

Une Interprétation Algébrique de la Transformation de Laplace et des Matrices de Transfert

Michel Fliess*

Laboratoire des Signaux et Systèmes

C.N.R.S.-E.S.E.

Plateau de Moulon

91192 Gif-sur-Yvette, France

Submitted by A. C. Antoulas

ABSTRACT

The tensor product of the module of a linear system with the quotient field of the ring of linear differential operators is a vector space where, even in the time-varying case, a (formal) Laplace transform and the transfer matrix are most naturally defined. Several classic problems are examined in this algebraic setting: the relationship between left (right) coprime matrix decomposition and controllability (observability), the state-variable canonical realization, the transfer algebra with respect to parallel and series connections, the input-output inversion, and model matching.

1. INTRODUCTION

Généraliser à l'instantonnaire les rapports, obtenus par transformation de Laplace, entre systèmes linéaires constants et matrices de transfert n'est pas immédiat. Notre approche se rattache, d'une part, à des techniques d'algèbre non commutative déjà présentes dans la littérature [13–15, 18, 19, 28] et, de l'autre, à notre utilisation des modules [7]. Rappelons que cette dernière avait permis une interprétation remarquable d'importantes propriétés structurelles, comme la commandabilité et l'observabilité, interprétation qui se rattache [9] à l'approche "comportementale" de Willems [27]. La définition de l'index

* E-mail: fliess@lss.supelec.fr

d'un système linéaire implicite [13] illustre, si besoin est, la nécessité de manipuler des matrices de transfert variables en temps.

Le produit tensoriel par le corps quotient de l'anneau des opérateurs différentiels linéaires définit un foncteur, dit de Laplace, qui transforme le module d'un système en espace vectoriel, où se lisent aisément transformation de Laplace et matrice de transfert. Parmi les propriétés que ce cadre, usuel en théorie des anneaux et modules [2, 4], nous permet d'aborder, pour la première fois en instationnaire, les plus importantes concernent les liens entre décompositions de la matrice de transfert, commandabilité et observabilité. On aboutit ainsi à une généralisation du théorème de réalisation dû à Kalman [17], qui recouvre le cas impropre et ne requiert aucun calcul. On examine aussi l'algèbre des matrices de transfert, l'inversion entrée-sortie et la poursuite de modèles.

L'article débute par un rappel sur les systèmes linéaires et les modules, que nous avons voulu bref, car déjà fait dans ce journal [13].¹ Une version préliminaire a été présentée en [11].

2. RAPPELS SUR LES SYSTÈMES LINÉAIRES ET LES MODULES

2.1

Un *corps différentiel (ordinaire)* [20] k est un corps commutatif muni d'une dérivation, notée $d/dt = \dot{}$, vérifiant les conditions suivantes

$$\begin{aligned} \forall a \in k, \quad \frac{da}{dt} &= \dot{a} \in k; \\ \forall a, b \in k, \quad \frac{d}{dt}(a + b) &= \dot{a} + \dot{b}, \\ \frac{d}{dt}(ab) &= \dot{a}b + a\dot{b}. \end{aligned}$$

Une *constante* c est un élément de k tel que $\dot{c} = 0$. Un *corps de constantes* est un corps différentiel ne contenant que des constantes.

2.2

$k[d/dt]$ désigne l'anneau des opérateurs différentiels linéaires de la forme

¹Voir aussi [12] pour un examen de ces techniques en linéaire, comme en non-linéaire.

$$\sum_{\text{fini}} a_\mu \frac{d^\mu}{dt^\mu} \quad (a_\mu \in k).$$

Quoique cet anneau soit, en général, non commutatif,² il reste un anneau *principal* et les $k[d/dt]$ -modules gauches de type fini jouissent de propriétés analogues à celles des modules de type fini sur des anneaux principaux commutatifs (voir, par exemple, [4]). En particulier, tout $k[d/dt]$ -module gauche de type fini est somme directe de son sous-module de torsion et d'un module libre.

2.3

NOTATION. $[w]$ désigne le $k[d/dt]$ -module gauche engendré par l'ensemble $w = \{w_i \mid i \in I\}$.

