstrass analyste, à la lumière des inédits.*

Nous allons examiner les éléments d'analyse de Karl Weierstrass mis en lumière grâce à de nombreux inédits que nous avons publiés dans [Dugac 1971]. Nous n'avons pas analysé dans

[*ibid.* 1974] le plus ancien cours inédit de Weierstrass sur les fonctions analytiques, découvert à l'occasion de nos recherches sur Dedekind [*Principien der Theorie der analytischen Functionen*, Wintersem. 1865-66, rédigé par Moritz Pasch (Nachlass Pasch, Bibl. Univ. Giessen)]. Dans cette rédaction de Pasch il manque la théorie weierstrassienne des nombres irrationnels. Elle montre (p. 16) l'hésitation de Weierstrass sur les notions de continuité et de dérivabilité, ce que confirme encore notre conclusion [Dugac 1971, 75, 92-94] qu'il n'avait pas construit sa fonction continue, dérivable en aucun point, avant 1872. On y trouve également (p. 17) sa première formulation de la notion du point d'accumulation. Notons que notre étude sur Weierstrass, faite dans le cadre général d'un travail sur les différentes théories des nombres réels, a été précédée d'une analyse de l'oeuvre de Charles Méray [Dugac 1970], mais nous n'avons pas encore pu trouver les papiers et la correspondance de Méray qui seraient très utiles pour décrire la situation mathématique en France dans la deuxième moitié du XIX<sup>ème</sup> siècle, travail qui reste entièrement à faire.

#### 1.1. *Le cours inédit de Weierstrass de 1861.*

Pendant le semestre d'été 1861, Weierstrass fait un cours de Calcul différentiel, à Gewerbeinstitut de Berlin, et dont nous avons publié des extraits de la rédaction de H. A. Schwarz [Dugac 1971, 118-125]. On trouve dans ce cours le modèle dont s'inspirera Weierstrass pour construire sa théorie des nombres irrationnels. En effet, il y disait [*ibid.* 121] qu'il y a des nombres que l'on ne peut pas exprimer à l'aide d'une unité et de ses parties et pour lesquels il faut utiliser la forme des séries infinies. Mais si l'idée du concept weierstrassien du nombre irrationnel est bien là, on est loin de la théorie telle que Weierstrass l'exposera dans son introduction à la théorie des fonctions analytiques (dont le premier exposé se situe, d'après nous, pendant le semestre d'hiver 1863-64 [*ibid.* 57]). D'autant plus que, en 1861, pour définir la série infinie, Weierstrass utilise dans ce cours la définition de la convergence et la notion du reste qui n'interviendront pas dans sa définition des nombres irrationnels.

Ce cours est le premier que l'on connaisse de Weierstrass et il est précieux pour l'étude de ses idées, à cette époque, sur les notions fondamentales de la théorie des fonctions.

Il est particulièrement intéressant de lire dans ce cours la première *définition*, à notre connaissance, de la limite à l'aide de  $\delta$  et  $\varepsilon$  [*ibid.*, 119]. Weierstrass s'y exprime de la façon suivante: "S'il est possible de déterminer une borne  $\delta$  telle que pour toute valeur de  $h$ , plus petite en valeur absolue que  $\delta$ ,  $f(x+h) - f(x)$  soit plus petite qu'une quantité  $\varepsilon$  aussi petite que l'on veut, alors on dira qu'on a fait correspondre à une variation infiniment petite de la variable une variation

infiniment petite de la fonction." Ainsi on peut dater la substitution des inégalités, qui impliquent une notion topologique de voisinage, à l'idée intuitive de "tendre vers". D'ailleurs Weierstrass introduit la notion de voisinage (Nachbarschaft) d'un point  $x_0$  [*ibid.*, 120]: Ce sont tous les  $x$  "pour lesquels la différence  $x - x_0$  en valeur absolue ne dépasse pas une borne déterminée". Notons que, d'août à octobre 1844, Weierstrass fait un séjour à Berlin [*ibid.*, 50], et à cette occasion il rendit visite à Dirichlet. Il a probablement pu alors prendre connaissance de certains cours de Dirichlet qui ont pu l'inspirer pour sa définition de la limite. En effet, dans son cours sur l'intégration [Dirichlet 1904, 4], fait par Dirichlet à Berlin pendant le semestre d'été 1854, est démontrée la *proposition* suivante (citée dans le texte entre guillemets): "Soit  $y = f(x)$  une fonction continue de  $x$  dans l'intervalle fini de  $a$  à  $b$ . Par sous-intervalle on entend la différence de deux valeurs quelconques de  $x$ , c'est-à-dire toute partie de l'axe des abscisses entre  $a$  et  $b$ . Alors il est toujours possible de faire correspondre à un nombre  $\rho$ , aussi petit que l'on veut, un nombre  $\sigma$ ... de façon que dans tout sous-intervalle, qui est  $\leq \sigma$ , la fonction  $y$  varie au plus de  $\rho$ ". Le génie de Weierstrass consistera à prendre cette *proposition*, en la simplifiant, comme *définition* de la continuité.

