Fonctions convexes et theorie du potentiel. (I)

par E. M. J. Bertin

Dept. of Mathematics, University of Utrecht

Communicated by Prof. T. A. Springer at the meeting of November 25, 1978

SOMMAIRE

La détermination de la plus grande fonction convexe sur une partie ouverte et convexe d'un espace localement convexe E, minorant une fonction frontière donnée, définit un problème de Dirichlet et même une théorie locale du potentiel non-linéaire dans E.

INTRODUCTION

La théorie axiomatique des espaces harmoniques, comme décrite par exemple dans Constantinescu et Cornea [1972], est une théorie linéaire sur un espace de base localement compact.

Le début d'une théorie axiomatique non-linéaire sur un espace localement compact est donné dans Constantinescu [1965] et [1976], les axiomes de cette théorie étant inspirés par une certaine classe d'équations aux dérivées partielles non-linéaires. Dans [1976] nous étudions du point de vue potentialiste une généralisation de l'équation non-linéaire de Monge-Ampère aux espaces localement convexes.

Le présent mémoire introduit les rudiments d'une autre théorie du potentiel non-axiomatisée et fortement non-linéaire, sur un espace non nécessairement localement compact. Elle a été inspirée par le problème géométrique suivant.

Soit U une partie ouverte, bornée et convexe de $\mathbb{R}^2$ et soit $f: \partial U \to \mathbb{R}$ une fonction bornée. On cherche le corps convexe (éventuellement dégénéré) $K \subset \mathbf{R}^2 \times \mathbf{R}$, de volume minimal, tel que $\bar{U}$ soit la projection de K sur $\mathbf{R}^2$ et tel que le graphe de f soit contenu dans K. Soit u, resp. v, la plus grande fonction convexe s.c.i. sur $\bar{U}$, minorant f, resp. $-f$. Désignant par T_u et T_v les épigraphes de u et de v, on déduit aisément des résultats du paragraphe 4 que la solution du problème est donné par $K = T_u \cap (-T_v)$. Nous n'insisterons pas sur les conséquences architectoniques de ce résultat dans une société sans fermes.

Les trois premiers paragraphes donnent une partie nécessaire de la théorie des fonctions convexes dans un espace localement convexe. Dans ce cadre, le théor. 3.5 nous paraît nouveau.

Dans le paragraphe 4, on introduit l'opérateur de type Dirichlet $f \mapsto H_f^U$, où H_f^u est la plus grande fonction convexe s.c.i., minorant f dans ∂U. C'est un opérateur concave, non-additif et continu par rapport à la topologie de la convergence uniforme.

Dans le paragraphe 5 on introduit les préfaisceaux $\mathscr{U}$, $\mathscr{E}$ et $\mathscr{H}_*$ des fonctions "hyperharmoniques", "harmoniques" et "hypoharmoniques". Chaque $\mathscr{H}_*(U)$ est un cône convexe; $\mathscr{U}(U)$ et $\mathscr{E}(U)$ sont en général des cônes non-convexes. $\mathscr{H}_*$ est un faisceau; $\mathscr{U}$ et $\mathscr{E}$ ne sont pas, en général, des faisceaux. Le théorème de convergence des fonctions harmoniques n'est valable, en général, que pour les familles décroissantes (5.9–10).

Dans le paragraphe 6 on déduit quelques théorèmes de régularité. En particulier, tout espace de Banach réflexif possède une base d'ouverts réguliers par rapport à l'opérateur $H_\cdot^U$ (6.8).

Le paragraphe 7 donne quelques principes du minimum, satisfaits par un préfaisceaux. Cependant, le principe le plus utile est prouvé seulement pour le cas de dimension finie et nous ne savons pas s'il est valable pour des cas plus généraux (7.4).

1. NOTATIONS, PRÉLIMINAIRES

E sera toujours un espace vectoriel réel, de dimension $\geqslant 1$, muni d'une topologie localement convexe séparée $\mathscr{U}$. Le dual topologique de $(E, \mathscr{U})$ sera désigné par E'. Sauf mention du contraire, E' sera muni de la topologie faible $\sigma(E', E)$. Si M est un sous-espace de E', on désigne par π_M l'application canonique de E' sur E'/M et par M^0 le polaire de M dans E.

Soit $(F, \mathscr{V})$ un espace topologique. On note $\mathscr{V}(x)$, respectivement $\mathscr{V}(A)$, l'ensemble des voisinages ouverts de $x \in F$, respectivement de $A \subset F$. L'ensemble des parties compactes de F sera désigné $\mathscr{K}$ (ou, si besoin est, par $\mathscr{K}(F)$, $\mathscr{K}(F, \mathscr{V})$ ou $\mathscr{K}(\mathscr{V})$). La frontière d'une partie A de F sera désignée par ∂A.

On identifiera parfois une partie A de F à sa *fonction indicatrice* χ_A, définie par $\chi_A(x) = 0$ si $x \in A$, $\chi_A(x) = \infty$ si $x \notin A$. Pour chaque ensemble $\mathscr{F}$ de fonctions numériques sur F, $\mathscr{F}^f$ désignera l'ensemble des fonctions finies $f \in \mathscr{F}$, $\mathscr{F}^c$ l'ensemble des fonctions continues $f \in \mathscr{F}$ et $\mathscr{F}^b$ l'ensemble des fonctions bornées $f \in \mathscr{F}$. Pour toute fonction numérique f, définie dans un ensemble B et pour toute partie A de B, on désigne par $1_A f$ la fonction égale à f dans A, égale à 0 ailleurs. Pour toute fonction numérique f, définie dans $B \supset F$, on écrira $f \in \mathscr{F}$ si $1_F f \in \mathscr{F}$. On écrit $f > -\infty$ dans F, respectivement $f < \infty$ dans F, si f ne prend pas la valeur $-\infty$, respectivement la valeur ∞, dans F.