2.4

Un *système linéaire* [7] Λ est un $k[d/dt]$ -module gauche de type fini. Une *dynamique linéaire* [7] D munie d'une *entrée* $u = (u_1, \dots, u_m)$ est un système linéaire D contenant u et tel que le module quotient $D/[u]$ soit de torsion. Une *sortie* $y = (y_1, \dots, y_p)$ consiste en la donnée d'un ensemble fini d'éléments de D .

2.5

On peut *réaliser* la dynamique précédente D , éventuellement munie d'une sortie, par la *représentation d'état*

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = F \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \tag{1a}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = H \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \sum_{\text{fini}} J_\mu \frac{d^\mu}{dt^\mu} \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix}, \tag{1b}$$

où

—la dimension de l'état $x = (x_1, \dots, x_n)$, dont les composantes appartiennent à D , égale celle de $D/[u]$ comme k -espace vectoriel;

—les coefficients des matrices F, G, H, J_μ , de tailles appropriées, appartiennent à k .

²Il est commutatif si, et seulement si, k est un corps de constantes.

2.6

La *commandabilité* usuelle de (1a) équivaut à la liberté du module D [7]. Cette notion s'étend, ainsi, à tout système linéaire Λ , c'est-à-dire indépendamment de toute dénomination des variables: Λ est dit commandable si, et seulement si, il est libre. Rappelons [9] que ce point-de-vue se rattache à la caractérisation trajectorienne de la commandabilité due à Willems [27].

2.7

La dynamique D d'entrée u , et munie de la sortie y , est dite *observable* [7] si, et seulement si, les modules D et $[u, y]$ coïncident. Cette définition équivaut à la notion usuelle d'observabilité pour (1).

2.8

EXEMPLE. La réalisation (1), si minimale, est observable, mais non nécessairement commandable [7] (voir aussi [27]). Ainsi, la réalisation associée au système entrée-sortie $\dot{y} = \dot{u}$, où $m = p = 1$, est

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 0, \\ y &= x + u \end{aligned} \tag{2}$$

qui est observable et non commandable.

2.9

REMARQUE. Rappelons que, si k est un corps de constantes, les méthodes précédentes permettent de définir simplement les modes cachés et autres zéros [8].

3. LE FONCTEUR DE LAPLACE

3.1

L'anneau $k[d/dt]$ vérifie les *propriétés d'Ore* à gauche et à droite [4] et possède donc un corps de fractions, noté $k(d/dt)$. Tout $\sigma \in k(d/dt)$ s'écrit soit $\sigma = \beta^{-1}\alpha$, soit $\sigma = \alpha'\beta'^{-1}$, où $\alpha, \alpha', \beta, \beta' \in k[d/dt]$. Il est loisible, pour se conformer à des notations usuelles, d'exprimer tout élément de $k(d/dt)$ en fonction de s^{-1} , où $s = d/dt$.

3.2

TERMINOLOGIE. Une matrice à coefficients dans $k(d/dt)$ (resp. $k[d/dt]$) est dite *rationnelle* (resp. *polynomiale*).

3.3

Le produit tensoriel $\hat{Z} = k(d/dt) \otimes_{k[d/dt]} Z$, où Z est un $k[d/dt]$ -module gauche, consiste en l'ensemble des éléments $\partial^{-1}z$, où $\partial \in k[d/dt]$, $z \in Z$: \hat{Z} peut être doté d'une structure de $k(d/dt)$ -espace vectoriel gauche [4].³ Le noyau de l'application canonique $Z \rightarrow \hat{Z}$, $z \mapsto \hat{z} = 1 \otimes z$, est le module de torsion de Z . Si $Z_1 \subseteq Z_2$ sont deux modules tels que Z_2/Z_1 est de torsion, alors $\hat{Z}_1 = \hat{Z}_2$.