Le cours de Weierstrass de 1861 montre aussi, grâce à l'étude du paragraphe consacré à la dérivation, que Weierstrass ne se posait pas, à cette époque, la question de la construction d'une fonction continue et qui n'est dérivable en aucun point. De même, il donne dans ce cours la définition des infiniment petits telle que nous la connaissons aujourd'hui.

Une partie importante de ce cours est l'étude de la dérivation des séries infinies [Dugac 1971, 122-124], problème qui, à cette époque, est loin d'être traité avec la rigueur et la netteté que l'on trouve dans ce cours. Pour cela, Weierstrass introduit la notion de convergence uniforme (Konvergenz in gleichem Grade) et démontre que la limite uniforme de fonctions continues est une fonction continue. Puis il démontre le théorème sur la dérivation terme à terme d'une série de fonctions.

La nouveauté de ce cours est incontestable et cette rédaction de H. A. Schwarz montre que, déjà en 1861, Weierstrass avait introduit et utilisé certaines notions qui sont à la base de l'analyse moderne.

### 1.2. Les cours inédits de Weierstrass sur sa théorie des nombres réels.

Dans notre travail sur Weierstrass [1971], nous avons étudié trois rédactions inédites du cours de Weierstrass sur les fonctions analytiques (celles de Hettner (1874), de Hurwitz (1878) et de Thieme (1886)), cours dans lequel il présentait sa théorie des

nombre réels. Weierstrass exposait dans un cycle, généralement de deux ans, l'ensemble de son édifice mathématiques dont le schéma était le suivant: La théorie des fonctions analytiques; La théorie des fonctions elliptiques; Applications de la théorie des fonctions elliptiques; La théorie des fonctions abéliennes.

La théorie weierstrassienne des nombres réels est exposée dans l'introduction à la théorie des fonctions analytiques, et ainsi on la trouve à la base de son édifice mathématique. Notre publication des inédits de Weierstrass, en particulier son cours de 1878 rédigé par Hurwitz, permet enfin de savoir comment Weierstrass présentait sa théorie des nombres irrationnels. Remarquons que nous avons essayé de montrer dans notre mémoire [1971] que Weierstrass s'est inspiré, pour sa conception d'une théorie générale des fonctions analytiques, introduction à sa théorie des fonctions elliptiques et abéliennes, des théories inédites de J. Liouville [*ibid.*, 58-59]. Ces théories avaient été exposées, d'une part, par Briot et Bouquet [1859] et, d'autre part, par Borchardt dans une rédaction inédite du cours de Liouville sur les fonctions elliptiques. Notons à ce propos qu'il serait très souhaitable de faire une étude d'ensemble sur Liouville analyste (en utilisant, entre autres, ses nombreux inédits qui se trouvent à la Bibliothèque de l'Institut de France, ainsi que son cours inédit de 1851, rédigé par Holmgren, et qui se trouve à l'Institut Mittag-Leffler de Djursholm) pour montrer la grande influence de ce mathématicien sur l'analyse de son temps.

Examinons maintenant la théorie des nombres réels telle qu'elle est donnée dans le cours inédit de Weierstrass rédigé par Hurwitz.

L'existence de l'ensemble des nombres entiers positifs  $N$  étant admise par Weierstrass, il commence par définir [Dugac 1971, 96] la notion d'égalité qui va jouer un rôle fondamental dans sa théorie des nombres réels. Il postule que la relation d'égalité doit être une "relation d'équivalence". En effet, on dit que deux objets sont égaux, s'il existe entre eux une "correspondance désignée par  $a = b$ , telle qu'on ait aussi  $b = a$  et telle que, si  $a = b$  et  $b = c$ , on ait aussi  $a = c$ .

Pour définir les nombres rationnels positifs, Weierstrass introduit [*ibid.*, 98] la notion de "parties exactes de l'unité":  $1/n$  est la nième partie exacte de l'unité si, et seulement si,  $n(1/n)=1$ . Alors, pour donner la définition de l'égalité de deux nombres rationnels, qui sont des combinaisons linéaires à coefficients entiers de ces nouveaux nombres (parties exactes de l'unité), Weierstrass montre que l'on peut faire sur ces nouveaux nombres les transformations suivantes: (1)  $n$  éléments quelconques de la forme  $1/n$  peuvent être remplacés par l'unité; (2) tout nombre peut être remplacé par ses parties exactes. (Par exemple, 1 par  $p(1/p)$ ).

Alors un nombre rationnel sera représenté par un "agrégat" dont les éléments appartiennent à  $\mathcal{Q}$ . Ainsi, par exemple,  $4/3$  pourra être représenté par l'agrégat  $1/3, 1/3, 1/3, 1/3$  (qui est une des représentations, parmi une infinité de possibles, de  $4/3$ ).

Maintenant on peut définir l'égalité de deux nombres rationnels: on dira que deux nombres rationnels  $a$  et  $b$  sont égaux, si  $a$  peut être transformé en  $a'$  de façon que  $a'$  contienne les mêmes éléments, et le même nombre de fois, que  $b$ .

A partir de l'unité et de ses parties exactes, qui sont en nombre infini, on pourrait constituer des agrégats ayant un nombre infini d'éléments (c'est-à-dire des suites d'une infinité de nombres rationnels). Mais pour définir rigoureusement ces nouveaux nombres, composés d'une infinité d'éléments, "il est nécessaire que ces éléments soient pris dans le domaine des nombres existants (unité et ses parties exactes) d'après une loi bien déterminée" [Dugac 1971, 101].