Si $(F, \mathscr{V})$ est un espace linéaire topologique, on écrit $A \Subset B$ s'il existe un voisinage $W \in \mathscr{V}(0)$ tel que $A + W \subset B \subset F$. L'enveloppe convexe d'une partie A de F est désignée par co (A), l'enveloppe convexe équilibrée par aco (A), les enveloppes fermées par $\overline{\text{co}}$ (A) et $\overline{\text{aco}}$ (A) respectivement. On note L_q, respectivement L_q^+, la droite engendrée par un vecteur $q \neq 0$ de F, respectivement la demi-droite $\{\lambda q\colon \lambda \geqslant 0\}$.

Pour toute fonction numérique f, définie dans $A \subset F$, on désigne par $\bar{f}$, et l'on appelle *régularisée s.c.i.*, la borne supérieure des minorantes de f, définies et s.c.i. dans $\bar{A}$. Evidemment, on a

$$\bar{f}(x) = \liminf_{A \ni y \to x} f(y)$$

pour tout $x \in \bar{A}$ et $\bar{f}$ est s.c.i. dans $\bar{A}$. La *régularisée s.c.s.* de f est la fonction $\check{f} = -(\overline{-f})$.

Soit C une partie convexe de F. Utilisant (en outre) la convention $\infty + (-\infty) = -\infty + \infty = \infty$, une fonction numérique $f \in \overline{\mathbf{R}}^C$ est *convexe dans* C si elle vérifie la relation

$$x, y \in C,\ 0 < \lambda < 1 \Rightarrow f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leqslant \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y).$$

On désigne par $\mathscr{C}(C)$ l'ensemble des fonctions convexes dans C. On écrit parfois $\mathscr{C}$ au lieu de $\mathscr{C}(F)$. En vertu de la convention introduite ci-dessus, on a $C \in \mathscr{C}$ si et seulement si C est une partie convexe de F. On désigne par $\mathscr{A}(C)$, respectivement par $\mathscr{A}$, l'ensemble des fonctions affines finies et continues dans C, respectivement dans F.

REMARQUE 1.1. Soient $x, y \in U \in \mathscr{U} \cap \mathscr{C}$ et $0 \neq u \in E$. Les relations $x + L_u^+ \subset U$ et $y + L_u^+ \subset U$ sont équivalentes.

En effet, supposons $\lambda > 0$ et $x + \lambda u \in \partial U$. Soient $p \in E'$ et $c \in \mathbf{R}$ tels que $p(x + \lambda u) = c$ et $U \subset p^{-1}\langle(-\infty, c)\rangle$. On a $p(u) > 0$, donc $\sup_{\alpha > 0} p(y + \alpha u) > c$ et $y + L_u^+ \not\subset U$. □

DEFINITION 1.2. Une partie $U \in \mathscr{U} \cap \mathscr{C}$ de E est dite *épaulée* si $\bar{U} = \text{co}\,(\partial U)$. L'ensemble des parties ouvertes, convexes et épaulées de E est noté $\mathscr{B}_e$.

LEMME 1.3. Soit $U \in \mathscr{U} \cap \mathscr{C}$. Les relations suivantes sont equivalentes:

1. $U \in \mathscr{B}_e$.
2. $\bar{U} = \overline{\text{co}}\,(\partial U)$.
3. $U \cap \text{co}\,(\partial U) = \emptyset \Rightarrow U = \emptyset$.
4. $U \neq E$ et U n'est pas un demi-espace ouvert.
5. $U = \emptyset$ ou il existe $x \in U$ et une droite L, contenant x, tels que $L \cap U$ soit un intervalle ouvert borné.

6. Quel que soit $x \in U$ il existe une droite L, contenant x, telle que $L \cap U$ soit un intervalle ouvert borné.
7. $U = \emptyset$ ou $f \in \mathscr{C}(\overline{U})$, $f > -\infty \Rightarrow \sup_{\overline{U}} f = \sup_{\partial U} f$.

$1 \Rightarrow 2 \Rightarrow 3 \Rightarrow 4$: C'est évident.

$4 \Rightarrow 5$: Soit $z \in U$; comme $U \neq E$ il existe un point $w \in \partial U$. Choisissons $p \in E' \backslash \{0\}$ et $c \in \mathbf{R}$ tels que $p(w) = c$ et $U \subset p^{-1}\langle(c, \infty)\rangle$. Il existe $y \notin U$ tel que $p(y) > c$, et il existe $\lambda \in [0, 1)$ tel que $\lambda > (p(z) - p(y))/(p(z) - c)$. On a $x = \lambda w + (1 - \lambda)z \in U$ et $p(x) < p(y)$. Par suite, la droite L passant par x et y satisfait à

$$L \cap U \subset \left[\frac{p(y)-c}{p(y)-p(x)} x - \frac{p(x)-c}{p(y)-p(x)} y,\ y\right].$$

$5 \Rightarrow 6$: C'est une conséquence immédiate de la remarque 1.1.

$6 \Rightarrow 7$: Soit V un voisinage connexe de $a = \sup_{x \in \overline{U}} f(x) \in (-\infty, \infty]$ et soit $y \in \overline{U}$ tel que $f(y) \in V$. Il existe $y_1, y_2 \in \partial U$ tels que $y \in (y_1, y_2)$ et par suite $\max(f(y_1), f(y_2)) \in V$.

