JOURNAL OF ALGEBRA 55, 155–187 (1978)

Charakterisierungen einiger Schunckklassen endlicher auflösbarer Gruppen I*

PETER FÖRSTER

Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität, Saarstraße 21, D-6500 Mainz, Germany

Communicated by B. Huppert

Received October 28, 1977

EINLEITUNG

Die vorliegende Arbeit beschäftigt sich mit Charakterisierungen einiger Schunckklassen endlicher auflösbarer Gruppen; es handelt sich dabei vor allem um die Bestimmung von Schunckklassen, deren Projektoren in jeder (endlichen, auflösbaren) Gruppe vorgegebene Eigenschaften besitzen.

Die Abschnitte 1 und 2 haben vorbereitenden und einführenden Charakter. In Abschnitt 1 stellen wir hauptsächlich die später benötigten Hilfsmittel aus der Darstellungstheorie der Gruppen zusammen, wohingegen Abschnitt 2 eine Zusammenfassung der wichtigsten elementaren Tatsachen aus der Theorie der Schunckklassen, soweit sie später benötigt werden, bietet. Definitionen und Ergebnisse wie auch bestimmte Schreibweisen aus diesen Abschnitten werden später oft ohne besonderes Zitat als bekannt vorausgesetzt. Gleiches trifft auf die grundlegenden Eigenschaften von Projektoren zu Schunckklassen zu, wie sie beispielsweise aus [8, 1.2], entnommen werden können. Besonders häufig benutzen wir, daß in einer Gruppe G mit nilpotentem Normalteiler N jedes $\mathscr{H}$-maximale Supplement von N bereits $\mathscr{H}$-Projektor von G ist, vorausgesetzt $\mathscr{H}$ ist eine Schunckklasse, die G/N enthält.

Das Hauptziel dieser Arbeit ist die Bestimmung aller Schunckklassen mit normal eingebetteten Projektoren, ein Problem, das von Schaller in [13] aufgeworfen wurde. Dabei gehen wir zwar von der Schallerschen Idee, diesen Schunckklassen gewisse Formationen zuzuordnen, aus, können aber das von Schaller erzielte Teilergebnis über diese Schunckklassen in unserer Beweisführung nicht verwenden: Der für den Nachweis der Voraussetzungen aus Schallers Hauptsatz notwendige Aufwand reicht uns aus, um die Bestimmung der Schunckklassen mit normal eingebetteten Projektoren direkt durchzuführen.

* Teil einer Arbeit, die dem Fachbereich Mathematik der Johannes Gutenberg-Universität, Mainz, als Dissertation vorgelegt wurde (D 77).

0021-8693/78/0551–0084$02.00/0

Die wesentliche Idee besteht dabei in unserer Beschreibung der lokalen Erklärungen der oben erwähnten Formationen mittels Projektoren der zu bestimmenden Schunckklasse—wir können nämlich nachweisen, daß diese Formationen gesättigt sind, indem wir ihre lokale Erklärbarkeit zeigen.

Die Bestimmung der Schunckklassen mit normal eingebetteten Projektoren ist nicht nur von selbständigem Interesse, sondern sie liefert auch einen einfachen Zugang zum Problem der Charakterisierung aller Schunckklassen mit der sog. Deck-Meide-Eigenschaft. Wir werden die hier dargestellten Ergebnisse in einem zweiten Teil unserer Arbeit zur Herleitung von Resultaten über Schunckklassen mit Deck-Meide-Eigenschaft anwenden.

Daneben sind in den ersten Abschnitten unserer Arbeit folgende Ergebnisse, die nicht aus dem Problemkreis der Deck-Meide-Schunckklassen stammen, eingeschlossen: In Abschnitt 2 ein Ergebnis über gesättigte Formationen, das als triviales Korollar den Satz von Lubeseder über die lokale Erklärbarkeit gesättigter Formationen liefert, in Abschnitt 3 zwei Charakterisierungen von $\mathscr{S}_\pi$, deren zweite im Folgenden nicht mehr benötigt wird, und in Abschnitt 4 einige Untersuchungen über das normale Eingebettetsein von Projektoren zu beliebigen Schuncklassen, die nicht in vollem Umfang zur Bestimmung der Schunckklassen mit normal eingebetteten Projektoren nötig sind, die jedoch aufgrund der Einfachheit der Ergebnisse interessant sind.

Vereinbarungen und Bezeichnungen

Alle in dieser Arbeit auftretenden Gruppen sind auflösbar und von endlicher Ordnung. Gruppen betrachten wir dabei in der Regel nur bis auf Isomorphie (mit den offensichtlichen Ausnahmen: bei Untergruppen bestimmter Gruppen interessiert i.a. nicht nur ihr Isomorphietyp), insbesondere enthalten Gruppenklassen mit einer Gruppe G stets auch sämtliche zu G isomorphen Gruppen; dennoch schreiben wir z.B. die Klasse aller zu G isomorphen Gruppen einfach $\{G\}$. Enthält die Gruppenklasse $\mathscr{K}$ genau n verschiedene Isomorphietypen von Gruppen, so schreiben wir gelegentlich $|\mathscr{K}| = n$.

Für die Definition von Abschließungsoperatoren und damit verbundene Konventionen verweisen wir auf [2, 3, 4, 10], ebenso für die Definition der Gruppenklassen $\mathscr{S}$, $\mathscr{S}_\pi$ und $\mathscr{N}$. Des öfteren kürzen wir für eine Gruppenklasse $\mathscr{K}$ die Klasse $\mathscr{K} \cap \mathscr{S}_\pi$ durch $\mathscr{K}_\pi$ ab (π eine Primzahlmenge); ähnlich wird $\mathscr{K}_p$ definiert. $\mathscr{I}$ ist die Klasse der Gruppen von Ordnung 1, $\mathscr{E}$ die Klasse aller abelschen Gruppen mit elementar-abelschen Sylowgruppen. $\mathscr{X}\mathscr{Y}$ wird für zwei Gruppenklassen $\mathscr{X}$ und $\mathscr{Y}$ wie in [3] definiert.

Ist $\mathscr{K}$ eine Gruppenklasse, so bezeichnet $\chi(\mathscr{K})$ die Charakteristik von $\mathscr{K}$, d.h. die Menge aller Primzahlen p mit $Z_p \in \mathscr{K}$ — Z_p ist die zyklische Gruppe der Ordnung p. Eine $\mathscr{K}$-maximale Untergruppe von G ist eine Untergruppe $K \in \mathscr{K}$, die in keiner in $\mathscr{K}$ liegenden Untergruppe von G echt enthalten ist. $\mathbf{Proj}_{\mathscr{K}}(G)$

für eine Schunckklasse $\mathscr{H}$ bezeichnet die Konjugiertenklasse der $\mathscr{H}$-Projektoren von G. Die Bedeutung von $\mathbf{Syl}_p(G)$ und $\mathbf{Hall}_\pi(G)$ ist klar; G_π bezeichnet meist irgendein Element von $\mathbf{Hall}_\pi(G)$. $\pi(G)$ ist die Menge aller Primteiler der Gruppe G.

Ist V ein Modul der Gruppe H über einem endlichen Körper K, so schreiben wir HV für das semidirekte Produkt von H mit V mit den durch die Darstellung von H auf V gegebenen Automorphismen. In $(H/\mathbf{C}_H(V))V$ wird V in natürlicher Weise als Modul für die Gruppe $H/\mathbf{C}_H(V)$ angesehen.

Ist U eine Untergruppe von G, so ist $\mathbf{Core}_G(U)$ der größte in U enthaltene Normalteiler $\bigcap_{x\in G} U^x$ von G.

$\mathbf{Soc}(G)$ bezeichnet das Produkt aller minimalen Normalteiler der Gruppe G, $\mathrm{Soc}(V)$ für einen G-Modul V die Summe aller irreduziblen Teilmoduln von V.

$\mathrm{cl}(G)$ ist die Klasse der nilpotenten Gruppe G.

S_n und A_n stehen für die symmetrische und alternierende Gruppe vom Grad n.

Die weiteren von uns verwendeten Vereinbarungen und Bezeichnungen sind denen aus [11, 7] angepaßt.

1. Einige Gruppen- und Modulkonstruktionen

Die Standard-Beweistechnik in der Theorie der Schunckklassen endlicher auflösbarer Gruppen besteht darin, aus gegebenen Gruppen und Moduln zu diesen über Primkörpern $GF(p)$ zerfallende Erweiterungen mit gewünschten Eigenschaften zu bilden. Wir stellen daher an den Anfang unserer Arbeit eine Sammlung von Gruppen- und Modulkonstruktionen, von denen später mehr oder weniger häufig Gebrauch gemacht wird. Bei sehr elementaren und bei bekannten Lemmata verzichten wir auf die Durchführung von Beweisen.

Wir beginnen mit einigen Aussagen über eine p-Gruppenkonstruktion von Huppert ([11, VI.7.22]).

1.1 Lemma. *Seien V_1 und V_2 Moduln der Gruppe G über $GF(p)$. Dann wird auf der Menge*

$$P = \{(v_1 + v_2, t) \mid v_1 + v_2 \in V_1 \oplus V_2 \text{ mit } v_i \in V_i \text{ für } i = 1, 2,\ t \in V_1 \otimes V_2\}$$

durch

$$(v_1 + v_2, t)(v_1' + v_2', t') = (v_1 + v_1' + v_2 + v_2', t + t' + v_1 \otimes v_2')$$

eine Multiplikation definiert, die P zu einer p-Gruppe macht.

G induziert auf P durch komponentenweise Operation eine Gruppe von Automorphismen. Wir identifizieren die V_i mit den G-invarianten Untergruppen

$\{(v_i, 0) \mid v_i \in V_i\}$ und bemerken, daß auch $T = \{(0, t) \mid t \in V_1 \otimes V_2\}$ G-invariant ist, und zwar G-isomorph zum $GF(p)$-Tensorprodukt $V_1 \otimes V_2$, das in kanonischer Weise ein G-Modul ist. Mit V_i und T ist auch die Untergruppe $P_i = V_i T$ von P G-invariant, und sie ist ein G-Modul über $GF(p)$ mit direkten Summanden V_i und T. Ferner gilt $P/T \cong_G V_1 \oplus V_2$.

Man beachte auch $P' = \mathbf{Z}(P) = \Phi(P) = T = [V_1, V_2]$ sowie $[U_1, U_2] = \langle (0, u_1 \otimes u_2) \mid u_i \in U_i$ für $i = 1, 2\rangle$ für alle Untergruppen U_i von V_i.

Gilt $V_1 = V_2^*$ (s. 1.2), *so sei R der Kern des kanonischen G-Homomorphismus von $V_1 \otimes V_2$ auf 1_G^p (s. ebenfalls 1.2) und $\bar{U} = UR/R$ für alle Untergruppen U von P.*

Wir werden an mehreren Stellen dieser Arbeit Ergebnisse der modularen Darstellungstheorie ohne besonderes Zitat verwenden und weisen deshalb hier den Leser auf die einschlägige Literatur, z.B. [7] oder, zum Teil, auch [11], hin. Es stellt sich als bequem für uns heraus, die folgenden Bezeichnungen festzulegen, die wir im Folgenden (gleichfalls meist ohne ein Zitat) benutzen:

1.2 Definition. (a) Ist G eine Gruppe und p eine Primzahl, so bezeichne 1_G^p den irreduziblen, trivialen G-Modul über $GF(p)$.

(b) Ist V ein G-Modul über irgendeinem Körper K, so bezeichne V^* den zu V dualen Modul.

(c) Ist V ein irreduzibler G-Modul über einem Körper K, so bezeichne $P(V)$ den projektiven, direkt unzerlegbaren $K[G]$-Modul mit $P(V)/\mathrm{Rad}(P(V)) \cong_G V$; $\mathrm{Rad}(M)$ sei dabei für jeden G-Modul M das Radikal von M, der Durchschnitt aller G-Teilmoduln T von M mit vollständig reduziblem M/T.

1.3 Lemma. *Ist V ein G-Modul über $GF(p)$, so ist* $\mathrm{Rad}(V)$ *in der Frattinigruppe des semidirekten Produkts GV enthalten.*

Unter geeigneten Voraussetzungen an den Körper K gilt für die sogenannten Cartan-Invarianten c_{ij} des Gruppenrings $K[G]$ (siehe [7, § 46] für deren Definition) $c_{ij} = c_{ji}$. Unser nächstes Lemma zeigt, ohne Forderungen an K zu stellen, die Äquivalenz von $c_{ij} \neq 0$ mit $c_{ji} \neq 0$.

1.4 Lemma. *Kommt W als G-Kompositionsfaktor von $P(V)$ vor (V ein irreduzibler G-Modul über irgendeinem Körper K), so kommt V als G-Kompositionsfaktor von $P(W)$ vor.*

Beweis. Der Teilmodul T von $P(V)$ werde minimal gewählt bezüglich der Eigenschaft, einen zu W isomorphen Faktormodul zu besitzen. Dann gilt $T/\mathrm{Rad}(T) \cong W$, und $P(W)$ ist die projektive Hülle von T. Insbesondere ist T Faktormodul von $P(W)$. Da jeder vom Nullmodul verschiedene Teilmodul von $P(V)$ den einzigen irreduziblen Teilmodul von $P(V)$, nämlich $\mathrm{Soc}(P(V)) \cong_G V$

((s. das nachstehende Lemma) enthält, kommt V somit als Kompositionsfaktor von T und $P(W)$ vor.

1.5 LEMMA. *Für jeden irreduziblen G-Modul V gilt*

$$\mathrm{Soc}(P(V)) \underset{G}{\cong} V \underset{G}{\cong} P(V)/\mathrm{Rad}(P(V)).$$

1.6 LEMMA. *$P(V)^* \cong P(V^*)$ gilt für jeden irreduziblen G-Modul V über dem Körper K.*

Beweis. Im regulären $K[G]$-Modul $K[G]$ hat der Teilmodul $P(V)$ einen komplementären Teilmodul T. Unter Beachtung der Tatsache, daß $K[G]$ (wie jeder Permutationsmodul einer Gruppe) selbstdual ist, erhalten wir

$$P(V)^* \oplus T^* = (P(V) \oplus T)^* = (K[G])^* \cong K[G].$$

$P(V)^*$ ist als direkter Summand von $K[G]$ somit projektiv. Da sich Teilmoduln W von $P(V)$ und Teilmoduln von $P(V)^*$ durch

$$W^\perp = \{f \in P(V)^* \mid wf = 0 \text{ für alle } w \in W\} \subseteq P(V)^*$$

eineindeutig entsprechen, ist zuerst einmal $P(V)^*$ direkt unzerlegbar. Daneben geht $\mathrm{Soc}(P(V))$ bei $\perp$-Bildung in $\mathrm{Rad}(P(V)^*)$ über. Wir haben also

$$P(V)^*/\mathrm{Rad}(P(V)^*) = P(V)^*/(\mathrm{Soc}(P(V)))^\perp \cong (\mathrm{Soc}(P(V)))^* \cong V^*$$

(letztere Isomorphie gemäß 1.5), denn allgemein gilt $M^*/T^\perp \cong_G T^*$ für Teilmoduln T eines G-Moduls M. Mithin ist $P(V)^*$ der projektive, direkt unzerlegbare $K[G]$-Modul mit Radikalfaktormodul V^*:

$$P(V)^* \cong P(V^*).$$

1.7 LEMMA. *Die Gruppe G sei das Produkt einer Untergruppe H mit einem elementar-abelschem p-Normalteiler N, wobei $H \cap N = 1$ gelte.*

(a) *Es ist* $\mathrm{Rad}((1_H^p)^G) = \dot{\bigoplus}_{n \in N^\#} \langle e \otimes n - e \otimes 1 \rangle$ *mit einem von Null verschiedenen Element e des $GF(p)$-Vektorraumes 1_H^p, wobei*

$$(1_H^p)^G = 1_H^p \otimes_{GF(p)[H]} GF(p)[G]$$

in der in [11, Kap. V, § 16], festgelegten Bezeichnungsweise als direkte Summe von $GF(p)$-Vektorräumen $\langle e \otimes n \rangle$ geschrieben wird und die obige direkte Summe ebenfalls eine Summe von Vektorräumen (und nicht G-Moduln) meint. Insbesondere haben wir $(1_H^p)^G/\mathrm{Rad}((1_H^p)^G) \cong_G 1_G^p$.

Ferner besitzt $R = \mathrm{Rad}((1_H^p)^G)$ einen G-Faktormodul $R/C \cong_G N$, der durch *die Festsetzung von C als Kern der $GF(p)[G]$-linearen Abbildung Ψ von R auf N mit*

$$\left(\sum_{n\in N^{\#}} \lambda_n(e\otimes n - e\otimes 1)\right)\Psi = \prod_{n\in N^{\#}} n^{(\lambda_n)} \qquad (\lambda_n \in GF(p);$$

N wird multiplikativ geschrieben) gefunden werden kann.

(b) *Ist q eine Primzahl ungleich p, X eine Untergruppe von H und N der einzige minimale Normalteiler von G, so ist $M = [(1_X^q)^G, N]$ ein G-Modul, dessen sämtliche Kompositionsfaktoren irreduzible, treue G-Moduln sind.*

Gilt darüber hinaus $X \subset H$, so gibt es ein $y \in M^*$ mit $[X, y] = 1 \neq [H, y]$.