3.4

TERMINOLOGIE. $k(d/dt) \otimes_{k[d/dt]}$ est un *foncteur*, dit de *Laplace*, entre les catégories des $k[d/dt]$ -modules gauches et les $k(d/dt)$ -espaces vectoriels gauches. Le $k(d/dt)$ -espace vectoriel gauche $\hat{\Lambda}$ associé à un système linéaire Λ est appelé *espace vectoriel de transfert*. L'application $k[d/dt]$ -linéaire canonique $Z \rightarrow \hat{Z}$, $z \mapsto \hat{z} = 1 \otimes z$ est appelée *transformation de Laplace (formelle)*; \hat{z} est la *transformée de Laplace (formelle)* de z .

3.5

REMARQUE. Notre produit tensoriel fournit le cadre adéquat pour traduire les relations algébriques des transformées de Laplace d'une fonction, de sa dérivée et de son intégrale. Il existe, avec des buts différents, d'autres formalisations algébriques des transformations de Fourier et Laplace (voir [22], par exemple).

3.6

Le *rang* de Z , noté $\text{rg } Z$, est la dimension de \hat{Z} .⁴ Il est nul si, et seulement si, Z est de torsion, c'est-à-dire $\hat{Z} = \{0\}$. Supposons-le fini, égal à m . L'ensemble $\zeta = \{\zeta_1, \dots, \zeta_m\}$ d'éléments de Z est $k[d/dt]$ -linéairement indépendant si, et seulement si, $\hat{\zeta} = \{\hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_m\}$ est une base de \hat{Z} .

³Voir aussi [2] pour le cas plus simple d'un module sur un anneau commutatif intègre.

⁴Les propriétés élémentaires de dimensions des espaces vectoriels sur des corps gauches (*skew fields* en anglais), c'est-à-dire non commutatifs, sont identiques aux habituelles (voir [1, 2], par exemple).

3.7

Soit une dynamique D , d'entrée $u = (u_1, \dots, u_m)$ et de sortie $y = (y_1, \dots, y_p)$. Comme $D/[u]$ est de torsion, $\hat{D} = \widehat{[u]}$: toute compensatrice de $\hat{y} = (\hat{y}_1, \dots, \hat{y}_p)$ est combinaison $k(d/dt)$ -linéaire de $\hat{u} = (\hat{u}_1, \dots, \hat{u}_m)$. Il vient:

$$\begin{pmatrix} \hat{y}_1 \\ \vdots \\ \hat{y}_p \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \hat{u}_1 \\ \vdots \\ \hat{u}_m \end{pmatrix},$$

où la matrice rationnelle $T \in k(d/dt)^{p \times m}$ est appelée *matrice de transfert*.

3.8

L'entrée u est dite *indépendante* [7] si le module $[u]$ est libre, c'est-à-dire si \hat{u} est une base de $\widehat{[u]} = \hat{D}$. Il en découle que la matrice de transfert T est alors définie de façon univoque.

3.9

REMARQUE. Renvoyons à [13] pour le calcul de matrices de transfert instationnaires dans diverses situations concrètes.

4. DÉCOMPOSITION, COMMANDABILITÉ, OBSERVABILITÉ ET RÉALISATION

4.1

Une matrice carrée polynomiale P est dite *rationnellement inversible* si, et seulement si, elle admet une inverse P^{-1} rationnelle. Si P^{-1} est polynômiale, P est dite *unimodulaire*.

4.2

Une *décomposition à gauche* (resp. *à droite*) de la matrice $T \in k(d/dt)^{p \times m}$ est donnée par $T = D_s^{-1}N_s$ (resp. $T = N_r D_r^{-1}$) où

— $D_s \in k[d/dt]^{p \times p}$ (resp. $D_r \in k[d/dt]^{m \times m}$) est rationnellement inversible;

— $N_s \in k[d/dt]^{p \times m}$ (resp. $N_r \in k[d/dt]^{p \times m}$).