$7 \Rightarrow 1$: On pose $f = 0$ dans $\operatorname{co}(\partial U)$, $f = \infty$ dans $U \cap \complement \operatorname{co}(\partial U)$.

DEFINITION 1.4. On dit qu'une partie $U \in \mathscr{B}_e$ de E est *hyperépaulée*, notation $U \in \mathscr{B}_{he}$, si $\dim(E) = 1$ ou si $\overline{U} \cap H = \operatorname{co}(\partial U \cap H)$, quel que soit l'hyperplan fermé H.

PROPOSITION 1.5. Soient r, s deux éléments linéairement indépendants de E' et $U \in \mathscr{U} \cap \mathscr{C}$, $U \subset r^{-1}\langle[-1, 1]\rangle \cap s^{-1}\langle[-1, 1]\rangle$. Alors U est hyperépaulé. En particulier, $\mathscr{B}_{he}$ est une base de $\mathscr{U}$.

Il est clair que $\mathscr{B}_e = \mathscr{B}_{he}$ est une base de $\mathscr{U}$ si $\dim(E) = 1$. Supposons donc que $\dim(E) > 1$, que r et s soient linéairement indépendants, et que $U \subset r^{-1}\langle[-1, 1]\rangle \cap s^{-1}\langle[-1, 1\rangle$. D'après le lemme 1.3 il suffit à prouver l'absurdité de la relation $p, q \in E'$, $q^{-1}\langle(-\infty, 0]\rangle \cap p^{-1}(0) \subset \overline{U}$. Or il est immédiat que $q^{-1}\langle(-\infty, 0]\rangle \cap p^{-1}(0)$ est alors contenu dans $r^{-1}(0) \cap s^{-1}(0)$, donc que $p^{-1}(0) \subset r^{-1}(0) \cap s^{-1}(0)$. On en déduit $p^{-1}(0) = r^{-1}(0) = s^{-1}(0)$, ce qui contredit l'indépendance de r et de s. □

2. FONCTIONS CONVEXES

Pour chaque fonction numérique f définie dans $A \subset E$, *l'épigraphe* de f est l'ensemble $T_{f,A} = \{(x, \lambda) \in E \times \mathbf{R} : x \in A, f(x) \leqslant \lambda\}$. Rappelons:

LEMME 2.1. Soient A une partie de E, $C \in \mathscr{C}$, $f \in \overline{\mathbf{R}}^A$ et $g \in \overline{\mathbf{R}}^C$.
1. Si A est fermé, alors f s.c.i. dans $A \Leftrightarrow T_{f,A}$ fermé dans $E \times \mathbf{R}$.
2. $T_{\bar{f},\bar{A}} = \overline{T_{f,A}}$.
3. $g \in \mathscr{C}(C) \Leftrightarrow T_{g,C} \in \mathscr{C}(E \times \mathbf{R})$.
4. C fermé, alors g convexe et s.c.i. dans $C \Leftrightarrow g$ convexe et $\sigma(E, E')$-s.c.i. dans C.
5. $g \in \mathscr{C}(C) \Rightarrow \bar{g} \in \mathscr{C}(\overline{C})$, $\check{g} \in \mathscr{C}(\mathring{C})$.

1–4: Comparer Ekeland et Temam [1976], p. 9–11.

5: La première assertion résulte de 2 et 3. Supposons donc $x, y, z \in \mathring{C}$ et $\lambda \in (0, 1)$, tels que $x = \lambda y + (1-\lambda)z$. Il existe un voisinage $V \subset C$ de x tel que

$$\frac{-\lambda}{1-\lambda} y + \frac{1}{1-\lambda} V \subset C.$$

Par conséquent,

$$\breve{g}(x) = \limsup_{V \ni x' \to x} g(x') = \limsup_{V \ni x' \to x} g\left(\lambda y + (1-\lambda)\left(\frac{-\lambda}{1-\lambda} y + \frac{1}{1-\lambda} x'\right)\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda g(y) + (1-\lambda) \limsup_{V \ni x' \to x} g\left(\frac{-\lambda}{1-\lambda} y + \frac{1}{1-\lambda} x'\right) \leqslant$$

$$\leqslant \lambda g(y) + (1-\lambda) \limsup_{C \ni z' \to z} g(z') = \lambda g(y) + (1-\lambda) \breve{g}(z).$$ □

LEMME 2.2. Soient $x, h \in E$, $\nu_1, \nu_2 \geqslant 0$ et $f \in \mathscr{C}([x - \nu_1 h, x + \nu_2 h])$, telle que $f(x) \neq \infty$. La fonction $\lambda \mapsto (f(x+\lambda h) - f(x))/\lambda$ est croissante dans $[-\nu_1, 0) \cup (0, \nu_2]$.

Cela résulte de Valentine [1964] et la remarque suivante. □

REMARQUE 2.3. Soient L^+ une demi-droite dans E d'extrémité x et $f \in \mathscr{C}(L^+)$, $f(x) = -\infty$. Alors $f = -\infty$ dans L^+ ou il existe un point $y \in L^+$ telle que $f = -\infty$ dans $[x, y)$, $f(y) \in \mathbf{R}$ et $f = \infty$ dans $(y, \to)$.

PROPOSITION 2.4. Soient $C \in \mathscr{C}$, muni de la topologie induite, $H \subset \mathscr{C}(C)$ et $x \in C$. Supposons qu'on ait $f < \infty$ dans C pour chaque $f \in H$, que l'ensemble $H' = \{f \in H : f(x) \neq -\infty\}$ soit borné en x et qu'il existe un voisinage W de x tel que $W \cap \bar{C} \subset C$. Pour que H soit équi-s.c.s. en x, il faut et il suffit que les conditions suivantes soient satisfaites:

α. Si $\mathring{C} \neq \emptyset$, H est majoré dans un voisinage de x.