Beweis. (a) Die durch $(\sum_{n\in N} \lambda_n(e\otimes n))\varphi = \sum_{n\in N} \lambda_n$ definierte Abbildung von $(1_H^p)^G$ auf $GF(p)$ ist $GF(p)[G]$-linear, ihr Bild ist zum irreduziblen, trivialen G-Modul 1_G^p über $GF(p)$ isomorph. Daher ist

$$R = \text{Kern}\,\varphi = \left\{\sum_{n\in N} \lambda_n(e\otimes n) \,\middle|\, \sum_{n\in N} \lambda_n = 0\right\} = \bigoplus_{n\in N^{\#}} \langle e\otimes n - e\otimes 1\rangle$$

ein G-Teilmodul von $E = (1_H^p)^G$ mit $E/R \cong 1_G^p$. Nach einem Ergebnis Mackeys [11, V. 16.9] ist E_N N-isomorph zu

$$(1^p_{H^1\cap N})^N = (1^p_1)^N \cong GF(p)[N],$$

denn $G = H1N$ ist eine Doppelnebenklassenzerlegung von G nach H und N. Da der Gruppenring einer p-Gruppe über einem Körper der Charakteristik p als Radikalfaktormodul einen zum irreduziblen, trivialen Modul der Gruppe isomorphen Modul hat, und weil $(E/\text{Rad}(E))_N$ ein vollständig reduzibler Modul für den Normalteiler N von G ist (nach Cliffords erstem Hauptsatz [11, V.17.3]), muß R schon das Radikal des G-Moduls E sein. Damit sind die Behauptungen des ersten Abschnittes von (a) nachgewiesen.

Die Behauptungen des zweiten Abschnittes rechnet man einfach nach; es sei darauf hingewiesen, daß die dafür benötigte Beweistechnik, insbesondere die Definition von Ψ, aus Beweisen von Sätzen von Gaschütz und von Green und Hill über Kompositionsfaktoren von $P(1_G^p)$, die zu p-Hauptfaktoren von G isomorph (als G-Moduln) sind, stammt.

(b) Wegen $q \nmid |N|$ gilt bekanntlich für die abelsche q-Gruppe $Q = (1_X^q)^G$:

$$Q = \mathbf{C}_Q(N) \oplus [Q, N],$$

und $M = [Q, N]^*$ hat nach Maschkes Satz keinen trivialen N-Kompositionsfaktor. Insbesondere operiert N nicht trivial auf jedem G-Kompositionsfaktor von M, so daß ein solcher Faktor von keinem minimalem Normalteiler der primitiven Gruppe G zentralisiert wird, d.h. treu für G ist.

Mackeys bereits zitierter Satz liefert außerdem, daß $(1_X^q)^H$ direkter Summand von $((1_X^q)^G)_H$ ist. Elementare Eigenschaften induzierter Moduln ergeben damit das gewünschte Element y im Fall $X \subset H$.

1.8 Lemma. *Seien X und Y Gruppen, V ein irreduzibler, treuer X-Modul und W ein ebensolcher Modul für Y über dem gleichen Körper K. T sei ein Kompositionsfaktor des $(X \times Y)$-Moduls $V \otimes W$.*

Dann gilt $C = \mathbf{C}_{X\times Y}(T) \subseteq \mathbf{Z}(X) \times \mathbf{Z}(Y) = \mathbf{Z}(X \times Y)$, und $(C \times Y) \cap X \cong (C \times X) \cap Y \cong C$ sind zentrale Untergruppen von X beziehungsweise Y. Insbesondere ist T treu, falls $(|\mathbf{Z}(X)|, |\mathbf{Z}(Y)|) = 1$ gilt.

Entsprechendes gilt für den Normalteiler $S = \{s \in X \times Y \mid ts = \lambda_s t$ für ein $\lambda_s \in K$ und alle $t \in T\}$.

Beweis. Offenbar gelten

$$(V \otimes W)_X \cong \bigoplus_{\dim_K W} V \qquad \text{und} \qquad (V \otimes W)_X \cong \bigoplus_{\dim_K V} W.$$

Die Normalteiler X bzw. Y von $X \times Y$ operieren daher vollständig reduzibel auf $(V \otimes W)_X$ bzw. $(V \otimes W)_Y$, also auch auf T_X und T_Y. Es folgt $T_X \cong \bigoplus V$, $T_Y \cong \bigoplus W$ und damit $\mathbf{C}_X(T_X) = \mathbf{C}_X(V) = 1$, $\mathbf{C}_Y(T_Y) = \mathbf{C}_Y(W) = 1$. Mithin ist $C = \mathbf{C}_{X\times Y}(T)$ ein Normalteiler von $X \times Y$, der sowohl mit X als auch mit Y trivialen Durchschnitt hat. Bekanntlich gilt deshalb $C \subseteq \mathbf{Z}(X) \times \mathbf{Z}(Y) = \mathbf{Z}(X \times Y)$. Die angegebenen Isomorphien folgen aus Dedekinds Identität.

Die Behauptung über S erhält man analog.

Das nächste Lemma stellt eine gemeinsame Verallgemeinerung der Lemmata 3.4 und 4.3 aus [10] dar und beantwortet damit eine in dieser Arbeit von Hawkes gestellte Frage.

1.9 Lemma. *Sei G eine Gruppe, deren Sockel S das direkte Produkt paarweise nicht G-isomorpher minimaler Normalteiler $N_1, \ldots, N_t$ von G ist, und sei H eine Untergruppe von G mit $H \cap S = (H \cap N_1) \times \cdots \times (H \cap N_t)$. Ist K ein Körper der Charakteristik $p \nmid |S|$ (oder der Charakteristik 0) und U ein irreduzibler H-Modul über K, der ein nichttrivialer $(H \cap N_i)$-Modul für alle $i \in \{1, \ldots, t\}$ mit $H \cap N_i = N_i$ ist, so existiert ein irreduzibler, treuer G-Modul V über K derart, daß U ein Faktormodul von V_H ist.*

Dabei kann im Fall $H \cap S \subseteq \mathbf{C}_H(U)$ der Modul V so gewählt werden, daß V_{HS} einen Teilmodul T mit $H \cap S \subseteq \mathbf{C}_{HS}(T)$ besitzt.

Beweis. Sei die Numerierung der N_i so durchgeführt, daß

(i) $H \cap N_i = N_i$ für $i = 1, \ldots, r$,

(ii) $H \cap N_i \subset N_i$ und U ein nichttrivialer $(H \cap N_i)$-Modul ist für $i = r + 1, \ldots, s$,

(iii) $H \cap N_i \subset N_i$ und U ein trivialer $(H \cap N_i)$-Modul ist für $i = s + 1, \ldots, t$.

Wir bemerken zuerst:

(1) U besitzt einen irreduziblen $((H \cap N_1) \times \cdots \times (H \cap N_s))$-Teilmodul U_0, der von keinem der $H \cap N_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ zentralisiert wird:

Ist nämlich U_0 irgendein $((H \cap N_1) \times \cdots \times (H \cap N_s))$-Teilmodul von U, so kann keines der $H \cap N_i$ $(i = 1, \ldots, s)$ trivial auf U_0 operieren, da sonst wegen $H \cap N_i \trianglelefteq H$ der H-Teilmodul $\mathbf{C}_U(H \cap N_i)$ von U bereits mit dem gesamtem irreduziblem H-Modul U entgegen der Wahl der N_i für diese i übereinstimmen würde.

(2) Das in (1) gefundene U_0 ist nach Wahl der $H \cap N_i$ für $i = s + 1, \ldots, t$ ein trivialer $((H \cap N_{s+1}) \times \cdots \times (H \cap N_t))$-Modul, insbesondere invariant unter dieser Gruppe und damit invariant unter $H \cap S$. $((U_0)_{H \cap S})^S$ besitzt einen irreduziblen Teilmodul W_0, auf dem keines der $H \cap N_i$ $(i = 1, \ldots, t)$ trivial operiert:

Sei für $i = r + 1, \ldots, t$ die Untergruppe K_i von N_i komplementär zu $H \cap N_i$. Dann überlegt man sich leicht (unter Verwendung der Zerlegung von

$$((U_0)_{H \cap S})^S = \bigoplus_{k \in K_{r+1} \times \cdots \times K_t} (U_0)_{H \cap S} \otimes k$$

in eine direkte Summe von Vektorräumen (vgl. [11, Kap. V, § 16]) und mittels $[H \cap S, K_{r+1} \times \cdots \times K_t] = 1$), daß $((U_0)_{H \cap S})^S \cong A \otimes B$ gilt, wobei $A \cong (U_0)_{H \cap S}$ (ein Modul für $H \cap S$), $B \cong K[K_{r+1} \times \cdots \times K_t]$ (ein Modul für $K_{r+1} \times \cdots \times K_t$) und $A \otimes B$ ein Modul für $S = (H \cap S) \times (K_{r+1} \times \cdots \times K_t)$ ist, und zwar mit der üblichen komponentenweisen Operation, die wir schon im vorangegangenen Lemma betrachtet haben. Mittels elementarer Methoden der linearen Algebra sieht man durch eine Reduktion auf Sylowgruppen, daß $K_{s+1} \times \cdots \times K_t$ einen Normalteiler M mit zyklischer Faktorgruppe hat, wobei zusätzlich $K_i \cap M \subset M$ für $i = s + 1, \ldots, t$ gilt. Damit zeigt sich die Existenz eines irreduziblen $(K_{r+1} \times \cdots \times K_t)$-Teilmoduls U_1 von B mit

$$\mathbf{C}_{K_{r+1} \times \cdots \times K_t}(U_1) = K_{r+1} \times \cdots \times K_s \times M.$$

Insbesondere operiert keines der $K_i \subseteq N_i$ für $i = s + 1, \ldots, t$ trivial auf U_1.

Sei schließlich W_0 ein irreduzibler S-Teilmodul von $A \otimes U_1$ (nach dem vorher Gesagtem also von $((U_0)_{H \cap S})^S$). Das vorangehende Lemma liefert

$$\mathbf{C}_{(H \cap N_1) \times \cdots \times (H \cap N_s)}(W_0) = \mathbf{C}_{(H \cap N_1) \times \cdots \times (H \cap N_s)}(U_0);$$

deshalb operieren $N_1, \ldots, N_s$ nichttrivial auf W_0. Aus ähnlichem Grund operieren für $i = s + 1, \ldots, t$ mit den K_i auch diese N_i nichttrivial auf W_0.

Wir können jetzt die Behauptung des Lemmas beweisen:

Den gesuchten Modul V finden wir als irreduziblen G-Teilmodul im G-invarianten Unterraum $\sum_{x\in G} W_0 x$ des induzierten Moduls $W = U^G$; nach Mackeys Satz V. 16.9 aus [11] besitzt nämlich $W_S = ((U_H)^G)_S$ einen zu $(U_{H\cap S})^S$ isomorphen direkten Summanden, so daß W einen S-invarianten Teilraum W_0 hat, welcher zu dem unter (2) gefundenen S-Modul W_0 isomorph ist. Ein Satz von Nakayama [11, V. 16.9] liefert die Existenz eines zu U isomorphen Faktormoduls von V_H. Zum Nachweis von $\mathbf{C}_G(V) = 1$ schreiben wir V_S (bis auf Isomorphie) als direkte Summe von S-Moduln $(W_0 x)_S$, die x Elemente einer Teilmenge L von G. Dies ist aufgrund der Wahl von V innerhalb $\sum_{x\in G} W_0 x$ möglich: Man beachte die Irreduzibilität der $W_0 x$ und die Sätze von Clifford und Jordan–Hölder. Da der S-Modul $W_0 \cong_S ((W_0 x)_S)x^{-1}$ für ein $x \in L$ in V_S vorkommt, liegt $\mathbf{C}_S(V_S)$ in $\mathbf{C}_S(W_0)$. Nach Konstruktion von W_0 enthält daher $\mathbf{C}_G(V)$ keine der Gruppen N_i, nach unserer Voraussetzung an die N_i also keinen minimalen Normalteiler von G. Die erste Aussage des Lemmas ist nun nachgewiesen.

Sei zum Beweis der zweiten Aussage die Voraussetzung $H \cap S \subseteq \mathbf{C}_H(S)$ erfüllt. Wie bereits erwähnt, kommt W_0 (bis auf Isomorphie) als Teilmodul von V_S vor. Der Teilraum $T = \sum_{y\in H} W_0 y$ von V ist dann invariant unter HS. Ferner gilt $\mathbf{C}_{HS}(T) \supseteq \bigcap_{y\in H} \mathbf{C}_S(W_0 y) = \bigcap_{y\in H} M^y$ (M wie im Beweis von (2) definiert—man beachte im Folgenden $s + 1 = 1$ für das s aus (ii)), so daß mit M auch $\mathbf{C}_{HS}(T)$ den Normalteiler $H \cap S$ von HS enthält. T hat also alle behaupteten Eigenschaften, und wir haben auch die zweite Behauptung des Lemmas bewiesen.

Lemma 1.9 kann z.B. angewendet werden, um einen vereinfachten Beweis des Satzes 1.4 aus [3] von Dade zu erstellen.

2. Elementare Bemerkungen über Schunckklassen und Formationen

Eine Schunckklasse ist bekanntlich eine Q-abgeschlossene Klasse $\mathscr{H}$ von Gruppen, die eine Gruppe G immer dann schon enthält, wenn alle primitiven Faktorgruppen von G in $\mathscr{H}$ liegen. Schunck charakterisierte diese Gruppenklassen als genau diejenigen, zu welchen in allen Gruppen $\mathscr{H}$-Projektoren existieren; dabei heißt $H \subseteq G$ ein $\mathscr{H}$-Projektor von G, falls HN/N $\mathscr{H}$-maximal in G/N für alle $N \trianglelefteq G$ ist. Daneben hat eine andere Kennzeichnung der Schunckklassen Bedeutung erlangt. Um sie beschreiben zu können, stellen wir einige Definitionen aus [4] zusammen:

2.1 Definition. (a) Bezeichne $\mathscr{H}$ eine Schunckklasse. Dann seien

$$a(\mathscr{H}) = \{A \mid A \text{ ist primitive Gruppe mit } H \cap \mathbf{F}(A) = 1 \text{ für } H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(A)\},$$
$$b(\mathscr{H}) = \{B \in a(\mathscr{H}) \mid B/\mathbf{F}(B) \in \mathscr{H}\},$$
$$c(\mathscr{H}) = \{B/\mathbf{F}(B) \mid B \in b(\mathscr{H})\}.$$

Ferner sei für Primzahlmengen π wie die zuvor definierten Klassen $a_\pi(\mathscr{H})$, $b_\pi(\mathscr{H})$ und $c_\pi(\mathscr{H})$ definiert, wobei aber nur primitive Gruppen A beziehungsweise B mit $\mathbf{F}(A) = \mathbf{O}_p(A)$ bzw. $\mathbf{F}(B) = \mathbf{O}_p(B)$ für ein $p \in \pi$ betrachtet werden. Die Ausdrücke $a_p(\mathscr{H})$, $b_p(\mathscr{H})$ und $c_p(\mathscr{H})$ (p eine Primzahl) definieren sich nun selbst.

(b) Für jede Gruppenklasse $\mathscr{X}$ sei $h(\mathscr{X}) = \{G \mid \mathrm{Q}\{G\} \cap \mathscr{X} = \varnothing\}$.

(c) Eine Gruppenklasse $\mathscr{B}$ heißt ein Rand, falls $G \in \mathscr{B}$ stets $\mathrm{Q}\{G\} \cap \mathscr{B} = \{G\}$ impliziert.

Ränder sowie die in (a) definierten Klassen $a(\mathscr{H})$ und $b(\mathscr{H})$ enthalten konventionsgemäß nicht die Einsgruppe.

Nach Doerk [4, 1.2], gilt:

2.2 Satz. *Durch b und h werden zueinander inverse Bijektionen von der Klasse* $\mathbf{H}$ *aller Schunckklassen auf die Klasse aller Ränder (bzw. umgekehrt) definiert.*

$b(\mathscr{H})$ heißt der Rand der Schunckklasse $\mathscr{H}$, $h(\mathscr{B})$ die Klasse der $\mathscr{B}$-perfekten Gruppen.

Der Begriff des Randes ist nicht nur deshalb wichtig, weil er die Möglichkeit vermittelt, auf einfache Art Schunckklassen zu konstruieren, sondern auch zur Kontrolle der Relation des starken Enthaltenseins auf $\mathbf{H}$:

2.3 Satz (Doerk [4, 2.2]). *Für $\mathscr{X}$, $\mathscr{Y} \in \mathbf{H}$ wird $\mathscr{X} \leqslant \mathscr{Y}$ ($\mathscr{X}$ stark enthalten in $\mathscr{Y}$) durch*

$$X \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{X}}(G) \Rightarrow X \subseteq Y \qquad \text{für ein} \quad Y \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{Y}}(G)$$

(oder, wegen der Konjugiertheit der Projektoren äquivalent, durch

$$Y \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{Y}}(G) \Rightarrow Y \subseteq X \qquad \text{für ein} \quad X \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{X}}(G))$$

definiert. Dann ist $\mathscr{X} \leqslant \mathscr{Y}$ mit $b(\mathscr{Y}) \subseteq a(\mathscr{X})$ gleichwertig.

Da für alle Schunckklassen $\mathscr{H}$ stets $b(\mathscr{H}) \subseteq a(\mathscr{H})$ gilt, bedeutet die Aussage $b(\mathscr{Y}) \subseteq a(\mathscr{X})$ eine stärkere Einschränkung von $\mathscr{Y}$ als von $\mathscr{X}$. Zwar läßt sich der in der Aussage $b(\mathscr{Y}) \subseteq a(\mathscr{X})$ enthaltene Mangel an Symmetrie beseitigen, doch nur um den Preis einer Abschwächung von 2.3, die für fast alle Zwecke nutzlos ist. Wir beweisen:

2.4 Korollar. *$\mathscr{X} \leqslant \mathscr{Y}$ und $a(\mathscr{Y}) \subseteq a(\mathscr{X})$ sind äquivalent.*

Beweis. Ist $\mathscr{X} \leqslant \mathscr{Y}$, so enthält ein $\mathscr{Y}$-Projektor von $A \in a(\mathscr{Y})$ einen $\mathscr{X}$-Projektor von A. Offenbar folgt $A \in a(\mathscr{X})$. Gilt umgekehrt $a(\mathscr{Y}) \subseteq a(\mathscr{X})$, so folgt mit $b(\mathscr{Y}) \subseteq a(\mathscr{Y})$ und 2.3 $\mathscr{X} \leqslant \mathscr{Y}$.