Le premier pas vers la définition de ces nouveaux nombres, qui sont une extension des nombres rationnels positifs, va être l'introduction de la notion "ensembliste" d'un nombre  $a'$  partie de  $a$ : "Nous dirons que  $a'$  est une partie de  $a$ , si l'on peut transformer  $a'$  en  $a''$ , de façon que tous les éléments de  $a''$  se trouvent autant de fois en  $a$  qu'en  $a''$ ",  $a$  pouvant contenir d'autres éléments.

Cette notion permet à Weierstrass de donner une nouvelle définition de l'égalité: "Nous dirons que deux nombres  $a$  et  $b$  sont égaux si toute partie de  $a$  peut être transformée en une partie de  $b$ , et réciproquement toute partie de  $b$  en une de  $a'$ ". Notons que  $a'$  est appelé une partie de  $a$  si  $a'$  contient seulement "un nombre fini d'éléments de  $a$ ", ce qui permet de définir l'égalité de deux agrégats composés d'une infinité d'éléments de  $\mathcal{Q}$ . L'égalité ainsi définie possède les propriétés de symétrie et de transitivité [Dugac 1971, 103]. Cette nouvelle définition de l'égalité entraîne une nouvelle définition de l'inégalité entre deux nombres  $a$  et  $b$ : on dira que  $b > a$ , si toute partie de  $a$  est une partie de  $b$  mais n'est pas une partie de  $a$ .

Pour définir maintenant les nouveaux nombres composés d'une infinité d'éléments, Weierstrass introduit un critère de finitude: "Nous dirons qu'un nombre  $a$  a une valeur finie, s'il existe un nombre  $b$  plus grand que  $a$ ,  $b$  étant composé d'un nombre fini d'éléments" de  $\mathcal{Q}$ , c'est-à-dire les nombres rationnels. Grâce à lui, Weierstrass peut définir les nouveaux nombres composés d'une infinité d'éléments et montrer que les opérations fondamentales de l'arithmétique sont encore valables pour ces nouveaux nombres. En définissant la soustraction pour ces nouveaux nombres [*ibid.*, 108], on obtient alors l'ensemble  $R$  des nombres réels.

Ainsi, en définitive, le nombre réel pour Weierstrass est la classe d'équivalence pour la relation d'équivalence définie par l'égalité des agrégats. Si l'agrégat satisfait au critère

de finitude, alors ou bien il existe dans  $Q$  un nombre qui lui correspond, ou bien sa classe représentera un nouveau nombre, un nombre irrationnel.

Remarquons à propos de la troisième rédaction inédite du cours de Weierstrass, celle de 1866 rédigée par Thieme, et qui est le dernier cours d'analyse fait par Weierstrass, que c'est seulement la [*ibid.*, 132] que l'on trouve chez Weierstrass, exprimée de façon explicite, l'idée que la notion de limite ne peut être définie correctement qu'à condition de définir d'abord les nombres réels. Weierstrass précise que lorsque seulement l'ensemble des nombres rationnels est construit, nombres représentés par des agrégats finis, "il n'y a aucun sens de parler de la limite", car dans le domaine considéré une limite "n'existe pas en général". Weierstrass précise plus loin [*ibid.*, 134-135]: Si nous partons de l'existence des nombres rationnels, il est absurde de définir les nombres irrationnels comme limites des nombres rationnels, car a priori nous ne pouvons pas du tout savoir si, en dehors des nombres rationnels, il y a d'autres nombres". Une fois que les nombres rationnels et les nombres irrationnels sont définis, alors seulement, indique Weierstrass, on peut considérer les nombres irrationnels comme des limites de nombres rationnels.

### 1.3. *Les inédits publiés à propos de l'étude sur Weierstrass.*

Lors de notre travail sur Weierstrass [1971], nous avons publié un certain nombre d'inédits qui permettent d'éclairer son oeuvre ainsi que son époque. Nous allons dire quelques mots à propos des recherches que ces inédits permettraient d'entreprendre.

La correspondance de Karl Weierstrass et de Hermann Amandus Schwarz offre un champ privilégié pour une étude de l'oeuvre mathématique de Weierstrass, ainsi que pour celle de Schwarz. (Cette correspondance se trouve dans le Zentrales Archiv der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, DDR; d'ailleurs une étude de l'oeuvre de Schwarz à partir de son Nachlass serait très instructive). Cette analyse serait précieuse pour comprendre l'évolution des mathématiques entre 1870 et 1890. Ainsi, par exemple, la lettre de Weierstrass du 16 décembre 1874 [Dugac 1971, 140] nous informe que Weierstrass avait utilisé le théorème de Cantor, affirmant que l'ensemble des nombres algébriques est dénombrable, pour construire une fonction réelle de la variable réelle continue, n'ayant aucun maximum ni minimum, et admettant seulement des dérivées aux points qui ne sont pas des nombres algébriques. La lettre de Weierstrass du 28 mai 1885 [*ibid.*, 141] nous renseigne sur la tentative de Weierstrass de donner une définition de l'intégrale plus générale que celle de Riemann en utilisant encore les recherches de Cantor. (Cette tentative a été poussée assez loin dans le cours de Weierstrass de 1886,