β. Si $x \notin \mathring{C}$, l'ensemble des restrictions à $W \cap \partial C$ des fonctions de H est equi-s.c.s. en x.

Il est clair que ces conditions sont nécessaires. Réciproquement, soit V un voisinage de la diagonale de $\bar{\mathbf{R}} \times \bar{\mathbf{R}}$, contenant tout ensemble de la forme $\{\lambda\} \times [-\infty, \lambda]$. Il faut prouver l'existence d'un voisinage U de 0 tel que $(f(x), f(y)) \in V$ quels que soient $f \in H$ et $y \in (x+U) \cap C$.

De la remarque précédente, appliquée à la fonction $1_C f + 1\complement_C \infty$, il résulte que toute fonction $f \in H \backslash H'$ est égale à $-\infty$ dans $\mathring{C} \cup \{x\}$. Par suite, $H \backslash H'$ est équi-s.c.s. en x. Supposons donc désormais que $H = H'$. Il existe $\alpha > 1$, $U \in \mathscr{U}(0) \cap \mathscr{C}$ et $M > 0$ tels que

$$|f(x)| < M, f(y) < M, x + U \subset W, (f(x), f(t)) \in V$$

et $\{(\lambda, \lambda+2M/\alpha): |\lambda|\leqslant M\} \subset V$, quels que soient $f\in H$, $y\in(x+U)\cap C$ et $t\in(x+U)\cap \partial C$. Pour chaque $z\in 1/\alpha\, U\cap(-x+C)$ tel que $[x, x+\alpha z]\subset C$, on a

$$f(x+z)-f(x)\leqslant(f(x+\alpha z)-f(x))/\alpha\leqslant 2M/\alpha \quad (2.2).$$

Pour chaque $z\in 1/\alpha\, U\cap(-x+C)$ tel que $[x, x+\alpha z]\not\subset C$, il existe $\beta\in[1,\alpha)$ tel que $x+\beta z\in(x+U)\cap\partial C$. Comme $f(x+z)-f(x)\leqslant(f(x+\beta z)-f(x))/\beta$ et $(f(x), f(x+\beta z))\in V$, on a $(f(x), f(w))\in V$ quel que soit $w\in(x+1/\alpha\, U)\cap C$. □

COROLLAIRE 2.5. Soient $U\in\mathscr{U}\cap\mathscr{C}$, $x\in U$ et H un sous-ensemble de $\mathscr{C}(U)$. Supposons qu'on ait $f<\infty$ dans U pour toute fonction $f\in H$ et que $H'=\{f\in H: f(x)\neq-\infty\}$ soit borné en x.

1. Pour que H soit équicontinu en x, il faut et il suffit que H soit majoré dans un voisinage de x.
2. Soit H' borné pour la topologie de la convergence simple. Pour que H soit équicontinu dans U, il faut et il suffit que H soit majoré dans un voisinage d'un point $y\in U$.

1: Dans les notations de la démonstration précédente on a

$$f(x+z)-f(x)\geqslant(f(x-\alpha z)-f(x))/(-\alpha)\geqslant -2M/\alpha,$$

quel que soit $z\in 1/\alpha\, U\cap(-x+C)$.

2: On a $H'=H$ ou $H=H'\cup\{-\infty\}$. La démonstration d'usage (comparer Ekeland et Temam [1976], p. 12) montre que H est majoré dans un voisinage de tout point $y\in U$. □

REMARQUE 2.6. Si H' est borné uniformément dans U, l'équicontinuité est même uniforme dans tout ensemble $A\Subset U$.

DEFINITION 2.7. Soient $U\subset E$ et $f\in\overline{\mathbf{R}}^U$. On dit que f est *localement convexe* dans U, notation $f\in\mathscr{C}_1(U)$, s'il existe un recouvrement ouvert $(V_\iota)_{\iota\in I}\subset\mathscr{U}\cap\mathscr{C}$ de U, tel que $V_\iota\cap U$ soit convexe et $1_{V_\iota\cap U}f\in\mathscr{C}(V_\iota\cap U)$ pour tout $\iota\in I$.

LEMME 2.8. Soient $U\in\mathscr{U}$, $W\in\mathscr{U}$ connexe, $\infty>f\in\mathscr{C}_1(U)$ et $g\in\mathscr{C}_1(\overline{W})$, $g<\infty$ dans W.

1. $x\in\overline{W}$, $g(x)=-\infty\Rightarrow 1_W g=-\infty$.
2. $(x,y)\subset U\Rightarrow f\in\mathscr{C}^c((x,y))$.
3. $U\supset V\in\mathscr{U}\cap\mathscr{C}\Rightarrow f\in\mathscr{C}(V)$.

1: Soit $A=\{y\in W: g(y)=-\infty\}$. A est non vide. En effet, soit $V\in\mathscr{U}(0)\cap\mathscr{C}$ tel que $(x+V)\cap\overline{W}$ soit convexe et $g\in\mathscr{C}((x+V)\cap\overline{W})$. D'après la remarque 2.3, $g=-\infty$ dans l'ouvert non vide $(x+V)\cap W$. Pour achever la démonstration il suffit à prouver la relation $z\in\bar{A}\cap W\Rightarrow$

$\Rightarrow z \in \mathring{A}$. Choisissons $V \in \mathscr{U}(0) \cap \mathscr{C}$ symmétrique tel que $(z+V) \subset W$ et $g \in \mathscr{C}(z+V)$. Il existe un point $p \in (z+V) \cap A$. Comme $z+\frac{1}{2}V$ est contenu dans la réunion des demi-droites d'extrémité p, l'asserion résulte de la remarque 2.3.