Es wäre interessant, eine Beschreibung der Gruppenklassen $\mathscr{K}$, die von der Form $\mathscr{K} = a(\mathscr{H})$ für ein $\mathscr{H} \in \mathbf{H}$ sind, zu haben. Analog zu Doerks Satz 2.2 gilt nämlich:

2.5 *Bemerkung.* Durch a und h werden zueinander inverse Bijektionen von $\mathbf{H}$ auf die Klasse $\{a(\mathscr{H}) \mid \mathscr{H} \in \mathbf{H}\}$ (bzw. umgekehrt) definiert.

Beweis. Man überlegt sich mittels der einschlägigen Definitionen leicht $h(a(\mathscr{H})) = \mathscr{H}$ für alle $\mathscr{H} \in \mathbf{H}$. Daher ist a eine Bijektion, und h ist offenbar invers zu a.

Die in Sektion 8 untersuchte Verbandsstruktur von $\mathbf{H}$ läßt sich mittels 2.5 innerhalb $\{a(\mathscr{H}) \mid \mathscr{H} \in \mathbf{H}\}$ etwas übersichtlicher als mittels 2.3 innerhalb der Klasse aller Ränder beschreiben. Man überlegt sich nämlich leicht:

2.6 *Bemerkung.* Für alle $\mathscr{X}, \mathscr{Y} \in \mathbf{H}$ gelten

$$a(\mathscr{X} \vee \mathscr{Y}) = a(\mathscr{X}) \cap a(\mathscr{Y}),$$

$$a(\mathscr{X} \wedge \mathscr{Y}) = \bigcap_{a(\mathscr{X}) \cup a(\mathscr{Y}) \subseteq a(\mathscr{Z})} a(\mathscr{Z}).$$

Dabei ist die zweite der obigen Gleichungen eine Konsequenz der Gültigkeit der ersten auch für beliebige Teilmengen $\mathbf{T}$ von $\mathbf{H}$ an Stelle von $\{\mathscr{X}, \mathscr{Y}\}$. Die oben erwähnte Asymmetrie in $\mathscr{X} \leqslant \mathscr{Y}$ kommt auch hier wieder zum Ausdruck, indem die Beschreibung von $\mathscr{X} \wedge \mathscr{Y}$, verglichen mit derjenigen von $\mathscr{X} \vee \mathscr{Y}$, nur wenig übersichtlich ist: Die Forderung $a(\mathscr{X}) \cup a(\mathscr{Y}) \subseteq a(\mathscr{Z})$ an $\mathscr{Z}$ ist kaum überschaubar.

Ein in dieser Arbeit häufig nützliches Beispiel für eine Anwendung von 2.3 ist

2.7 Satz. *Äquivalent sind für $\mathscr{H} \in \mathbf{H}$:*

(i) $\mathscr{S}_\pi \mathscr{H} = \mathscr{H}$.

(ii) $\mathscr{S}_\pi \leqslant \mathscr{H}$.

(iii) $b_\pi(\mathscr{H}) = \varnothing$.

Insbesondere ist die durch $b(\mathscr{H}^\pi) = b_\pi(\mathscr{H})$ definierte Schunckklasse $\mathscr{H}^\pi$ eine sowohl $\mathscr{H}$ als auch $\mathscr{S}_{\pi'}$ stark enthaltende Schunckklasse.

Mit $\mathscr{P}_\pi$ bezeichnen wir stets die durch $b(\mathscr{P}_\pi) = \{Z_p \mid p \in \pi\}$ definierte Schunckklasse. Diese Klasse läßt sich beschreiben als $\{G \mid p \nmid |G/G'| \text{ für alle } p \in \pi\} = \{G \mid G = \mathbf{O}^\pi(G)\}$ und wird die Klasse der π-perfekten Gruppen genannt. Für alle Gruppen G gilt $\mathbf{Proj}_{\mathscr{P}_\pi}(G) = \{\mathbf{O}^\pi(G)\}$.

Überlegungen ähnlich denen in Sektion 6 deuten darauf hin, daß die $\mathscr{P}_\pi$ die einzigen Schunckklassen sind, für welche $\mathscr{P}_\pi \mathscr{H}$ bei beliebigem $\mathscr{H} \in \mathbf{H}$ wiederum Schunckklasse ist. Wir vermerken für spätere Anwendungen:

2.8 *Bemerkung* [4, 2.7]. Ist $\mathscr{H}$ eine Schunckklasse, so ist auch $\mathscr{P}_\pi \mathscr{H}$ eine solche. Dabei gilt für alle Gruppen G

$$\mathbf{Proj}_{\mathscr{P}_\pi \mathscr{H}}(G) = \{H\mathbf{O}^\pi(G) \mid H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(G)\}.$$

Eine Formation ist eine Q- und R_0-abgeschlossene Gruppenklasse. Ist $\mathscr{K}$ irgendeine Klasse von Gruppen, so ist durch $\mathrm{QR}_0\mathscr{K}$ bekanntlich die kleinste $\mathscr{K}$ enthaltende Formation gegeben, und $\mathscr{K}$ ist genau dann Formation, wenn $\mathscr{K} = \mathrm{QR}_0\mathscr{K}$ gilt. Die besondere Bedeutung der Formationen für die Theorie der Schunckklassen rührt von dem folgenden Lemma her:

2.9 Lemma. *Sei $\mathscr{H}$ eine Schunckklasse, N ein p-Normalteiler einer Gruppe G, der durch die Untergruppe K in G komplementiert wird. K operiere treu auf N, es gelte also $\mathbf{C}_K(N) = 1$. Enthält K einen $\mathscr{H}$-Projektor H von G, so liegt $H/\mathbf{O}_p(H)$ in $\mathrm{R}_0c_p(\mathscr{H})$. Insbesondere ist H in der Formation $\mathscr{S}_p\mathrm{QR}_0c_p(\mathscr{H})$ enthalten.*

(Die Voraussetzung des Lemmas ist z.B. für Gruppen $G \in a_p(\mathscr{H})$ mit $N = \mathbf{F}(G) = \mathbf{O}_p(G)$ erfüllt.)

Beweis. Sei $1 = N_0 \subseteq N_1 \subseteq \cdots \subseteq N_r = N$ eine H-Kompositionsreihe von N. Aus elementaren Eigenschaften von Projektoren folgt mit $H \cap N = 1$ dann $(H/C_H(N_i/N_{i-1}))(N_i/N_{i-1}) \in b_p(\mathscr{H})$, d.h. $H/\mathbf{C}_H(N_i/N_{i-1}) \in c_p(\mathscr{H})$. Wegen $\mathbf{C}_H(N) \subseteq \mathbf{C}_K(N) = 1$ ergibt sich $\bigcap_{i=1}^{r} \mathbf{C}_H(N_i/N_{i-1}) = \mathbf{O}_p(H)$, somit unsere Behauptung $H/\mathbf{O}_p(H) \in \mathrm{R}_0c_p(\mathscr{H})$. Nach unserer Vorbemerkung und aufgrund der wohlbekannten Tatsache, daß das Produkt $\mathscr{F}_1\mathscr{F}_2$ einer gegenüber Normalteilerbildung abgeschlossenen Formation $\mathscr{F}_1$ mit irgendeiner Formation $\mathscr{F}_2$ wieder eine Formation ist, ist $\mathscr{S}_p\mathrm{QR}_0c_p(\mathscr{H})$ eine Formation, und sie enthält H.

Einige elementare Eigenschaften eines für unsere Arbeit besonders bedeutsamen Typs von Formationen fassen wir im nächsten Lemma zusammen.

2.10 Lemma. *$\mathscr{H}$ sei eine Schunckklasse, $\mathscr{F}$ eine Formation. Nach* A1 *aus* [5] *ist dann auch die Klasse $X(\mathscr{H}, \mathscr{F}) = \{G \mid \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(G) \subseteq \mathscr{F}\}$ wieder eine Formation (aber nicht notwendig eine Schunckklasse), selbst wenn $\mathscr{H}$ keine Formation ist. Dabei gelten*

$$\mathscr{H} \cap \mathscr{F} \subseteq \mathscr{H} \cap X(\mathscr{H}, \mathscr{F}) \subseteq \mathscr{F},$$

$$X(\mathscr{H}, \mathscr{F}) = X(\mathscr{H}, \mathscr{H} \cap \mathscr{F}),$$

$$X(\mathscr{H}, \mathscr{F}_1) \subseteq X(\mathscr{H}, \mathscr{F}_2), \qquad \text{falls } \mathscr{F}_1 \subseteq \mathscr{F}_2\,,$$

$\mathscr{F}_1X(\mathscr{H}, \mathscr{F}_2) \subseteq X(\mathscr{H}, \mathscr{F}_1\mathscr{F}_2)$ für gegenüber Untergruppenbildung abgeschlossenes $\mathscr{F}_1$.

Ist ferner $H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(G)$, so sind $G \in X(\mathscr{H}, \mathscr{F})$ und $H \in X(\mathscr{H}, \mathscr{F})$ (d.h. $H \in \mathscr{F}$) offenbar gleichwertig, mehr noch: Genau dann liegt G in $X(\mathscr{H}, \mathscr{F})$, wenn dies für irgendeine der Zwischengruppen U zwischen H und G ($H \subseteq U \subseteq G$) zutrifft; und mit G liegt auch jede solche Zwischengruppe in $X(\mathscr{H}, \mathscr{F})$.

Beweis. Einen Beweis dieses Lemmas erhält man direkt aus den einschlägigen Definitionen zusammen mit den formalen Eigenschaften von Projektoren.

Formationen, die zugleich Schunckklassen sind, sind genau die E_Φ-abgeschlossenen Formationen, die sogenannten gesättigten Formationen. Sie sind außerdem nach Gaschütz und Lubeseder die Formationen $\mathscr{F}$ der Gestalt $\mathscr{F} = \bigcap_{p \in \chi(\mathscr{F})} \mathscr{S}_{p'}\mathscr{S}_p f(p) \cap \mathscr{S}_{\chi(\mathscr{F})}$ mit Formationen $f(p)$. Diese heißen lokale Formationen, die $f(p)$ eine lokale Erklärung von $\mathscr{F}$. Nach [3, § 2] existiert zu lokalen $\mathscr{F}$ stets genau eine inklusive und volle (für die Definition dieser Begriffe siehe etwa [3]) lokale Erklärung $\{f(p) \mid p \in \chi(\mathscr{F})\}$; die zugehörigen $f(p)$ bezeichnen wir durchweg mit $\mathscr{F}(p)$.

Wir fügen hier ein Ergebnis über gesättigte Formationen ein, in dessen Beweis einige im Folgenden sehr nützliche Beweistechniken angedeutet werden, die z.T. auch schon im (unveröffentlichten) Originalbeweis des Gaschütz-Lubeseder-Satzes [11, VI.7.25] benutzt wurden.

2.11 SATZ. *Genau dann ist die Formation $\mathscr{F}$ gesättigt, wenn gilt: Ist $G \in \mathscr{F}$, V ein G-Modul über $GF(p)$ mit $GV \in \mathscr{F}$, der zu einem $GF(p)[G]$-Block gehört, so ist für jeden $GF(p)[G]$-Modul W aus dem gleichen Block $GW \in \mathscr{F}$.*

Beweis. Daß eine gesättigte Formation die Bedingung aus dem Satz erfüllt, weist man mittels [11, VI.7.21], und der Beweismethode von 4.5 (siehe unten) nach.

Ist umgekehrt jene Bedingung erfüllt, so weist man $\mathscr{F}$ als lokal erklärbare (und damit nach Gaschütz gesättigte) Formation nach: Man zeigt, daß die Formationen,

$$\begin{aligned} \mathscr{F}(p) &= \mathscr{S}_p Q\{G \in \mathscr{F} \mid \mathbf{O}_{p'}(G) = 1\}, && \text{falls } p \mid |F| \text{ für ein } F \in \mathscr{F}, \\ &= \varnothing, && \text{sonst,} \end{aligned}$$

eine (inklusive und volle) lokale Erklärung von $\mathscr{F}$ bilden. Dazu ist vor allem $\mathscr{F}(p) \subseteq \mathscr{F}$ nachzuweisen.

Sei also $G \in \mathscr{F}(p) - \mathscr{F}$ von minimaler Ordnung. Der Fall $G \in \mathscr{S}_p$ wird wie üblich (etwa mittels der Beweistechnik von 10.4) zum Widerspruch geführt. Sei nun G keine p-Gruppe. G hat genau einen minimalen Normalteiler S, G/S liegt in $\mathscr{F}$, und S ist p-Gruppe. $G/\mathbf{O}_p(G)$ liegt in $Q\{H \in \mathscr{F} \mid \mathbf{O}_{p'}(H) = 1\}$. Sei damit $H \in \mathscr{F}, \mathbf{O}_{p'}(H) = 1$ eine Gruppe mit einem Normalteiler K, für den $H/K \simeq G/\mathbf{O}_p(G)$ gilt. Wir setzen $T = (G/S) \curlywedge H$ mit vereinigter Faktorgruppe $G/\mathbf{O}_p(G)$. Es ist $\mathbf{O}_{p'}(T) = 1$, da $\mathbf{O}_{p'}(H) = 1$ und $T \in \mathscr{S}_p\{H\}$ gelten. $p \mid |H|$, weshalb T einen Modul V über $GF(p)$ mit $TV \in \mathscr{F}$ besitzt: Man betrachte einen komplementierbaren p-Hauptfaktor von H und berücksichtige $H \in Q\{T\}$. Ein wohlbekannter Satz von Fong und Gaschütz besagt wegen $\mathbf{O}_{p'}(T) = 1$, daß zu $GF(p)[T]$ nur der Eins-Block gehört. Da $GF(p)[T]$ in dieser Situation ein Modul aus diesem Block ist, liefert $TV \in \mathscr{F}$ mit unserer Voraussetzung bereits $TGF(p)[T] \in \mathscr{F}$. Da T eine Faktorgruppe $T/T_0 \simeq G/S$ und $GF(p)[T]$ einen T-Faktormodul $GF(p)[T/T_0]$ mit Kern T_0 hat, folgt auch $(G/S)(GF(p)[G/S]) \in \mathscr{F}$ Beweisteil (2) von 3.1 (s. unten) zeigt schließlich $G \in \mathscr{F}$, ein Widerspruch.

Der Rest des Beweises bleibt dem Leser überlassen.

2.12 Korollar (Lubeseder, s. [11, VI.7.25]). *Jede gesättigte Formation ist lokal erklärbar.*

Beweis. Dies haben wir beim Beweis von 2.11 implizit gezeigt.

Zu gesättigten Formationen $\mathscr{F}$ sind in jeder Gruppe sogenannte $\mathscr{F}$-Normalisatoren definiert. Eine Übertragung ihrer Definition auf Schunckklassen ist unmöglich, doch gestattet eine Beschreibung der $\mathscr{F}$-Normalisatoren für gesättigte Formationen $\mathscr{F}$ eine Übertragung auf beliebige Schunckklassen, wobei allerdings die Existenzaussage verlorengeht. Mann nennt in [12] eine maximale Untergruppe U einer Gruppe G mit $G = U\mathbf{F}(G)$ $\mathscr{H}$-kritisch für die Schunckklasse $\mathscr{H}$, falls $G/\mathbf{Core}_G(U) \notin \mathscr{H}$ gilt, und definiert einen $\mathscr{H}$-Normalisator H von G als eine in $\mathscr{H}$ liegende Untergruppe von G, die sich durch eine Kette $H = U_0 \subseteq U_1 \subseteq \cdots \subseteq U_n = G$ mit $\mathscr{H}$-kritischen Untergruppen U_{i-1} von U_i $(i = 1,..., n)$ mit G verbinden läßt. Da $G \notin \mathscr{H}$ nicht notwendig $\mathscr{H}$-kritische Untergruppen besitzt, braucht eine beliebige Gruppe keine $\mathscr{H}$-Normalisatoren zu besitzen, doch impliziert die Existenz der $\mathscr{H}$-Normalisatoren in einer bestimmten Gruppe die meisten der üblichen Eigenschaften solcher Untergruppen in der gegeben Gruppe. Wir verweisen für nähere Einzelheiten auf [12] und bemerken, daß die dort gegebenen Beweise auch innerhalb einzelner Gruppen richtig bleiben (während Mann nur Schunckklassen $\mathscr{H}$ in seine Untersuchung miteinbezieht, für die in allen $G \notin \mathscr{H}$ $\mathscr{H}$-kritische Untergruppen vorhanden sind). Falsch ist jedoch eine Behauptung Manns in [12] im Zusammenhang mit lokal erklärbaren Schunckklassen. Wir notieren die Definition dieses Typs von Schunckklassen, da wir auf sie (wenn auch nicht in Verbindung mit Normalisatoren) ohnehin eingehen müssen.