rédigé par Thieme). Cette correspondance entre Weierstrass et Schwarz est essentielle pour comprendre la différence entre Kronecker et Weierstrass (par exemple les lettres de Weierstrass des 12 août 1885 et 12 juin 1888; la lettre de Schwarz du 16 mars 1885). Quelques éléments intéressants de la controverse entre Kronecker et Weierstrass se trouvent dans le manuscrit inédit de Hilbert "Compte rendu de mon voyage du 9 mars au 7 avril 1888" (Bibliothèque de l'Université de Göttingen Cod. Ms. Hilbert). (Des lettres inédites de la correspondance de Dedekind avec E. Selling [Dugac 1973, 18] et avec Frobenius [*ibid.*, 137-140, 143-144] mentionnent le conflit qu'eut Dedekind avec Kronecker). Signalons que nous n'avons pas pu trouver trace du Nachlass de Kronecker qui serait très utile pour comprendre cette époque (la correspondance de Kronecker avec tous les grands mathématiciens de son temps serait essentielle à cette fin).

La correspondance de Gaston Darboux avec Jules Houël [Dugac 1971, 148-153], qui se trouve dans les Archives de l'Académie des Sciences de Paris, est très importante pour étudier l'évolution de la mathématique française entre 1870-1880. Les deux rédacteurs du Bulletin des Sciences mathématiques s'écrivaient plusieurs fois par semaine et commentaient "à chaud" les événements mathématiques de leur temps, ainsi que les articles, portant souvent sur des sujets neufs, qu'ils allaient publier dans leur revue. Dans sa lettre du 5 mars 1870 [*ibid.*, 148-149], Darboux se plaint de ce que tous les grands mathématiciens français de cette époque, "quoique fort distingués, semblent appartenir à un autre âge. Ce sont des savants éminents restés à la science d'il y a vingt ou trente ans qu'ils perfectionnent, développent avec beaucoup de succès, mais toutes les branches modernes sont pour eux très accessoires". Darboux nous apprend, le 30 mars [*ibid.*, 150], à propos du mémoire de Riemann "Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique", que "c'est de là qu'il a tiré une foule de fonctions qui n'ont pas de dérivés". Dans sa lettre du 12 janvier 1874 [*ibid.*, 151], Darboux exprime sa conception de l'analyse: "Quant aux théorèmes du Calcul intégral, je crois de plus en plus que tout cela aurait besoin d'être repris à fond et que l'on devrait s'astreindre à une double loi: bien définir les hypothèses sur lesquelles on s'appuie, *ne donner que celles qui sont nécessaires pour l'exactitude du théorème*".

La correspondance de Charles Hermite avec Gösta Mittag-Leffler (dont une partie importante se trouve à l'Institut Mittag-Leffler à Djursholm) est utile pour comprendre l'évolution des idées mathématiques entre 1875-1900. Ainsi la lettre de Mittag-Leffler du 26 février 1883 [*ibid.*, 160] nous donne des renseignements précieux sur la traduction en français des mémoires de Georg Cantor. C'est Charles Hermite qui servait d'intermédiaire entre Mittag-Leffler et le traducteur (et il ne semble pas que Poincaré ait participé à ces traductions). A propos de ces mémoires de

Cantor, Mittag-Leffler écrit: "Je regrette que M. Cantor a employé tant de philosophie. La partie mathématique me paraît admirable et l'introduction de nouveaux nombres qui ont l'infini pour unité doit être d'une grande importance. Weierstrass en est très intéressé". Sa lettre du 8 mars 1883 suggère même, à propos des mémoires de Cantor: "Je crois que M. Poincaré même en tirerait une fois des avantages considérables". Dans sa lettre du 1er mai 1883, il écrit encore à propos de Cantor: "Je crois que vous êtes pourtant trop sévère envers lui et que vous trouverez une fois que ces recherches ont beaucoup d'importance pour la théorie des fonctions. M. Weierstrass n'est pas de votre opinion. Il estime beaucoup les travaux de Cantor, mais je dois avouer que la pluralité des géomètres allemands est de votre opinion". Les lettres de Mittag-Leffler, des 18 février et 19 mai 1885, 7 octobre 1886, 13 mai 1888 et 28 mai 1890, portent sur le différent entre Weierstrass et Kronecker.

## 2. *Richard Dedekind analyste, à la lumière des inédits.*

Nous avons également utilisé dans notre étude [1974] sur "Richard Dedekind analyste" de très nombreux inédits (publiés dans [Dugac 1971] et nous allons exposer les éléments nouveaux qu'ils ont apportés à l'étude de l'oeuvre de ce mathématicien et de son temps.

### 2.1. *Sur un cours de M. A. Stern de 1850.*

Pendant le premier semestre de ses études universitaires à Göttingen, le semestre d'été 1850, Dedekind suit un cours de M. A. Stern sur le Calcul différentiel et intégral [Dugac 1974, §1.2]. Nous avons trouvé une rédaction de ce cours par Dedekind et en avons publié quelques pages [1971, 13]. Bien que ce cours, comme le dit Dedekind lui-même, "ne pouvait lui apporter rien de neuf", il nous semble intéressant d'étudier ces quelques pages, extraites de son début, pour montrer combien étaient incertains les fondements de l'analyse à cette époque.