4.3

Deux décompositions à gauche (resp. à droite) $T = D_s^{-1}N_s = \bar{D}_s^{-1}\bar{N}_s$ (resp. $T = N_r D_r^{-1} = \bar{N}_r \bar{D}_r^{-1}$) sont dites *équivalentes* si, et seulement si, il existe une matrice unimodulaire $U \in k[d/dt]^{p \times p}$ (resp. $V \in k[d/dt]^{m \times m}$) telle que $\bar{D}_s = UD_s$, $\bar{N}_s = UN_s$ (resp. $\bar{D}_r = D_r V$, $\bar{N}_r = N_r V$).

4.4

La décomposition à gauche (resp. à droite) $T = D_s^{-1}N_s$ (resp. $T = N_r D_r^{-1}$) est dite *irréductible* et les matrices D_s et N_s (resp. D_r et N_r) sont dites *premières à gauche* (resp. *à droite*) si, et seulement si, toute matrice carrée polynômiale, facteur commun gauche (resp. droit) de D_s et N_s (resp. D_r et N_r), est nécessairement unimodulaire.

4.5

Le résultat fondamental suivant, connu si k est un corps de constantes [16, 25], se démontre de façon analogue.

THÉORÈME. *Toute matrice rationnelle possède des décompositions à gauche et à droite, que l'on peut choisir irréductibles. Deux décompositions à gauche (resp. à droite) irréductibles sont équivalentes.*

4.6

Faisons correspondre à la décomposition à gauche $T = D_s^{-1}N_s$ le système entrée-sortie

$$D_s \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = N_s \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} \tag{3}$$

dont T est, évidemment, matrice de transfert. On suppose l'entrée u indépendante.

4.7

Soit une deuxième décomposition à gauche $T = \bar{D}_s^{-1}\bar{N}_s$, à laquelle on associe

$$\bar{D}_s \begin{pmatrix} \bar{y}_1 \\ \vdots \\ \bar{y}_p \end{pmatrix} = \bar{N}_s \begin{pmatrix} \bar{u}_1 \\ \vdots \\ \bar{u}_m \end{pmatrix} \tag{\bar{3}}$$

d'entrée également indépendante. Ce qui suit est facile:

LEMME. *L'application $u_i \mapsto \bar{u}_i$ ($i = 1, \dots, m$), $y_j \mapsto \bar{y}_j$ ($j = 1, \dots, p$) se prolonge en un isomorphisme des $k[d/dt]$ -modules gauches $[u, y]$ et $[\bar{u}, \bar{y}]$, associés à (3) et (3), si, et seulement si, les décompositions à gauche $T = D_s^{-1}N_s = \bar{D}_s^{-1}\bar{N}_s$ sont équivalentes.*

4.8

LEMME. *Le $k[d/dt]$ -module gauche $[u, y]$ associé à (3), est libre si, et seulement si, la décomposition à gauche $T = D_s^{-1}N_s$ est irréductible.*

En effet, l'existence d'un facteur commun gauche non unimodulaire pour D_s et N_s équivaut à l'existence d'un *facteur invariant* de $[u, y]$, c'est-à-dire d'un idéal à gauche, nécessairement monogène, $\mathfrak{S} \subset k[d/dt]$, tel que $k[d/dt]/\mathfrak{S}$ soit isomorphe à un sous-module de $[u, y]$. La conclusion découle du fait que $k[d/dt]/\mathfrak{S}$ est de torsion.

4.9

L'équivalence, rappelée en 2.6, de la commandabilité et de la liberté, fournit le

COROLLAIRE. *Le système (3) est commandable si, et seulement si, la décomposition à gauche $T = D_s^{-1}N_s$ est irréductible.*

4.10

Soit $\xi = \{\xi_1, \dots, \xi_m\}$ une base d'un $k[d/dt]$ -module libre de rang m . Faisons correspondre à la décomposition à droite $T = N_r D_r^{-1}$ le système entrée-sortie

$$\begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_m \end{pmatrix} = D_r \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}, \tag{4}$$

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_p \end{pmatrix} = N_r \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}.$$

4.11

LEMME. Les $k[d/dt]$ -modules à gauche $[\xi]$ et $[u, y]$, associé à (4), coïncident si, et seulement si, la décomposition à droite $T = N_r D_r^{-1}$ est irréductible.