2: D'après le corollaire 2.5 et 1, on a $f \in \mathscr{C}_l^{f,c}((x, y))$ ou $f=-\infty$ dans (x, y). Si f n'est pas convexe dans (x, y), il existe deux points distincts $x', y' \in (x, y)$ et une fonction affine ϕ, tels que $(\phi-f)(x')=(\phi-f)(y')=0$ et tels que $\phi-f$ atteigne une borne inférieure <0 dans un point $x'' \in (x', y')$. La fonction $\phi-f$ étant localement concave, elle est constante dans un voisinage de x'', ce qui contredit la connexion de (x', y'). □

On a la propriété de tronquage suivante:

PROPOSITION 2.9. Soient $U, V \in \mathscr{U}$, $\infty > u \in \mathscr{C}_1(U)$, $\infty > v \in \mathscr{C}_1(V)$ et supposons $U \subset V$, On pose $\tilde{u} = 1_U \sup(u, v) + 1_{V \setminus U} v$. Les propriétés suivantes sont équivalentes:
1. $\tilde{u} \in \mathscr{C}_1(V)$.
2. Pour chaque droite L, la restriction de $\tilde{u}$ à $L \cap V$ est s.c.s.

$1 \Rightarrow 2$: Cela résulte du lemme précédent.

$2 \Rightarrow 1$: Soient $W \in \mathscr{U} \cap \mathscr{C}$, $\overline{W} \subset V$, $y \in U \cap W$ et $z \in W \cap (V \setminus U)$. Il suffit à vérifier qu'on ait $\tilde{u} \in \mathscr{C}((y, z))$. Si la fonction v n'est pas finie dans (y, z), on a $v=-\infty$ dans (y, z) et par suite aussi $u=-\infty$. Supposons donc que $v \in \mathscr{C}^f((y, z))$. Quel que soit $\varepsilon>0$, la fonction

$$\tilde{u}_\varepsilon = 1_U \sup(u-\varepsilon, v) + 1_{V \setminus U} v,$$

étant égale à v dans un voisinage de chaque point frontière de U dans (y, z), est localement convexe dans (y, z). Par suite, u_ε est convexe dans (y, z) (2.8) et $\tilde{u} = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \tilde{u}_\varepsilon \in \mathscr{C}((y, z))$. □

3. SOUSDIFFÉRENTIELS

Rappelons:

DEFINITION 3.1. Soient $A \subset E$, $f \in \overline{\mathbb{R}}^A$, $x \in A$ et $p \in E'$.
1. On dit que p est un *sous-gradient* de f en x par rapport à A, notation $p \in \omega_{f,A}(x)$ (ou parfois $p \in \omega_f(x)$), si $f(x) \in \mathbb{R}$ et si l'on a $y \in A \Rightarrow f(y) - f(x) \geqslant p(y-x)$.
2. La fonction multivoque $x \mapsto \omega_{f,A}(x)$ est appelée le *sous-différentiel* de f (comparer Pogorelov [1973], p. 513).
3. La *fonction multivoque réciproque* $\omega_{f,A}^{-}$ est définie par
$$\omega_{f,A}^{-}(p) = \{x \in A: \ p \in \omega_{f,A}(x)\}.$$
4. L'*image réciproque forte* $\omega_{f,A}^{-1}\langle X\rangle$ d'une partie X de E' est l'ensemble $\{x \in A: \ \omega_{f,A}(x) \subset X\}$.
5. $x \in A$ est un *point exposé* de f s'il existe $p \in \omega_{f,A}(x)$ tel que $\{x\} = \omega_{f,A}^{-1}(p)$.

Dans Ekeland et Temam [1976] p. 20–28 on trouvera la plupart des résultats suivants:

LEMME 3.2. Soient $x \in A \subset E$, $f \in \overline{\mathbf{R}}^A$ et $p \in E'$.

1. $\omega_{f,A}(x)$ est un ensemble convexe et $\sigma(E', E)$ – fermé.
2. $B \subset A \Rightarrow \omega_{f,A}(x) \subset \omega_{f,B}(x)$.
3. $g \in \overline{\mathbf{R}}^A \Rightarrow \omega_{f,A}(x) + \omega_{g,A}(x) \subset \omega_{f+g,A}(x)$.
4. $\lambda > 0 \Rightarrow \omega_{\lambda f,A}(x) = \lambda\omega_{f,A}(x)$.
5. $y \in E$, $t \in (x, y)$, $[x, t] \subset A$, $f \in \mathscr{C}([x, y]) \Rightarrow \omega_{f,A}(x) \subset \omega_{f,[x,y]}(x)$.
6. $V \in \mathscr{U}(x)$, $V \subset A \in \mathscr{C}$, $f \in \mathscr{C}(A) \Rightarrow \omega_{f,V}(x) = \omega_{f,A}(x)$.
7. $f - p$ est une fonction constante dans l'ensemble convexe $\omega_{f,A}^{-}(p)$.
8. $p \in \omega_{f,A}(x)$ si et seulement si $f(x) \in \mathbf{R}$ et $y \mapsto f(x) + p(y - x)$ définit un hyperplan d'appui de $T_{f,A}$ dans $E \times \mathbf{R}$.
9. $\omega_{f,A}(y) \neq \emptyset$ pour chaque $y \in A$, $A \in \mathscr{C} \Rightarrow f \in \mathscr{C}(A)$.