Stern commence d'abord par une introduction historique dans laquelle il estime que l'oeuvre de Lagrange en analyse "masquait simplement, sans les lever, les difficultés du Calcul différentiel", et c'est pourquoi, disait-il, certains mathématiciens, dans ces dernières années, revenaient à la conception de Newton. Pour Stern, "les difficultés qui se trouvent à la base de ces conceptions ne sont nullement mathématiques, mais logiques". Peut-être est-ce là que débuta la réflexion de Dedekind sur les fondements des mathématiques. Stern y affirme aussi que le point de départ des recherches mathématiques se trouve dans le monde visible et que "les mathématiques n'analysent pas la notion du continu", laissant aux philosophes le soin de élucider. Il en donne seulement une justification intuitive, en s'appuyant sur



l'idée de déplacement le long d'une courbe, ce qui l'amène à affirmer que la continuité implique la dérivabilité.

## 2.2. Sur le cours de Riemann: "Théorie des fonctions complexes".

Dans sa thèse de doctorat, qu'il passa sous la direction de Gauss en 1852, Dedekind insiste sur la nécessité de préciser les hypothèses lors d'interversion des signes d'intégration dans une intégrale double [Dugac 1974, §1.2.1]. Cela est d'autant plus intéressant à noter que ces questions d'échange des passages à la limite étaient traités de façon fort peu rigoureuse à cette époque. Ainsi Riemann lui-même, dans un cours inédit sur la "Theorie des fonctions complexes" [Dugac 1973, 81], dans une rédaction portant le nom de H. Hankel, "démontre" que si une série de fonctions est convergente, alors on peut l'intégrer terme à terme. Mais sa démonstration est quant même intéressante, car elle utilise la convergence uniforme sans que Riemann l'ait même définie. Partant du fait que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} [u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+m}(x)] = 0 ,$$

Riemann veut démontrer que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_a^b [u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+m}(x)] dx = 0 .$$

Pour cela, en désignant par  $d_n$  la borne supérieure de  $|u_n(x) + u_{n+1}(x) + \dots + u_{n+m}(x)|$  dans  $[a, b]$ , il suppose que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} d_n = 0 .$$

## 2.3 La première rédaction inédite de "Stetigkeit und irrationale Zahlen".

Lorsque Dedekind arrive à Zürich, comme professeur à l'Ecole polytechnique, il donne, pour la première fois de sa vie, pendant le semestre d'hiver 1858-59, un cours sur la "Première partie du Calcul différentiel et intégral" [Dugac 1974, §1.6]. C'est en préparant ce cours qu'il se rendit compte combien les différentes théories des nombres irrationnels étaient lacunaires et qu'il élaborera sa notion de coupure. Nous avons trouvé, parmi les papiers de Dedekind conservés à la Bibliothèque de l'Université de Göttingen, le plan de son cours sur le Calcul différentiel et intégral du semestre d'hiver 1862-63 [Dugac 1973, 10-11] dont le § 1 de l'introduction est intitulé: "Le domaine des nombres réels; sa continuité", qui indique que Dedekind enseignait à cette époque à Brunswick sa théorie des nombres réels. Il introduit, dans le § 4, la notion de limite, donc seulement après avoir construit l'ensemble des nombres réels  $R$ .

Dedekind avait pensé, à plusieurs reprises, écrire un livre sur la continuité et les nombres irrationnels, avant de le faire en 1872. De ce désir de Dedekind d'écrire un livre sur ce problème, un témoignage en est fourni par la lettre inédite que lui écrit son ami A. Dauber le 20 juin 1871 [*ibid.*, 52]. Dauber y dit: "Il y a une année, tu m'as écrit que, toi aussi, tu envisages la publication d'une théorie de la continuité". Donc, au moins déjà en 1870, Dedekind avait envisagé de publier son livre "Stetigkeit und irrationale Zahlen".

C'est le mémoire de Heine, "Les éléments de la théorie des fonctions", que Dedekind reçoit le 14 mars 1872 [Dugac 1974, §3.1.1] qui le "raffermit dans sa résolution" d'écrire son livre. En écrivant la préface à "Stetigkeit und irrationale Zahlen", Dedekind reçoit, le 20 mars 1872, l'article de Cantor où celui-ci développe sa théorie des nombres irrationnels. Dans la courte préface de la première rédaction inédite de son livre [Dugac 1973, 63], seul l'article de Heine se trouve mentionné, et pas celui de Cantor, ce qui permet de conclure que les deux rédactions, l'inédite et la définitive, furent écrites dans un très court laps de temps.

Dans son livre [Dugac 1974, §3.1.1], Dedekind exige "que l'arithmétique se développe à partir d'elle-même", quant aux nombres, ils sont des "libres créations" de l'esprit humain. Notons que le mot "libres" fut suivi d'un point d'interrogation significatif dans la première rédaction inédite du livre.

Cette première rédaction, faite avant de recevoir le mémoire de Cantor sur le même sujet, semble confirmer que Dedekind avait énoncé son axiome de continuité indépendamment de Cantor.