Soit, en effet, $\bar{\xi} = \{\bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_m\}$ un ensemble $k[d/dt]$ -linéairement indépendant de m éléments de $[\xi]$. Il existe une matrice carée polynomiale P , rationnellement inversible, telle que

$$\begin{pmatrix} \bar{\xi}_1 \\ \vdots \\ \bar{\xi}_m \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}.$$

P est unimodulaire si, et seulement si, $\bar{\xi}$ est une base de $[\xi]$. La conclusion en découle en prenant pour $\bar{\xi}$ une base de $[u, y]$.

4.12

Le lien, rappelé en 2.7, entre observabilité et inclusion de modules, fournit le

COROLLAIRE. Le système (4) est observable si, et seulement si, la décomposition à droite $T = N_r D_r^{-1}$ est irréductible.

4.13

EXEMPLE. Reprenons l'exemple $\dot{y} = \dot{u}$ de 2.8. La réalisation non commandable (2) correspond au lemme 4.8. La représentation de comportement, entrée-sortie $y = u$,

$$u = \dot{\xi},$$

$$y = \dot{\xi}$$

est non observable car $[u, y] \subsetneq [\xi]$: elle correspond au lemme 4.11. Insistons sur le fait que les éventuelles pertes de commandabilité et d'observabilité ne se lisent pas sur les mêmes représentations. La perte d'observabilité, en particulier, n'est pas, ici, interprétée grâce à la réalisation kalmanienne habituelle.

4.14

REMARQUE. Les relations entre décompositions des matrices de transfert et les notions de commandabilité et d'observabilité ont déjà été abordées, si k est un corps de constantes, par certains auteurs, notamment par Blomberg et Ylinen [3] et par Willems [26].

4.15

Soit T une matrice rationnelle. L'association à une décomposition gauche ou droite de (3) ou (4) démontre que T est bien la matrice de transfert d'un système linéaire entrée-sortie. Le module libre $[u, y]$, associé à (3), donné par une décomposition à gauche irréductible, fournit une représentation d'état (1), nécessairement commandable et observable. Cette *réalisation* est dite *canonique* en vertu de l'unicité de $[u, y]$ à un isomorphisme près. La dimension de l'état est appelé *degré de McMillan* de T .

4.16

Résumons-nous:

THÉORÈME ET DÉFINITION. *Toute matrice rationnelle T est matrice de transfert d'un système linéaire entrée-sortie qui admet une réalisation canonique commandable et observable. Le degré de McMillan de T est la dimension de l'état.*

4.17

REMARQUE. Par comparaison à 2.8, où la commandabilité n'est pas nécessairement satisfaite, c'est l'irréductibilité de la décomposition à gauche de T qui impose cette propriété. Il n'y a donc point de contradiction entre 2.8 et 4.16!

4.18

REMARQUE. Nous généralisons le théorème de réalisation de Kalman [17] sur les matrices de transfert dans deux directions: Nous englobons le cas instationnaire et ne nous limitons pas aux matrices propres.⁵

⁵La *propriété* d'une matrice de transfert se définit comme dans le cas constant. Le sujet est lié à l'*index* d'un système implicite, traité en [13].

5. ALGÈBRE DE TRANSFERT

5.1

Soient $T_1, T_2 \in k(d/dt)^{p \times m}$ les matrices de transfert de deux systèmes linéaires d'entrée $u = (u_1, \dots, u_m)$ et de sorties respectives $y = (y_1, \dots, y_p)$, $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_p)$, supposées de même dimension: les modules $[u, y]/[u]$ et $[u, \eta]/[u]$ sont de torsion. Dans le module $[u, y, \eta]$, posons $z = (y_1 + \eta_1, \dots, y_p + \eta_p)$. Comme $[u, z]/[u]$ est de torsion, on obtient un système d'entrée u , de sortie z qui résulte de la *mise en parallèle* des précédents, dont $T = T_1 + T_2$ est matrice de transfert.