1: Soit r un point d'adhérence de $\omega_{f,A}(x)$ et soient $y \in A$ et $\varepsilon > 0$. Il existe $q \in \omega_{f,A}(x)$ tel que $|r(x) - q(x)| < \varepsilon$ et $|r(y) - q(y)| < \varepsilon$ donc $f(y) - f(x) \geqslant q(y - x) \geqslant r(y - x) - 2\varepsilon$ et $r \in \omega_{f,A}(x)$.

5: Soient $r \in \omega_{f,A}(x)$, $z \in [x, y]$ et supposons $f(z) - f(x) < r(z - x)$. On a $z \notin A$ et $t = \lambda x + (1 - \lambda)z$ pour un $\lambda \in (0, 1)$, donc

$$f(t) - f(x) \leqslant (1 - \lambda)(f(z) - f(x)) < (1 - \lambda)r(z - x) = r(t - x),$$

ce qui est absurde. □

LEMME 3.3. Soient $y \in U \in \mathscr{U} \cap \mathscr{C}$, $g \in \mathscr{C}(U)$ finie et continue en y, $\lambda_1 > 0$ et $y_1 \in E$ tels que $y + \lambda y_1 \in U$ et $g(y + \lambda y_1) \geqslant g(y)$ quel que soit $\lambda \in [0, \lambda_1]$. Alors il existe $p \in \omega_{g,U}(y)$ vérifiant

$$0 \leqslant p(y_1) = \{\sup q(y_1) : q \in \omega_{g,U}(y)\}.$$

Castaing et Valadier [1977], p. 26. □ En particulier, $\omega_{g,U}(y) \neq \emptyset$ si g est finie et continue en y.

Dans les énoncés suivants, $\tilde{\mathscr{U}}$ désigne une deuxième topologie localement convexe sur E, compatible avec la dualité.

PROPOSITION 3.4. Soient $U \in \mathscr{U}$, $A \Subset U$ et H une partie de $\mathbf{R}^U$.

1. Si H est équicontinue uniformément dans A, l'ensemble $\omega_{H,U}\langle A \rangle = \cup \{\omega_{f,U}(x) : f \in H, x \in A\}$ est equicontinu.
2. Réciproquement, supposons $U \in \mathscr{C}$ et $H \subset \mathscr{C}^c(U)$. Si B est une partie convexe de U, l'équicontinuité de $\omega_{H,U}\langle B \rangle$ par rapport à $\tilde{\mathscr{U}}$ entraîne l'équicontinuité uniforme par rapport à $\tilde{\mathscr{U}}$ de l'ensemble des restrictions de H à B.

1: Soit $W \in \mathscr{U}(0) \cap \mathscr{C}$ symmétrique tel que $A + W \subset U$. Pour chaque $x \in A$, $y \in W$, $f \in H$ et $p \in \omega_{f,U}(x)$ on a $p(y) \leqslant f(x + y) - f(x)$ et $p(-y) \leqslant f(x - y) - f(x)$.

2: Soient $\varepsilon > 0$ et $W \in \tilde{\mathscr{U}}(0)$ tels que $|p(t)| < \varepsilon$ pour $t \in W$ et $p \in \omega_{H,U}\langle B\rangle$. Soient $y \in W$, $f \in H$ et $x \in B$ tels que $x+y \in B$. Il suffit à établir l'existence d'une fonctionnelle $p \in \omega_{f,U}\langle B\rangle$ telle que $p(y) = f(x+y) - f(x)$. Or, il existe un point $z \in (x, x+y) \subset B$ tel que l'application $z+\lambda y \mapsto \lambda(f(x+y)-f(y)) + f(z)$ définit une variété linéaire dans $E \times \mathbf{R}$, ne recontrant pas l'ensemble convexe non vide $\mathring{T}_{f,U}$. La forme géométrique du théorème de Hahn-Banach entraîne alors l'existence d'une fonctionnelle $p \in \omega_{f,U}(z)$ telle que $p(y) = f(x+y) - f(x)$. □

Rappelons (Smithson [1972], p. 32), qu'une fonction multivoque est dite *continue* (ou s.c.i.) si l'image réciproque d'un ensemble ouvert est ouvert et qu'elle est dite *cocontinue* (ou s.c.s.) si l'image réciproque d'un ensemble fermé est fermé.

THEOREME 3.5. Soient $U \in \mathscr{U} \cap \mathscr{C}$ et $H \subset \mathscr{C}^{f,c}(U)$. Munissons H de la topologie de la convergence simple dans U et U de la topologie induite par $\tilde{\mathscr{U}}$. Supposons que, quel que soit $x \in U$, il existe $V \in \tilde{\mathscr{U}}(0)$ tel que $\omega_{H,U}\langle (x+V) \cap U\rangle$ soit équicontinu par rapport à $\tilde{\mathscr{U}}$. Alors, la fonction multivoque $(x, f) \mapsto \omega_{f,U}(x)$ est cocontinue dans $U \times H$. En outre, on a $\omega_{F,U}\langle K\rangle \in \mathscr{K}(E')$ quels que soient $F \in \mathscr{K}(H)$ et $K \in \mathscr{K}(U, \tilde{\mathscr{U}})$.