Le dernier paragraphe du livre est intitulé "Analyse infinitésimale", ce que indique clairement que Dedekind, une fois construite sa théorie des nombres réels, va l'utiliser pour construire les fondements de l'analyse. Ce paragraphe n'existe pas dans la première rédaction et il est probable que, pour le rédiger, Dedekind se soit servi de ses notes du cours d'analyse, comme il a dû le faire pour sa théorie des nombres irrationnels, car ce livre, comme nous l'avons déjà dit, fut rédigé très vite, ce qui confirme que Dedekind avait élaboré sa théorie depuis fort longtemps.

#### 2.4. La correspondance inédite avec R. Lipschitz.

Cette correspondance débuta à propos de l'article que Darboux avait demandé à Dedekind, par l'intermédiaire de Lipschitz, sur sa nouvelle théorie des idéaux [Dugac 1974, §3.1.2]. Les lettres de Dedekind ont été publiées dans ses œuvres mathématiques, mais nous avons publié les réponses de Lipschitz dans [Dugac 1973, 75-79]. Elles éclairent un débat important sur des questions fondamentales de l'analyse.

Dans sa lettre à Dedekind, du 8 juin 1876, Lipschitz affirme que la théorie des nombres irrationnels de Dedekind ne se "distingue que par la forme, mais pas quant au fond, de celle donnée par les Anciens". Pour ce qui est de la définition 5 du

livre des Eléments d'Euclide: "Des grandeurs sont dites avoir une raison entre elles, lorsque ces grandeurs, étant multipliées, peuvent se surpasser mutuellement", Lipschitz la trouve "aussi satisfaisante" que celle de Dedekind. Faisant allusion à une note, que Dedekind avait ajoutée à son article de 1877 pour le Bulletin de Darboux, et qu'il avait envoyé avant sa publication à Lipschitz, celui-ci lui écrit qu'il souhaiterait que "l'assertion, que les théorèmes comme  $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$  n'étaient pas réellement démontrés jusqu'à présent, soit supprimée". Car Lipschitz était persuadé que le livre cité d'Euclide "contient les principes nécessaires et suffisants pour la démonstration de ce théorème".

L'objection essentielle de Dedekind [Dugac 1973, §3.1.2.], à la théorie des nombres irrationnels contenue dans les Eléments d'Euclide, était qu'en complétant l'ensemble des nombres rationnels elle ne mentionné jamais la "fermeture" de cette complétion, à savoir la notion d'un domaine de grandeurs continues tel que si l'on partage l'ensemble des grandeurs en deux classes de façon que toute grandeur de la première soit plus petite que toute grandeur de la seconde, alors il existe ou bien dans la première classe une grandeur qui est la plus grande, ou bien dans la seconde classe une grandeur qui est la plus petite. Et si cette propriété n'est pas incluse explicitement dans le concept du domaine des grandeurs, alors il reste incomplet, et il est impossible de définir, dans un tel domaine, toutes les opérations arithmétiques.

Lipschitz répond à Dedekind, le 6 juillet 1876, que celui-ci a "comme but, dès le départ, de supposer seulement l'existence des nombres rationnels et des quantités mesurables par les nombres rationnels", mais Euclide procède autrement, et c'est là "le point essentiel de la différence de Dedekind avec lui", car Euclide se "représente une quantité comme déterminée par sa mesure à l'aide d'une longueur définie avec précision et, de ce point de vue, il peut exhiber de longueurs qui ont un rapport avec la longueur donnée et qui ne peut pas être exprimé par le rapport de deux nombres entiers. L'exemple de la diagonale du carré dont les côtés sont donnés suffit parfaitement". Ainsi donc, poursuit Lipschitz, dans la mesure où l'on "supposera" l'existence des rapports non rationnels, la définition de l'égalité donnée par Euclide est suffisante pour faire des calculs arithmétiques avec de tels rapports, et "c'est au fond exactement la même chose que Dedekind réalise avec son principe". Prévoyant l'objection de Dedekind qu'il n'est pas suffisant de "déduire, des constructions géométriques, l'existence des nombres irrationnels, Lipschitz répond par une profession de foi "l'esprit humain a tiré principalement les forces qu'il possède actuellement de l'emploi de la géométrie, et la rigueur géométrique a été considérée, pendant des millénaires, comme la plus haute exigence. Et lorsqu'on pose maintenant d'autres exigences, "nous en sommes au fond redevables à l'emploi de la géométrie, et intrinsèquement ces exigences ne sont pas, même maintenant, différentes" de celles de la géométrie. Quant au problème essentiel,

soulevé par Dedekind, de la complétude du domaine des nombres, Lipschitz lui répond qu'elle "coïncide, en fait, avec la propriété fondamentale d'une droite, sans laquelle aucun homme ne peut se représenter cette droite". Ces objections de Lipschitz nous renseignent sur les conceptions qui régnaient, chez de très bons mathématiciens, sur ces questions avant la publication des théories de Dedekind, de Weierstrass et de Méray-Cantor.