2.13 Definition. Eine Schunckklasse $\mathscr{H}$, zu der Homomorphe (Q-abgeschlossene Gruppenklassen) $\mathscr{H}(p)$ für alle Primzahlen p existieren derart, daß eine Gruppe G genau dann in $\mathscr{H}$ liegt, wenn $G/C_G(M/N) \in \mathscr{H}(p)$ für alle komplementierten p-Hauptfaktoren M/N von G gilt, heißt lokal oder lokal erklärbar. Ist $\mathscr{H}(p)$ eine lokale Erklärung von $\mathscr{H}$ an der Stelle p, so ist $\mathscr{H}(p) \cap \mathscr{H}$ eine inklusive und $\mathscr{S}_p(\mathscr{H}(p) \cap \mathscr{H})$ eine volle und inklusive lokale Erklärung. Wir bezeichnen für lokale Schunckklassen $\mathscr{H}$ mit $\mathscr{H}(p)$ in dieser Arbeit immer eine (nicht notwendig eindeutig bestimmte) inklusive und volle lokale Erklärung von $\mathscr{H}$. Ferner sei $\mathscr{H}_*(p) = \mathrm{Q}\{G/\mathbf{O}_p(G) \mid G \in \mathscr{H}(p)\}$ eine in Abhängigkeit von $\mathscr{H}(p)$ definierte lokale Erklärung.

2.14 Satz. $\mathscr{H}$ bezeichne eine Schunckklasse.

(a) Äquivalent sind:

(i) In allen Gruppen $G \notin \mathscr{H}$ existieren $\mathscr{H}$-kritische Untergruppen.

(ii) $\mathscr{H} = \mathrm{E}_\Phi \mathrm{Q}\mathrm{R}_0 \,\mathrm{Pr}(\mathscr{H})$ mit der Klasse $\mathrm{Pr}(\mathscr{H})$ aller in $\mathscr{H}$ liegenden primitiven Gruppen.

(iii) $\mathscr{H} = \mathrm{E}_\Phi \mathscr{F}$ für eine Formation $\mathscr{F}$.

Genügt $\mathscr{H}$ einer dieser Bedingungen, so sind die $\mathscr{H}$-Normalisatoren jeder Gruppe G gerade die $\mathscr{H}$-Projektoren der $(\mathscr{N}\mathscr{F})$-Normalisatoren von G, wenn $\mathscr{H}$ und $\mathscr{F}$ in der durch (iii) beschriebenen Beziehung stehen.

(b) Für lokal erklärbare $\mathscr{H}$ sind äquivalent:

(i) $\mathscr{H} = \mathrm{E}_\Phi \mathrm{Q} \mathrm{R}_0 \operatorname{Pr}(\mathscr{H})$.

(ii) $\mathrm{R}_0(\bigcup_p \mathscr{H}_*(p)) \subseteq \mathscr{H}$.

Dabei sei $\{\mathscr{H}_*(p)\}$ zu einer beliebigen inklusiven lokalen Erklärung $\{\mathscr{H}(p)\}$ von $\mathscr{H}$ wie in 2.13 gebildet.

Beweis. (a) (i) $\Rightarrow$ (ii): Da für $G \in \mathscr{H}$ im Fall $\Phi(G) = 1$ die Fittinggruppe von G ein direktes Produkt von minimalen Normalteilern $N_1, \ldots, N_n$ von G ist, für welche die zugehörigen primitiven Faktorgruppen von G in $\mathscr{H}$ liegen, und weil darüber hinaus $G \in \mathrm{R}_0\{(G/\mathbf{C}_G(N_i))N_i\}$ wegen $\bigcap_{i=1}^n \mathbf{C}_G(N_i) = \mathbf{C}_G(\mathbf{F}(G)) = \mathbf{F}(G)$ gilt, haben wir für jede Schunckklasse $\mathscr{H}$ die Inklusion $\mathscr{H} \subseteq \mathrm{E}_\Phi \mathrm{Q} \mathrm{R}_0 \operatorname{Pr}(\mathscr{H})$.

Sei umgekehrt $G \in \mathrm{R}_0 \operatorname{Pr}(\mathscr{H})$, $N_1, \ldots, N_n \trianglelefteq G$ mit $\bigcap_{i=1}^n N_i = 1$ und $G/N_i \in \mathscr{H}$ für $i = 1, \ldots, n$. Wir haben $\Phi(G) = 1$ wegen $\Phi(G/N_i) = 1$ für alle i. Ist M ein minimaler Normalteiler von G, so existiert ein i mit $M \not\subseteq N_i$. MN_i/N_i ist dann der eindeutig bestimmte minimale Normalteiler von $G/N_i \in \operatorname{Pr}(\mathscr{H})$; insbesondere gilt $(G/\mathbf{C}_G(M))M \in \mathscr{H}$. Da alle maximalen Untergruppen von G einen geeigneten minimalen Normalteiler komplementieren, sieht man daher, daß G keine $\mathscr{H}$-kritischen Untergruppen besitzt. (i) liefert $G \in \mathscr{H}$.

$\mathrm{R}_0 \operatorname{Pr}(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{H}$ zeigt schließlich $\mathrm{E}_\Phi \mathrm{Q} \mathrm{R}_0 \operatorname{Pr}(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{H}$, und (i) ist nachgewiesen.

(ii) $\Rightarrow$ (iii) folgt trivial aus der bereits oben erwähnten Tatsache, daß $\mathrm{Q}\mathrm{R}_0 \mathscr{K}$ für jede Gruppenklasse $\mathscr{K}$ eine Formation ist.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Für $G \notin \mathscr{H}$ haben wir eine $\mathscr{H}$-kritische Untergruppe zu finden. Dazu darf $\Phi(G) = 1$ angenommen werden. Gilt $(G/\mathbf{C}_G(M))M \in \mathscr{H} = \mathrm{E}_\Phi \mathscr{F}$ für alle minimalen Normalteiler M von G, so liegen diese primitive Gruppen bereits in $\mathscr{F}$, und G liegt, ähnlich wie im Beweisteil (i) $\Rightarrow$ (ii), in

$$\mathrm{R}_0\{(G/\mathbf{C}_G(M))M \mid M \text{ minimaler Normalteiler von } G\} \subseteq \mathrm{R}_0 \mathscr{F} \subseteq \mathscr{H}.$$

Ist also $G \notin \mathscr{H}$, so finden wir ein M mit $(G/\mathbf{C}_G(M))M \notin \mathscr{H}$, und ein Komplement von M in G ist eine $\mathscr{H}$-kritische Untergruppe von G.

Die letzte Behauptung unter (a) ergibt sich aus dem Enthaltensein von $\mathrm{E}_\Phi \mathscr{F}$ in der gesättigten Formation $\mathscr{N}\mathscr{F}$—$\mathscr{N}\mathscr{F}$-kritische Untergruppen einer Gruppe sind deshalb stets erst recht $\mathrm{E}_\Phi \mathscr{F}$-kritisch—und dem Übereinstimmen von $\mathscr{H}$-Projektoren und $\mathscr{H}$-Normalisatoren in Gruppen aus $\mathscr{N}\mathscr{H} = \mathscr{N}\mathrm{E}_\Phi \mathscr{F} \subseteq \mathscr{N}\mathscr{F}$.

(b) kann mit ähnlichen Methoden wie (a) bewiesen werden, wobei zu beachten ist, daß eine Gruppe $G \in \mathrm{R}_0(\bigcup_p \mathscr{H}_*(p))$ mit Normalteilern $N_1, \ldots, N_n$ mit $\bigcap_{i=1}^n N_i = 1$ und $G/N_i \in \mathscr{H}_*(p_i)$ eine zerfallende Erweiterung $H = G\mathbf{F}(H)$ besitzt; man betrachte $V = \bigoplus_{i=1}^n GF(p_i)[G]$, $H = GV$ und zeige $\mathbf{F}(H) = V$

unter Berücksichtigung der sich aus ihrer Definition ergebenden Eigenschaften der $\mathscr{H}_*(p)$.

Entgegen Manns Behauptung in [12] existieren zu lokalen $\mathscr{H}$ i.a. keine $\mathscr{H}$-Normalisatoren: Beispiele für lokale Klassen $\mathscr{H}$ mit $\mathrm{R}_0(\bigcup_p \mathscr{H}_*(p)) \nsubseteq \mathscr{H}$ lassen sich z.B. durch geeignete Gruppen aus $\mathrm{R}_0\mathscr{X} - \mathscr{X}$ ($\mathscr{X}$ eine Schunckklasse, die keine Formation ist) von minimaler Ordnung konstruieren; für explizit nachgerechnete Beispiele sei auf [12] verwiesen. Solche Gruppen zeigen übrigens auch, warum wir in 2.14 eine minimale lokale Erklärung benutzen mußten und nicht irgendeine volle und inklusive lokale Erklärung wählen konnten: $\mathrm{R}_0(\bigcup_p \mathscr{H}_*(p)) \subseteq \mathscr{H}$ kann ohne $\mathrm{R}_0(\mathscr{S}_p \mathscr{H}(p)) \subseteq \mathscr{H}$ gelten.

Um mit $\mathscr{H}$-Normalisatoren für beliebige Schunckklassen $\mathscr{H}$ arbeiten zu können, ist es notwendig, eine nicht zu kleine Klasse von Gruppen zu kennen, in denen $\mathscr{H}$-Normalisatoren existieren. Trivialerweise gilt $\mathscr{N}\mathscr{H} \subseteq N(\mathscr{H})$, wenn wir die Klasse aller Gruppen, die einen $\mathscr{H}$-Normalisator besitzen, $N(\mathscr{H})$ nennen. In $\mathscr{N}\mathscr{H}$ stimmen allerdings die $\mathscr{H}$-Normalisatoren mit den $\mathscr{H}$-Projektoren überein, weshalb wir nun noch mehr Gruppen in $N(\mathscr{H})$ finden wollen.

2.15 Definition. Für jedes Homomorph $\mathscr{H}$ werde rekursiv definiert:

$$\mathrm{E}_p^1(\mathscr{H}) = \mathscr{H} \cup \{G/\mathbf{F}(G) \in \mathscr{H}, \mathbf{C}_G(M/N) = \mathbf{F}(G) \text{ für alle } G\text{-Hauptfaktoren } M/N \text{ unterhalb } \mathbf{F}(G)\},$$

$$\mathrm{E}_p^{n+1}(\mathscr{H}) = \mathrm{E}_p^1(\mathrm{E}_p^n(\mathscr{H})) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Dann ist $\mathscr{H} \subseteq \mathrm{E}_p^1(\mathscr{H}) \subseteq \mathrm{E}_p^2(\mathscr{H}) \subseteq \cdots$ eine Kette von Homomorphen mit $\mathrm{E}_p^n(\mathscr{H}) \subseteq N(\mathscr{H})$ für alle natürlichen Zahlen n, falls $\mathscr{H}$ eine Schunckklasse ist. Durch $\mathrm{E}_p^\infty \mathscr{H} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}_p^n(\mathscr{H})$ wird ein Abschlußoperator E_p^∞ definiert, der jedem Homomorph $\mathscr{H}$ wiederum ein Homomorph $\mathrm{E}_p^\infty\mathscr{H}$ zuordnet. Dabei gilt für den in [8, 1.4], definierten Abschlußoperator E_p und alle Gruppenklassen $\mathscr{H}$ die Gleichung $\mathrm{E}_p\mathscr{H} \subseteq \mathrm{E}_p^\infty\mathscr{H}$.

Die bekannte Struktur primitiver Gruppen zeigt, daß eine Gruppe $G \in \mathrm{E}_p^1(\mathscr{H}) - \mathscr{H}$ von der Gestalt $G = H\mathbf{F}(G)$ mit $H \cap \mathbf{F}(G) = 1$ ist. Ist darüber hinaus $\mathscr{H}$ eine Schunckklasse, so ist jede dieser Untergruppen H von G ein $\mathscr{H}$-Normalisator von G.

Es sei darauf hingewiesen, daß

$$\varnothing \neq \mathrm{E}_p^n(\mathscr{H}) \subseteq N(\mathscr{H}) \cap (\mathscr{N}^n\mathscr{H} - \mathscr{N}^{n-1}\mathscr{H})$$

gilt.

2.16 Lemma. *Aus* $\mathscr{P}_\pi \leqslant \mathscr{F} = \{\mathrm{QR}_0, \mathrm{E}_\Phi\}\mathscr{F} \neq \mathscr{S}$ *folgt* $\mathscr{P}_\pi = \mathscr{I}$.

Beweis. $\mathscr{P}_\pi \leqslant \mathscr{F}$ heißt offenbar $b(\mathscr{F}) \subseteq \mathscr{S}_\pi$. Trivial folgt $\chi(\mathscr{F})' \subseteq \pi$. Sei $p \in \chi(\mathscr{F}) - \pi$, $G = FV \in b_q(\mathscr{F})$ beliebig, $F \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{F}}(G)$, $V = \mathbf{F}(G)$. Dann ist

$p \nmid |G|$, und $F \times Z_p$ hat somit einen irreduziblen, treuen Modul W über $GF(q)$ (s. 1.8). Die Gruppe $H = (F \times Z_p)W$ liegt in $b(\mathscr{F})$, denn einerseits gilt $F \times Z_p \in \mathscr{F}$, andererseits ist $F \times Z_p$, die von H auf W bewirkte Automorphismengruppe, nicht in $\mathscr{F}(q)$ enthalten. Wir haben einen Widerspruch gewonnen und damit auch $\chi(\mathscr{F}) \subseteq \pi$ gezeigt.

3. Zwei Charakterisierungen von $\mathscr{S}_\pi$

In diesem Abschnitt wollen wir zwei Charakterisierungen der Klassen $\mathscr{S}_\pi$ angeben, deren erste wir später zur Bestimmung aller Schunckklassen mit normal eingebetteten Projektoren benötigen.

3.1 Satz. *Sei $\mathscr{F}$ eine Schunckklasse oder eine (nicht notwendig gesättigte) Formation der Charakteristik π, die folgender Bedingung genügt:*

Ist $G \in \mathscr{F}$, q eine Primzahl aus π oder ein Primteiler von $|G|$, so liege stets auch das reguläre Kranzprodukt $Z_q \wr G$ in $\mathscr{F}$.

Dann gilt $\mathscr{F} = \mathscr{S}_\pi$.

Beweis. Wir zeigen zuerst:

(1) $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{S}_\pi$.

Ist nämlich $G \in \mathscr{F}$, q ein Primteiler von $|G|$, so ist nach Voraussetzung auch $Z_q \wr G$ eine Gruppe aus $\mathscr{F}$. Bekanntlich ist $Z_q \wr G$ isomorph zum semidirekten Produkt von G mit seinem Gruppenring über $GF(q)$. Daher enthält die Basisgruppe B des Kranzproduktes einen Normalteiler B_0 mit $(Z_q \wr G)/B_0 \simeq G \times (B/B_0) \simeq G \times Z_q$, und wir haben $Z_q \in \mathrm{Q}\mathscr{F} = \mathscr{F}$, $q \in \chi(\mathscr{F}) = \pi$.

Nun betrachten wir den Fall einer Formation $\mathscr{F}$ und beweisen:

(2) $\mathscr{F} = \mathrm{E}_\Phi \mathscr{F}$.

Dazu nehmen wir das Gegenteil an und wählen $X \in \mathrm{E}_\Phi\mathscr{F} - \mathscr{F}$ minimal. X hat dann genau einen minimalen Normalteiler S. Dabei gilt $S \subseteq \Phi(X)$, und ist q der Primteiler von $|S|$, so ist $\mathbf{F}(X) = \mathbf{O}_q(X)$; insbesondere gilt $q \mid |X/S|$. Wir setzen jetzt $G = X/S$, eine Gruppe aus $\mathscr{F}$, und folgern aus unserer Voraussetzung $Z_q \wr G \in \mathscr{F}$ sowie

$$K = S \wr (X/S) \simeq (Z_q \times \cdots \times Z_q) \wr G \in \mathrm{R}_0\{Z_q \wr G\} \subseteq \mathscr{F}.$$

Der Einbettungssatz I. 15.9 aus [11] liefert nun einen Monomorphismus φ von X in K; der Beweis jenes Satzes zeigt noch mehr, nämlich $(X\varphi)S^* = K$, wobei S^* die Basisgruppe des Kranzprodukts bezeichne. Wegen $S^* \subseteq \mathbf{O}_q(K)$ liegt schließlich mit K auch das Supplement $X\varphi$ von $\mathbf{F}(K)$ in der Formation $\mathscr{F}$, wie ein bekannter Satz von Bryant, Bryce und Hartley aus [1] zeigt. Wir haben einen Widerspruch erhalten.

Der Beweis des Satzes wird vervollständigt durch den Nachweis von:

(3) $\mathscr{S}_\pi \subseteq \mathscr{F}$.

Eine Gruppe $X \in \mathscr{S}_\pi - \mathscr{F}$ von minimaler Ordnung wäre nämlich—man beachte, daß aufgrund von (2) $\mathscr{F}$ nun in jedem Fall Schunckklasse ist—primitiv, ein Komplement G von $\mathbf{F}(X)$ läge bereits in $\mathscr{F}$, und der Primteiler q von $|\mathbf{F}(X)|$ wäre eine π-Zahl. Dies lieferte einen Widerspruch, denn $Z_q \wr G \in \mathscr{F}$ besitzt eine zum semidirekten Produkt $G\mathbf{F}(X) \simeq X$ isomorphe Faktorgruppe, wie die schon oben angesprochene Beschreibung von $Z_q \wr G$ als semidirektes Produkt von G mit $GF(q)[G]$ sofort zeigt.

Die Klassen $\mathscr{S}_\pi$ haben natürlich die in 3.1 behandelte "Kranzprodukteigenschaft".