5.2

Soit $T_3 \in k(d/dt)^{p \times m}$ [resp. $T_4 \in k(d/dt)^{q \times p}$] la matrice de transfert d'un système linéaire d'entrée $u = (u_1, \dots, u_m)$ [resp. $y = (y_1, \dots, y_p)$] et de sortie y [resp. $z = (z_1, \dots, z_q)$]. Le caractère de torsion de $[u, y]/[u]$ et de $[y, z]/[y]$ implique celui de $[u, z]/[u]$. On obtient le système d'entrée u et de sortie z qui résulte de la *mise en série* des précédents et dont $T = T_4 T_3$ est matrice de transfert.

5.3

Résumons-nous:

PROPOSITION. *La somme et le produit de matrices de transfert correspondent à la mise en parallèle et en série de systèmes linéaires.*

6. INVERSION ENTRÉE-SORTIE ET POURSUITE DE MODÈLE

6.1

L'*inversibilité entrée-sortie* d'un système linéaire d'entrée $u = (u_1, \dots, u_m)$, de sortie $y = (y_1, \dots, y_p)$ et de matrice de transfert $T \in k(d/dt)^{p \times m}$ est caractérisée par le *rang différentiel de sortie* [5, 6] $\rho = \text{rg}[y]$.⁶

Rappelons que, si l'entrée est indépendante, il y a *inversibilité gauche* (resp. *droite*) si, et seulement si, $\rho = m$ (resp. $\rho = p$).

6.2

En vertu de 3.6, ρ est égal à la dimension du $k(d/dt)$ -espace vectoriel gauche engendré par les lignes de T , donc au rang de T . Ce qui en découle a déjà été démontré lorsque k est un corps de constantes [5, 6]:

⁶En [5, 6], on emploie la formalisme des *espaces vectoriels différentiels* [20], dont la *dimension différentielle* n'est autre que le rang du module correspondant.

PROPOSITION. *Le rang différentiel de sortie d'un système linéaire entrée-sortie est égal au rang de sa matrice de transfert. Si l'entrée est indépendante, l'inversibilité entrée-sortie gauche (resp. droite) équivaut à l'inversibilité gauche (resp. droite) de la matrice de transfert.*

6.3

Soient $T_1 \in k(d/dt)^{p_1 \times m}$, $T_2 \in k(d/dt)^{p_2 \times m}$ deux matrices rationnelles. La *poursuite de modèle à gauche* consiste à déterminer, si possible, une matrice $C \in k(d/dt)^{p_1 \times p_2}$ telle que $T_1 = CT_2$.

6.4

Soient $T_3 \in k(d/dt)^{p \times m_3}$, $T_4 \in k(d/dt)^{p \times m_4}$ deux matrices rationnelles. La *poursuite de modèle à droite* consiste à déterminer, si possible, une matrice $C' \in k(d/dt)^{m_4 \times m_3}$ telle que $T_3 = T_4 C'$.

6.5

Connu lorsque k est un corps de constantes, le résultat élémentaire suivant se démontre de même.

PROPOSITION. *La poursuite de modèle à gauche (resp. droite) est possible si, et seulement si,*

$$\operatorname{rg} \begin{pmatrix} T_1 \\ T_2 \end{pmatrix} = \operatorname{rg} T_1$$

$$(\text{resp. } \operatorname{rg}(T_3, T_4) = \operatorname{rg} T_3).$$

6.6

REMARQUE. Rudolph [24] a proposé une solution de la poursuite de modèle présentant quelque analogie avec ce qui précède. Voir aussi [23] pour une autre démarche.

7. CONCLUSION

Notre théorie de la transformation de Laplace et des matrices de transfert reste, en suivant les lignes de [10], valable en temps discret [21]. Il est aussi

possible de l'étendre à la dimension infinie, qu'il s'agisse de retards ou de paramètres répartis.