Remarquons que cette lettre de Lipschitz, du 6 juillet 1876, à propos de l'article de Dedekind pour le Bulletin de Darboux, confirme que ces deux mathématiciens ne vivaient pas tout à fait à la même époque mathématique. En effet, si Lipschitz admet avec Dedekind que le traitement systématique d'une question doit reposer sur des notions fondamentales simples, il affirme, par contre, qu'il "n'en résulte pas que, lors de la présentation de ces questions, ces notions fondamentales doivent être traitées en premier". Ainsi Lipschitz veut gommer un apport important de Dedekind, à savoir présenter d'abord, dans un chapitre "zéro", les définitions et les théorèmes fondamentaux, avant de les appliquer à des problèmes particuliers, méthode opposée à celle de Lipschitz qui voulait aller "du connu à l'inconnu".

## 2.5 *La première rédaction inédite de "Was sind und was sollen die Zahlen?"*

Dedekind commence à rédiger "Was sind und was sollen die Zahlen?" des 1872 (la première ébauche du livre, que nous avons publiée dans [Dugac 1973, 150-68], est écrite entre 1872 et 1878). De ses rédactions successives, on en trouve des échos dans sa correspondance et dans ses livres [Dugac 1974, §7.1].

Ainsi, dans une lettre inédite du 13 novembre 1878 [Dugac 1973, 130], H. Weber écrit à Dedekind qu'il attend, avec une extrême curiosité, son livre "Que sont et que représentent les nombres?". Dans sa réponse, Dedekind indique que ses recherches sur les débuts de l'arithmétique sont arrêtées, et il doute qu'elles soient jamais publiées. Weber regrette, dans sa lettre du 28 novembre, l'intention de Dedekind d'abandonner, ou d'en différer longtemps, la publication de ses recherches sur les bases de l'arithmétique, car elles rendraient un grand service à la communauté mathématique. "Ton manuscrit m'intéresserait beaucoup, écrit Weber, si tu voulais me le confier, tel qu'il est, pour un bref examen". Les deux amis ont dû parler, des cette époque, des problèmes traités dans ce livre. Notons à ce propos que Dedekind écrit à Cantor, dans une lettre inédite du 9 janvier 1882 [*ibid.*, 104], qu'il a pu apprécier les vastes connaissances de H. Weber "lors d'un travail sur les fonctions algébriques, dont nous sommes venus à bout, dans une curieuse correspondance, de janvier 1879 jusqu'en été 1880". Il serait important de faire une étude détaillée de cette correspondance (dont une partie importante se trouve à la Clifford Memorial Library at the

University of Evansville aux Etats Unis) pour comprendre comment est née toute une série de notions qui sont devenues fondamentales en mathématiques.

Dans la préface à la deuxième édition de son livre, publiée en 1883, Dedekind donne quelques précisions sur sa définition de l'infini, que nous allons compléter grâce à des documents inédits. Reconnaissant que Bolzano avait déjà utilisé la propriété d'un ensemble infini d'être isomorphe à une de ses parties propres, ainsi que Cantor, Dedekind écrit avec raison: "Mais aucun de ces écrivains n'a fait la tentative d'ériger cette propriété en définition de l'infini et de construire, sur cette base, rigoureusement et logiquement, la science des nombres; et c'est précisément en cela qu'a consisté mon dur labeur, dont l'ensemble a été déjà achevé plusieurs années avant la parution du mémoire de Cantor et en un temps où l'oeuvre de Bolzano m'était, même de nom, tout à fait inconnue". Nous sommes maintenant en état, avec nos inédits, de faire une mise au point sur cette question. Notons d'abord que la lettre inédite de Georg Cantor à Dedekind, du 7 octobre 1882 [*ibid.*, 112], nous apprend que Cantor venait de lui envoyer le livre de Bolzano "Paradoxes de l'infini". Remarquons ensuite que dans la première ébauche inédite de "Was sind und was sollen die Zahlen?" écrite entre 1872 et 1878, on trouve [*ibid.*, 151] la définition dedekindienne de l'infini. Ainsi se trouve confirmé ce que disait Dedekind dans cette préface à la deuxième édition de son livre. D'autre part, la note de Dedekind: "Une considération analogue se trouve dans le §13 des Paradoxes de l'infini de Bolzano", note qui suit la démonstration de la proposition 66 de son livre: "Il y a des ensembles infinis", signifie que Dedekind s'est inspiré de Bolzano pour l'énoncé et la démonstration de ce théorème, car il ne figure pas dans la première ébauche de "Was sind und was sollen die Zahlen?" que est de 1872-78 et que la deuxième ébauche est de juin-juillet 1887.

Dedekind signale dans son livre qu'il est "avantageux" (vorteilhaft), pour uniformiser les notations, de considérer les ensembles composés d'un seul élément, mais il note de la même façon a en tant qu'un ensemble composé d'un seul élément et en tant qu'élément d'un ensemble. Mais déjà dans une lettre inédite du 24 janvier 1888 à H. Weber [*ibid.*, 131], son ouvrage a paru à Noël 1887, Dedekind regrette de n'avoir pas utilisé un signe distinguant un ensemble composé d'un seul élément de cet élément lui-même.