Der Beweisteil (1) von 3.1 zeigt die Richtigkeit der folgenden Bemerkung: Ist $\mathscr{H}$ ein Homomorph (eine Q-abgeschlossene Gruppenklasse), und gilt stets $Z_q \wr G \in \mathscr{H}$, falls nur $G \in \mathscr{H}$ und q ein Primteiler von $|G|$, so ist $\mathscr{H} \subseteq \mathscr{S}_{\chi(\mathscr{H})}$. Jedoch reicht sogar die Kranzprodukteigenschaft aus 3.1 für ein Homomorph i.a. nicht aus, um $\mathscr{H} = \mathscr{S}_\pi$ zu erzwingen, wie ein Beispiel aus [9] zeigt.

Unsere zweite Charakterisierung von $\mathscr{S}_\pi$ stellt eine Verallgemeinerung eines Ergebnisses von Barnes und Kegel dar, welches besagt: Ist $\mathscr{F}$ eine gesättigte Formation der Charakteristik π mit der Eigenschaft, daß in jeder Gruppe sämtliche $\mathscr{F}$-maximalen Untergruppen bereits $\mathscr{F}$-Projektoren sind, so ist $\mathscr{F} = \mathscr{S}_\pi$. (Dieses Ergebnis gewinnt man mit Hilfe des Lubeseder-Satzes (2.12) sofort aus der Tatsache, daß für eine solche Formation $\mathscr{F}$ die $\mathscr{F}$-Projektoren einer π-Gruppe G p-Sylowgruppen von G für alle $p \in \pi(G)$ enthalten müssen.)

3.2 Satz. *Die gesättigte Formation $\mathscr{F}$ genüge folgender Bedingung: Ist F eine $\mathscr{F}$-maximale Untergruppe einer Gruppe G, die einen $\mathscr{F}$-Normalisator von G enthält, so ist F ein $\mathscr{F}$-Projektor von G.*

Dann gilt $\mathscr{F} = \mathscr{S}_\pi$ mit $\pi = \chi(\mathscr{F})$.

Beweis. Offenbar genügt es, $\mathscr{F}(p) = \mathscr{F}(q)$ für alle $p, q \in \chi(\mathscr{F})$ zu zeigen, denn dies hat $\mathscr{F}(p) = \mathscr{F}(q) = \mathscr{S}_q\mathscr{F}(q) = \mathscr{S}_q\mathscr{F}(p)$, also $\mathscr{F}(p) = \mathscr{S}_{\chi(\mathscr{F})}$, zur Folge. Wir führen die Annahme $\mathscr{F}(p) \nsubseteq \mathscr{F}(q)$ zum Widerspruch. Hierzu betrachten wir eine Gruppe F minimaler Ordnung aus $\mathscr{F}(p) - \mathscr{F}(q)$. $S = F^{\mathscr{F}(q)}$, der einzige minimale Normalteiler von F, ist eine q'-Gruppe, da $\mathscr{F}(q)$ voll ist. Folglich besitzt—man wende 1.9 an—F einen irreduziblen, treuen Modul U über $GF(q)$. Mit $G = FU$ ist dann $F \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{F}}(G)$, denn da $\mathscr{F}(p)$ inklusiv ist, gilt $F \in \mathscr{F}$, aber es ist $G/\mathbf{C}_G(U) \notin \mathscr{F}(q)$ nach Konstruktion von G. Eine weitere Anwendung von 1.9 liefert einen irreduziblen, treuen G-Modul V über $GF(p)$. H sei das semidirekte Produkt GV, W der reguläre H-Modul $GF(q)[H]$ über $GF(q)$, und $X = HW$. Dann gilt:

(1) Ein $\mathscr{F}$-Normalisator von X hat die Gestalt FW_0 mit $W_0 \subseteq W$; dabei ist W_0 in $\mathbf{C}_W(S)$ enthalten:

$F \subset G \subset H$ ist eine Kette $\mathscr{F}$-kritischer Untergruppen mit $F \in \mathscr{F}$. Deshalb ist F ein $\mathscr{F}$-Normalisator von H (s. Sektion 2). Da $\mathscr{F}$-Normalisatoren einer Gruppe bei Faktorgruppenbildung in $\mathscr{F}$-Normalisatoren der Faktorgruppe übergehen, erhält man zumindest, daß ein $\mathscr{F}$-Normalisator von X die Gestalt FW_0 mit $W_0 \subseteq W$ hat. Da ferner $\mathscr{F}$-Normalisatoren von X genau die $\mathscr{F}$-zentralen Hauptfaktoren von X (s. [3] für eine Definition) decken und die restlichen meiden, $H^{\mathscr{F}(q)} = SUV$ gilt, S eine q'-Gruppe und W eine abelsche q-Gruppe ist, folgert man $W_0 \subseteq \mathbf{C}_W(S)$.

Wir suchen jetzt $\mathscr{F}$-maximale Untergruppen von X, die $F\mathbf{C}_W(S)$ (und damit nach (1) einen $\mathscr{F}$-Normalisator von X) enthalten. Zuerst berechnen wir einen den $\mathscr{F}$-Projektor F von G enthaltenden $\mathscr{F}$-Projektor F_1 von X mittels des für gesättigte Formationen üblichen Verfahrens, wie es etwa in [3, 2.6] beschrieben ist. Dieses ergibt mit $FV \in \mathscr{S}_{p'}\mathscr{F}(p) \subseteq \mathscr{F}$ zuerst $FV \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{F}}(H)$ und danach

$$F_1 = FV\mathbf{C}_W((FV)^{\mathscr{F}(q)}) \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{F}}(X).$$

Da V ein nilpotenter Normalteiler von FV ist, gilt bekanntlich $F^{\mathscr{F}(q)} \subseteq (FV)^{\mathscr{F}(q)}$, insbesondere ist $F^{\mathscr{F}(q)}[F^{\mathscr{F}(q)}, V]$ in dem Normalteiler $(FV)^{\mathscr{F}(q)}$ von FV enthalten. Wir halten fest, an $S = F^{\mathscr{F}(q)}$ erinnernd:

(2) $F_1 \cap W = \mathbf{C}_W((FV)^{\mathscr{F}(q)}) \subseteq \mathbf{C}_W(SV_0)$ mit einem $V_0 \subseteq V$, für das $1 \neq [F^{\mathscr{F}(q)}, V] \subseteq V_0$ gilt.

Sei nun F_2 irgendeine $F\mathbf{C}_W(S)$ umfassende $\mathscr{F}$-maximale Untergruppe von X. Nach unserer Voraussetzung sind F_1 und F_2 in X konjugiert. Insbesondere gilt $|F_1 \cap W| = |F_2 \cap W| \geqslant |\mathbf{C}_W(S)|$. (2) liefert:

$$|\mathbf{C}_W(SV_0)| \geqslant |\mathbf{C}_W(S)|.$$

Dies ist ein Widerspruch zu $S \subset SV_0$, denn der Zentralisator einer Untergruppe Y von X im Gruppenring $W = GF(q)[X]$ hat die Ordnung $q^{|X:Y|}$. Dieser Widerspruch beweist den Satz.

Der Beweis von 3.2 benötigte nicht die volle Voraussetzung des Satzes, sondern nur die etwas schwächere Forderung:

In allen Gruppen $G \in \mathscr{E}^3\mathscr{F}$ mögen alle $\mathscr{F}$-maximalen Untergruppen F von G, die einen $\mathscr{F}$-Normalisator von G enthalten, gleiche Ordnung haben.

Eine entsprechende Bemerkung gilt für das folgende Korollar:

3.3 Korollar. *Die gesättigte Formation $\mathscr{F}$ der Charakteristik π genüge folgender Bedingung*:

Ist F eine $\mathscr{F}$-maximale Untergruppe einer Gruppe G mit $G = FG^{\mathscr{F}}$, so gilt $F \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{F}}(G)$.

Dann ist $\mathscr{F} = \mathscr{S}_\pi$.

Beweis. Da $\mathscr{F}$-Normalisatoren stets die Faktorgruppe G/G' decken, ist die Aussage des Korollars eine Abschwächung der Aussage von Satz 3.2.

4. Schunckklassen mit normal eingebetteten Projektoren

Die normalen Schunckklassen $\mathscr{H}$—sie sind definiert durch die Eigenschaft der $\mathscr{H}$-Projektoren jeder Gruppe G, Normalteiler von G zu sein—sind nach einem Ergebnis von Blessenohl und Gaschütz (siehe auch [4, 1.6]) die Klassen $\mathscr{P}_\pi$ der π-perfekten Gruppen, gebildet zu beliebigen Primzahlmengen π; der Rand einer derartigen Klasse $\mathscr{H}$ kann nämlich nur aus solchen primitiven Gruppen bestehen, in welchen die $\mathscr{H}$-Projektoren als normale Komplemente des einzigen minimalen Normalteilers mit der Einsuntergruppe übereinstimmen, d.h. aus zyklischen Gruppen von Primzahlordnung, und umgekehrt sind für $b(\mathscr{H}) = \{Z_p \mid p \in \pi\}$, also $\mathscr{H} = \mathscr{P}_\pi$, die $\mathscr{H}$-Projektoren einer jeden Gruppe Normalteiler derselben: $\mathbf{O}^\pi(G)$ ist stets der (einzige) $\mathscr{P}_\pi$-Projektor von G.

Da die normalen Schunckklassen selbst die Deck–Meide-Eigenschaft (s. 4.1) besitzen, erlaubt es das in 2.8 besprochene Konstruktionsverfahren, zu jeder Schunckklasse $\mathscr{H}$ mit Deck–Meide-Eigenschaft weitere Klassen mit der gleichen Eigenschaft zu bilden, nämlich die Klassen $\mathscr{P}_\pi\mathscr{H}$, für die man die Deck–Meide-Eigenschaft an der Beschreibung ihrer Projektoren als Produkte des $\mathscr{S}_\pi$-Residuums mit einem $\mathscr{H}$-Projektor abliest [4, 2.7, 2.8]. Durch dieses Verfahren entstehen alle bislang bekannten Schunckklassen mit Deck–Meide-Eigenschaft aus den gesättigten Formationen mit ebendieser Eigenschaft. Dabei können zwei Typen solcher Klassen unterschieden werden:

(i) Klassen der Gestalt $\mathscr{P}_\pi\mathscr{S}_\Psi$; die $\mathscr{P}_\pi\mathscr{S}_\Psi$-Projektoren jeder Gruppe G sind sogar normal eingebettete Untergruppen von G (s. 4.1), denn ihre p-Sylowgruppen sind p-Sylowgruppen von $\mathbf{O}^\pi(G)$ oder von G, je nachdem, ob p in Ψ' oder in Ψ liegt;

(ii) Klassen der Gestalt $\mathscr{P}_\pi\mathscr{S}_{p'}\mathscr{S}_p$; hier enthalten die Projektoren einer Gruppe G stets p'-Hallgruppen von G.

Die Klassen $\mathscr{P}_\pi\mathscr{S}_\Psi$ sollen in diesem Abschnitt unserer Arbeit als die Schunckklassen mit normal eingebetteten Projektoren gekennzeichnet werden. Daneben interessiert uns die Frage, wie weit hierdurch das allgemeinere Problem der Bestimmung aller Schunckklassen mit Deck–Meide-Eigenschaft gelöst wird. Diesem Zweck dienen einfach zu überschauende Bedingungen an Schunckklassen $\mathscr{H}$, die zusammen mit der Deck–Meide-Eigenschaft sicherstellen, daß die $\mathscr{H}$-Projektoren stets normal eingebettet sind, und die umgekehrt als Konsequenz dieser Einbettungseigenschaft (wie auch die Deck–Meide-Eigenschaft) erhalten werden. Im nächsten Teil dieser Arbeit ermöglichen es uns diese Bedingungen u.a., von allen Schunckklassen mit Deck–Meide-Eigenschaft, deren Projektoren nicht stets die in (i) angeführte Einbettungseigenschaft besitzen, nachzuweisen, daß ihre Projektoren der Forderung aus (ii) an p'-Hallgruppen genügen.

4.1 Definition. (a) Sei U eine Untergruppe von G, p eine Primzahl.

U heißt p-Deck–Meide-Untergruppe von G, falls für jeden p-Hauptfaktor M/N von G entweder $M \subseteq UN$ oder $M \cap U \subseteq N$ gilt.

U heißt p-normal eingebettet in G, falls für $U_p \in \mathbf{Syl}_p(U)$ schon $U_p \in \mathbf{Syl}_p(U_p{}^G)$ gilt; dabei bezeichnet H^G den normalen Abschluß $\langle H^x \mid x \in G \rangle$ einer Untergruppe H in G.

Ist U p-Deck–Meide-Untergruppe (p-normal eingebettet) in G für alle Primzahlen p, so wird U Deck–Meide-Untergruppe (normal eingebettet) genannt.

(b) Sei $\mathscr{H}$ eine Schunckklasse.

Wir nennen $\mathscr{H}$ eine p-DM-Klasse (p-NE-Klasse), wenn für alle Gruppen G ein—und dann jedes—$H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(G)$ p-Deck–Meide-Untergruppe (p-normal eingebettet) in G ist. DM-Klassen beziehungsweise NE-Klassen werden in naheliegender Weise definiert.

(c) Unter p-E-Klassen wollen wir Schunckklassen $\mathscr{H}$ mit $c_p(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{S}_{p'}$ verstehen.

Unsere Definition des Begriffs NE-Klasse stimmt nicht völlig mit der von Schaller in [13] eingeführten überein. Schaller fordert vielmehr für NE-Klassen $\mathscr{H}$ neben dem normal Eingebettetsein ihrer Projektoren noch, daß $X(\mathscr{H}, \mathscr{S}_{p'})$ (s. 2.10) für alle Primzahlen p gesättigt sei. Wir wollen hier zeigen, daß für p-NE-Klassen $\mathscr{H}$ die Formationen $X(\mathscr{H}, \mathscr{S}_{p'})$ bereits gesättigt sind und können dann mittels einer übersichtlichen Beschreibung der lokalen Erklärungen dieser Formationen die p-NE-Klassen unmittelbar bestimmen.

4.2 Lemma. *Sei $\mathscr{H}$ eine Schunckklasse, p eine Primzahl. Wir setzen $\mathscr{H}_p = X(\mathscr{H}, \mathscr{S}_{p'})$ sowie $h(p) = X(\mathscr{H}, \mathrm{QR}_0(c_p(\mathscr{H}) \cap \mathscr{S}_{p'}))$.*

(a) $\mathscr{H}_p = \mathscr{S}_{p'}$, *falls* $c_p(\mathscr{H}) \cap \mathscr{S}_{p'} = \varnothing$

$= \mathscr{S}_{p'} h(p)$, *falls* $c_p(\mathscr{H}) \cap \mathscr{S}_{p'} \neq \varnothing$.

(b) *Äquivalent sind:*

(i) *$\mathscr{H}_p$ ist gesättigt.*

(ii) *Ist die p'-Gruppe H ein $\mathscr{H}$-Projektor im semidirekten Produkt von H mit einem treuem H-Modul V_1 über $GF(p)$, so gilt Gleiches in allen semidirekten Produkten von H mit beliebigen H-Moduln V_2 über $GF(p)$.*

(iii) $\mathscr{S}_p h(p) = h(p)$.

(c) *Für gesättigtes $\mathscr{H}_p$ ist $\mathscr{H}_p(p) = h(p)$ und $\mathscr{H}_p(q) = \mathscr{H}_p$ für $q \neq p$.*

(d) *Ist $\mathscr{H}$ eine p-E-Klasse, $H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(G)$ und P eine H-invariante p-Untergruppe von G mit $H \cap P = \mathbf{C}_H(P) = 1$, so gilt $H \in \mathscr{S}_p \mathscr{S}_{p'}$; bei gesättigtem $\mathscr{H}_p$ ist unter den gleichen Voraussetzungen sogar $H \in \mathscr{S}_{p'}$.*

Beweis. (a) Nach 2.10 gilt jedenfalls $\mathcal{S}_{p'} \subseteq \mathcal{S}_{p'}\mathcal{H}_p = \mathcal{H}_p$.

Fall 1. $c_p(\mathcal{H}) \cap \mathcal{S}_{p'} = \varnothing$. In diesem Fall ist eine Gruppe $G \in \mathcal{H}_p - \mathcal{S}_{p'}$ von minimaler Ordnung primitiv mit $\mathbf{F}(G) = \mathbf{O}_p(G)$. Für $H \in \mathbf{Proj}_{\mathcal{H}}(G)$ erzwingt die Minimalität von $|G|$ zusammen mit 2.10 schon $H \neq H\mathbf{F}(G) = G$, was zu dem Widerspruch $G \in b_p(\mathcal{H})$, $H \in c_p(\mathcal{H}) \cap \mathcal{S}_{p'}$ führt.

Fall 2. $c_p(\mathcal{H}) \cap \mathcal{S}_{p'} \neq \varnothing$. Jetzt ist $c_p(\mathcal{H}) \cap \mathcal{S}_{p'} \subseteq \mathscr{k}(p)$, insbesondere gilt $\mathscr{k}(p) \neq \varnothing$. Gemäß 2.10 ist $\mathscr{k}(p) \subseteq \mathcal{H}_p$, so daß wir aufgrund des zu Beginn Bewiesenen nur noch $\mathcal{H}_p \subseteq \mathcal{S}_{p'}\mathscr{k}(p)$ zu zeigen haben. Sei also die Gruppe G ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung zu dieser letzten Behauptung. G besitzt genau einen minimalen Normalteiler S, und dieser ist p-Gruppe; $H \in \mathbf{Proj}_{\mathcal{H}}(G)$ ist p'-Gruppe. Ist G primitiv, so bewirkt die Minimalität von $|G|$ wieder $G = HS \in b_p(\mathcal{H})$, ein Widerspruch; wäre nämlich $HS \neq G$, so folgte aus $\mathbf{O}_{p'}(HS) = 1$ schon $HS \in \mathscr{k}(p)$. Ist aber G nicht primitiv, so gilt $S \subseteq \Phi(G)$, $G/S \in \mathcal{S}_{p'}\mathscr{k}(p)$ mit $\mathbf{O}_{p'}(G/S) = 1$, und es stellt sich erneut—mit $H \in \mathcal{S}_{p'}$, d.h. $H \cap S = 1$—ein Widerspruch ein.