Prouvons que l'image réciproque $A = \{(x, f) \in U \times H : \omega_{f,U}(x) \cap L \neq \emptyset\}$ d'une partie fermée L de E' est fermée dans $U \times H$. Soit $(x, f) \in U \times H$ limite d'une base de filtre $\mathscr{F}$ sur A. Il existe $V \in \tilde{\mathscr{U}}(0)$ tel que $\omega_{H,U}\langle (x+V) \cap U\rangle$ soit une partie équicontinue, et par suite relativement compacte (Bourbaki, EVT, chap. IV, § 2, prop. 2), de E'. La trace $\mathscr{F}'$ sur $L \cap \omega_{H,U}\langle (x+V) \cap U\rangle$ de l'image par $\omega_{\cdot,U}(\cdot)$ de la trace de $\mathscr{F}$ sur $(U \cap (x+V)) \times H$ est une base de filtre. $\mathscr{F}'$ possède donc un point d'adhérence $p \in L$ et il reste à prouver que $p \in \omega_{f,U}(x)$.

Soient $\varepsilon > 0$ et $y \in U$. Il existe $W \in \tilde{\mathscr{U}}(x)$, $W \subset x+V$, tel que

$$h \in H, t \in W \cap U \Rightarrow |h(t) - h(x)| < \varepsilon$$

(prop. 3.4.2) et

$$t \in W, \ q \in \omega_{H,U}(x) \Rightarrow |q(t) - q(x)| < \varepsilon.$$

En outre, il existe $F \in \mathscr{F}$ tel que $F \subset (W \cap U) \times H$ et

$$(t, g) \in F \Rightarrow |g(x) - f(x)| < \varepsilon, \ |g(y) - f(y)| < \varepsilon.$$

La forme linéaire p étant adhérente à $\mathscr{F}'$, il existe $t \in W \cap U$, $g \in H$ et $q \in \omega_{g,U}(t) \cap L$, tels que $(t, g) \in F$, $|p(x) - q(x)| < \varepsilon$ et $|p(y) - q(y)| < \varepsilon$. Enfin, on a

$$f(y) - p(y) \geqslant g(y) - q(y) - 2\varepsilon \geqslant g(t) - q(t) - 2\varepsilon \geqslant g(x) - q(x) - 4\varepsilon \geqslant$$
$$\geqslant f(x) - p(x) - 6\varepsilon.$$

Par suite, $p \in \omega_{f,U}(x)$.

Pour établir la deuxième assertion, il suffit à remarquer que, d'après le lemme 3.2.1 et la prop. 3.4.1, chaque ensemble $\omega_{f,U}(x)$ est $\sigma(E', E)$-compact. L'énoncé résulte alors d'un théorème général pour les fonctions multivoques cocontinues (Smithson [1972], p. 34). □

REMARQUE 3.6. Dans le cas $\tilde{\mathscr{U}} = \mathscr{U}$, la condition d'équicontinuité locale de $\omega_{H,U}\langle U\rangle$ est satisfaite si H est localement uniformément équicontinue (prop. 3.4.1).

COROLLAIRE 3.7. Soit f la limite d'une base de filtre $\mathscr{F}$ sur H et soit $K \in \mathscr{K}(U, \tilde{\mathscr{U}})$. Pour chaque voisinage 0 de $\omega_{f,U}\langle K\rangle$ il existe $F \in \mathscr{F}$ et $W \in \tilde{\mathscr{U}}(K)$ tels que $\omega_{F,U}\langle W \cap U\rangle \subset 0$.

En effet, $\omega_{\cdot,U}(\cdot)^{-1}\langle 0\rangle = \complement\omega_{\cdot,U}(\cdot)^{-}\langle \complement 0\rangle$ est ouvert dans $U \times H$ et contient $K \times \{f\}$, U étant muni de la topologie induite par $\tilde{U}$. □

PROPOSITION 3.8. Soient M un sous-espace fermé de E', $U \in \mathscr{U} \cap \mathscr{C}$, $V \in \mathscr{U}(0) \cap \mathscr{C}$ et $x \in E$ tels que $x + \overline{V} \subset U$ et tels que $V \cap M^0$ soit borné dans M^0, $H \subset \mathscr{C}^{f,c}(U)$, $f \in \mathscr{C}^{f,c}(U)$ limite d'une base de filtre $\mathscr{F}$ sur H pour la topologie de la convergence uniforme dans $(x + \overline{V}) \cap (x + M^0)$ et $p \in E'$. Supposons qu'on ait:

1. x est un point exposé de f, de sorte que $\{x\} = \omega_{f,U}^{-}(p)$.
2. M^0 est réflexif.
3. 0 n'est pas le seul point adhérent pour $\sigma(M^0, E'/M)$ de tout filtre $\mathscr{G}$ sur la frontière de V dans M^0 vérifiant

$$\lim_{y, x+\mathscr{G}} (f-p)(y) = (f-p)(x).$$

Alors, il existe $F \in \mathscr{F}$ tel que $p \in \omega_{g,U}\langle x + V\rangle + M$ quel que soit $g \in F$.