Notons que les premières ébauches de "Was sind und was sollen die Zahlen?" portent comme titre [*ibid.*, 150]: "Réflexions sur les nombres", suivi d'un sous-titre significatif: "Essai d'une analyse de la notion de nombre d'un point de vue naïf". Dedekind y indique également que si l'on poursuit, de façon conséquente, ce que l'on fait lors du dénombrement des éléments d'un ensemble, "alors on est amené nécessairement à la notion de correspondance ou d'application". C'est Dedekind qui attribue, pour la première

fois dans l'histoire des mathématiques, ce rôle fondamental à l'application. Dans ce manuscrit inédit, Dedekind utilise la notation qui, même aujourd'hui, serait considérée comme "révolutionnaire", car il note  $f(a)$  par  $a|f$ . Dans un autre inédit, où il commente un manuscrit de H. Weber sur la théorie des ensembles [*ibid.*, 133], il insiste sur cette notation  $af$  ou  $Af$ , qu'il trouve "plus naturelle que  $f(a)$  ou  $f(A)$ ".

Les brouillons de la première rédaction de "Was sind und was sollen Zahlen?" portent en marge [*ibid.*, 151]: "Construction d'une suite simplement infinie". Il semble donc que Dedekind avait voulu "construire" un ensemble simplement infini, avant de se décider à "démontrer" l'existence d'un ensemble infini.

## 2.6. La correspondance inédite Cantor-Dedekind.

Une grande partie de la correspondance Cantor-Dedekind fut publiée par Emmy Noether et Jean Cavailles. Nous avons publié [*ibid.*, 83-117] la partie inédite de cette correspondance qui permet une mise au point sur cette "amitié mathématique" et que nous avons faite dans [1974]. (Ces lettres inédites, sauf une, ont été retrouvées récemment aux Etats Unis, où les avait amenées Emmy Noether, par C. H. Kimberling.)

Cette correspondance inédite nous apprend, par exemple, que lorsque Cantor avait communiqué à Weierstrass ses résultats sur la non-existence d'une bijection entre  $N$  et  $R$ , le 27 décembre 1873 [*ibid.*, §11], celui-ci lui conseille de les publier, mais, comme l'écrit le même jour Cantor à Dedekind [Dugac 1973, 86], il lui suggère de supprimer dans son article "la remarque sur la différence de nature (Wesensunterschied) des ensembles". Notons à ce propos une curieuse lettre inédite de Cantor à Félix Klein du 8 décembre 1895 [*ibid.*, 24]. Cantor écrit à Klein qu'il n'est pas d'accord avec lui sur "la prépondérance qu'il attribue à Weierstrass dans l'"arithmétisation des mathématiques"". Car, d'après Cantor, on doit "distinguer chez Weierstrass ce qu'il a réellement fait du mythe dans lequel l'ont enveloppé ses élèves, pour ainsi dire comme dans un épais brouillard, pour le raffermissement et l'élévation de leur propre réputation".

Il est intéressant de noter que, dans sa lettre inédite du 20 janvier 1880 [*ibid.*, 92], Cantor avait proposé à Dedekind "d'assumer la rédaction de la première partie, si importante sur les nombres rationnels et irrationnels" du livre de Dini "Fondements pour la théorie des fonctions de variables réelles", paru en 1878, et que Cantor voulait faire éditer en allemand, ce qui montre l'importance de ce traité de Dini, le premier exposé "moderne" de l'analyse. Ce projet ne fut finalement pas réalisé par Cantor.

Cette correspondance inédite est particulièrement intéressante pour l'histoire de la nomination "manquée" de Dedekind à l'Université de Halle où enseignait Cantor. La déception de

Cantor, à la suite du refus de Dedekind d'accepter ce poste, a été bien exprimée par Cantor lui-même dans sa lettre inédite à Félix Klein du 25 février 1882 [*ibid.*, 22]. Indiquant "combien il lui sera difficile de se consoler de ce que le souhait qu'il avait nourri" de voir Dedekind à Halle ne se soit pas réalisé, Cantor précise qu'il y avait "tenu très particulièrement, car il était en droit d'espérer beaucoup d'une collaboration avec lui".

3. *Eléments d'une histoire de l'analyse mathématique de 1860 à 1910.*

Nos études [1970-1974] ont jeté quelques jalons d'une histoire de l'analyse mathématique entre 1860 et 1910. Nous allons les continuer par un examen de l'oeuvre mathématique de René Baire, dont le travail créateur s'arrête vers 1910. Nous espérons ainsi contribuer un peu à préparer une histoire de l'analyse mathématique de cette époque si essentielle en mathématique.

#### BIBLIOGRAPHIE

- Briot et Bouquet 1859 *Théorie des fonctions doublement périodiques* Paris (Mallet-Bachelier).
- Dirichlet, Lejeune P. G. 1904 *Vorlesungen über die Lehre von den einfachen und mehrfachen bestimmten Integralen*, édité par G. Arendt, Braunschweig (Vieweg).
- Dugac, Pierre 1970 Charles Méray et la notion de limite *Revue d'histoire des sciences* 23, 333-350.
- \_\_\_\_\_ 1971 *Eléments d'analyse de Karl Weierstrass* *Archive for History of Exact Sciences* 10, 41-176.
- \_\_\_\_\_ 1973 *Documents pour une étude sur Richard Dedekind* Paris (Université de Paris VI), 175 p.
- \_\_\_\_\_ 1974 *Richard Dedekind analyste* Paris, 164 p.  
(dactylographie; à paraître avec les documents de [3] et une préface de Jean Dieudonné).