Für den Rest des Beweises können wir $c_p(\mathcal{H}) \cap \mathcal{S}_{p'} \neq \varnothing$ annehmen, da andernfalls sämtliche Behauptungen trivialerweise richtig sind.

(b) (i) $\Rightarrow$ (ii): Für gesättigtes, nach dem Satz von Lubeseder also lokal erklärbares $\mathcal{H}_p$ liegt die in (ii) auftretende Gruppe H bereits in $\mathcal{H}_p(p)$, da $\mathbf{O}_{p'p}(HV_1) = \mathbf{O}_p(HV_1) = V_1$ wegen $\mathbf{C}_H(V_1) = 1$ gilt. Es folgt $HV_2 \in \mathcal{S}_p\mathcal{H}_p(p) \subseteq \mathcal{H}_p$, mithin $H \in \mathbf{Proj}_{\mathcal{H}}(HV_2)$.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Die Gruppe G sei ein Gegenbeispiel minimaler Ordnung zu der allein zu beweisenden Inklusion $\mathcal{S}_p\mathscr{k}(p) \subseteq \mathscr{k}(p)$. Sei $H_0 \in \mathbf{Proj}_{\mathcal{H}}(G)$. G hat genau einen minimalen Normalteiler S, und S ist p-Gruppe. 2.10 erlaubt die Annahme $G = H_0 \in \mathcal{H}$. G zerfällt nun wegen $G/S \in \mathcal{H} \cap \mathscr{k}(p) \subseteq \mathcal{H} \cap \mathcal{S}_{p'}$ in ein Produkt aus einer p'-Hallgruppe X und einem irreduziblem, treuem X-Modul V_2 über $GF(p)$, nämlich $V_2 = S$. Wegen $X \cong G/S \in \mathscr{k}(p)$ finden wir eine Gruppe H, die o.B.d.A. in $\mathcal{H}$ liegt (andernfalls werde sie durch ein Element von $\mathbf{Proj}_{\mathcal{H}}(H)$ ersetzt), und Normalteiler $N, N_1, \ldots, N_m$ von H mit $H/N \cong X$, $H/N_i \in c_p(\mathcal{H}) \cap \mathcal{S}_{p'}$ und $\bigcap_{i=1}^{m} N_i = 1$, insbesondere also $H \in \mathcal{S}_{p'}$. Zu H/N_i gibt es irreduzible, treue Moduln W_i über $GF(p)$ mit $(H/N_i)\, W_i \in b_p(\mathcal{H})$. $V_1 = \bigoplus_{i=1}^{m} W_i$, ein H-Modul über $GF(p)$ mit $\mathbf{C}_H(V_1) = \bigcap_{i=1}^{m} \mathbf{C}_H(W_i) = 1$, hat die Eigenschaft $H \in \mathbf{Proj}_{\mathcal{H}}(HV_1)$. (ii) liefert $H \in \mathbf{Proj}_{\mathcal{H}}(HV_2)$, wobei V_2 in natürlicher Weise als Modul für H mit $\mathbf{C}_H(V_2) = N$ aufgefaßt wird. Es folgt $X \in \mathbf{Proj}_{\mathcal{H}}(XV_2)$, ein Widerspruch.

(iii) $\Rightarrow$ (i): Dies ist trivial, da jede lokal erklärbare Formation gesättigt ist.

(c) folgt sofort aus (a) und (b).

(d) $H \in \mathcal{S}_p\mathcal{S}_{p'}$ ist eine einfache Konsequenz von 2.9. $H \in \mathcal{S}_{p'}$ für gesättigtes $\mathcal{H}_p$ folgt ebenfalls aus 2.9 mit $\mathcal{S}_p\mathscr{k}(p) = \mathcal{S}_p\mathcal{H}_p(p) \subseteq \mathcal{H}_p$.

Die in 4.2 festgelegte Bezeichnungsweise $\mathscr{H}_p$ bzw. $h(p)$ für $X(\mathscr{H}, \mathscr{S}_{p'})$ bzw. $X(\mathscr{H}, \mathrm{QR}_0(c_p(\mathscr{H}) \cap \mathscr{S}_{p'}))$ wollen wir auch im Folgenden beibehalten. Ferner setzen wir fest: $\mathscr{H}(p') = \mathrm{QR}_0(c_p(\mathscr{H}) \cap \mathscr{S}_{p'})$.

Wir wenden uns jetzt der Beschreibung einiger Eigenschaften der p-E-Klassen $\mathscr{H}$ mit gesättigtem $\mathscr{H}_p$ zu, die einen ersten Hinweis auf eine Beziehung dieser Klassen zu p-NE-Klassen andeuten. Dabei stellen wir zuerst einmal fest, daß diese Klassen in gewissem Sinne p-lokal erklärbar durch Formationen sind, und zwar durch die Formationen $\mathscr{H}(p')$, die für p-E-Klassen mit $\mathrm{QR}_0 c_p(\mathscr{H})$ übereinstimmen. Diese Formationen beschreiben natürlich nicht mehr die Automorphismengruppen, die auf p-Hauptfaktoren von Gruppen aus $\mathscr{H}$ induziert werden—wie dies auf die inklusiven p-lokalen Erklärungen gesättigter Formationen zutrifft—sondern geben vielmehr diejenigen Automorphismengruppen an, die auf komplementierbaren p-Hauptfaktoren von Gruppen aus $\mathscr{H}$ gerade nicht induziert werden können: Dies ist der Inhalt von 4.2(b); die Beschränkung auf komplementierbare Hauptfaktoren ist bei beliebigen Schunckklassen im Gegensatz zu gesättigten Formationen natürlich dadurch bedingt, daß genau bei gesättigten Formationen $\mathscr{H}$ auf frattinischen Hauptfaktoren von Gruppen aus $\mathscr{H}$ dieselben Automorphismengruppen bewirkt werden wie auf komplementierbaren—vgl. etwa 2.11. Obige Aussage stellt ein Analogon des Dadeschen Satzes 2.9 aus [3] dar, denn sie läßt sich mittels 4.2(d) für p-E-Klassen mit gesättigtem $\mathscr{H}_p$ in der Terminologie von [3] auch wie folgt formulieren: Die $\mathscr{H}$-Projektoren einer Gruppe G meiden genau die $\mathscr{H}_p$-zentralen komplementierten p-Hauptfaktoren von G. Die gleiche Analogie spiegelt sich wider in der unten gegebenen Beschreibung der $\mathscr{H}$-Projektoren für solche $\mathscr{H}$, die 2.6 aus [3] vergleichbar ist. Die Bedingung $c_p(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{S}_{p'}$ wird hier vorläufig nicht benötigt, sondern durch Einschränkung unserer Überlegungen auf Gruppen aus $\mathscr{S}_p(\mathscr{H} \cap \mathscr{S}_{p'})$ ersetzt. Wo nötig, werde im Folgenden $\mathscr{H}(p') \neq \emptyset$ angenommen.

4.3 Lemma. *Sei $\mathscr{H}$ eine Schunckklasse, p eine Primzahl. Ist $\mathscr{H}_p$ gesättigt, G eine Gruppe aus $\mathscr{S}_p(\mathscr{H} \cap \mathscr{S}_{p'})$ und $X \in \mathbf{Hall}_{p'}(G)$, so ist der (eindeutig bestimmte) X enthaltende $\mathscr{H}$-Projektor von G von der Form $X[\mathbf{O}_p(G), X^{\mathscr{H}(p')}]$.*

Beweis. Wir kürzen $\mathbf{O}_p(G)$ durch P, $[P, X^{\mathscr{H}(p')}]$ durch K ab und beginnen mit der Festellung $XK \in \mathscr{H}$:

Es gilt nämlich $X \cong G/P \in \mathscr{H}$, und die Annahme $XK \notin \mathscr{H}$ liefert die Existenz eines durch XL/L komplementierten Hauptfaktors K/L von XK mit

$$(X/\mathbf{C}_X(K/L))(K/L) \cong XK/\mathbf{C}_{XL}(K/L) \in b_p(\mathscr{H}) \cap \mathscr{S}_p\mathscr{S}_{p'},$$

also $X^{\mathscr{H}(p')} \subseteq \mathbf{C}^X(K/L)$. Anders ausgedrückt bedeutet das

$$[P, X^{\mathscr{H}(p')}, X^{\mathscr{H}(p')}] = [K, X^{\mathscr{H}(p')}] \subseteq L \subset K = [P, X^{\mathscr{H}(p')}],$$

entgegen $P \in \mathscr{S}_p$, $X^{\mathscr{H}(p')} \in \mathscr{S}_{p'}$ und $X^{\mathscr{H}(p')} \subseteq \mathbf{N}_G(P)$.

Es gilt $K \trianglelefteq \langle P, X^{\mathscr{H}(p')}, X\rangle = G$, und XK/K ist $\mathscr{H}$-maximal in $G/K = X\mathbf{O}_p(G)/K$, denn $G/X^{\mathscr{H}(p')}K \in \mathscr{S}_p(\mathscr{H}(p') \cap \mathscr{H}) \subseteq \mathscr{S}_p h(p)$ (s. 2.10) hat zur Folge, da aufgrund des Gesättigtseins von $\mathscr{H}_p$ nach 4.2(b) $\mathscr{S}_p h(p) = h(p) \subseteq \mathscr{H}_p$ gilt, daß $\mathscr{H}$-Projektoren von $G/X^{\mathscr{H}(p')}K$ (und dann auch solche von G/K) p'-Gruppen sind.

Insgesamt ergibt sich jetzt die $\mathscr{H}$-Maximalität von XK in G, was wegen $G = X\mathbf{O}_p(G) \in \mathscr{N}\mathscr{H}$ bekanntlich sogar $XK \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(G)$ bedeutet.

Bevor wir unser Hauptergebnis über Schunckklassen $\mathscr{H}$ mit gesättigtem $\mathscr{H}_p$ beweisen können, haben wir noch eine Eigenschaft p-normal eingebetteter Untergruppen zu behandeln, die grundlegend für den Nachweis von $\mathrm{E}_\Phi\mathscr{H}_p = \mathscr{H}_p$ für p-NE-Klassen $\mathscr{H}$ ist.

4.4 *Bemerkung.* Ist U p-normal eingebettet in G und N ein p-Normalteiler von G, so gilt $U \cap N = U_p \cap N = U_p{}^G \cap N \trianglelefteq G$. Hieran ist insbesondere zu erkennen, daß U p-Deck–Meide-Untergruppe von G ist.

Der Beweis von 4.4 ergibt sich sofort aus elementaren Eigenschaften von Sylowgruppen und wird deshalb hier nicht ausgeführt.

Die Forderung, daß aus $\mathbf{O}_p(G/N) \supseteqq M/N \trianglelefteq G/N$ stets $UN/N \cap M/N \trianglelefteq G/N$ folge, ist für beliebige Untergruppen U einer Gruppe G jedoch keineswegs ausreichend, um U als p-normal eingebettet nachzuweisen, wie man am Beispiel primitiver Gruppen G mit $\mathbf{F}(G) = \mathbf{O}_p(G)$ und $p \mid |G/\mathbf{F}(G)|$ sieht, wenn man U als Komplement zu $\mathbf{F}(G)$ wählt. Stellt man dieselbe Forderung aber für eine Schunckklasse $\mathscr{H}$ an die $\mathscr{H}$-Projektoren in jeder Gruppe, so erhält man eine p-NE-Klasse $\mathscr{H}$, wie unsere Ergebnisse zeigen werden. Der Grund hierfür ist neben Anderem darin zu sehen, daß eine solche Forderung $\mathscr{H}$ bereits als p-E-Klasse mit gesättigtem $\mathscr{H}_p$ ausweist (4.9), wodurch Situationen der oben angegebenen Art ausgeschlossen werden. Daß es sich hierbei wirklich um eine globale Eigenschaft der Schunckklasse $\mathscr{H}$ handelt, wie der Beweis von 4.9 vermuten läßt, und nicht um Eigenschaften bestimmter Untergruppen innerhalb einer festen Gruppe, zeigt das oben angeführte Beispiel; dort hat U zumindest alle formalen Eigenschaften eines $\mathscr{X}$-Projektors von G für eine Schunckklasse $\mathscr{X}$: Wir haben $U \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{X}}(G)$ für die durch $b(\mathscr{X}) = \{G\}$ definierte Schunckklasse $\mathscr{X}$.

Eine Antwort auf die soeben angesprochenen Fragestellungen werden wir durch die Untersuchung der Klassen $\mathscr{H}_p$ für p E-Klassen $\mathscr{H}$ erhalten.

4.5 Satz. *Sei $\mathscr{H}$ eine Schunckklasse, p eine Primzahl.*

Genau dann ist $\mathscr{H}_p$ gesättigt, wenn in allen Gruppen aus $\mathscr{S}_p(\mathscr{H} \cap \mathscr{S}_{p'})$ die $\mathscr{H}$-Projektoren p-normal (äquivalent: normal) eingebettet sind.

Beweis. Ist $\mathscr{H}_p$ gesättigt, so sind in allen $G \in \mathscr{S}_p(\mathscr{H} \cap \mathscr{S}_{p'})$ die $\mathscr{H}$-Projektoren nach 4.3 p-normal eingebettet, denn der in der Aussage von 4.3 auftretende Kommutator ist, wie im Beweis von 4.3 erwähnt, normal in G. Da in dieser Situation die $\mathscr{H}$-Projektoren p'-Hallgruppen umfassen, sind sie sogar normal eingebettet.

Umgekehrt seien die $\mathscr{H}$-Projektoren in allen Gruppen aus $\mathscr{S}_p(\mathscr{H} \cap \mathscr{S}_{p'})$ p-normal eingebettet. Wir weisen (ii) aus 4.2(b) nach. Dazu seien H, V_1 und V_2 wie in 4.2(b), (ii) gegeben. Ist $H \notin \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(HV_2)$, d.h. nicht $\mathscr{H}$-maximal in HV_2, so existiert ein irreduzibler H-Modul W über $GF(p)$ mit $HW \in \mathscr{H}$. Um einen Widerspruch zu erhalten, dürfen wir V_2 durch W ersetzen.

Wir betrachten nun die Gruppe $G = HV_1$ und bilden alle projektiven Moduln im Weiteren bezüglich dieser Gruppe und $GF(p)$. Zuerst vermerken wir, daß wegen $\mathbf{C}_H(V_1) = 1$ der Normalteiler V_1 von G schon mit $\mathbf{O}_p(G)$ und $\mathbf{F}(G)$ übereinstimmt, insbesondere $\mathbf{O}_{p'}(G) = 1$ gilt. Nach einem wohlbekannten Resultat von Fong und Gaschütz gehört daher zum Gruppenring $GF(p)[G]$ genau ein Block. Folglich gibt es zu je zwei irreduziblen G-Moduln V_0 und V_2 weitere irreduzible G-Moduln $V_0 = U_0, U_1, ..., U_n = V_2$ über $GF(p)$ derart, daß für $i = 1, ..., n$ die Moduln $P(U_{i-1})$ und $P(U_i)$ (s. 1.2) einen gemeinsamen G-Kompositionsfaktor W_i besitzen.

Als V_0 wählen wir hier einen irreduziblen Teilmodul des eingangs eingeführten H-Moduls V_1; V_2 sei der anfangs beschriebene irreduzible H-Modul mit $HV_2 \in \mathscr{H}$. Beide H-Moduln lassen sich in natürlicher Weise zu G-Moduln mit V_1 im Kern machen und bleiben als solche irreduzibel. Wir zeigen die folgende Implikationskette:

$$HU_n \in \mathscr{H} \Rightarrow HP(U_n) \in \mathscr{H} \Rightarrow HW_n \in \mathscr{H} \Rightarrow HU_{n-1} \in \mathscr{H},$$

und gelangen dann vermöge einer Induktion nach der Länge n der $V_0 = U_0$ und $V_2 = U_n$ verbindenden Kette der U_i zu dem Widerspruch $HV_0 \in \mathscr{H}$.

Sei also $HU_n \in \mathscr{H}$. Der Modul $(P(U_n))_H$ ist nach Maschkes Satz ein vollständig reduzibler H-Modul, da $H \in \mathscr{S}_{p'}$ vorausgesetzt war. Folglich besitzt $(\mathrm{Rad}_G(P(U_n)))_H$ ein zu $(U_n)_H$ isomorphes Komplement in $(P(U_n))_H$, das wir wieder mit U_n bezeichnen. Das Produkt dieses U_n mit H liegt in einem $\mathscr{H}$-Projektor X von $GP(U_n)$, wobei $X = H(X \cap P(U_n))$ gilt, da X den Faktor $V_1P(U_n)/P(U_n) \cong_H V_1$ meiden muß. Aus $U_n \subseteq X \cap P(U_n)$ und der Voraussetzung unseres Satzes folgt $U_n{}^G \subseteq X \cap P(U_n)$ (man berücksichtige 4.4), und da die elementaren Eigenschaften projektiver, direkt unzerlegbarer $GF(p)[G]$-Moduln $U_n{}^G = P(U_n)$ zur Folge haben, ergibt sich insgesamt $X = HP(U_n)$. Insbesondere wissen wir nun $HP(U_n) \in \mathscr{H}$. Da aber $P(U_n)$ als Modul für H vollständig reduzibel ist, mithin einen direkten Summanden W_n besitzt, liegt auch die Faktorgruppe HW_n von $HP(U_n)$ in $\mathscr{H}$.