Il est clair qu'on peut supposer $x = 0$. Posons $\hat{E} = M^0$, $\hat{E}' = E'/M$, $\hat{U} = U \cap \hat{E}$, $\hat{V} = V \cap \hat{E}$, $\hat{f} = 1_{\hat{U}}f$, $\hat{p} = \pi_M(p)$, $\hat{\mathscr{F}}$ la restriction de $\mathscr{F}$ à $\hat{U}$ et $\hat{\omega}$ le sous-différentiel dans $\hat{E}$. $\overline{\hat{V}}$ est un voisinage $\sigma(\hat{E}, \hat{E}')$-compact de 0 et l'on a $\hat{p} \in \hat{\omega}_{\hat{f},\hat{U}}(0)$ et $\hat{f}(y) - \hat{p}(y) > \hat{f}(0)$ quel que soit $y \in \partial\hat{V}$. Montrons d'abord qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que $\inf\{(\hat{f}-\hat{p})(y) : y \in \partial\hat{V}\} \geqslant \hat{f}(0) + \varepsilon$. Supposons le contraire. Il existe alors une suite $(y_n) \subset \partial\hat{V}$ telle que

$$(\hat{f}-\hat{p})(0) + 1/n \geqslant (\hat{f}-\hat{p})(y_n) > (\hat{f}-\hat{p})(0).$$

Soit $z \in \overline{\hat{V}}$ un point adhérent pour la topologie affaiblie de $\hat{E}$ du filtre élémentaire associé à (y_n). Il existe un filtre plus fin $\mathscr{G}$ sur $\partial\hat{V}$, de limite z, tel que

$$\lim_{y, \mathscr{G}} (\hat{f}-\hat{p})(y) = \hat{f}(0).$$

D'après la troisième condition on peut supposer $z \neq 0$. Pour chaque $t \in U$ on a donc

$$f(t) - f(z) \geqslant f(t) - \liminf_{y, \mathscr{G}} (f(y) - p(y)) - \lim_{y, \mathscr{G}} p(y) = f(t) - f(0) - p(z) \geqslant$$
$$\geqslant p(t) - p(z)$$

(Bourbaki, EVT, Chap. 2, § 6). On en déduit $p \in \omega_{f,V}(z)$, ce qui contredit l'hypothèse que x soit un point exposé. Finalement, comme $\hat{f}$ est dans $\partial\hat{V}$ limite de $\hat{\mathscr{F}}$ pour la topologie de la convergence uniforme, il existe $\hat{F} \in \hat{\mathscr{F}}$ tel que $\hat{g}(y)-\hat{g}(0)>\hat{p}(y)$ pour tout $y \in \partial\hat{V}$ et $\hat{g} \in \hat{F}$. La fonction $\hat{g}-\hat{p}$ atteint donc sa valeur minimale dans un point $z \in \hat{V}$, ce qui prouve $\hat{p} \in \hat{\omega}_{\hat{g},\hat{V}}(z) \subset \hat{\omega}_{\hat{g},\hat{V}}\langle\hat{V}\rangle$. La forme géométrique du théorème de Hahn-Banach entraîne alors que l'on a $\hat{p} \in \pi_M\langle\omega_{g,V}\langle V\rangle\rangle$. □

REMARQUE 3.9. Dans cette proposition, la condition 3 est donc équivalente à l'existence d'un nombre $\varepsilon>0$ tel que $(f-p)(z) \geqslant (f-p)(x)+\varepsilon$ pour tout point z dans la frontière de $x+V$ dans $x+M^0$. Si la codimension de M est finie, les conditions 2 et 3 sont vides. En particulier, si E est de dimension finie, on peut supposer $M=\{0\}$.

EXEMPLE 3.10. Soit $(e_n)_{n\in\mathbf{N}}$ la base canonique de l'espace de Hilbert $E=l^2(\mathbf{N})$, muni de la norme $\|\cdot\|$: $(x_n) \mapsto (\sum_{n\in\mathbf{N}} |x_n|^2)^{\frac12}$. Désignons par $\pi_n(x)$ la composante d'indice n de x par rapport à (e_n). Soit U la boule unité ouverte. Les fonctions

$$u: x \mapsto \sum_n \frac{|\pi_n(x)|}{n+1} \quad\text{et}\quad u_N: x \mapsto \sum_0^N \frac{|\pi_n(x)|}{n+1} + \sum_{N+1}^{\infty} \frac{\pi_n(x)}{n+1}$$

sont finies et convexes (Cauchy-Schwarz). L'ensemble H de ces fonctions est uniformément équicontinu dans U et $u_N \to u$ uniformément dans U. Identifions E et E'. On vérifie aisément que

$$\omega_{u,U}(x)=\prod_n A_n, \quad\text{où}\quad A_n=\left[-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right] \text{ si } \pi_n(x)=0,$$

$$A_n=\left\{\frac{\operatorname{sign}(\pi_n(x))}{n+1}\right\} \text{ si } \pi_n(x)\neq 0,$$

$$\omega_{u_N,U}(x)=\prod_n A_n^N, \quad\text{où}\quad A_n^N=A_n \text{ si } n\leqslant N \text{ et } A_n^N=\left\{\frac{1}{n+1}\right\} \text{si } n>N.$$

1. La fonction multivoque $(x, v) \mapsto \omega_{v,U}(x)$ n'est pas continue dans $U\times H$. En effet,

$$V_i=\left\{p \in E': n\leqslant i \Rightarrow |\pi_n(p)|<\frac{1}{n+2}\right\}$$

est un voisinage ouvert de 0 dans E', tandis que $\pi_n\langle\omega_{u,U}^{-}\langle V_i\rangle\rangle=\{0\}$ si $n\leqslant i$. Par suite, l'ensemble $\omega_{u,U}^{-}\langle V_i\rangle$ n'est pas ouvert et même la fonction multivoque $x \mapsto \omega_{u,U}(x)$ n'est pas continue.

2. En posant $M=\{0\}$ dans la proposition 3.8, cet exemple ne vérifie ni la troisième condition ni l'énoncé de cette proposition. En effet, 0 est un point exposé de u, $\{0\}=\omega^{-}_{u.,U}(p)$, $p \notin \omega_{u_n,U}\langle U\rangle$ et $\lim\limits_{i\to\infty}(u-p)(e_i)=0$ pour tout $p \in \prod_n \left(-\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n+1}\right)$.

(To be continued)