REFERENCES

- 1 E. Artin, *Geometric Algebra*, Interscience, New York, 1957 (traduction française: *Algèbre géométrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1962).
- 2 N. Bourbaki, *Algèbre* (chap. 1 à 3), Hermann, Paris, 1970.
- 3 H. Blomberg et R. Ylinen, *Algebraic Theory for Multivariable Linear Systems*, Academic, London, 1983.
- 4 P. M. Cohn, *Free Rings and Their Relations*, 2nd ed., Academic, London, 1985.
- 5 M. Fliess, Automatique et corps différentiels, *Forum Math.* 1:227–238 (1989).
- 6 M. Fliess, Generalized linear systems with lumped or distributed parameters and differential vector spaces, *Internat. J. Control* 49:1989–1999 (1989).
- 7 M. Fliess, Some basic structural properties of generalized linear systems, *Systems Control Lett.* 15:391–396 (1990).
- 8 M. Fliess, A simple definition of hidden modes, poles and zeros, *Kybernetika* 27:186–189 (1991).
- 9 M. Fliess, A remark on Willems' trajectory characterization of linear controllability, *Systems Control Lett.* 19:43–45 (1992).
- 10 M. Fliess, Reversible linear and nonlinear discrete-time dynamics, *IEEE Trans. Automat. Control* 37:1144–1153 (1992).
- 11 M. Fliess, An algebraic definition of time-varying transfer matrices, dans *Proceedings of the 2nd IFAC Workshop "System Structure and Control,"* Prague, 1992, pp. 316–318.
- 12 M. Fliess et S. T. Glad, An algebraic approach to linear and nonlinear control, dans *Essays on Control: Perspectives in the Theory and its Applications*, ECC-93 (H. L. Trentelman et J. C. Willems, Eds.), Birkhäuser, Boston, 1993, pp. 223–267.
- 13 M. Fliess, J. Lévine et P. Rouchon, Index of an implicit time-varying linear differential equation: A noncommutative linear algebraic approach, *Linear Algebra Appl.* 186:59–71 (1993).
- 14 A. Ilchmann, Time-varying linear systems and invariants of system equivalence, *Internat. J. Control* 42:759–790 (1985).
- 15 A. Ilchmann, I. Nürnberger et W. Schmale, Time-varying polynomial matrix systems, *Internat. J. Control* 40:329–362 (1984).
- 16 T. Kailath, *Linear Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, N.J., 1980.
- 17 R. E. Kalman, Mathematical description of linear dynamical systems, *SIAM J. Control* 1:152–192 (1963).
- 18 E. W. Kamen et K. M. Hafez, Algebraic theory of linear time-varying systems, *SIAM J. Control Optim.* 17:500–510 (1979).
- 19 E. W. Kamen, P. P. Khargonekar et K. R. Poola, A transfer-function approach to linear time-varying discrete-time systems, *SIAM J. Control Optim.* 23:550–565 (1985).

- 20 E. R. Kolchin, *Differential Algebra and Algebraic Groups*, Academic, New York, 1973.
- 21 V. Kučera, *Analysis and Design of Discrete Linear Control Systems*, Prentice-Hall, New York, 1991.
- 22 B. Malgrange, *Equations différentielles à coefficients polynômiaux*, Birkhäuser, Boston, 1991.
- 23 A. M. Perdon, G. Conte et C. H. Moog, Structural methods in the control of linear time-varying systems, dans *Proceedings of the 1st European Control Conference* (Grenoble, 1991), Hermès, Paris, 1991, pp. 1777–1780.
- 24 J. Rudolph, Poursuite de modèle: une approche par l'algèbre différentielle, Thèse, Univ. Paris XI, Orsay, 1991.
- 25 M. Vidyasagar, *Control System Synthesis: A Factorization Approach*, MIT Press, Cambridge, Mass., 1985.
- 26 J. C. Willems, Input-output and state-space representations of finite-dimensional linear time-invariant systems, *Linear Algebra Appl.* 50:581–608 (1983).
- 27 J. C. Willems, Paradigms and puzzles in the theory of dynamical systems, *IEEE Trans. Automat. Control* 36:259–294 (1991).
- 28 R. Ylinen, An algebraic theory for analysis and synthesis of time-varying linear differential systems, *Acta Polytech. Scand.* 32 (1980).

Received 13 November 1992; final manuscript accepted 11 September 1993