(Wenn man hier 1.4 anwenden will, so kann man sofort—wie $HW_n \in \mathscr{H}$ aus $HU_n \in \mathscr{H}$—aus $HW_n \in \mathscr{H}$ auch $HU_{n-1} \in \mathscr{H}$ herleiten.)

Wir sehen schließlich, da W_n auch G-Kompositionsfaktor von $P(U_{n-1})$ war, daß ein H enthaltender $\mathscr{H}$-Projektor Y von $GP(U_{n-1})$ einen Durchschnitt ungleich 1 mit $P(U_{n-1})$ haben muß. Das p-normale Eingebettetsein von Y in $GP(U_{n-1})$ bewirkt daher, daß der einzige irreduzible G-Teilmodul

$$\mathrm{Soc}(P(U_{n-1})) \cong_G U_{n-1}$$

in $Y \cap P(U_{n-1})$ liegen muß, woraus wir ähnlich wie zuvor $HU_{n-1} \in \mathscr{H}$ ableiten können.

Was ergibt sich, wenn in der Aussage von 4.5 $\mathscr{S}_p(\mathscr{H} \cap \mathscr{S}_{p'})$ durch $\mathscr{S}_p\mathscr{H}$ ersetzt wird? 4.4 und die sich daran anschließenden Bemerkungen geben in Verbindung mit 4.5 Anlaß zu der nachstehenden Definition. Die durch sie definierten Schunckklassen scheinen uns neben den p-NE-Klassen (die von ersteren eingeschlossen werden) von selbständigem Interesse zu sein. Unser nächstes Ziel ist deshalb eine einfache Kennzeichnung dieser Klassen, wozu wir die Charakterisierung der p-NE-Klassen für eine Weile unterbrechen.

4.6 Definition. $\mathscr{H}$ heiße eine Schunckklasse mit schwach p-normal eingebetteten Projektoren, wenn $H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(G)$, $\mathbf{O}_p(G) \supseteq N \trianglelefteq G$ stets $H \cap N \trianglelefteq N$ zur Folge hat; selbstverständlich reicht es hier aus, sich auf $N = \mathbf{O}_p(G)$ zu beschränken.

Das nächste Lemma wird uns, besonders in Sektion 5, mehrfach von Nutzen sein.

4.7 Lemma. *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

(i) *$\mathscr{H}$ ist p-E-Klasse mit gesättigtem $\mathscr{H}_p$.*

(ii) *Ist $H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(HV_1)$ für einen treuen H-Modul V_1 über $GF(p)$, so gilt $H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(HV_2)$ für jeden H-Modul V_2 über demselben Körper.*

Eine weitere gleichwertige Aussage erhält man, wenn man in (ii) *V_1 als vollständig reduzibel und/oder V_2 als irreduzibel annimmt.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii): Nach 4.2(d) ist $H \in \mathscr{S}_{p'}$, und die Behauptung steht dann in 4.2(b).

(ii) $\Rightarrow$ (i): Nach 4.2(b) ist $\mathscr{H}_p$ gesättigt. Ist $G \in b_p(\mathscr{H})$, $H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(G)$, so besitzt H einen (irreduziblen) treuen Modul V_1 über $GF(p)$, nämlich $\mathbf{O}_p(G)$, mit $H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(HV_1)$. Wäre $p \mid |H|$, so gäbe es einen H-Modul V_2 über $GF(p)$ mit $HV_2 \in \mathscr{H}$: Man wähle als V_2 irgendeinen komplementierbaren p-Hauptfaktor M/N von H; alle primitiven Faktorgruppen des semidirekten Produkte $H(M/N)$ liegen dann in $\mathscr{H}$, mithin auch $H(M/N)$. Dies widerspricht (ii).

Der Rest der Behauptung wird ähnlich bewiesen, und zwar unter Verwendung von 4.2(d) für nicht notwendig gesättigtes $\mathscr{H}_p$. Um dabei die Bedingung, daß V_1 vollständig reduzibel sei, zu eliminieren, betrachte man für beliebige treue H-Moduln V_1—nachdem man gezeigt hat, daß $\mathscr{H}$ p-E-Klasse ist—die direkte Summe aller H-Kompositionsfaktoren von V_1 und wende (ii) für vollständig reduzibles V_1 zum Beweis von $H \in \mathscr{S}_{p'}$ an.

4.8 Lemma. *Sei H eine Gruppe aus der Schunckklasse $\mathscr{H}$.*

(a) *$H/H^{\mathscr{H}(p')} \in \mathscr{S}_{p'}$.*

(b) *Bei gesättigtem $\mathscr{H}_p$ gilt $\mathbf{O}^p(H^{\mathscr{H}(p')}) = H^{\mathscr{H}(p')}$.*

((a) *und* (b) *stellen nur unter der Voraussetzung* $\mathscr{H}(p') \neq \emptyset$ *sinnvolle Aussagen dar.*)

Beweis. (a) Es ist $\mathscr{H}(p') = \mathrm{QR}_0(c_p(\mathscr{H}) \cap \mathscr{S}_{p'}) \subseteq \mathscr{S}_{p'}$.

(b) Wir haben $H/\mathbf{O}^p(H^{\mathscr{H}(p')}) \in \mathscr{S}_p\mathscr{H}(p') \cap \mathscr{H} \subseteq \mathscr{S}_p h(p) \cap \mathscr{H} \subseteq \mathscr{H}_p \cap \mathscr{H} \subseteq \mathscr{S}_{p'}$, denn nach 4.2(b) ist $h(p)$ die inklusive und volle lokale Erklärung von $\mathscr{H}_p$, mithin $\mathscr{S}_p h(p) \subseteq \mathscr{H}_p$.

Wir können jetzt eine teilweise etwas überraschende Charakterisierung der Schunckklassen mit schwach p-normal eingebetteten Projektoren angeben.

4.9 SATZ. *Sei* $\mathscr{H}$ *eine Schunckklasse,* p *eine Primzahl. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *In allen Gruppen aus* $\mathscr{S}_p\mathscr{H}$ *sind die* $\mathscr{H}$*-Projektoren* p*-normal eingebettet.*

(ii) $\mathscr{H}$ *ist Schunckklasse mit schwach* p*-normal eingebetteten Projektoren.*

(iii) $\mathscr{H}$ *ist* p*-E-Klasse mit gesättigtem* $\mathscr{H}_p$.

(iv) $\mathscr{H}$ *ist* p*-E-Klasse, und in allen Gruppen aus* $\mathscr{S}_p(\mathscr{H} \cap \mathscr{S}_{p'})$ *sind die* $\mathscr{H}$*-Projektoren* p*-normal eingebettet.*

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) ist eine Abschwächung der Aussage von 4.4.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Wir weisen eine der mit der Aussage unter (iii) gleichbedeutenden Bedingungen aus 4.7 nach. Seien zu diesem Zweck H und V_1 in der durch die Voraussetzung von 4.7(ii) beschriebenen Situation gegeben, sei außerdem U (statt V_2) ein irreduzibler H-Modul über $GF(p)$. Es genügt der Nachweis von $HU \notin \mathscr{H}$. Folglich nehmen wir $HU \in \mathscr{H}$ an und leiten daraus einen Widerspruch ab. Aufgrund unserer Annahme wissen wir (s. 1.3) $HV_2 \in \mathrm{E}_\Phi\mathscr{H} = \mathscr{H}$ für $V_2 = P(U)$, wobei der projektive Modul hier bezüglich $GF(p)[H]$ gebildet wird. Zuerst zeigen wir:

$$(+) \qquad H(V_1 \otimes \underset{n}{\cdots} \otimes V_1 \otimes V_2) \in \mathscr{H} \qquad \text{für alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Hierzu bilden wir, wie in 1.1 beschrieben, mit H, V_1 und V_2 die dort definierte p-Gruppe P sowie das semidirekte Produkt $G = HP$. Die Bezeichnungen aus 1.1 sollen hier übernommen werden. Da sich ein $\mathscr{H}$-Projektor X von G mit $HV_2 \subseteq X \subseteq HP_2$ finden läßt, liefert unsere Voraussetzung mit $V_2 \subseteq X \cap P \trianglelefteq P$ bereits $P_2 = V_2^P \subseteq X$, d.h. $X = HP_2 \simeq H(V_2 \oplus (V_1 \otimes V_2))$. $H(V_1 \otimes V_2) \in \mathscr{H}$ ist damit gezeigt, und (+) erhält man schließlich durch eine triviale Induktion nach n, indem man $V_1 \otimes \underset{n-1}{\cdots} \otimes V_1 \otimes V_2$ die Rolle von V_2 spielen läßt.

Dem Bryant–Kovacsschen Beweis eines Satzes von Steinberg [12, VI. 7.19] entnehmen wir nun die Tatsache, daß der reguläre $GF(p)[H]$-Modul Teilmodul—und als injektiver Modul somit direkter Summand—von

$$\bigoplus_{S \subseteq H-1} (V_1 \otimes \underset{|S|}{\cdots} \otimes V_1)$$

ist. Der Satz über eindeutige Zerlegungen in direkte Summanden von Krull–Schmidt erweist daher den direkten Summenden $V_3 = P(U^*)$ von $GF(p)[H]$, einen direkt unzerlegbaren Modul, als direkten Summanden eines $V_1 \otimes \cdots \otimes V_1$, so daß wir vermöge $(+)$ $H(V_3 \otimes V_2) \in \mathscr{H}$ folgern können. Nach 1.6 ist $P(U)^* = P(U^*) = V_3$. Da $V_2 = P(U)$ war, und weil für jeden H-Modul M das Tensorprodukt $M^* \otimes M$ einen zum irreduziblen, trivialen H-Modul isomorphen Faktormodul besitzt, folgt aus $H(V_3 \otimes V_2) \in \mathscr{H}$, daß die zyklische Gruppe der Ordnung p (als Faktorgruppe von $H(V_3 \otimes V_2)$) in $\mathscr{H}$ liegt.

Z_p als trivialen H-Modul V_2 über $GF(p)$ betrachtend, gelangen wir mit einer Argumentation ähnlich der in diesem Beweis bereits benutzten zu dem Widerspruch $HV_1 \simeq H(V_1 \otimes V_2) \in \mathscr{H}$, indem wir erneut 1.1 anwenden.

(Bemerkung: Der hier gegebene Beweis von "(ii) $\Rightarrow$ (iii)" kann, von trivialen Änderungen abgesehen, auch als Beweis desjenigen Teils von 4.5, welcher nicht schon in 4.3 steht, aufgefaßt werden. Jedoch halten wir den ursprünglichen Beweis von 4.5 für weniger technisch und, im Hinblick auf 2.11, durchsichtiger.)

(iii) $\Rightarrow$ (iv) ist eine einfache Folgerung aus 4.5.

(iv) $\Rightarrow$ (i): Sei $G \in \mathscr{S}_p\mathscr{H}$ und H eine in $\mathscr{H}$ liegende Untergruppe von G mit $G = H\mathbf{O}_p(G)$. Wir behaupten:

$$H\mathbf{O}^p(H^{\mathscr{H}(p')}\mathbf{O}_p(G)) \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(G).$$

Es genügt der Nachweis von $H\mathbf{O}^p(H^{\mathscr{H}(p')}\mathbf{O}_p(G)) \in \mathscr{H}$, denn dann läßt sich die $\mathfrak{H}$-Maximalität dieser Untergruppe (und somit unsere Zwischenbehauptung) leicht durch Anwendung von 4.3 auf $G/\mathbf{O}^p(H^{\mathscr{H}(p')}\mathbf{O}_p(G))$ (unter Benutzung von 4.5) folgern, wobei nur zu beachten ist, daß nach 4.8(a) $H/H^{\mathscr{H}(p')}$ eine p'-Gruppe ist und (wegen 4.8(b)) $H^{\mathscr{H}(p')} = \mathbf{O}^p(H^{\mathscr{H}(p')})$ in $\mathbf{O}^p(H^{\mathscr{H}(p')}\mathbf{O}_p(G))$ liegt.

Wir setzen $N = \mathbf{O}^p(H^{\mathscr{H}(p')}\mathbf{O}_p(G))$ char $H^{\mathscr{H}(p')}\mathbf{O}_p(G) \trianglelefteq G$ (N ist also Normalteiler von G) und nehmen $HN \notin \mathscr{H}$ an. Wir haben mit

$$H^{\mathscr{H}(p')} = \mathbf{O}^p(H^{\mathscr{H}(p')}) \subseteq \mathbf{O}^p(H^{\mathscr{H}(p')}\mathbf{O}_p(G)) = N \subseteq H^{\mathscr{H}(p')}\mathbf{O}_p(G)$$

nach Dedekinds Identität $N = H^{\mathscr{H}(p')}(N \cap \mathbf{O}_p(G))$ und schließlich $HN = HM$ mit $M = N \cap \mathbf{O}_p(G) \trianglelefteq G$. Da M insbesondere p-Normalteiler von $HM \notin \mathscr{H}$ ist und H in $\mathscr{H}$ liegt, ergibt sich wie im Beweis von 4.3 die Existenz eines Hauptfaktors M/M_0 von HM mit $H^{\mathscr{H}(p')} \subseteq \mathbf{C}_H(M/M_0)$. Es folgt $[N, H^{\mathscr{H}(p')}M_0] = [H^{\mathscr{H}(p')}M, H^{\mathscr{H}(p')}M_0] \subseteq H^{\mathscr{H}(p')}M_0$, d.h. $H^{\mathscr{H}(p')}M_0 \trianglelefteq N$, und $N/H^{\mathscr{H}(p')}M_0 \simeq M/M_0 \in \mathscr{S}_p - \mathscr{I}$ ergibt $\mathbf{O}^p(N) \subseteq H^{\mathscr{H}(p')}M_0 \subset N$ entgegen $\mathbf{O}^p(N) = N$ nach Konstruktion von N. Dieser Widerspruch zeigt die Richtigkeit der Zwischenbehauptung.

Zum Schluß folgt mit $HN/N \simeq H/H^{\mathscr{H}(p')} \in \mathscr{S}_{p'}$, daß die p-Sylowgruppen des $\mathscr{H}$-Projektors HN von G p-Sylowgruppen des Normalteilers N von G sind. Somit ist H p-normal eingebettete Untergruppe von G.

Im letzten Beweisteil von 4.9 haben wir mitbewiesen:

4.10 KOROLLAR 1. *Sei G eine Gruppe aus $\mathscr{S}_p\mathscr{H}$ für eine Schunckklasse mit schwach p-normal eingebetteten Projektoren $\mathscr{H}$, H ein in $\mathscr{H}$ liegendes Supplement von $\mathbf{O}_p(G)$. Dann hat ein H enthaltender $\mathscr{H}$-Projektor von G die Gestalt $H\mathbf{O}^p(H^{\mathscr{H}(p')}\mathbf{O}_p(G))$. Ferner laßt sich dieser $\mathscr{H}$-Projektor beschreiben als HM mit*

$$M = H\mathbf{O}^p(H^{\mathscr{H}(p')}\mathbf{O}_p(G)) \cap \mathbf{O}_p(G) = [H^{\mathscr{H}(p')}, \mathbf{O}_p(G)].$$

Beweis. Nur $M = [H^{\mathscr{H}(p')}, \mathbf{O}_p(G)]$ bleibt zu zeigen. Dies erhält man leicht aus der Tatsache, daß nach 4.9 die $\mathscr{H}$-Projektoren von G p-normal eingebettete Untergruppen von G sind, insbesondere die in 4.4 beschriebene Eigenschaft besitzen.

4.10 mag als Verallgemeinerung von 4.3 (für einen speziellen Typ von Schunckklassen) angesehen werden.

4.11 KOROLLAR 2. *Genau dann ist $\mathscr{H}$ eine p-NE-Klasse, wenn in allen Gruppen G aus $H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(G)$ und $\mathscr{S}_p \ni N \trianglelefteq G$ schon $H \cap N \trianglelefteq G$ folgt.*

Beweis. Eine p-NE-Klasse genügt der Bedingung des Korollars nach 4.4.

Umgekehrt sei G eine Gruppe minimaler Ordnung mit nicht p-normal eingebettetem $\mathscr{H}$-Projektor H für eine Schunckklasse $\mathscr{H}$, welche diese Bedingung erfüllt. Offenbar ist $\mathbf{O}_{p'}(G) = 1$, d.h. $\mathbf{F}(G) = \mathbf{O}_p(G)$. Ist $H \cap \mathbf{O}_p(G) \neq 1$, so können wir, da diese Gruppe als Normalteiler von G vorausgesetzt ist, in die zugehörige Faktorgruppe übergehen und damit H als p-normal eingebettete Untergruppe von G nachweisen. Daher ist doch $H \cap \mathbf{F}(G) = H \cap \mathbf{O}_p(G) = 1$. Insbesondere operiert H treu auf $\mathbf{F}(G)/\Phi(G)$, einem H-Modul über $GF(p)$. Da nach 4.9 $\mathscr{H}$ eine p-E-Klasse mit gesättigtem $\mathscr{H}_p$ ist, sehen wir mittels 4.2(d) nun $H \in \mathscr{S}_{p'}$. Aber dann ist H trivialerweise p-normal eingebettet in G, ein endgültiger Widerspruch.

Unser letztes Ergebnis kann auch als Korollar zur Kennzeichnung der p-NE-Klassen gewonnen werden, die wir sogleich fortsetzen. Gleichwohl scheint es sich nicht direkt (ohne den benutzten Teil von 4.9) herleiten zu lassen.

Wir fügen noch eine Bemerkung über gesättigte Formationen ein, welche p-NE-Klassen sind. Diese Bemerkung kann zusammen mit den Resultaten des nächsten Teils dieser Arbeit als ein weiterer Beweis des Doerk–Hawkesschen Satzes [3, 6] über gesättigte Formationen mit Deck-Meide-Eigenschaft aufgefaßt werden.

4.12 *Bemerkung.* Sei $\mathscr{F}$ eine gesättigte Formation mit gesättigtem $\mathscr{F}_p$. Dann gilt entweder $c_p(\mathscr{F}) \cap \mathscr{S}_{p'} = \varnothing$ (was für p-E-Klassen $\mathscr{F}$ gerade $\mathscr{S}_p\mathscr{F} = \mathscr{F}$ bedeutet) oder $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{S}_{p'}$. Insbesondere sind die $\mathscr{S}_\pi$ die einzigen gesättigten Formationen, welche p-E-Klassen mit gesättigtem $\mathscr{F}_p$ sind für alle Primzahlen p (und somit die einzigen Formationen unter den NE-Klassen).

Beweis. Ist $G = F\mathbf{O}_p(G) \in b_p(\mathscr{F})$ mit einem in $\mathscr{S}_{p'}$ liegenden $\mathscr{F}$-Projektor F so ist $G \in X(\mathscr{F}, \mathscr{F}(p')) = \mathscr{F}_p(p) \neq \varnothing$. Es folgt $Z_p \in \mathscr{S}_p \subseteq \mathscr{F}_p(p) \subseteq \mathscr{F}_p$, d.h. $1 \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{F}}(Z_p)$. Die Primzahl p ist damit nicht in der Charakteristik von $\mathscr{F}$ enthalten, was für gesättigte Formationen bekanntlich schon $\mathscr{F} \subseteq \mathscr{S}_{p'}$ impliziert.

4.13 Lemma. *Sei $\mathscr{H}$ eine Schunckklasse mit p-Deck–Meide-Eigenschaft und gesättigtem $\mathscr{H}_p$. Dann liegt mit einer Gruppe G stets auch das reguläre Kranzprodukt $Z_q \wr G$ in $h(p)$, falls die Primzahl q eine der beiden folgenden Bedingungen erfüllt:*

(i) $Z_q \in h(p)$;

(ii) $q \mid |G|$.

Beweis. Sei $G \in h(p)$ und $q \neq p$ eine Primzahl, die (i) oder (ii) genügt; wegen $\mathscr{S}_p h(p) = h(p)$ ist die Annahme $q \neq p$ gerechtfertigt. Wir bilden zuerst das das semidirekte Produkt $B = ZV$ einer zyklischen Gruppe Z der Ordnung p mit einem irreduziblen, treuen Z-Modul V über $GF(q)$ und danach das reguläre Kranzprodukt $X = B \wr G$. Für jede Untergruppe A von B bezeichne A^* das direkte Produkt von $|G|$ Kopien von A, in natürlicher Weise als Untergruppe der Basisgruppe von X aufgefaßt. Die Regularität unseres Kranzproduktes und die Tatsache, daß V ein minimaler, aber nicht zentraler Normalteiler von B ist—und zwar der einzige minimale Normalteiler—bewirken, wie eine einfache Rechnung zeigt, daß X eine primitive Gruppe ist: V^* ist der einzige minimale Normalteiler von X, GZ^* ein Komplement zu V^* in X. X liegt in $\mathscr{S}_{p'}\mathscr{S}_p h(p) = \mathscr{H}_p$.

Die Untergruppe GV^* von X ist isomorph zum regulären Kranzprodukt $(Z_q \times \overset{d}{\cdots} \times Z_q) \wr G$ (d die $GF(q)$-Dimension von V), also zum semidirekten Produkt von G mit d Kopien des Gruppenrings von G über $GF(q)$. In Abhängigkeit vom Vorliegen der Fälle (i) und (ii) können wir daher eine maximale G-invariante Untergruppe V_0 von V finden mit $GV^*/V_0 = G(V^*/V_0) \in h(p)$: Ist nämlich $Z_q \in h(p)$, so wählen wir V^*/V_0 als einen irreduziblen, trivialen G-Faktormodul von V^*, andernfalls ist $q \mid |G|$ und wir finden einen G-Faktormodul V^*/V_0, der zu einem komplementierbarem q-Hauptfaktor von G isomorph ist. Dann genügen die Gruppe X und ihre Untergruppe GV_0 den Voraussetzungen von 1.9, es existiert nach 1.9 also ein irreduzibler, treuer X-Modul W über $GF(p)$ derart, daß W_{GV^*} einen Faktormodul T mit $V_0 \subseteq \mathbf{C}_{GV^*}(T)$ besitzt: Der zu dem durch 1.9 gegebenen Modul duale Modul leistet den gewünschten Dienst.

Folglich hat die Gruppe $Y = GV^*W$ eine in $\mathscr{S}_p h(p) \subseteq \mathscr{H}_p$ liegende Faktorgruppe Y/N mit $N = V_0(N \cap W)$ und $N \cap W \subset W$, weshalb ein $\mathscr{H}$-Projektor H von Y die Gruppe W nicht decken kann. Wegen $H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(XW)$ erzwingt die p-Deck–Meide-Eigenschaft von $\mathscr{H}$ sogar $H \cap W = 1$, und H ist eine p'-Gruppe (wie ein $\mathscr{H}$-Projektor von G). Mithin gilt $XW \in \mathscr{H}_p$, $X \simeq XW/\mathbf{O}_{p'p}(XW) \in h(p)$. Nach 2.10 liegt eine Gruppe aber genau dann in $h(p) = X(\mathscr{H}, \mathscr{H}(p'))$, wenn nur ihre $\mathscr{H}$-Projektoren Gruppen aus dieser Formation sind; somit ist auch $GV^* \in \mathfrak{h}(p)$. Wie weiter oben schon bemerkt wurde, besitzt diese Gruppe eine zum semidirekten Produkt von G mit seinem Gruppenring über $GF(q)$ (dem regulären Kranzprodukt $Z_q \wr G$) isomorphe Faktorgruppe. Das Lemma ist bewiesen.

4.14 SATZ. *Sei $\mathscr{H}$ eine Schunckklasse. Dann sind äquivalent:*

(i) *$\mathscr{H}$ ist p-NE-Klasse.*

(ii) *$\mathscr{H}$ ist p-E-Klasse mit p-Deck–Meide-Eigenschaft, und die Formation $\mathscr{H}_p$ ist gesättigt.*

(iii) *Entweder ist $\mathscr{S}_p \leqslant \mathscr{H}$ oder es gilt $\mathscr{P}_\pi \leqslant \mathscr{H} \leqslant \mathscr{P}_\pi \mathscr{S}_{p'}$ für eine Primzahlmenge π mit $p \in \pi$, je nachdem, ob die Primzahl p in der Charakteristik von $\mathscr{H}$ enthalten ist oder nicht.*

(*Im ersten Fall von* (iii) *sind die p-Sylowgruppen der $\mathscr{H}$-Projektoren einer Gruppe G p-Sylowgruppen von G, im zweiten Fall sind sie p-Sylowgruppen von $\mathbf{O}^\pi(G)$.*)

Beweis. (i) $\Rightarrow$ (ii) steht in 4.4 und 4.9.

(ii) $\Rightarrow$ (iii): Ist $\mathscr{H}_p = \mathscr{S}_{p'}$, so ist $\mathfrak{h}(p) = \varnothing$, und mit 4.2(a) folgt $c_p(\mathscr{H}) = c_p(\mathscr{H}) \cap \mathscr{S}_{p'} = \varnothing$, schließlich $b_p(\mathscr{H}) = \varnothing$. Dies beinhaltet nach 2.7 gerade die Aussage $\mathscr{S}_p \leqslant \mathscr{H}$. Offenbar ist in diesem Fall p Element der Charakteristik von $\mathscr{H}$.

Andernfalls ist aufgrund des vorhergehenden Lemmas und wegen 3.1 nun $\mathfrak{h}(p) = \mathscr{S}_\pi$ für eine Primzahlmenge π, d.h. $\mathscr{H}_p = \mathscr{S}_{p'}\mathscr{S}_\pi$ und $p \in \pi$.

Sei $G = H\mathbf{O}_q(G) \in b_q(\mathscr{H})$ für ein $q \neq p$, $H \in \mathscr{H}$. V sei ein irreduzibler, treuer G-Modul über $GF(p)$, der einen irreduziblen, trivialen H-Faktormodul besitzt. $Z_p \notin \mathscr{H}$ (wegen $Z_p \in \mathscr{H}_p$—was übrigens auch zeigt, daß p nicht in der Charakteristik von $\mathscr{H}$ liegt) und die p-Deck–Meide-Eigenschaft von $\mathscr{H}$ erzwingen $H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(GV)$. Da die Untergruppen H und V den Bedingungen von 4.2(d) genügen, folgt $H \in \mathscr{S}_{p'}$, mithin $GV \in \mathscr{H}_p = \mathscr{S}_{p'}\mathscr{S}_\pi$, und $\mathbf{O}_{p'}(GV) = 1$ liefert $G \subseteq GV \in \mathscr{S}_\pi$. Wir haben also gezeigt, daß $b_q(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{S}_\pi$ für alle Primzahlen q (einschließlich p, siehe 4.2). Dies heißt $\mathbf{O}^\pi(G) = 1$ für alle $G \in b(\mathscr{H})$, also $b(\mathscr{H}) \subseteq a(\mathscr{P}_\pi)$. Nach Doerks Lemma 2.3 ist daher $\mathscr{P}_\pi \leqslant \mathscr{H}$.

Ist ferner $H \in \mathbf{Proj}_{\mathscr{H}}(G)$, $G \in b(\mathscr{H})$, so gilt $\mathbf{O}^\pi(G) \subseteq H \subseteq \mathbf{O}^\pi(G)G_{p'}$, da in $G/\mathbf{O}^\pi(G) \in \mathscr{S}_\pi \subseteq \mathscr{H}_p$ die $\mathscr{H}$-Projektoren p'-Gruppen sind.

(iii) $\Rightarrow$ (i) ist trivial.

4.15 KOROLLAR. *Die Klassen $\mathscr{P}_\pi \mathscr{S}_\Psi$ sind gerade die NE-Klassen. Diese Klassen sind gekennzeichnet durch die Eigenschaft, p-E-Klassen mit gesättigtem $\mathscr{H}_p$ für alle Primzahlen p zu sein und die Deck–Meide-Eigenschaft zu besitzen.*

Beweis. Sei Ψ die Charakteristik einer NE-Klasse $\mathscr{H}$. Für $p \notin \Psi$ ist nach dem vorherigen Satz $h(p) = \mathscr{S}_{\pi(p)}$ für eine Primzahlmenge $\pi(p)$, die p enthält. Wir wollen zeigen, daß diese Primzahlmengen nicht von p abhängig sind.

Angenommen $\pi(p)$ sei nicht in $\pi(q)$ enthalten für zwei Primzahlen $p, q \in \Psi'$. Dann ist für $r \in \pi(p) - \pi(q)$ die Gruppe Z_r in $h(p) - h(q)$ enthalten. Ist $r = p$, so sei $W = 1$, andernfalls sei W ein irreduzibler, treuer Z_r-Modul über $GF(p)$. Ein $\mathscr{H}$-Projektor H von Z_rW ist in jedem Fall eine p'-Gruppe, so daß wir einen irreduziblen, treuen Modul V für Z_rW über $GF(q)$ mit $[H, V] \subset V$ finden können. Die q'-Gruppe H stellt sich als $\mathscr{H}$-Projektor von Z_rWV heraus und führt zum Widerspruch $Z_r \subseteq Z_rW \in h(q)$.

Wir setzen nun $\pi = \pi(p)$ für $p \in \Psi'$ und erhalten aus 4.14 $\mathscr{P}_\pi \ll \mathscr{H} \ll \mathscr{P}_\pi\mathscr{S}_{p'}$ für alle $p \in \Psi'$. Dies liefert

$$\mathscr{H} \subseteq \bigcap_{p\in\Psi'} \mathscr{P}_\pi\mathscr{S}_{p'}\,,$$

und $\mathscr{S}_t \ll \mathscr{H}$ für alle $t \in \Psi$ (nach 4.14) ergibt $\mathscr{H} = \mathscr{P}_\pi\mathscr{S}_\Psi$.

Die zweite Behauptung folgt ebenfalls sofort aus 4.14.

4.16 Beispiel. Ist $\mathscr{F}$ eine gesättigte Formation mit p-Deck–Meide-Eigenschaft, so gilt nach [3, 5.5], eine der folgenden Aussagen:

(i) $\mathscr{F} \ll \mathscr{S}_{p'}$.

(ii) $\mathscr{S}_p \ll \mathscr{F}$.

(iii) $\mathscr{S}_{p'} \ll \mathscr{F}$, und $\mathscr{F}$ hat in diesem Fall Deck–Meide-Eigenschaft.

Unter Verwendung des Doerkschen Kriteriums für starkes Enthaltensein von Schunckklassen sieht man, daß $\mathscr{P}_\pi \ll \mathscr{H}$ beziehungsweise $\mathscr{H} \ll \mathscr{P}_\pi\mathscr{S}_{p'}$ $(p \in \pi)$ äquivalent ist zu der folgenden Bedingung $(*)$ bzw. $(**)$:

$(*)$ $b(\mathscr{H}) \subseteq \mathscr{S}_\pi$;

$(**)$ Ist $H \in \mathscr{H} \cap \mathscr{S}_{\pi\cap p'}$, V ein irreduzibler, treuer H-Modul über $GF(p)$, so ist $HV \in b(\mathscr{H})$.

Diese Beschreibung der p-NE-Klassen verwenden wir, um eine Schunckklasse $\mathscr{H}$ mit p-normal eingebetteten Projektoren anzugeben, die jedoch für eine Primzahl q keine q-Deck–Meide-Eigenschaft besitzt, ohne daß einer der Fälle (i) oder (ii) aus [3, 5.5], (s.o.) vorliegt.

Sei dazu $\pi = \{2, 3, p\}$ für eine Primzahl $p \neq 2, 3$, $b(\mathscr{H}) = \{S_3\} \cup b_p(\mathscr{H})$ mit $b_p(\mathscr{H}) = \{G \mid G \text{ primitiv}, \ \mathbf{F}(G) = \mathbf{O}_p(G), \ G/\mathbf{F}(G) \in \mathscr{S}_{\{2,3\}}\,, \ S_3 \notin \mathrm{Q}\{G/\mathbf{F}(G)\}\}$. Offensichtlich ist $b(\mathscr{H})$ ein Rand und genügt den im vorangehenden Abschnitt angegebenen Bedingungen $(*)$ und $(**)$ für die Primzahl p und die Primzahlmenge π. (i) und (ii) sind für $\mathscr{H}$ nicht richtig, aber $\mathscr{H}$ hat nicht die 3-Deck–Meide-Eigenschaft: Ist nämlich $G = S_4V$ das semidirekte Produkt von S_4 mit dem irreduziblem, treuem Kompositionsfaktor V der Permutationsdarstellung von S_4

über $GF(3)$, so zerfällt der 3-dimensionale S_4-Modul V unter der Diedergruppe der Ordnung 8—einem $\mathscr{H}$-Projektor von S_4—in eine Summe aus einem 2-dimensionalem irreduziblem, treuem V_1 und einem 1-dimensionalem nichttrivialem D_8-Modul V_2. Dabei gilt $D_8V_1 \in \mathscr{H}$, $(D_8/C_{D_8}(V_2))V_2 \cong S_3 \in b(\mathscr{H})$.

Literatur*

1. R. M. Bryant, R. A. Bryce, and B. Hartley, The formation generated by a finite group, *Bull. Austral. Math. Soc.* **2** (1970), 347–357.
2. J. Cossey, Classes of finite soluble groups, *in* "Proc. Second Internat. Conf. Theory of Groups, Canberra 1973," pp. 226–237, Lecture Notes in Mathematics, No. 372, Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1974.
3. K. Doerk, Zur Theorie der Formationen endlicher auflösbarer Gruppen, *J. Algebra* **13** (1969), 345–373.
4. K. Doerk, Über Homomorphe endlicher auflösbarer Gruppen, *J. Algebra* **30** (1974), 12–30.
5. K. Doerk, Zur Sättigung einer Formation endlicher auflösbarer Gruppen, *Arch. Math.* **28** (1977), 561–571.
6. K. Doerk and T. O. Hawkes, Two questions in the theory of formations, *J. Algebra* **16** (1970), 456–460.
7. L. Dornhoff, "Group Representation Theory," Part B, Dekker, New York, 1972.
8. P. Förster, Über Projektoren und Injektoren in endlichen auflösbaren Gruppen, *J. Algebra* **49** (1977), 606–620.
9. P. Förster, Über die iterierten Definitionsbereiche von Homomorphen endlicher auflösbarer Gruppen, Erscheint.
10. T. O. Hawkes, The family of Schunck classes as a lattice, *J. Algebra* **39** (1976), 527–550.
11. B. Huppert, "Endliche Gruppen I," Springer-Verlag, Berlin/Heidelberg/New York, 1967.
12. A. Mann, $\mathscr{H}$-Normalizers of finite solvable groups, *J. Algebra* **14** (1970), 312–325.
13. K.-U. Schaller, Über Schunckklassen mit normal eingebetteten Projektoren, *J. Algebra* **36** (1975), 435–447.

* Teil II, IV sind in *Math. Z.* **162** (1978), 219–234, *Arch. Math.* **30** (1978), 247–252, erschienen.